

Научная статья / Research Article
УДК 537.612.2

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К РАСЧЕТУ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ОТ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ПРОВОДНИКОВ В ЗОНАХ ОТСУТСТВИЯ ФЕРРОМАГНИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Андрей Сергеевич Шестаков¹, Евгений Владимирович Титов²

^{1,2}Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова,
Барнаул, Россия

¹andshest237@gmail.com

²888tev888@mail.ru

Аннотация. Предложен аналитический метод прямого расчета вектора магнитной индукции стационарных и квазистационарных полей, создаваемых токонесущими проводниками произвольной криволинейной геометрии. Метод основан на прямой параметризации пути тока вектор-функцией и последовательном применении закона Био – Савара – Лапласа, что позволяет получить замкнутые аналитические выражения для магнитного поля в любой точке исследуемого пространства. Ключевым преимуществом разработанного подхода является его высокая точность в зонах, свободных от ферромагнитных материалов, где влияние последних можно считать пренебрежимо малым, а также в зонах, удаленных от проводника на расстояние, значительно превышающее его поперечное сечение. Для демонстрации эффективности предложенного метода проведен расчет магнитного поля для заданного проводника со сложной пространственной конфигурацией, обтекаемого постоянным током. Полученные аналитические результаты прошли верификацию путем сравнения с данными численного моделирования в специализированном программном комплексе CST Studio для решения задач магнитостатики. Показано соответствие результатов, что подтверждает корректность выведенных формул и практическую применимость метода для инженерного анализа магнитных полей сложных контуров в неферромагнитных средах.

Ключевые слова: векторное уравнение кривой, криволинейный проводник, квазистационарное поле, магнитная индукция, закон Био – Савара – Лапласа, компьютерное моделирование, CST Studio

A MATHEMATICAL APPROACH TO CALCULATING THE MAGNETIC FIELD FROM CURVED CONDUCTORS IN AREAS WITHOUT FERROMAGNETIC MATERIALS

Andrey Sergeevich Shestakov¹, Evgeny Vladimirovich Titov²

^{1,2}Altai State Technical University named after I.I. Polzunov, Barnaul, Russia

¹andshest237@gmail.com

²888tev888@mail.ru

Annotation. *An analytical method is proposed for the direct calculation of the magnetic induction vector of stationary and quasi-stationary fields generated by current-carrying conductors of arbitrary curved geometry. The method is based on the direct parameterization of the current path by a vector function and the sequential application of the Biot-Savard-Laplace law, which makes it possible to obtain closed analytical expressions for the magnetic field at any point in the studied space. The key advantage of the developed approach is its high accuracy in areas free of ferromagnetic materials, where the influence of the latter can be considered negligible, as well as in areas far from the conductor at a distance significantly exceeding its cross-section. To demonstrate the effectiveness of the proposed method, the magnetic field was calculated for a given conductor with a complex spatial configuration, streamlined by direct current. The obtained analytical results were verified by comparing them with numerical simulation data in the specialized CST Studio software package for solving magnetostatics problems. The correspondence of the results is shown, which confirms the correctness of the derived formulas and the practical applicability of the method for the engineering analysis of magnetic fields of complex contours in non-ferromagnetic media.*

Keywords: *vector equation of a curve, curved conductor, quasi-stationary field, magnetic induction, Biot – Savard – Laplace law, computer modeling, CST Studio*

Отыскание значения вектора магнитной индукции в определенной области пространства как векторного поля позволяет осуществлять контроль уровня поля, оценивать эффективность применения экранов по значениям модулей напряженности магнитного поля перед экраном H_0 и за ним H_1 вместе с материальным уравнением для изотопной среды $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$ [1, 2], заданием граничных условий для экрана $\vec{H}_{1r} = \vec{H}_{2r}$ [1], дальнейшим расчетом коэффициента затухания $a_s = 20\lg(H_0/H_1)$ [2], что актуально в задачах электромагнитной совместимости ЭУ с имеющимися проводниками различной формы [3]. Известные подходы позволяют прогнозировать изменение составляющих электромагнитного поля в радиочастотном диапазоне [4, 5], не позволяя оценивать постоянное магнитное поле от криволинейных проводников.

