

Научная статья / Research Article

УДК 621.3.072

РАСЧЕТ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ В ЗАДАЧЕ НАГРЕВА ТЕПЛОПРОВОДНОГО ТЕЛА С ТЕПЛОИЗОЛЯЦИОННЫМ ПОКРЫТИЕМ

Дмитрий Иванович Иванов

ООО ПКП «ЯрЭнергоСервис», Красноярск, Россия

idi86@inbox.ru

Аннотация. С использованием аналитических зависимостей разработан аналитический приближенный метод расчета собственных чисел в задаче нагрева теплопроводного тела с теплоизоляционным покрытием. Показано, что высокая точность расчета может быть достигнута с помощью доступных математических преобразований, т.е. не прибегая к сложным специальным функциям.

Ключевые слова: теплопередача, теплоизоляционное покрытие, температурное поле, аналитический метод

CALCULATION OF EIGENVALUES IN HEATING PROBLEM OF HEAT-CONDUCTING BODY WITH HEAT INSULATION COATING

Dmitry Ivanovich Ivanov

PKP YarEnergoService LLC, Krasnoyarsk, Russia

idi86@inbox.ru

Abstract. Using analytical dependencies, an analytical approximate method for calculating eigenvalues in the problem of heating a heat-conducting body with a heat-insulating coating has been developed. It has been shown that high calculation accuracy can be achieved using available mathematical transformations, i.e. without resorting to complex special functions.

Keywords. heat transfer, thermal insulation coating, temperature field, analytical method

Введение. Известно, что для тепловой защиты металлических стенок от нагрева широко применяются огнеупорные покрытия [1]. При расчете нестационарного температурного поля в такой комбинированной системе приходится для нахождения собственных чисел задачи использовать характеристическое уравнение вида:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{Bi \cdot K - \mu^2}{\mu(Bi + K)}, \quad (1)$$

где Bi – безразмерное число подобия (число Био); K – безразмерное число, характеризующее отношение аккумуляционной способности изоляции к аккумуляционной способности соприкасающегося с ней металлического слоя.

В работе [1] приведены таблицы первых шести корней уравнения (1) для десяти значений параметра K и ограниченного числа величин Bi , имеющих сравнительно большой шаг.

Следует отметить, что при решении задач нестационарной теплопроводности многослойных систем приходится использовать очень сложные характеристические уравнения [2]. Это обусловлено главным образом большим числом параметров, свойственным таким физическим процессам.

Из формулы (1) следует, что параметры Bi и K равнозначны, например, паре чисел $Bi = 1, K = 10$ и паре $Bi = 10, K = 1$ будут соответствовать одни и те же собственные числа μ_n . Из выражения (1) также вытекает, что искомые корни μ_n должны располагаться в интервалах

$$0 \leq \mu_n \leq \frac{\pi}{2}, n=1,$$

$$\left(\frac{2n-3}{2}\right)\pi \leq \mu_n \leq \left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi, n=2,3,\dots$$

Причем, последнее выражение можно представить также в несколько ином виде, а именно:

$$\frac{2 \cdot n - 3}{2} \cdot \pi \leq \mu_n \leq (n-1) \cdot \pi, n=2,3,\dots \text{ если } BiK \leq (n-1) \cdot \pi^2$$

и

$$(n-1)\pi \leq \mu_n \leq \left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi, n=2,3,\dots \text{ если } BiK \geq (n-1)^2 \pi^2,$$

т. е. интервалы искомых корней μ_n существенно сокращаются.

Таблицы, приведенные в [1], как отмечалось ранее, имеют существенно ограниченные возможности. Поэтому целесообразно разработать универсальный аналитический подход для расчета корней уравнения (1) и ему подобных. В [2], [3] предложены достаточно эффективные приемы исследования таких зависимостей.

