Научная статья / Research Article
**УДК 621.3.072**

# РАСЧЕТ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ В ЗАДАЧЕ НАГРЕВА ТЕПЛОПРОВОДНОГО ТЕЛА С ТЕПЛОИЗОЛЯЦИОННЫМ ПОКРЫТИЕМ

**Дмитрий Иванович Иванов**
*ООО ПКП « ЯрЭнергоСервис», Красноярск, Россия*
idi86@inbox.ru

**Аннотация.** *С использованием аналитических зависимостей разработан аналитический приближенный метод расчета собственных чисел в задаче нагрева теплопроводного тела с теплоизоляционным покрытием. Показано, что высокая точность расчета может быть достигнута с помощью доступных математических преобразований, т.е. не прибегая к сложным специальным функциям.*

**Ключевые слова:** *теплопередача, теплоизоляционное покрытие, температурное поле, аналитический метод*

# CALCULATION OF EIGENVALUES IN HEATING PROBLEM OF HEAT-CONDUCTING BODY WITH HEAT INSULATION COATING

**Dmitry Ivanovich Ivanov**
*PKP YarEnergoService LLC, Krasnoyarsk, Russia*
idi86@inbox.ru

**Abstract.** *Using analytical dependencies, an analytical approximate method for calculating eigenvalues in the problem of heating a heat-conducting body with a heat-insulating coating has been developed. It has been shown that high calculation accuracy can be achieved using available mathematical transformations, i.e. without resorting to complex special functions.*

**Keywords.** *heat transfer, thermal insulation coating, temperature field, analytical method*

**Введение.** Известно, что для тепловой защиты металлических стенок от нагрева широко применяются огнеупорные покрытия [1]. При расчете нестационарного температурного поля в такой комбинированной системе приходится для нахождения собственных чисел задачи использовать характеристическое уравнение вида:

$$tg\mu = \frac{Bi \cdot K - \mu^2}{\mu\left(Bi + K\right)}, \qquad (1)$$


Инженерные системы и энергетика. 2026. № 1. С. 26–32.
Engineering systems and energy. 2026;(1):26-32.

где Bi – безразмерное число подобия (число Био); K – безразмерное число, характеризующее отношение аккумуляционной способности изоляции к аккумуляционной способности соприкасающегося с ней металлического слоя.

В работе [1] приведены таблицы первых шести корней уравнения (1) для десяти значений параметра K и ограниченного числа величин Bi, имеющих сравнительно большой шаг.

Следует отметить, что при решении задач нестационарной теплопроводности многослойных систем приходится использовать очень сложные характеристические уравнения [2]. Это обусловлено главным образом большим числом параметров, свойственным таким физическим процессам.

Из формулы (1) следует, что параметры Bi и K равнозначны, например, паре чисел Bi = 1, K = 10 и паре Bi = 10, K = 1 будут соответствовать одни и те же собственные числа $\mu_n$. Из выражения (1) также вытекает, что искомые корни $\mu_n$ должны располагаться в интервалах

$$0 \le \mu_n \le \frac{\pi}{2},\ n=1,$$

$$\left(\frac{2n-3}{2}\right)\pi \le \mu_n \le \left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi,\ n=2,3,\dots$$

Причем, последнее выражение можно представить также в несколько ином виде, а именно:

$$\frac{2\cdot n-3}{2}\cdot\pi \le \mu_n \le (n-1)\cdot\pi,\ n=2,3,\dots \text{ если } BiK \le (\text{n-1})\cdot\pi^2$$

и

$$(n-1)\pi \le \mu_n \le \left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi,\ n=2,3,\dots \text{ если } BiK \ge (n-1)^2\pi^2,$$

т. е. интервалы искомых корней $\mu_n$ существенно сокращаются.

Таблицы, приведенные в [1], как отмечалось ранее, имеют существенно ограниченные возможности. Поэтому целесообразно разработать универсальный аналитический подход для расчета корней уравнения (1) и ему подобных. В [2], [3] предложены достаточно эффективные приемы исследования таких зависимостей.