Описание метода. Вектор магнитной индукции предлагается определять в соответствии с законом Био – Савара – Лапласа применительно к параметрически заданному криволинейному проводнику [3, 6]. Начало вектора, задающего кривую $\gamma: \vec{\gamma}(t) = (\gamma_x(t), \gamma_y(t), \gamma_z(t))$, зафиксировано в начале заданной системы координат [7], t – параметр, задающий кривую γ . Зада-

дим ток в проводнике – I , который может быть постоянным или изменяться во времени достаточно медленно, для соблюдения условий квазистационарности поля: характерное время изменения поля T , умноженное на скорость распространения поля много больше линейных размеров системы: $l \ll cT$; условие $\sigma T \gg \varepsilon \varepsilon_0$, которое следует из малости модуля тока смещения по сравнению с модулем тока проводимости [2, 8].

Из формы записи закона Био – Савара – Лапласа [1] малому элементу кривой $dL = d\vec{\gamma}$, заданной вектор-функцией $\vec{\gamma}(t)$, можно сопоставить дифференциал вектор-функции $d(\vec{\gamma}(t)) = (\gamma(t))' dt$, что будет верно, когда функции $\gamma_x(t), \gamma_y(t), \gamma_z(t)$ непрерывно дифференцируемы [7]:

$$d(\vec{\gamma}(t)) = (d(\gamma_x(t)), d(\gamma_y(t)), d(\gamma_z(t))) = (\gamma'_x dt, \gamma'_y dt, \gamma'_z dt). \quad (1)$$

Вектор, указывающий из малого элемента проводника в рассматриваемую точку T , для любой точки на кривой может быть представлен вектором из начала элемента $d\vec{\gamma}$ к началу заданной системы координат, сложенным с вектором из начала координат в точку T . Вектор \vec{R} в записи закона можно заменить на $\vec{T} - \vec{\gamma}(t)$, тогда выражение примет вид [1, 2]

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{L} \times \vec{R}}{R^3} = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d(\vec{\gamma}(t)) \times (\vec{T} - \vec{\gamma}(t))}{|\vec{T} - \vec{\gamma}(t)|^3}. \quad (2)$$

Предлагается рассмотреть участок кривой, соответствующий изменению параметра t от t_0 до t_n . При определении векторного произведения и модуля вектора в знаменателе из формулы (2) можно получить составляющие вдоль осей координат вектора магнитной индукции dB_x, dB_y, dB_z в точке T . Выражения (3), (4) получены на основании формул расписывания координат вектора $\vec{T} - \vec{\gamma}(t)$:

$$\vec{T} - \vec{\gamma}(t) = (x_T - \gamma_x(t), y_T - \gamma_y(t), z_T - \gamma_z(t)), \quad (3)$$

$$|\vec{T} - \vec{\gamma}(t)|^3 = \left(\sqrt{(x_T - \gamma_x(t))^2 + (y_T - \gamma_y(t))^2 + (z_T - \gamma_z(t))^2} \right)^3. \quad (4)$$

В представленном выражении значения $\gamma_x(t), \gamma_y(t), \gamma_z(t)$ являются компонентами вектор-функции кривой, x_T, y_T, z_T – координатами точки T . Для учета вкладов вектора B в точке T от всего параметризованного участка кривой просуммируем каждую компоненту в пределах изменения параметра кривой (от t_0 до t_n) и геометрически сложим вклады поля по осям координат в рассматриваемой точке. Получим выражения (5) для компонент поля в соответствии с формулами (2)–(4). Результирующий вектор в точке T будет находиться по принципу суперпозиции магнитных полей векторной суммой B_x, B_y, B_z [1, 9].

$$\begin{aligned}
 B_x &= \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi} \cdot \int_{t_0}^{t_n} \frac{\gamma'_y(z_T - \gamma_z(t)) - \gamma'_z(y_T - \gamma_y(t))}{\left(\sqrt{(x_T - \gamma_x(t))^2 + (y_T - \gamma_y(t))^2 + (z_T - \gamma_z(t))^2}\right)^3} dt \\
 B_y &= \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi} \cdot \int_{t_0}^{t_n} \frac{\gamma'_z(x_T - \gamma_x(t)) - \gamma'_x(z_T - \gamma_z(t))}{\left(\sqrt{(x_T - \gamma_x(t))^2 + (y_T - \gamma_y(t))^2 + (z_T - \gamma_z(t))^2}\right)^3} dt \\
 B_z &= \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi} \cdot \int_{t_0}^{t_n} \frac{\gamma'_x(y_T - \gamma_y(t)) - \gamma'_y(x_T - \gamma_x(t))}{\left(\sqrt{(x_T - \gamma_x(t))^2 + (y_T - \gamma_y(t))^2 + (z_T - \gamma_z(t))^2}\right)^3} dt
 \end{aligned} \tag{5}$$