Наибольший интерес, как правило, представляет значение первого собственного числа решаемой тепловой задачи. С этой точки зрения удобнее зависимость (1) представить в форме

$$\operatorname{ctg} \mu = \frac{\mu(Bi + K)}{Bi - \mu^2}. \quad (2)$$

Тогда, учитывая, что $0 \leq \mu_1 \leq \frac{\pi}{2}$, вполне приемлемо левую часть соотношения (2) записать в виде ограниченного степенного ряда [4]:

$$\operatorname{ctg} \mu = \frac{1}{\mu} - \frac{\mu}{3}. \quad (3)$$

Отброшенные члены этого ряда в случае $\mu_1 \leq \frac{\pi}{2}$ для инженерных расчетов пренебрежимо малы.

Тогда (2) преобразуется в алгебраическое уравнение

$$\mu^4 - 3 \left(1 + Bi + K + \frac{BiK}{3} \right) \mu^2 + 3BiK = 0. \quad (4)$$

Отсюда

$$\mu_1^2 = \frac{3}{2} \left(1 + Bi + K + \frac{Bi \cdot K}{3} \right) - \sqrt{\frac{9}{4} \left(1 + Bi + K + \frac{Bi \cdot K}{3} \right)^2 - 3Bi \cdot K} \quad (5)$$

Рассмотрим частный случай $Bi = K = 1$. Тогда

$$\mu_1^2 = \frac{3}{2} \left(1 + 1 + 1 + \frac{1 \cdot 1}{3} \right) - \sqrt{5^2 - 3 \cdot 1 \cdot 1} = 5 - \sqrt{22} = 0,3096,$$

$$\mu_1 = \sqrt{0,3046} = 0,5564.$$

Табличное значение [1] $\mu_1 = 0,5560$.

При $Bi = 1, K = 10$ (или $Bi = 10, K = 1$)

$$\mu_1^2 = \frac{3}{2} \left(1 + 1 + 10 + \frac{1 \cdot 10}{3} \right) - \sqrt{23^2 - 3 \cdot 1 \cdot 10} = 0,6617,$$

$$\mu_1 = \sqrt{0,6617} = 0,8134.$$

Табличное значение $\mu_1 = 0,80951$.

Для $Bi = K = 10$

$$\mu_1^2 = \frac{3}{2} \left(1 + 10 + 10 + \frac{10 \cdot 10}{3} \right) - \sqrt{81,5^2 - 3 \cdot 10 \cdot 10} = 1,86176,$$

$$\mu_1 = \sqrt{1,86176} = 1,36446.$$

Табличное значение $\mu_1 = 1,31023$.

Из этих расчетов следует, что полученное аналитическим путем μ_1 для не слишком больших величин параметров Bi и K обладает высокой точностью (погрешность доли процента).

Если же комплексы Bi и K одновременно оказываются весьма значительными, то вычисленный корень μ_1 будет несколько выше действительного. В таких случаях целесообразно использовать вместо (3) более расширенный степенной ряд, а именно (4):

$$\operatorname{ctg} \mu = \frac{1}{\mu} - \frac{\mu}{3} - \frac{\mu^3}{45} = \frac{1}{\mu} - \frac{P}{3} \mu, \quad (6)$$

где

$$P = 1 + \left(\frac{\mu_1^2}{15}\right). \quad (7)$$

Если принять числовое значение коэффициента P постоянным и равным

$$P = 1 + \left(\frac{\mu_1^2}{15}\right), \quad (8)$$

то тогда вместо алгебраического биквадратного уравнения (4) получим его новую модификацию:

$$\mu^4 - \frac{3}{P} \left(1 + Bi + K + \frac{P \cdot Bi \cdot K}{3}\right) \mu^2 + \frac{3}{P} Bi \cdot K = 0, \quad (9)$$

искмое решение которого запишется следующим образом:

$$\mu_1^2 = \frac{3}{2P} \left(1 + Bi + K + \frac{P \cdot Bi \cdot K}{3}\right) - \sqrt{\frac{9}{4P^2} \left(1 + Bi + K + \frac{P \cdot Bi \cdot K}{3}\right)^2 - \frac{3}{P} Bi \cdot K}. \quad (10)$$

На основе (10) определим μ_1 для рассмотренного выше случая $Bi = K = 10$. Причем параметр P будет равен:

$$P = 1 + \frac{1,36446^2}{15} = 1,12412.$$

Подставляя указанные значения в (10) находим:

$$\begin{aligned} \mu_1^2 &= \frac{3}{2 \cdot 1,12412} \cdot \left(1 + 10 + 10 + \frac{1,12412 \cdot 10 \cdot 10}{3}\right) - \\ &- \sqrt{\frac{9}{4 \cdot 1,12412^2} \cdot \left(1 + 10 + 10 + \frac{1,12412 \cdot 10 \cdot 10}{3}\right)^2 - \frac{3}{1,12412} \cdot 10 \cdot 10} = 1,7295, \end{aligned}$$

т. е.

$$\mu_1 = \sqrt{1,7295} = 1,3151.$$

Таким образом, второе приближение дает значение μ_1 , которое весьма мало отличается от табличного.

Решение (10) можно привести к существенно более простому виду. Для этого, используя разложение в ряд второго слагаемого в выражении (10) и ограничиваясь двумя его членами, нетрудно получить следующую зависимость:

$$\mu_1 = \sqrt{\frac{3 \cdot Bi \cdot K}{3 \cdot (1 + Bi + K) + P \cdot Bi \cdot K}}. \quad (11)$$

Формула (11) является существенно более универсальной, чем выведенная Гровером и Холтером в работе [5], так как она охватывает практически весь возможный диапазон корня μ_1 . Тогда как рекомендованная вышеназванными авторами применима только в тех случаях, когда первый корень μ_1 намного меньше единицы.

Однако нужно помнить, что при использовании (11) необходимо корректировать коэффициент P согласно выражению (8).

Теперь проведем исследование уравнения (1) для случая, когда номер корня $n > 1$.

Первоначально примем, что число $Bi = 0$ (или $K = 0$), тогда формула (1) упрощается и принимает вид

$$\operatorname{tg} \mu = -\frac{\mu}{K}. \quad (12)$$

Первый корень этой зависимости при любых величинах K равен 0 ($\mu_1 = 0$). Последующие корни ($n > 1$), как следует из ранее сказанного, должны удовлетворять условию

$$\frac{2n-3}{2} \pi \leq \mu_n \leq (n-1) \pi.$$

Необходимые числа μ_n ($n > 1$) легко находятся на основе итерационной процедуры. Например, принимая в качестве исходного значения

$$\mu_{n1} = \left(\frac{2n-3}{2} \right) \cdot \pi \text{ или } \mu_{n1} = (n-1) \cdot \pi.$$

Определяем второе приближение μ_{n2} из условия

$$\operatorname{tg} \mu_{n2} = -\frac{\mu_{n1}}{K}. \quad (13)$$

Далее по величине μ_{n2} аналогичным путем вычисляем μ_{n3} :

$$\operatorname{tg} \mu_{n3} = -\frac{\mu_{n2}}{K}. \quad (14)$$

Как правило, имеет место быстросходимость, т. е. обычно μ_{n3} очень близко приближается к истинному значению μ_n . При этом искомым корень μ_n располагается в интервале между двумя ранее рассчитанными.

Аналогичным методом удастся вычислить все собственные числа μ_n характеристического уравнения (1) и в общем случае.

В качестве примера рассмотрим задачу определения второго корня уравнения (1) при условии, что $Bi = K = 1$. За исходную величину примем в частности $\mu_{2,1} = \frac{\pi}{2}$. Тогда из зависимости

$$\operatorname{tg} \mu_{2,2} = \frac{Bi \cdot K - \mu_{2,1}^2}{\mu_{2,1}(Bi + K)} = \frac{1 - \mu_{2,1}^2}{2\mu_{2,1}} = -0,4671$$

получим согласно [6] $\mu_{2,2} = 2,7046$.

Действуя по аналогичной схеме, находим последовательно

$$\mu_{2,3} = 2,2791 ; \mu_{2,4} = 2,3978 \text{ и } \mu_{2,5} = 2,3610 .$$

Табличное значение μ_2 , соответствующее принятым данным, равно $\mu_2 = 2,3695$.

Из приведенных результатов следует, что сходимость процесса последовательных приближений «снизу» и «сверху» сравнительно высокая.

Она может быть усилена, если на третьем шаге брать средние арифметические значения из двух предыдущих.

Заключение. Произведен расчет собственных чисел в задаче нагрева теплопроводного тела с теплоизоляционным покрытием. Полученные аналитические зависимости обладают высокой точностью расчета, но значительно проще классических методов расчета.

Полученная методика совместно с разработанными ранее методами расчета собственных чисел [7–9] позволяют решать широкий спектр задач, связанных с нестационарным теплообменом плоских и цилиндрических тел малой кривизны.

Список источников

1. Михайлов М.Д. Нестационарные температурные поля в оболочках. М.: Энергия, 1967. 120 с.
2. Видин Ю.В. Инженерные методы теплопроводности. Красноярск: Изд-во КГТУ, 1992. 96 с.
3. Видин Ю.В. К расчету собственных чисел задачи теплопроводности двухслойной пластины // Теплофизика высоких температур. 1985. Т. 23, № 1. С. 200–201.

4. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1965. 608 с.
5. Grover Y.H., Holter W.H. Solution of ten Transient Heat.Coldultion Equation for an Insulated, Infinite Metal Slab yet propulsion // Journal of Jet Propulsion. 1957. Vol 27, N 12. P. 1249–1252.
6. Сегал Б.И., Семендяев К.А. Пятизначные математические таблицы. М.: Физматгиз, 1962. 464 с.
7. Видин Ю.В., Иванов Д.И. Расчет собственных чисел в задаче нестационарной теплопередачи через цилиндрическую стенку при граничных условиях первого рода // Вестник КузГТУ. 2012. № 5. С. 85–86.
8. Видин Ю.В., Иванов Д.И. Расчет собственных чисел в задаче нестационарной теплопередачи через цилиндрическую стенку при граничных условиях 2-го рода // Вестник ВолГАСУ. 2012. № 4. С. 98–101.
9. Видин Ю.В., Иванов Д.И. Расчет собственных чисел в задаче нестационарной теплопередачи через цилиндрическую стенку при смешанных граничных условиях // Вестник СибГАУ. 2013. № 1. С. 15–18.

References

1. Mixajlov M.D. Nestaczionarnye temperaturnye polya v obolochkax. M.: Ënergiya, 1967. 120 s.
2. Vidin Yu.V. Inzhenernye metody teploprovodnosti. Krasnoyarsk: Izd-vo KGTU, 1992. 96 s.
3. Vidin Yu.V. K raschetu sobstvennyx chisel zadachi teploprovodnosti dvuxslojnoj plastiny // Teplofizika vysokix temperatur. 1985. T. 23, № 1. S. 200–201.
4. Bronshtejn I.N., Semendyaev K.A. Spravochnik po matematike dlya inzhenerov i uchashhixsy vtuzov. M.: Nauka, 1965. 608 s.
5. Grover Y.H., Holter W.H. Solution of ten Transient Heat.Coldultion Equation for an Insulated, Infinite Metal Slab yet propulsion // Journal of Jet Propulsion. 1957. Vol 27, N 12. P. 1249–1252.
6. Segal B.I., Semendyaev K.A. Pyatiznachnye matematicheskie tabliczy. M.: Fizmatgiz, 1962. 464 s.
7. Vidin Yu.V., Ivanov D.I. Raschet sobstvennyx chisel v zadache nestaczionarnoj teploperedachi cherez czilindricheskuyu stenku pri granich-nyx usloviyax pervogo roda // Vestnik KuzGTU. 2012. № 5. S. 85–86.
8. Vidin Yu.V., Ivanov D.I. Raschet sobstvennyx chisel v zadache nestaczionarnoj teploperedachi cherez czilindricheskuyu stenku pri granich-nyx usloviyax 2-go roda // Vestnik VolGASU. 2012. № 4. S. 98–101.

9. Vidin Yu.V., Ivanov D.I. Raschet sobstvennykh chisel v zadache nestacionarnoj teploperedachi cherez czilindricheskuyu stenku pri smeshan-nykh granichnykh usloviyax // Vestnik SibGAU. 2013. № 1. S. 15–18.

Сведения об авторах

Дмитрий Иванович Иванов, главный инженер проектов

Information about the authors

Dmitry Ivanovich Ivanov, Chief Project Engineer