Наибольший интерес, как правило, представляет значение первого собственного числа решаемой тепловой задачи. С этой точки зрения удобнее зависимость (1) представить в форме

$$ctg\mu = \frac{\mu(Bi+K)}{Bi-\mu^2}. \qquad (2)$$

Тогда, учитывая, что $0 \le \mu_1 \le \frac{\pi}{2}$, вполне приемлемо левую часть соотношения (2) записать в виде ограниченного степенного ряда [4]:

$$ctg\mu = \frac{1}{\mu} - \frac{\mu}{3}. \tag{3}$$

Отброшенные члены этого ряда в случае $\mu_1 \le \frac{\pi}{2}$ для инженерных расчетов пренебрежимо малы.

Тогда (2) преобразуется в алгебраическое уравнение

$$\mu^4 - 3\left(1 + Bi + K + \frac{BiK}{3}\right)\mu^2 + 3BiK = 0. \tag{4}$$

Отсюда

$$\mu_1^2 = \frac{3}{2}\left(1 + Bi + K + \frac{Bi \cdot K}{3}\right) - \sqrt{\frac{9}{4}\left(1 + Bi + K + \frac{Bi \cdot K}{3}\right)^2 - 3Bi \cdot K} \tag{5}$$

Рассмотрим частный случай Bi = K = 1. Тогда

$$\mu_1^2 = \frac{3}{2}\left(1+1+1+\frac{1 \cdot 1}{3}\right) - \sqrt{5^2 - 3 \cdot 1 \cdot 1} = 5 - \sqrt{22} = 0,3096,$$

$$\mu_1 = \sqrt{0.3046} = 0,5564.$$

Табличное значение [1] $\mu_1 = 0,5560$.

При Bi = 1, K = 10 (или Bi = 10, K = 1)

$$\mu_1^2 = \frac{3}{2}\left(1+1+10+\frac{1 \cdot 10}{3}\right) - \sqrt{23^2 - 3 \cdot 1 \cdot 10} = 0,6617,$$

$$\mu_1 = \sqrt{0,6617} = 0,8134.$$

Табличное значение $\mu_1 = 0,80951$.

Для Bi = K = 10

$$\mu_1^2 = \frac{3}{2}\left(1+10+10+\frac{10 \cdot 10}{3}\right) - \sqrt{81.5^2 - 3 \cdot 10 \cdot 10} = 1,86176,$$

$$\mu_1 = \sqrt{1,86176} = 1,36446.$$

Табличное значение $\mu_1 = 1.31023$.

Из этих расчетов следует, что полученное аналитическим путем $\mu_1$ для не слишком больших величин параметров Bi и K обладает высокой точностью (погрешность доли процента).

Если же комплексы Bi и K одновременно оказываются весьма значительными, то вычисленный корень $\mu_1$ будет несколько выше действительного. В таких случаях целесообразно использовать вместо (3) более расширенный степенной ряд, а именно (4):

$$ctg\mu = \frac{1}{\mu} - \frac{\mu}{3} - \frac{\mu^3}{45} = \frac{1}{\mu} - \frac{P}{3}\mu, \tag{6}$$

где

$$P = 1 + (\frac{\mu_1^2}{15}). \tag{7}$$

Если принять числовое значение коэффициента P постоянным и равным

$$P = 1 + (\frac{\mu_1^2}{15}), \tag{8}$$

то тогда вместо алгебраического биквадратного уравнения (4) получим его новую модификацию:

$$\mu^4 - \frac{3}{P}\left(1 + Bi + K + \frac{P \cdot Bi \cdot K}{3}\right)\mu^2 + \frac{3}{P}Bi \cdot K = 0, \tag{9}$$

искомое решение которого запишется следующим образом:

$$\mu_1^2 = \frac{3}{2P}\left(1 + Bi + K + \frac{P \cdot Bi \cdot K}{3}\right) - \sqrt{\frac{9}{4P^2}\left(1 + Bi + K + \frac{P \cdot Bi \cdot K}{3}\right)^2 - \frac{3}{P}Bi \cdot K}. \tag{10}$$