Результаты моделирования. Для проверки формул была создана модель в программном пакете CST Studio Suite [10]. В качестве объекта моделирования использовался замкнутый проводник, описываемый векторными уравнениями с изменением параметра $t \in [0; 2\pi]$: $\vec{\gamma}(t) = (\cos(4t), 2\cos(t), 2\sin(t))$, кривая показана на рисунках 1–3 с указанием значений поля в точках с различным расположением. В замкнутый контур был введен постоянный ток силой 50 А при помощи функции Current Paths [11]. В CST Studio [10] были установлены единицы измерения м, Гц, °С, с. Результаты программного расчета магнитостатики соотносились с расчетами по формулам (5). Для удобства записи формул, содержащих определенный интеграл, был использован калькулятор Desmos. Расчеты проводились в модуле Low Frequency (CST EM Studio) [10, 11] с использованием M-Static Solver с определением значений в 10 точках в нескольких плоскостях. Для точек, приведенных для примера, в программе измерялся модуль вектора \vec{B} с помощью функции Field at Cursor (значение Value). Соответствующее значение модуля было также рассчитано по аналитическим формулам (5). Выявленные различия значений модуля вектора \vec{B} составили 1,2–6 %. Погрешность может быть обусловлена разбиением пространственной сетки из тетраэдров на 2000 ячеек. Выходные данные – значения модулей вектора B в рассматриваемых точках (см. рис. 1–3).

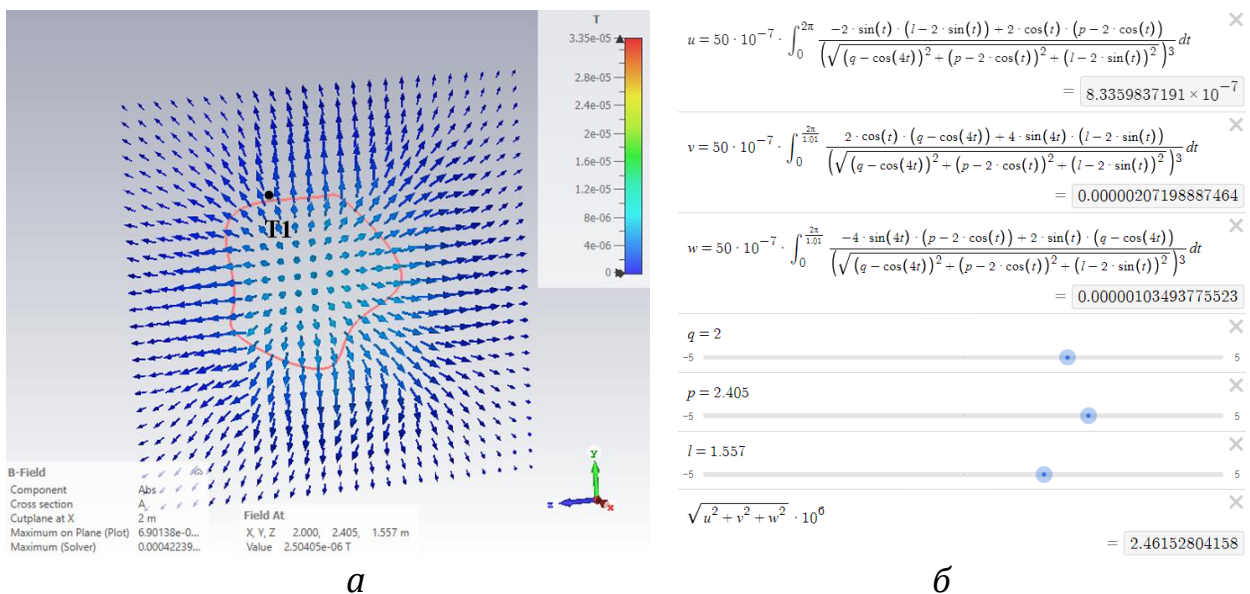
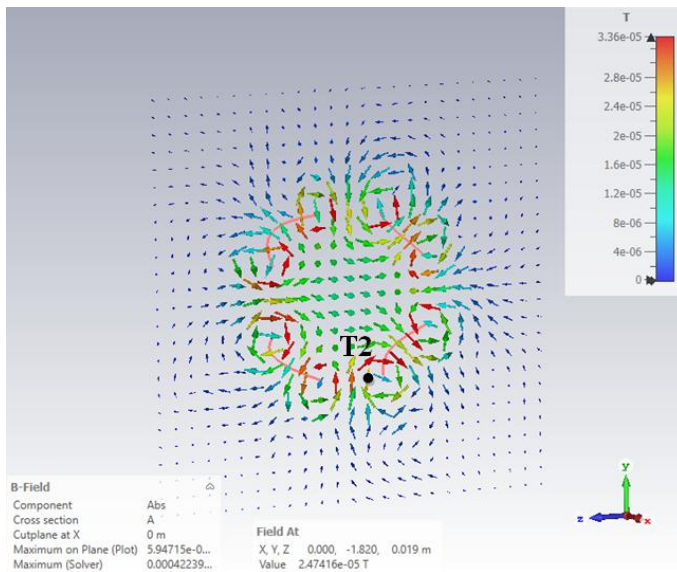