На основе (10) определим $\mu_1$ для рассмотренного выше случая Bi = K = 10. Причем параметр P будет равен:

$$P = 1 + \frac{1,36446^2}{15} = 1,12412.$$

Подставляя указанные значения в (10) находим:

$$\mu_1^2 = \frac{3}{2 \cdot 1,12412} \cdot \left(1 + 10 + 10 + \frac{1,12412 \cdot 10 \cdot 10}{3}\right) -$$
$$-\sqrt{\frac{9}{4 \cdot 1,12412^2} \cdot \left(1 + 10 + 10 + \frac{1,12412 \cdot 10 \cdot 10}{3}\right)^2 - \frac{3}{1,12412} \cdot 10 \cdot 10} = 1,7295,$$

т. е.

$$\mu_1 = \sqrt{1,7295} = 1,3151.$$

Таким образом, второе приближение дает значение $\mu_1$, которое весьма мало отличается от табличного.

Решение (10) можно привести к существенно более простому виду. Для этого, используя разложение в ряд второго слагаемого в выражении (10) и ограничиваясь двумя его членами, нетрудно получить следующую зависимость:

$$\mu_1 = \sqrt{\frac{3 \cdot Bi \cdot K}{3 \cdot (1 + Bi + K) + P \cdot Bi \cdot K}}. \tag{11}$$

Формула (11) является существенно более универсальной, чем выведенная Гровером и Холтером в работе [5], так как она охватывает практически весь возможный диапазон корня $\mu_1$. Тогда как рекомендованная вышеназванными авторами применима только в тех случаях, когда первый корень $\mu_1$ намного меньше единицы.

Однако нужно помнить, что при использовании (11) необходимо корректировать коэффициент P согласно выражению (8).

Теперь проведем исследование уравнения (1) для случая, когда номер корня $n > 1$.

Первоначально примем, что число Bi = 0 (или K = 0), тогда формула (1) упрощается и принимает вид

$$tg\mu = -\frac{\mu}{K}. \tag{12}$$

Первый корень этой зависимости при любых величинах K равен 0 ($\mu_1 = 0$). Последующие корни ($n > 1$), как следует из ранее сказанного, должны удовлетворять условию

$$\frac{2n-3}{2}\pi \le \mu_n \le (n-1)\pi .$$

Необходимые числа $\mu_n$ ($n > 1$) легко находятся на основе итерационной процедуры. Например, принимая в качестве исходного значения

$$\mu_{n1} = \left(\frac{2n-3}{2}\right) \cdot \pi \text{ или } \mu_{n1} = (n-1) \cdot \pi.$$

Определяем второе приближение $\mu_{n2}$ из условия

$$tg\mu_{n2} = -\frac{\mu_n}{K}. \tag{13}$$

Далее по величине $\mu_{n2}$ аналогичным путем вычисляем $\mu_{n3}$:

$$tg\mu_{n3} = -\frac{\mu_{n2}}{K}. \tag{14}$$

Как правило, имеет место быстросходимость, т. е. обычно $\mu_{n3}$ очень близко приближается к истинному значению $\mu_n$. При этом искомый корень $\mu_n$ располагается в интервале между двумя ранее рассчитанными.

Аналогичным методом удается вычислить все собственные числа $\mu_n$ характеристического уравнения (1) и в общем случае.

В качестве примера рассмотрим задачу определения второго корня уравнения (1) при условии, что Bi = K = 1. За исходную величину примем в частности $\mu_{2,1} = \frac{\pi}{2}$. Тогда из зависимости

$$tg\mu_{2,2} = \frac{Bi \cdot K - \mu_{2,1}^2}{\mu_{2,1}(Bi + K)} = \frac{1 - \mu_{2,1}^2}{2\mu_{2,1}} = -0,4671$$

получим согласно [6] $\mu_{2,2} = 2,7046$.

Действуя по аналогичной схеме, находим последовательно

$$\mu_{2,3} = 2,2791\,; \mu_{2,4} = 2,3978 и\, \mu_{2,5} = 2,3610\,.$$

Табличное значение $\mu_2$, соответствующее принятым данным, равно $\mu_2 = 2,3695$.

Из приведенных результатов следует, что сходимость процесса последовательных приближений «снизу» и «сверху» сравнительно высокая.

Она может быть усилена, если на третьем шаге брать средние арифметические значения из двух предыдущих.

**Заключение.** Произведен расчет собственных чисел в задаче нагрева теплопроводного тела с теплоизоляционным покрытием. Полученные аналитические зависимости обладают высокой точностью расчета, но значительно проще классических методов расчета.

Полученная методика совместно с разработанными ранее методами расчета собственных чисел [7–9] позволяют решать широкий спектр задач, связанных с нестационарным теплообменом плоских и цилиндрических тел малой кривизны.

## Список источников


1. Михайлов М.Д. Нестационарные температурные поля в оболочках. М.: Энергия, 1967. 120 с.
2. Видин Ю.В. Инженерные методы теплопроводности. Красноярск: Изд-во КГТУ, 1992. 96 с.
3. Видин Ю.В. К расчету собственных чисел задачи теплопроводности двухслойной пластины // Теплофизика высоких температур. 1985. Т. 23, № 1. С. 200–201.

4. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1965. 608 с.
5. Grover Y.H., Holter W.H. Solution of ten Transient Heat.Coldultion Equation for an Insulated, Infinite Metal Slab yet propulsion // Journal of Jet Propulsion. 1957. Vol 27, N 12. P. 1249–1252.
6. Сегал Б.И., Семендяев К.А. Пятизначные математические таблицы. М.: Физматгиз, 1962. 464 с.
7. Видин Ю.В., Иванов Д.И. Расчет собственных чисел в задаче нестационарной теплопередачи через цилиндрическую стенку при граничных условиях первого рода // Вестник КузГТУ. 2012. № 5. С. 85–86.
8. Видин Ю.В., Иванов Д.И. Расчет собственных чисел в задаче нестационарной теплопередачи через цилиндрическую стенку при граничных условиях 2-го рода // Вестник ВолГАСУ. 2012. № 4. С. 98–101.
9. Видин Ю.В., Иванов Д.И. Расчет собственных чисел в задаче нестационарной теплопередачи через цилиндрическую стенку при смешанных граничных условиях // Вестник СибГАУ. 2013. № 1. С. 15–18.

## References

1. Mixajlov M.D. Nestaczionarnye temperaturnye polya v obolochkax. M.: Ènergiya, 1967. 120 s.
2. Vidin Yu.V. Inzhenernye metody teploprovodnosti. Krasnoyarsk: Izd-vo KGTU, 1992. 96 s.
3. Vidin Yu.V. K raschetu sobstvennyx chisel zadachi teploprovodnosti dvuxslojnoj plastiny // Teplofizika vysokix temperatur. 1985. T. 23, № 1. S. 200–201.
4. Bronshtejn I.N., Semendyaev K.A. Spravochnik po matematike dlya inzhenerov i uchashhixsya vtuzov. M.: Nauka, 1965. 608 s.
5. Grover Y.H., Holter W.H. Solution of ten Transient Heat.Coldultion Equation for an Insulated, Infinite Metal Slab yet propulsion // Journal of Jet Propulsion. 1957. Vol 27, N 12. P. 1249–1252.
6. Segal B.I., Semendyaev K.A. Pyatiznachnye matematicheskie tabliczy. M.: Fizmatgiz, 1962. 464 s.
7. Vidin Yu.V., Ivanov D.I. Raschet sobstvennyx chisel v zadache nestaczionarnoj teploperedachi cherez czilindricheskuyu stenku pri granich-nyx usloviyax pervogo roda // Vestnik KuzGTU. 2012. № 5. S. 85–86.
8. Vidin Yu.V., Ivanov D.I. Raschet sobstvennyx chisel v zadache nestaczionarnoj teploperedachi cherez czilindricheskuyu stenku pri granich-nyx usloviyax 2-go roda // Vestnik VolGASU. 2012. № 4. S. 98–101.

9. Vidin Yu.V., Ivanov D.I. Raschet sobstvennyx chisel v zadache nestaczionarnoj teploperedachi cherez czilindricheskuyu stenku pri smeshan-nyx granichnyx usloviyax // Vestnik SibGAU. 2013. № 1. S. 15–18.

**Сведения об авторах**

**Дмитрий Иванович Иванов,** главный инженер проектов

**Information about the authors**

**Dmitry Ivanovich Ivanov**, Chief Project Engineer