Рисунок 1 – Результаты моделирования магнитного поля:
а – и расчета вектора магнитной индукции; б – по формулам (5)
для точки T1 (2;2,405;1,557)



а

$$u = 50 \cdot 10^{-7} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{-2 \cdot \sin(t) \cdot (l - 2 \cdot \sin(t)) - 2 \cdot \cos(t) \cdot (p - 2 \cdot \cos(t))}{\left(\sqrt{(q - \cos(4t))^2 + (p - 2 \cdot \cos(t))^2 + (l - 2 \cdot \sin(t))^2}\right)^3} dt$$

$$= 0.00000994116052753$$

$$v = 50 \cdot 10^{-7} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{2 \cdot \cos(t) \cdot (q - \cos(4t)) + 4 \cdot \sin(4t) \cdot (l - 2 \cdot \sin(t))}{\left(\sqrt{(q - \cos(4t))^2 + (p - 2 \cdot \cos(t))^2 + (l - 2 \cdot \sin(t))^2}\right)^3} dt$$

$$= 0.0000229690677716$$

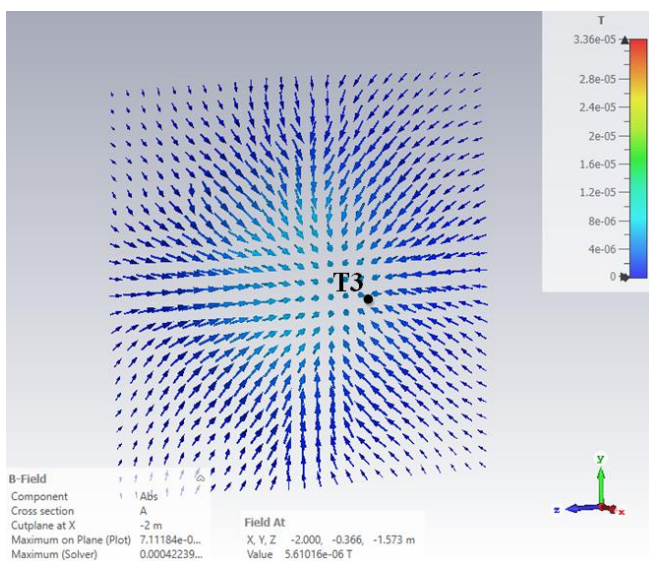
$$w = 50 \cdot 10^{-7} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{-4 \cdot \sin(4t) \cdot (p - 2 \cdot \cos(t)) + 2 \cdot \sin(t) \cdot (q - \cos(4t))}{\left(\sqrt{(q - \cos(4t))^2 + (p - 2 \cdot \cos(t))^2 + (l - 2 \cdot \sin(t))^2}\right)^3} dt$$

$$= 1.1146975406 \times 10^{-7}$$

$q = 0$
 $p = -1.82$
 $l = 0.019$
 $\sqrt{w^2 + v^2 + u^2} \cdot 10^5 = 2.50283273999$

б

Рисунок 2 – Результаты моделирования магнитного поля: а – и расчета вектора магнитной индукции; б – по формулам (5) для точки T2 (0; -1,82; 0,019)



а

$$u = 50 \cdot 10^{-7} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{-2 \cdot \sin(t) \cdot (l - 2 \cdot \sin(t)) - 2 \cdot \cos(t) \cdot (p - 2 \cdot \cos(t))}{\left(\sqrt{(q - \cos(4t))^2 + (p - 2 \cdot \cos(t))^2 + (l - 2 \cdot \sin(t))^2}\right)^3} dt$$

$$= 0.00000405774363393$$

$$v = 50 \cdot 10^{-7} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{2 \cdot \cos(t) \cdot (q - \cos(4t)) + 4 \cdot \sin(4t) \cdot (l - 2 \cdot \sin(t))}{\left(\sqrt{(q - \cos(4t))^2 + (p - 2 \cdot \cos(t))^2 + (l - 2 \cdot \sin(t))^2}\right)^3} dt$$

$$= 7.867851154 \times 10^{-7}$$

$$w = 50 \cdot 10^{-7} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{-4 \cdot \sin(4t) \cdot (p - 2 \cdot \cos(t)) + 2 \cdot \sin(t) \cdot (q - \cos(4t))}{\left(\sqrt{(q - \cos(4t))^2 + (p - 2 \cdot \cos(t))^2 + (l - 2 \cdot \sin(t))^2}\right)^3} dt$$

$$= 0.00000329753751476$$

$q = -2$
 $p = -0.366$
 $l = -1.573$
 $\sqrt{w^2 + v^2 + u^2} \cdot 10^6 = 5.28753892447$

б

Рисунок 3 – Результаты моделирования магнитного поля: а – и расчета вектора магнитной индукции; б – по формулам (5) для точки T3 (-2; -0,366; -1,573)

Заключение. Таким образом, предложенные выражения позволяют проводить расчет в точках, не попадающих в область расчета в CST (в Bounding Box) [10], ускорить процесс оценки магнитного поля, уменьшить требовательность к вычислительным ресурсам ПЭВМ. Метод расчета магнитного поля по закону Био – Савара – Лапласа применяется к гладкой

параметризованной кривой, отходя от его применения к расчету поля геометрических примитивов (прямых, окружностей). Метод при доработке позволит учитывать сечение проводника и наличие изоляции. Кроме этого в уравнения (5) можно вводить ток, зависящий от времени более сложным образом, чем предусмотренные зависимости в CST Studio [11]. Однако форма представления результатов в числовом виде по формулам (5) отличается меньшей наглядностью по сравнению с компьютерными моделями в виде векторного поля, формируемыми в CST [11]. Предложенный метод, дополняя существующие методики расчета магнитных полей, обеспечивает более высокую вычислимость моделирования переменных магнитных полей, создаваемых низкочастотными токами в отсутствие внешних воздействий, что позволяет улучшить прогнозирование режимов работы электроустановок и, следовательно, повысить безопасность электромагнитной обстановки вблизи электрооборудования.

Список литературы

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. В 2 т. Т. 2. Электромагнитное поле. М.: Юрайт, 2023. 389 с.
2. Белашов В.Ю. Электромагнитная теория и ЭМС электротехнических устройств. Ч. 1. Электромагнитная теория. Казань: Казан. гос. энерг. ун-т, 2007. 122 с.
3. Junlin Z. Study on Magnetic Field Distribution Calculation and Protection of Dry-type Air Core Bridge Arm Reactor for VSC-HVDC System // IEEE International Conference on High Voltage Engineering and Applications (ICHVE). China. 2022. P. 519-522. DOI: 10.1109/ICHVE53725.2022.9961434.
4. Cai S., Su D., Li Y. A novel dynamic scenario equivalence construction method for radar electromagnetic compatibility prediction // IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility. 2024. Vol. 66 (2) P. 453-462. DOI: 10.1109/TEMC.2023.3322545.
5. Qu K., Ye X., Li Guo. Privacy and security in ubiquitous integrated sensing and communication: threats, challenges and future directions // IEEE Internet of Things Magazine. 2024 Vol. 7 (4). P. 52-58. DOI: 10.1109/IOTM.001.2300180.
6. Калемалькина А.А., Ванькова А.Е. Расчет магнитного поля для широких полосок проводников // Наука, техника и инновации: гипотезы, проблемы, результаты: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции, 15 марта 2022 г. СПб.: Профессиональная наука, 2022. 148 с. С. 69-76. DOI: 10.54092/9781458338945.
7. Stewart J., Clegg D., Watson S. Calculus: Early Transcendentals. Boston: Cengage Group, 2020. 1424 p.

8. Титов Е.В., Осьмушкина Е.Б. Экспериментальное исследование электромагнитной обстановки с учетом наложения электромагнитных волн // Журнал Сибирского федерального университета. Серия «Техника и технологии». 2023. № 16 (6). С. 658–666.
9. Soshnikov A., Migalyov I., Titov E. Principles of Functioning of Technological Module for Danger Estimation of Combined Electromagnetic Field // Procedia Engineering: Underground Urbanisation as a Prerequisite for Sustainable Development. 2016. Vol. 165. P. 1027–1034. DOI: 10.1016/j.proeng.2016.11.815.
10. Фатеев А. В. Применение CST Microwave Studio для расчета антенн и устройств СВЧ. Томск: Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2017. 115 с.
11. CST Studio Suite [Электронный ресурс]: руководство пользователя. Dassault Systèmes. 2025. URL: <https://www.3ds.com/products-services/simulia/products/cst-studio-suite> (дата обращения: 22.12.2025).

References

1. Bessonov L.A. Teoreticheskie osnovy èlektrotexniki. V 2 t. T. 2. Èlektromagnitnoe pole. M.: Yurajt, 2023. 389 s.
2. Belashov V.Yu. Èlektromagnitnaya teoriya i ÈMS èlektrotexniche-skix ustrojstv. Ch. 1. Èlektromagnitnaya teoriya. Kazan`: Kazan. gos. ènerg. un-t, 2007. 122 s.
3. Junlin Z. Study on Magnetic Field Distribution Calculation and Protection of Dry-type Air Core Bridge Arm Reactor for VSC-HVDC System // IEEE International Conference on High Voltage Engineering and Applications (ICHVE). China. 2022. P. 519–522. DOI: 10.1109/ICHVE53725.2022.9961434.
4. Cai S., Su D., Li Y. A novel dynamic scenario equivalence construction method for radar electromagnetic compatibility prediction // IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility. 2024. Vol. 66 (2) P. 453–462. DOI: 10.1109/TEMC.2023.3322545.
5. Qu K., Ye X., Li Guo. Privacy and security in ubiquitous integrated sensing and communication: threats, challenges and future directions // IEEE Internet of Things Magazine. 2024 Vol. 7 (4). P. 52–58. DOI: 10.1109/IOTM.001.2300180.
6. Kalemal`kina A.A., Van`kova A.E. Raschet magnitnogo polya dlya shirokix polosok provodnikov // Nauka, texnika i innovaczii: gipotezy, problemy, rezul`taty: sbornik nauchnyx trudov po materialam Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferenczii, 15 marta 2022 g. SPb.: Professional`naya nauka, 2022. 148 s. S. 69–76. DOI: 10.54092/9781458338945.
7. Stewart J., Clegg D., Watson S. Calculus: Early Transcendentals. Boston: Cengage Group, 2020. 1424 r.

8. Titov E.V., Os`mushkina E.B. Èksperimental`noe issledovanie èlektromagnitnoj obstanovki s uchetom nalozheniya èlektromagnitnyx voln // Zhurnal Sibirskogo federal`nogo universiteta. Seriya «Texnika i tehnologii». 2023. № 16 (6). S. 658–666.
9. Soshnikov A., Migalyov I., Titov E. Principles of Functioning of Technological Module for Danger Estimation of Combined Electromagnetic Field // Procedia Engineering: Underground Urbanisation as a Prerequisite for Sustainable Development. 2016. Vol. 165. P. 1027–1034. DOI: 10.1016/j.proeng.2016.11.815.
10. Fateev A. V. Primenenie CST Microwave Studio dlya rascheta an-tenn i ustrojstv SVCh. Tomsk: Tomsk. gos. un-t sistem upr. i radioèlektroniki, 2017. 115 s.
11. CST Studio Suite [Èlektronnyj resurs]: rukovodstvo pol`zovatelya. Dassault Systèmes. 2025. URL: <https://www.3ds.com/products-services/simulia/products/cst-studio-suite> (data obrashheniya: 22.12.2025).

Сведения об авторах:

Андрей Сергеевич Шестаков, студент

Евгений Владимирович Титов, ведущий научный сотрудник, доктор технических наук, доцент

Information about the authors:

Andrey Sergeevich Shestakov, Student

Evgeny Vladimirovich Titov, Leading Researcher, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor,