

3. *Бастрон А.В., Гайдаш Г.В.* Эффективное использование солнечной энергии в системах тепло- и электроснабжения сельских усадебных домов и ЛПХ // Вестн. ИрГСХА. – 2015. – № 67. – С. 92–100.
4. Использование солнечных фотоэлектрических станций для автономных систем электроснабжения крестьянско-фермерских хозяйств / *А.В. Чебодаев, А.В. Бастрон, В.Н. Урсегов* [и др.] // Энерго- и ресурсосбережение – XXI век: мат-лы XII междунар. науч.-практ. интернет-конференции. – Красноярск, 2016. – С. 204–210.
5. *Урсегов В.Н., Бастрон А.В., Андрюхов С.К.* Разработка и испытание автономного устройства для добычи яда пчел // Вестн. ИрГСХА. – 2014. – № 65. – С. 96–101.
6. АО «Телеком-СТВ»: сайт. – URL: <http://www.telstv.ru/> (дата обращения: 5.04.2018).
7. Hevelsolar: сайт. – URL: <http://www.hevelsolar.com/> (дата обращения: 5.04.2018).
8. АО «Рязанский завод металлокерамических приборов» (РЗМКП): сайт. – URL: <http://www.rmcp.ru/about/> (дата обращения: 5.04.2018).
9. ОАО «Сатурн»: сайт. – URL: <http://saturn-kuban.ru/> (дата обращения: 5.04.2018).
10. АО «НПП «Квант»: сайт. – URL: <http://npp-kvant.ru/> (дата обращения: 5.04.2018).
11. ООО «Витасвет»: сайт. – URL: <http://www.vitasvet.ru/> (дата обращения: 5.04.2018).
12. АО «Термотрон-завод»: сайт. – URL: <http://www.vitasvet.ru/> (дата обращения: 5.04.2018).
13. Sdelayremont.ru: сайт. – URL: <http://cdelayremont.ru/obzor-solnechnyh-panelej-rossijskogo-proizvodstva> (дата обращения: 5.04.2018).
14. INGSVD.ru: сайт. – URL: <http://ingsvd.ru/main/polza/1304-solnechnye-elektrostantsii-na-geterostrukturnyh-modulyah.html> (дата обращения: 5.04.2018).

Literatura

1. Solarbat: сайт. – URL: <https://solarbat.info/> (дата обращения: 6.04.2018).
2. Oficial'nye setevye resursy Prezidenta Rossii: сайт. – URL: <http://www.kremlin.ru/events/president/news/51142> (дата обращения: 6.04.2018).
3. *Bastron A.V., Gajdash G.V.* Jeffektivnoe ispol'zovanie solnechnoj jenerгии v sistemah teplo- i jelektrosnabzhenija sel'skih usadebnyh domov i LPH // Vestn. IrGSHA. – 2015. – № 67. – S. 92–100.
4. Ispol'zovanie solnechnyh fotoelektricheskikh stancij dlja avtonomnyh sistem jelektrosnabzhenija krest'jansko-fermerskih hozjajstv / *A.V. Chebodaev, A.V. Bastron, V.N. Ursegov* [i dr.] // Jenergo- i resursosberezhenie – XXI vek: mat-ly XII mezhdunar. nauch.-prakt. internet-konferencii. – Krasnojarsk, 2016. – S. 204–210.
5. *Ursegov V.N., Bastron A.V., Andrjuhov S.K.* Razrabotka i ispytanie avtonomnogo ustrojstva dlja dobychi jada pchel // Vestn. IrGSHA. – 2014. – № 65. – S. 96–101.
6. АО «Telekom-СТВ»: сайт. – URL: <http://www.telstv.ru/> (дата обращения: 5.04.2018).
7. Hevelsolar: сайт. – URL: <http://www.hevelsolar.com/> (дата обращения: 5.04.2018).
8. АО «Rjazanskiy zavod metallokeramicheskikh priborov» (RZMKP): сайт. – URL: <http://www.rmcp.ru/about/> (дата обращения: 5.04.2018).
9. ОАО «Saturn»: сайт. – URL: <http://saturn-kuban.ru/> (дата обращения: 5.04.2018).
10. АО «NPP «Kvant»: сайт. – URL: <http://npp-kvant.ru/> (дата обращения: 5.04.2018).
11. ООО «Vitasvet»: сайт. – URL: <http://www.vitasvet.ru/> (дата обращения: 5.04.2018).
12. АО «Temotron-zavod»: сайт. – URL: <http://www.vitasvet.ru/> (дата обращения: 5.04.2018).
13. Sdelayremont.ru: сайт. – URL: <http://cdelayremont.ru/obzor-solnechnyh-panelej-rossijskogo-proizvodstva> (дата обращения: 5.04.2018).
14. INGSVD.ru: сайт. – URL: <http://ingsvd.ru/main/polza/1304-solnechnye-elektrostantsii-na-geterostrukturnyh-modulyah.html> (дата обращения: 5.04.2018).

УДК 539.3

А.Д. Матвеев

МЕТОД ОБРАЗУЮЩИХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

A.D. Matveev

THE METHOD OF FORMING FINITE ELEMENTS

Матвеев А.Д. – канд. физ.-мат. наук, доц., ст. науч. сотр. Института вычислительного моделирования СО РАН, г. Красноярск. E-mail: mtv241@mail.ru

Matveev A.D. – Cand. Phys.-Math. Sci., Assoc. Prof., Senior Staff Scientist, Institute of Computing Modeling, SB RAS, Krasnoyarsk. E-mail: mtv241@mail.ru

Расчеты по методу конечных элементов (МКЭ) трехмерного напряженного состояния композитных и однородных оболочек вращения, цилиндрических оболо-

чек и конструкций больших размеров сводятся к построению дискретных моделей высокой размерности. Для понижения размерности дискретных моделей эф-

эффективно используются многосеточные конечные элементы (МНКЭ). При построении композитного МНКЭ используется система вложенных сеток. Мелкая сетка порождена базовым разбиением МНКЭ, которое сколь угодно точно учитывает его неоднородную структуру и форму (без увеличения размерности МНКЭ). На крупных сетках по МКЭ определяются функции перемещений, которые применяются для понижения размерности базового разбиения, что позволяет проектировать МНКЭ малой размерности. Функции перемещений и напряженное состояние в МНКЭ, которое описывается уравнениями трехмерной теории упругости, представляются в локальных декартовых системах координат. В этом случае МНКЭ оболочечного типа не имеют перемещений как жесткого целого. В данной работе предложен метод образующих конечных элементов (КЭ) для построения упругих трехмерных композитных (однородных) МНКЭ двух типов. Криволинейные МНКЭ 1-го типа получаются путем поворота заданного плоского образующего КЭ вокруг заданной оси на заданный угол, МНКЭ 2-го типа – путем параллельного перемещения образующего КЭ в заданном направлении на заданное расстояние. Такой подход позволяет проектировать МНКЭ, один характерный размер которых значительно больше (меньше) других. МНКЭ 1-го и 2-го типа применяются при расчете композитных оболочек вращения, колец, круглых пластин, дисков, валов, цилиндрических оболочек с переменным радиусом кривизны, пластин и балок сложной формы. Предложены МНКЭ 1-го и 2-го типа для расчета трехмерного напряженного состояния основных силовых элементов крыльев и фюзеляжей самолетов, корпусов кораблей, подводных лодок и ракет, гофрированных пластин и оболочек. Рассмотрена процедура построения криволинейных МНКЭ с помощью суперэлементов с внутренними узлами, применение которых приводит к уменьшению погрешности решений. Предлагаемые МНКЭ порождают дискретные модели малой размерности. Предложены верхние оценки погрешностей приближенных решений.

Ключевые слова: упругость, композиты, многосеточные конечные элементы, балки, пластины, кольца, валы, оболочки вращения и цилиндрические оболочки.

Calculations by Finite Element Method (FEM) of the three-dimensional strained state of large-sized structures (wings and fuselages of aircraft, marine hulls, submarines and rockets) reduce to the construction of discrete models of very high dimension. To reduce the dimensionality of discrete models, three-dimensional multigrid finite elements (MgFE) are used. When constructing a composite MgFE, a nested grid system is used. A fine grid is generated by a basic partitioning of the MgFE that arbitrarily closely takes into account its heterogeneous structure and shape (without increasing the dimension of the MgFE). On large grids the functions of movements applied to the decrease of dimension of basic splitting allowing to project MgFE of small dimension are determined by FEM. The MgFE displacement functions and stress state described by the equations of the three-dimensional elasticity problem are represented in local Cartesian coordinate systems. In this case MgFE of cover type has no movements as rigid whole. In the study the method of the forming final elements (FE) for creation of elastic three-dimensional composite (uniform) MgFE of two types is offered. Curvilinear type 1 MgFE are obtained by turning a given

en plane forming FE around a given axis at a given angle, type 2 MgFE – by parallel moving forming FE in a given direction for a given distance. This approach allows projecting the design of MgFE which size is significantly larger (smaller) than others'. MgFE of the 1st and 2nd type are applied at calculation of composite covers of rotation, rings, round plates, disks, shaft, cylindrical covers with a variable radius of curvature, plates and beams of difficult form. The 1st and 2nd type MgFE are proposed for calculating three-dimensional stress state of the main power elements of the wings and fuselage of aircraft, ship hulls, submarines and missiles, corrugated plates and shells. The procedure of constructing the first and second type MgFE used to calculate the three-dimensional stress state of the primary structural members of the wings and aircraft fuselages, marine hulls, submarines and missiles (stringers, frames, spars, bulkheads, floor, deck and shells of various shapes) is considered. Proposed MgFE generate small dimensional discrete models. Upper errors of approximate solutions are proposed.

Keywords: elasticity, composites, multigrid final elements, beams, plates rings, shafts, covers of rotation and cylindrical covers.

Введение. Анализ напряженного состояния композитных оболочек вращения и цилиндрических оболочек по методу конечных элементов (МКЭ) [1] с применением уравнений трехмерной задачи теории упругости [2] приводит к построению базовых дискретных моделей высокой размерности. В основе построения приближенных (технических) теорий деформирования упругих композитных оболочек лежат гипотезы [3, 4], которые порождают решения с неустранимой погрешностью. Расчет конструкций больших размеров с применением технических теорий также сводится к построению дискретных моделей высокой размерности. Для понижения размерности таких моделей используются многосеточные конечные элементы (МНКЭ) [5–8], которые лежат в основе метода многосеточных конечных элементов [9–14].

В данной работе для проектирования трехмерных МНКЭ сложной формы и больших размеров предложен метод образующих конечных элементов (КЭ), который отличается от известных подходов построения МНКЭ [5–8]. Согласно методу, область МНКЭ получается путем заданного перемещения в трехмерном пространстве плоского односеточного КЭ (1сКЭ) заданной формы и порядка, который будем называть образующим 1сКЭ. Предложенный метод позволяет проектировать МНКЭ двух типов. МНКЭ 1-го типа получаются путем поворота образующего 1сКЭ вокруг заданной оси на заданный угол, МНКЭ 2-го типа – путем параллельного перемещения образующего КЭ вдоль заданной прямой, перпендикулярной к плоскости образующего КЭ (любая точка образующего КЭ перемещается по прямой, параллельно заданной) на заданное расстояние. Узлы образующего 1сКЭ являются узлами крупной сетки МНКЭ, причем узлы всякого поперечного сечения крупной сетки МНКЭ являются узлами образующего 1сКЭ. Такой подход упрощает процедуру построения функций перемещений на крупных сетках МНКЭ сложной формы, в которой используются степенные и (по направлению движения образующего КЭ) лагранжевы полиномы. Предлагаемый метод позволяет проектировать МНКЭ, один характерный размер которых значительно больше (меньше) других.

Криволинейные МКЭ 1-го и 2-го типа применяются для расчета трехмерного напряженного состояния композитных оболочек вращения [13, 14], круглых пластин [14], дисков, колец, валов, цилиндрических оболочек с переменным радиусом кривизны, пластин, прямолинейных и криволинейных балок сложного поперечного сечения. Кратко изложены процедуры построения МКЭ 1-го и 2-го типа для расчета трехмерного напряженного состояния основных силовых элементов крыльев и фюзеляжей самолетов, корпусов кораблей, подводных лодок и ракет. Рассмотрено проектирование криволинейных МКЭ с помощью суперэлементов с внутренними узлами, применение которых приводит к уменьшению погрешности решений.

Цель исследований. Разработка процедур построения упругих трехмерных композитных (однородных) многосеточных конечных элементов сложной формы и больших размеров.

Методы и результаты исследований. В данной работе для построения упругих трехмерных композитных МКЭ предлагается метод образующих КЭ. Согласно предложенному методу, область трехмерного МКЭ получается путем соответствующего перемещения в трехмерном пространстве плоского образующего КЭ заданной

формы и порядка. При построении МКЭ используются степенные и лагранжевые полиномы и уравнения трехмерной задачи теории упругости, представленные в локальных декартовых системах координат. Предлагаемые МКЭ эффективны при расчете композитных оболочек вращения, цилиндрических оболочек, балок и пластин сложной формы при произвольном статическом нагружении.

1. Метод образующих конечных элементов

1.1. Композитные трехмерные двухсеточные КЭ 1-го типа. Оболочки вращения. Рассмотрим построение трехмерных композитных двухсеточных КЭ (2скЭ) 1-го типа на примере расчета упругой композитной оболочки вращения V_0 постоянной толщины h . Отметим, что срединная поверхность оболочки V_0 получается в результате вращения плоской кривой ap (образующей кривой) относительно оси (оболочки), лежащей в плоскости этой кривой. Область оболочки V_0 представляем трехмерными 2скЭ V_d (рис. 1), где $ds = l/m_1$, m_1 – задано, l – длина образующей кривой ap , cd – ось оболочки. По толщине оболочки используем один 2скЭ.

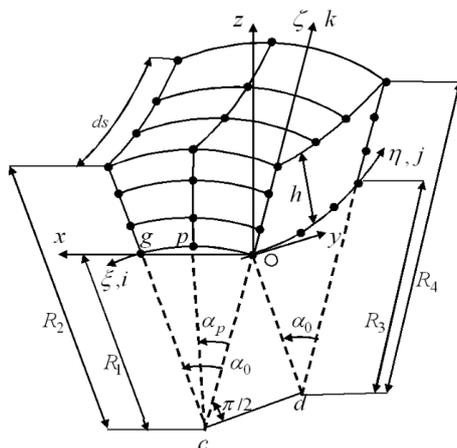


Рис. 1. Оболочечный 2скЭ V_d

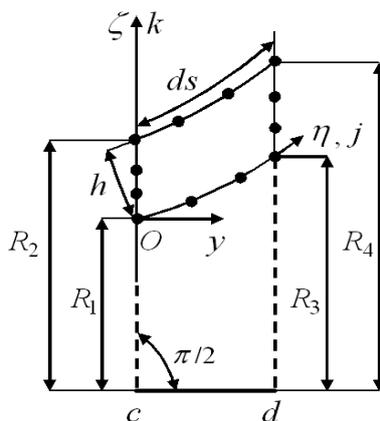


Рис. 2. Образующий 1скЭ V_d^a

Область 2скЭ V_d образуется путем поворота образующего 1скЭ V_d^a сложной формы (рис. 2) вокруг оси

cd оболочки на угол α_0 , отвечающий разбиению оболочки на 2скЭ, $\alpha_0 = 2\pi/m_2$, m_2 – задано. Узлы об-

разующего 1скЭ V_d^a 3-го порядка отмечены точками. Угол α_0 будем называть углом раствора 2скЭ V_d . На рисунке 1 радиусы R_1, R_3 (R_2, R_4) описывают нижние (верхние) границы боковых поверхностей 2скЭ V_d . Считаем, что между компонентами неоднородной структуры 2скЭ V_d связи идеальны. Область 2скЭ V_d представляем базовым разбиением R_d , которое состоит из (базовых) однородных криволинейных 1скЭ V_e 1-го порядка (подробно в [5]). Разбиение R_d учитывает неоднородную структуру, сложную форму 2скЭ V_d и порождает мелкую сетку $h_d, e=1, \dots, M$, где M – общее число 1скЭ V_e . На мелкой сетке h_d определяем крупную сетку H_d 2скЭ V_d , узлы которой на рисунке 1 отмечены точками (36 узлов). Отметим, что в общем случае некоторые узлы крупных сеток МКЭ могут не совпадать с узлами мелких сеток. Функции перемещений, напряжений и деформаций 1скЭ V_e удовлетворяют закону Гука и соотношениям Коши, которые отвечают трехмерной теории упругости [2] и записаны в локальной декартовой системе координат 1скЭ V_e , т.е. во всей области 1скЭ V_e , следовательно, и в области 2скЭ V_d реализуется трехмерное напряженное состояние. Узлы образующего 1скЭ являются узлами крупной сетки 2скЭ. Значит, узлы всякого поперечного сечения крупной сетки 2скЭ являются узлами образующего 1скЭ. Для 2скЭ V_d введем две локальные системы координат: декартовую $Oxyz$ и криволинейную $O\xi\eta\zeta$, как показано на рисунках 1, 2. Начало координат этих систем совпадает и находится в узле O крупной сетки H_d . Плоскость $O\eta\zeta$ проходит через ось cd оболочки. Отметим, что образующий 1скЭ V_d^a лежит в плоскости $O\eta\zeta$ (см. рис. 2). Ось $O\eta$ проходит по нижней границе образующего 1скЭ V_d^a , ось $O\xi$ – по нижней границе боковой поверхности 2скЭ, описанной радиусом R_1 , ось $O\zeta$ является продолжением радиуса Oc вращения начала системы координат $O\xi\eta\zeta$ (т.е. узла O сетки H_d) (см. рис. 1). Ось Oy расположена в плоскости $O\eta\zeta$, причем, $Oy \perp Oz$. Ось Ox перпендикулярна биссектрисе угла α_0 раствора 2скЭ V_d , т.е. проходит через крайние узлы (через узлы O, g) крупной сетки H_d , лежащие на оси $O\xi$ (см. рис. 1). Так как плоскость $O\eta\zeta$ перпендикулярна плоскости

$O\xi\zeta$, то $Ox \perp Oy$. Для узлов крупной сетки H_d введем криволинейную целочисленную систему координат $Oijk$ (см. рис. 1, 2), где $j, k = 1, \dots, 4, i = 1, \dots, 3$. Ось Oi совпадает с осью $O\xi$. Оси Oj, Ok совпадают со смежными сторонами 1скЭ V_d^a (см. рис. 2). Для узла p имеем $i = 2, j, k = 1$. При малых углах α_0 считаем

$$x = \xi, \quad z = \zeta. \quad (1)$$

Полином $P_d(y, \zeta)$ для 1скЭ V_d^a 3-го порядка (см. рис. 2), представленный в локальной декартовой системе координат $Oy\zeta$, имеет вид

$$P_d(y, \zeta) = a_1 + a_2 y + a_3 \zeta + a_4 y \zeta + a_5 y^2 + a_6 \zeta^2 + a_7 y^2 \zeta + a_8 y \zeta^2 + a_9 y \zeta^3 + a_{10} y^3 \zeta + a_{11} y^3 + a_{12} \zeta^3. \quad (2)$$

Базисную функцию $\psi_{ijk}(x, y, \zeta)$ для узла (с целочисленными координатами) i, j, k крупной сетки H_d 2скЭ V_d определяем в форме

$$\psi_{ijk}(x, y, \zeta) = N_{jk}(y, \zeta) L_i(x), \quad (3)$$

где $N_{jk}(y, \zeta)$ – базисная функция узла j, k образующего 1скЭ V_d^a (см. рис. 2), отвечающая полиному $P_d(y, \zeta)$ вида (2), $j, k = 1, \dots, 4$, $L_i(x)$ – полином Лагранжа 2-го порядка

$$L_i(x) = \prod_{p=1, p \neq i}^3 (x - x_p) / (x_i - x_p), \quad (4)$$

где $i = 1, \dots, 3$, x_p – координата узла p крупной сетки H_d , лежащего на оси $O\xi$ (рис. 1).

Таким образом, базисные функции 2скЭ 1-го типа представляются степенными полиномами, которые являются функциями формы образующего КЭ, и полиномами Лагранжа в направлении вращения образующего КЭ вокруг заданной оси (оболочки). В силу малости угла α_0 раствора 2скЭ V_d (см. рис. 1) с учетом (1) имеем

$$x = \xi = \alpha R_1; \quad x_i = \xi_i = \alpha_i R_1; \\ x_p = \xi_p = \alpha_p R_1; \quad i, p = 1, \dots, 3, \quad (5)$$

где α – угол раствора точки ξ ; α_p – угол раствора узла p крупной сетки 2скЭ V_d , лежащего на оси $O\xi$ (см. рис. 1).

Учитывая представления (5) в формулах (3), (4), получаем

$$\psi_{ijk}(\alpha, y, \zeta) = N_{jk}(y, \zeta)L_i(\alpha), \quad (6)$$

где

$$L_i(\alpha) = \prod_{p=1, p \neq i}^3 \frac{\alpha - \alpha_p}{\alpha_i - \alpha_p}, \quad i = 1, \dots, 3. \quad (7)$$

При $\psi_{ijk}(\alpha, y, \zeta) = L_i(\alpha)L_j(y)L_k(\zeta)$ получаем случай, описанный в [6, 7].

Для каждого узла i, j, k сетки H_d определим целое $\beta \geq 1$, введем обозначение $N_\beta = \psi_{ijk}$, $\beta = 1, \dots, 36$. Функции перемещений u_d, v_d, w_d 2скЭ V_d представим в виде

$$u_d = \sum_{\beta=1}^{36} N_\beta u_\beta, \quad v_d = \sum_{\beta=1}^{36} N_\beta v_\beta, \quad w_d = \sum_{\beta=1}^{36} N_\beta w_\beta, \quad (8)$$

где $N_\beta, u_\beta, v_\beta, w_\beta$ – базисная функция и перемещение β -го узла сетки H_d .

Функционал полной потенциальной энергии Π_d базового разбиения R_d 2скЭ V_d запишем в матричной форме

$$\Pi_d = \sum_{e=1}^M \left(\frac{1}{2} \delta_e^T [K_e] \delta_e - \delta_e^T \mathbf{P}_e \right), \quad (9)$$

где $[K_e], \mathbf{P}_e, \delta_e$ – матрица жесткости, векторы узловых сил и перемещений 1скЭ V_e , представленные в локальной декартовой системе координат $Oxyz$ 2скЭ V_d .

Используя (8), вектор узловых перемещений δ_e КЭ V_e выражаем через вектор узловых перемещений δ_d крупной сетки H_d 2скЭ V_d , т.е. определяем равенство

$$\delta_e = [A_e^d] \delta_d, \quad (10)$$

где $[A_e^d]$ – прямоугольная матрица, $e = 1, \dots, M$.

Подставляя (10) в (9) и выполняя принцип минимума полной потенциальной энергии для 2скЭ V_d , т.е. $\partial \Pi_d(\delta_d) / \partial \delta_d = 0$, получаем соотношение

$$[K_d] \delta_d = \mathbf{F}_d,$$

$$\text{где } [K_d] = \sum_{e=1}^M [A_e^d]^T [K_e] [A_e^d], \quad \mathbf{F}_d = \sum_{e=1}^M [A_e^d]^T \mathbf{P}_e,$$

здесь $[K_d]$ – матрица жесткости; \mathbf{F}_d – вектор узловых сил 2скЭ V_d .

Отметим, что функции (8) используются только для понижения размерности функционала (9), крупная сетка H_d определяет размерность 2скЭ V_d , размерность сетки H_d меньше размерности мелкой сетки h_d базового разбиения R_d .

Замечание 1. В силу (10) размерность вектора δ_d (т.е. размерность 2скЭ V_d) не зависит от M – общего числа КЭ V_e , из которых состоит область 2скЭ V_d . Следовательно, можно использовать сколь угодно мелкие базовые разбиения R_d , которые позволяют сколь угодно точно учитывать сложную форму, неоднородную и микро-неоднородную структуру 2скЭ V_d , сложный характер его закрепления и нагружения и сколь угодно точно описывать трехмерное напряженное состояние в области 2скЭ V_d (важно отметить, что без увеличения размерности 2скЭ V_d). Измельчение базовых разбиений МКЭ приводит к уменьшению погрешности решений.

Пусть образующий КЭ не имеет внутренних узлов (например, 1скЭ V_d^a , рис. 2). Тогда на базовом разбиении R_d 2скЭ V_d с помощью метода конденсации строим суперэлемент G_d [1, 5]. Полную потенциальную энергию 2скЭ V_d выражаем через суперэлемент G_d , т.е. матрицу жесткости и вектор узловых сил 2скЭ V_d определяем с помощью суперэлемента G_d . Расчеты показывают, что применение 2скЭ, построенных с помощью суперэлементов, приводит к уменьшению погрешности решений. Если 2скЭ порождают дискретные модели высокой размерности, то следует использовать (трехсеточные КЭ) 3скЭ (четырёхсеточные КЭ) 4скЭ и т.д. Отметим, что при построении 3скЭ используются два образующих КЭ V_1 и V_2 . Образующий КЭ V_1 применяется при построении 2скЭ, КЭ V_2 – при построении 3скЭ. Отметим, что узлы образующего КЭ V_2 являются узлами крупной сетки 3скЭ. Итак, при проектировании n -сеточного КЭ используются $n - 1$ образующих КЭ, причем узлы $n - 1$ образующего КЭ являются узлами крупной сетки n -сеточного КЭ.

1.2. Композитные трехмерные двухсеточные КЭ 2-го типа. Прямолинейные балки сложной формы. Цилиндрические оболочки. Рассмотрим процедуру построения трехмерных композитных 2скЭ 2-го типа на примере 2скЭ V_p (рис. 3), который представляет прямолинейную балку со сложным поперечным сечением, рас-

положенную в декартовой системе координат $Oxyz$. Балка имеет продольное отверстие, сечение которого на рисунке 3 заштриховано. Считаем, что между компонентами неоднородной структуры 2сКЭ V_p связи идеальны. Область 2сКЭ V_p представляем базовым разбиением R_p , которое состоит из однородных криволинейных

1сКЭ V_e 1-го порядка, $e = 1, \dots, M$; M – общее число 1сКЭ V_e . Во всей области 1сКЭ V_e , следовательно и в 2сКЭ V_p , реализуется трехмерное напряженное состояние (см. п. 1.1).

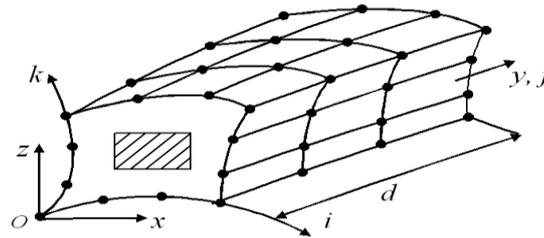


Рис. 3. 2сКЭ V_p балочного типа

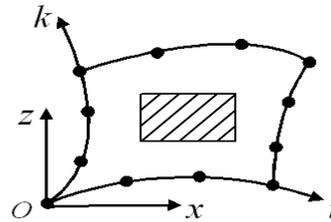


Рис. 4. Образующий 1сКЭ V_p^a

Разбиение R_p учитывает неоднородную структуру и сложную форму 2сКЭ V_p и порождает мелкую сетку h_p , на которой определяем крупную криволинейную сетку H_p 2сКЭ V_p , узлы которой отмечены точками (48 узлов, рис. 3). Область 2сКЭ образуется путем параллельного перемещения плоского образующего 1сКЭ V_p^a (рис. 4) сложной формы с отверстием (сечение которого заштриховано) вдоль оси Oy на заданное расстояние d (точка O области 1сКЭ V_p^a перемещается по оси Oy на расстояние d). Узлы 1сКЭ V_p^a 3-го порядка являются узлами крупной сетки H_p (отмечены точками, 12 узлов). Для узлов крупной сетки 2сКЭ V_p введена целочисленная криволинейная система координат $Oijk$. Оси Oi , Ok направлены по смежным сторонам 1сКЭ V_p^a (рис. 4), ось Oj по оси Oy (рис. 3), $i, j, k = 1, \dots, 4$. Базисную функцию $\psi_{ijk}(x, y, z)$ для узла (с целочисленными координатами) i, j, k крупной сетки H_p 2сКЭ V_p 2-го типа определяем в виде

$$\psi_{ijk}(x, y, z) = N_{ik}(x, z)L_j(y), \quad (11)$$

где $N_{ik}(x, z)$ – базисная функция узла i, k образующего 1сКЭ V_p^a (рис. 4), отвечающая полиному

$$P(x, z) = a_1 + a_2x + a_3z + a_4xz + a_5x^2 + a_6z^2 + a_7x^2z + a_8xz^2 + a_9xz^3 + a_{10}x^3z + a_{11}x^3 + a_{12}z^3, \quad (12)$$

$i, k = 1, \dots, 4$, $L_j(y)$ – полином Лагранжа 3-го порядка, имеющий вид

$$L_j(y) = \prod_{p=1, p \neq j}^4 (y - y_p) / (y_j - y_p),$$

где $j = 1, \dots, 4$, y_p – координата узла p крупной сетки H_p , лежащего на оси Oy (рис. 3).

Итак, базисные функции $\psi_{ijk}(x, y, z)$ 2сКЭ 2-го типа представляются степенными полиномами, которые являются функциями формы $N_{ik}(x, z)$ образующего КЭ и полиномами Лагранжа $L_j(y)$ в направлении (оси Oy , рис. 3) поступательного прямолинейного движения образующего КЭ. Отметим, что вместо полиномов Лагранжа $L_j(y)$, $j = 1, \dots, n$ можно использовать базисные функции $N_j(y)$, которые отвечают степенному полиному

$$P_n(y) \quad \text{вида}$$

$$P_n(y) = a_0 + a_1y + a_2y^2 + \dots + a_ny^n, \quad \text{где } a_i = \text{const.}$$

Основные соотношения для 2сКЭ V_p определяются по процедурам п. 1.1.

Замечание 2. Предложенный метод позволяет проектировать 2сКЭ (МнКЭ) сложной формы, у которых один характерный размер (в направлении Oy) значительно больше или меньше других. В направлении (оси Oy) большого характерного размера 2сКЭ целесообразно использовать высокий порядок аппроксимации перемещений (т.е. высокий порядок полинома Лагранжа $L_j(y)$), что позволяет строить решения с малой погрешностью. Отметим, что изложенные подходы применимы для построения и односеточных КЭ.

При расчете цилиндрической оболочки (с переменным радиусом кривизны) образующий КЭ (рис. 4) лежит в плоскости ее поперечного сечения и описывает геометрию сечения, ось Oy (рис. 3) параллельна прямой, которая является образующей срединной поверхности оболочки.

2. Расчет основных силовых элементов крыльев и фюзеляжей самолетов, корпусов кораблей, подводных лодок и ракет

Рассмотрим расчет трехмерного напряженного состояния крыльев и фюзеляжей самолетов, корпусов кораблей, подводных лодок и ракет с применением 2сКЭ (МнКЭ) 1-го и 2-го типа. Основными силовыми элементами таких конструкций являются композитные и однородные оболочки вращения и цилиндрические оболочки с переменным радиусом кривизны, прямолинейные и криволинейные балки (стрингеры, шпангоуты) со сложным поперечным сечением, продольные и поперечные стенки сложной формы (лонжероны, нервюры, переборки) и пластины различной толщины (пол самолета, палуба корабля).

2.1. Расчет крыла самолета. Пусть крыло самолета, расположенное в глобальной декартовой системе координат $OXYZ$, имеет две продольные вертикальные стенки (два лонжерона $L1, L2$), шесть продольных балок (стрингеров) и цилиндрическую оболочку сложной формы. На рисунке 5 схематично показаны силовые элементы крыла, расположение и сечения балок (стрингеров) отмечены точками.

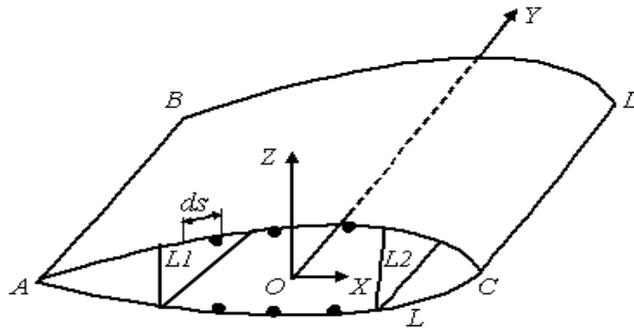


Рис. 5. Схема силовых элементов крыла

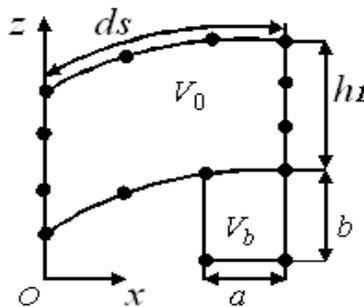


Рис. 6. Образующие 1сКЭ V_0, V_b

Отметим, что срединная поверхность цилиндрической оболочки образуется прямой линией AB , которая движется параллельно самой себе по произвольной кривой

$L, AB \parallel CD, AB = CD$ (на рис. 5 L – замкнутая кривая), ось Oy параллельна образующей прямой AB . В общем случае цилиндрические оболочки относятся к обо-

лочкам одинарной переменной кривизны. Дискретная модель крыла состоит из трехмерных 2сКЭ 2-го типа, которыми представляем продольные стенки толщиной h , балки и оболочку крыла (постоянной толщины h_1). Образующий 1сКЭ V_0 толщиной h_1 (рис. 6) для 2сКЭ V_e^0 длиной d (рис. 7) (который представляет оболочку крыла), имеет 12 узлов (которые являются узлами крупной сетки 2сКЭ V_e^0), отмеченные точками. Образующий 1сКЭ V_b (формы криволинейного прямоугольника размерами $a \times b$, рис. 6) для 2сКЭ V_α^b длиной d (рис. 7) (который представляет продольную балку), имеет 4 узла (которые являются узлами крупной сетки 2сКЭ V_α^b), отмеченные точками. Узлы крупных сеток 2сКЭ V_e^0 и 2сКЭ V_α^b на рисунке 7 отмечены точками. Области 2сКЭ V_e^0 , V_α^b

получаются путем параллельного перемещения образующих 1сКЭ V_0 , V_b (см. рис. 6) вдоль оси Oy на заданное расстояние d . Каждая точка образующих 1сКЭ V_0 , V_b движется по прямой, параллельной оси Oy . Размер d значительно больше других размеров 2сКЭ V_e^0 , V_α^b . 2сКЭ V_e^0 имеет 60 узлов 2сКЭ V_α^b – 20 узлов (рис. 7). Обозначим: $N_i(x, z)$ – функция формы i -го узла образующего 1сКЭ V_0 , которая отвечает полиному вида (12), представленного в локальной декартовой системе координат $Oxyz$ (рис. 7), т.е. Oxz (рис. 6), $i = 1, \dots, 12$. Пусть узлы p_1, \dots, p_5 крупной сетки 2сКЭ V_e^0 лежат на прямой, параллельной оси Oy (рис. 7).

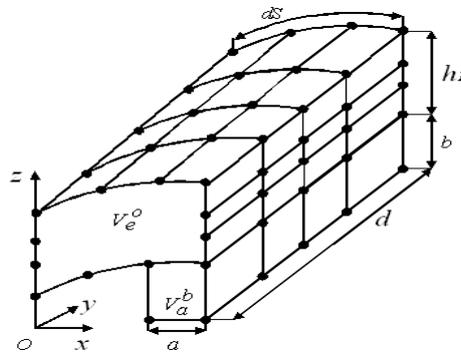


Рис. 7. 2сКЭ V_e^0 оболочечного типа, 2сКЭ V_α^b балочного типа

Введем полиномы Лагранжа $L_j(y)$ 4-го порядка, имеющие вид

$$L_j(y) = \prod_{p=1, p \neq j}^5 (y - y_p) / (y_j - y_p),$$

где y_j – координата узла p_j , $j = 1, \dots, 5$.

Для пары чисел i, j , где $i = 1, \dots, 12$, $j = 1, \dots, 5$, определим целое $\beta \geq 1$, $\beta = 1, \dots, 60$. Базисную функцию $\psi_\beta(x, y, z)$ для узла β крупной сетки 2сКЭ V_e^0 ищем в виде

$$\psi_\beta(x, y, z) = N_i(x, z)L_j(y), \quad (13)$$

где $i = 1, \dots, n_1$, $j = 1, \dots, n_2$, $\beta = n_1 n_2$ – общее число узлов крупной сетки 2сКЭ, для рисунка 7 имеем $n_1 = 12$, $n_2 = 5$, $\beta = 60$.

В формуле (13) базисные функции ψ_β 2сКЭ 2-го типа представляются функциями формы $N_i(x, z)$ образующего КЭ и в направлении движения образующего КЭ, т.е. по оси Oy , полиномами Лагранжа $L_j(y)$. Для 2сКЭ V_α^b (см. рис. 7) базисные функции $\psi_\beta(x, y, z)$ определяем по формуле (13), где $n_1 = 4$, $n_2 = 5$, $\beta = 20$, $N_i(x, z)$ – базисная функция i -го узла 1сКЭ V_b , которая отвечает полиному $P_b(x, z) = a_1 + a_2 x + a_3 z + a_4 xz$, представленному в локальной декартовой системе координат $Oxyz$ (рис. 7), т.е. Oxz (см. рис. 6). Продольные стенки крыла представляем 2сКЭ V_r^S формы прямоугольного параллелепипеда. Область 2сКЭ V_r^S (рис. 8) получается путем параллельного перемещения образующего 1сКЭ V_S (рис. 9) вдоль оси Ox на расстояние h .

Размеры B, H 2сКЭ V_r^S значительно больше h (толщины стенки). 2сКЭ V_r^S имеет 36 узлов.

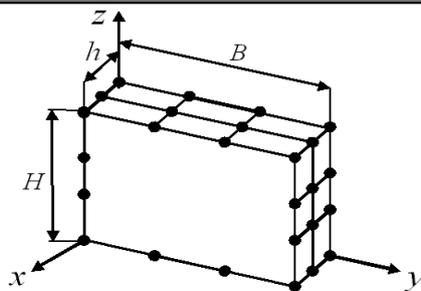


Рис. 8. 2сКЭ V_r^S (стенки крыла)

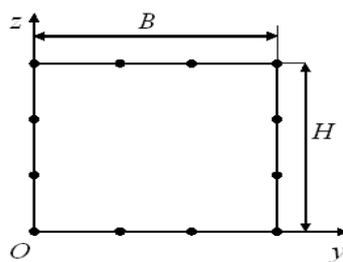


Рис. 9. Образующий 1сКЭ V_S

Базисную функцию $\psi_\beta(x, y, z)$ для узла β крупной сетки 2сКЭ V_r^S представим в виде (в направлении движения образующего КЭ, т.е. по оси Ox используем полиномы Лагранжа)

$$\psi_\beta(x, y, z) = N_i(y, z)L_j(x), \quad (14)$$

где $i = 1, \dots, 12$, $j = 1, \dots, 3$, $\beta = 1, \dots, 36$, $L_j(x)$ – полиномы Лагранжа 2-го порядка, которые определяются для узлов крупной сетки 2сКЭ V_r^S , лежащих на оси Ox (см. рис. 8), $N_i(y, z)$ – функция формы i -го узла образующего 1сКЭ V_S , которая отвечает полиному

$$P_S(y, z) = a_1 + a_2y + a_3z + a_4yz + a_5y^2 + a_6z^2 + a_7y^2z + a_8yz^2 + a_9yz^3 + a_{10}y^3z + a_{11}y^3 + a_{12}z^3,$$

записанному в локальной декартовой системе координат $Oxyz$ (см. рис. 8), т.е. Oyz (рис. 9).

2.2. Расчет корпуса корабля. Пусть фрагмент корпуса корабля (симметричный относительно плоскости Oyz , $Oxyz$ – декартова система координат) имеет пять продольных балок l_1 , четыре криволинейных балки (шпангоута) l_2 , продольную стенку B , пластину (палубу) S и поперечную стенку (переборку) A (рис. 10). Продольные стенки типа B , балки l_1 и оболочка корпуса корабля представляются 2сКЭ (МНКЭ), построение которых рассмотрено в п. 2.1. Рассмотрим поперечную криволинейную балку (шпангоут) l_2 корабля (рис. 10). Область 2сКЭ V_L^a (рис. 11), который аппроксимирует балку l_2 , получается путем параллельного перемещения образующего 1сКЭ V_L (рис. 12) вдоль оси Oy на расстояние d , d – ширина балки.

Размеры поперечного сечения балки $h \times d$, где h – высота (толщина) балки, отвечают дуге ds (рис. 11). Поперечная балка может иметь переменную толщину. Крупная сетка 2сКЭ V_L^a имеет 24 узла.

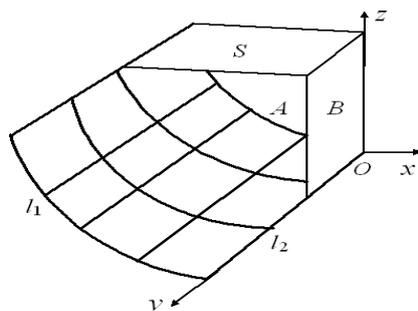


Рис. 10. Схема силовых элементов корпуса корабля

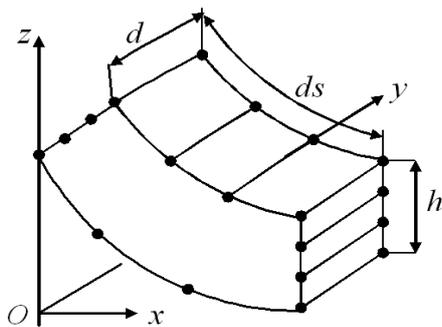


Рис. 11. 2сКЭ V_L^a типа шпангоут

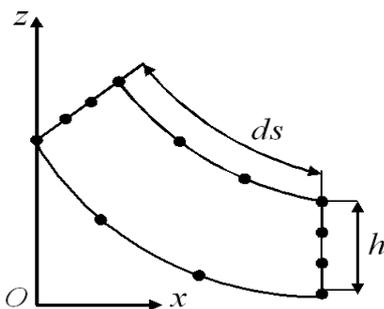


Рис. 12. Образующий 1сКЭ V_L

Базисную функцию $\psi_\beta(x, y, z)$ для узла β крупной сетки 2сКЭ V_L^a определяем в формуле (13), где $n_1 = 12$, $n_2 = 2$, $\beta = 24$, $N_i(x, z)$ – функция формы i -го узла образующего 1сКЭ V_L , которая отвечает полиному вида (12), записанного в локальной декартовой системе координат Oxz (см. рис. 11), т.е. Oxz (рис. 12), $L_j(y)$ – полиномы Лагранжа 1-го порядка. Стенку A представляем 2сКЭ различной формы. Размеры стенки A в направлении осей Ox , Oz значительно больше размера в направлении оси Oy . Область 2сКЭ V_g^b (рис. 13) получается путем параллельного перемещения образующего 1сКЭ V_g (рис. 14) вдоль оси Oy на расстояние h , h – толщина стенки. Крупная сетка 2сКЭ V_g^b имеет 27 уз-

лов. Базисную функцию $\psi_\beta(x, y, z)$ для узла β крупной сетки 2сКЭ V_g^b представляем в форме (13), где $n_1 = 9$, $n_2 = 3$, $\beta = 27$, $N_i(x, z)$ – функция формы i -го узла 1сКЭ V_g , которая отвечает полиному $P_g(x, z)$, вида

$$P_g(x, z) = a_1 + a_2x + a_3z + a_4xz + a_5x^2 + a_6z^2 + a_7x^2z + a_8xz^2 + a_9x^2z^2,$$

представленного в локальной системе координат Oxz (рис. 13), т.е. Oxz (рис. 14), $L_j(y)$ – полиномы Лагранжа 2-го порядка.

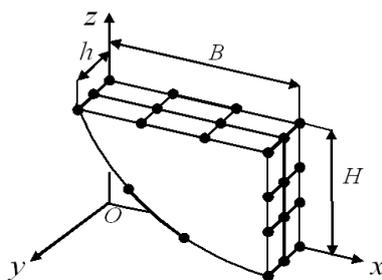


Рис. 13. 2сКЭ V_g^b (стенки A) V_g

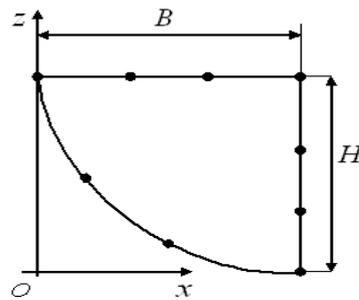


Рис. 14. Образующий 1сКЭ

Поперечные стенки типа А состоят из криволинейных 2сКЭ V_g^b и 2сКЭ формы прямоугольного параллелепипеда (типа 2сКЭ V_r^S , см. рис. 8). Характерные размеры B , H криволинейного 2сКЭ V_g^b (см. рис. 13) и 2сКЭ V_r^S значительно больше размера h . Отметим, что базовые разбиения криволинейных 2сКЭ могут быть сколь угодно мелкими, т.е. могут сколь угодно точно учитывать их сложную форму. Если 2сКЭ порождают дискретные модели высокой размерности, то следует использовать (трехсеточные) 3сКЭ или (четырёхсеточные) 4сКЭ и т.д.

При расчете трехмерного напряженного состояния фюзеляжей самолетов, корпусов подводных лодок и ракет, подкрепленных продольными и поперечными стенками, балками и пластинами, можно использовать 2сКЭ, которые проектируются с применением образующих 1сКЭ по процедурам п. 1, 2.

3. Расчет гофрированных пластин и оболочек. Рассмотрим расчет трехмерного напряженного состояния

гофрированных пластин и продольно-гофрированных цилиндрических оболочек толщиной h с применением трехмерных МНКЭ 1-го и 2-го типа. Для расчета гофрированной пластины (рис. 15) используются МНКЭ 2-го типа.

Дуга Oa представляется элементарными дугами ds_i , $ds_i = l_i / N$, l_i – длина дуги Oa , N – задано.

Для 2сКЭ V_W^p волнообразной пластины (см. рис. 15) образующий 1сКЭ V_W 3-го порядка показан на рисунке 16, узлы 1сКЭ V_W отмечены точками, Oxz – локальная система координат.

Для пластины с профилем гофра (рис. 17) используются тонкостенные 2сКЭ 2-го типа формы прямоугольного параллелепипеда. На рисунке 18 показана схема продольно-гофрированной (волнообразной) цилиндрической оболочки.

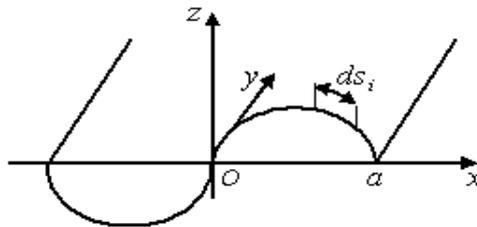


Рис. 15. Схема гофрированной пластины

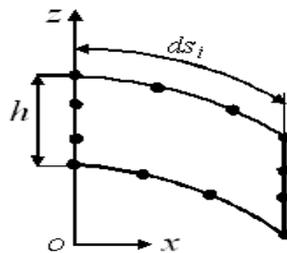


Рис. 16. Образующий КЭ V_W

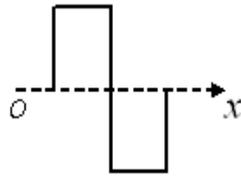


Рис. 17. Профиль гофра пластины

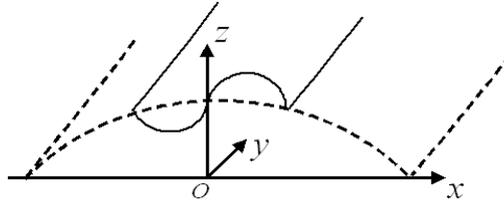


Рис. 18. Схема гофрированной оболочки

При расчете такой оболочки используются 2скЭ 2-го типа, которым отвечают образующие КЭ типа V_w (рис. 16).

4. Применение суперэлементов с внутренними узлами при построении криволинейных МКЭ. Рас-

смотрим криволинейные МКЭ 1-го типа. Пусть образующий 1скЭ V_1 3-го порядка для 2скЭ V_d оболочечного типа (см. рис. 1) имеет четыре внутренних узла (рис. 19).

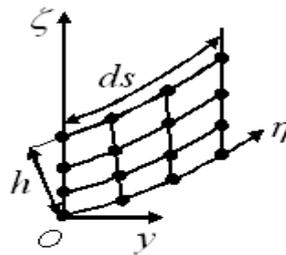


Рис. 19. Образующий 1скЭ V_1

В этом случае крупная сетка 2скЭ V_d имеет четыре внутренних узла. Вектор δ_h узловых перемещений мелкой сетки h_d базового разбиения R_d 2скЭ V_d представим в виде $\delta_h = \{\delta_g, \delta_0\}^T$, где δ_g (δ_0) – вектор перемещений граничных (внутренних) узлов сетки h_d . Пусть $\delta_0 = \{\delta_A, \delta_B\}^T$, где δ_B – вектор перемещений тех узлов мелкой сетки h_d , которые совпадают с внутренними узлами крупной сетки H_d 2скЭ V_d , $H_d \subset h_d$, δ_A – вектор остальных перемещений внутренних узлов сетки h_d . Выражаем узловые перемещения вектора δ_A через перемещения вектора δ_S , где $\delta_S = \{\delta_g, \delta_B\}^T$, т.е. строим равенство $\delta_A = [C]\delta_S$, где $[C]$ – прямоугольная матрица. В результате получаем суперэлемент с внутренними узлами (которые являются внутренними узлами крупной сетки H_d). Расчеты показывают, что применение криволинейных 2скЭ, постро-

енных с помощью суперэлементов с внутренними узлами, приводит к уменьшению погрешности решений.

5. Верхние оценки погрешностей приближенных решений. Нетрудно показать, что

$$\delta_n^w = \frac{|w_0 - w_0^n|}{w_0} \leq C_n^w = m \frac{|w_0^{n+p} - w_0^n|}{w_0^{n+p}},$$

$$\delta_n^\sigma = \frac{|\sigma_0 - \sigma_0^n|}{\sigma_0} \leq C_n^\sigma = m \frac{|\sigma_0^{n+p} - \sigma_0^n|}{\sigma_0^{n+p}}, \quad (15)$$

где w_0^n (σ_0^n) – максимальное перемещение (эквивалентное напряжение) дискретной модели R_n упругого тела, которая состоит из m -сеточных КЭ заданного типа, m – целое, $m \geq 2$, $n = 1, \dots, N$; m, N – заданы, w_0, σ_0 – точные решения для w_0^n, σ_0^n ; C_n^w, C_n^σ – верхние оценки для погрешностей $\delta_n^w, \delta_n^\sigma$, p – целое, задано, $p \geq 2$.

В (15) вместо $w_0^{n+p}, \sigma_0^{n+p}$ можно соответственно использовать $w_0^{N+p}, \sigma_0^{N+p}$.

Параметры p и N определяются для заданных типов МНКЭ и заданного закона измельчения тела на МНКЭ с помощью тестовых расчетов. Для мелких разбиений можно принять $p = 3 \div 5$. Отметим, что C_n^w, C_n^σ – приближенные оценки. Однако, с увеличением p и N (т.е. при измельчении разбиения тела на МНКЭ), оценки C_n^w, C_n^σ стремятся к погрешностям $\delta_n^w, \delta_n^\sigma$ (в этом случае $w_0^{N+p} \rightarrow w_0, \sigma_0^{N+p} \rightarrow \sigma_0$ при $N \rightarrow \infty$), что важно при построении приближенных решений с заданной малой погрешностью [15].

Замечание 3. Для композитов регулярной структуры больших размеров целесообразно использовать фиктивные модули упругости, которые определяются с помощью R -соотношений. Для трехмерных композитов R -соотношения представлены в работе [16], для двумерных композитов – в [17–19].

Замечание 4. Упругие МНКЭ проектируются с применением известных степенных и лагранжевых полиномов и уравнений трехмерной задачи теории упругости. Геометрические формы МНКЭ подобны формам известных 1сКЭ. При этом выполняется принцип минимума полной потенциальной энергии для каждого МНКЭ и для всей многосеточной дискретной модели тела. Это обеспечивает сходимость приближенных решений (при уменьшении размеров МНКЭ) к точным решениям, что подтверждается тестовыми расчетами и верификацией криволинейных МНКЭ [7].

Заключение. В данной работе предложен метод обрезающих конечных элементов для построения трехмерных композитных и однородных МНКЭ сложной формы с целью расчета композитных оболочек вращения и цилиндрических оболочек, и конструкций, у которых один характерный размер значительно больше (меньше) других размеров. Достоинства МНКЭ состоят в том, что они сколь угодно точно учитывают сложную форму конструкций, неоднородную структуру и описывают трехмерное напряженное состояние (без увеличения размерностей МНКЭ), образуют дискретные модели малой размерности.

Литература

1. Норри Д., де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов. – М.: Мир, 1981. – 304 с.
2. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высш. шк., 1982. – 264 с.
3. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 2008. – 430 с.
4. Голушко С.К., Немировский Ю.В. Прямые и обратные задачи механики упругих композитных пластин и оболочек вращения. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 420 с.
5. Матвеев А.Д., Гришанов А.Н. Одно- и двухсеточные криволинейные элементы трехмерных цилиндрических панелей и оболочек // Известия АлтГУ. Сер. Математика и механика. – 2014. – №1/1. – С. 84–89.

6. Матвеев А.Д., Гришанов А.Н. Многосеточные лагранжевые криволинейные элементы в трехмерном анализе композитных цилиндрических панелей и оболочек // Вестн. КрасГАУ. – 2015. – № 2. – С. 75–85.
7. Матвеев А.Д., Гришанов А.Н. Трехмерные композитные многосеточные конечные элементы оболочки типа // Известия АлтГУ. Сер. Физ.-мат. науки. – 2017. – № 4. – С. 120–125.
8. Матвеев А.Д. Расчет тонких пластин и оболочек с применением многосеточных конечных элементов со свободными границами // Вестн. КрасГАУ. – 2014. – № 3. – С. 44–47.
9. Матвеев А.Д. Метод многосеточных конечных элементов в расчетах трехмерных однородных и композитных тел // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2016. – Т. 158, Кн. 4. – С. 530–543.
10. Matveev A.D. Multigrid finite element method in stress of three-dimensional elastic bodies of heterogeneous structure // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. – 2016. – V. 158. – № 1. – Art. 012067. – P. 1–9.
11. Матвеев А.Д. Метод многосеточных конечных элементов в расчетах композитных пластин и балок // Вестн. КрасГАУ. – 2016. – № 12. – С. 93–100.
12. Матвеев А.Д. Метод многосеточных конечных элементов в расчетах композитных пластин и балок сложной формы // Вестн. КрасГАУ. – 2017. – № 11. – С. 131–140.
13. Матвеев А.Д. Метод многосеточных конечных элементов // Вестн. КрасГАУ. – 2018. – № 2. – С. 90–103.
14. Матвеев А.Д. Метод многосеточных конечных элементов в расчетах композитных оболочек вращения и двоякой кривизны // Вестн. КрасГАУ. – 2018. – № 3. – С. 126–137.
15. Матвеев А.Д. Расчет упругих конструкций с применением скорректированных условий прочности // Изв. АлтГУ. Сер. Физ.-мат. науки. – 2017. – № 4. – С. 116–119.
16. Матвеев А.Д. Определение фиктивных модулей упругости для трехмерных композитов на основе жесткостных соотношений однородных конечных элементов // Вестн. КрасГАУ. – 2008. – № 5. – С. 34–47.
17. Матвеев А.Д. Определение фиктивных модулей упругости композитов сложной структуры с отверстиями // Вестн. КрасГАУ. – 2006. – № 5. – С. 212–222.
18. Матвеев А.Д. Совместное применение микро- и макроподходов в дискретном анализе двумерных композитов с малым коэффициентом наполнения // Численные методы решения задач упругости и пластичности: тр. XXI Всерос. конф. – Новосибирск: Параллель, 2009. – С. 158–167.
19. Матвеев А.Д. Взаимно однозначная связь между упругими и жесткостными коэффициентами однородных конечных элементов // Математические модели и методы их исследования: тр. Междунар. конф. – Красноярск, 2001. – Т. 2. – С. 90–93.

Literatura

1. Norri D., de Friz Zh. Vvedenie v metod konechnykh jelementov. – М.: Mir, 1981. – 304 s.

2. Samul' V.I. Osnovy teorii uprugosti i plastichnosti. – M.: Vyssh. shk., 1982. – 264 s.
3. Alfutov N.A., Zinov'ev P.A., Popov B.G. Raschet mnogoslujnyh plastin i obolochek iz kompozicionnyh materialov. – M.: Mashinostroenie, 2008. – 430 s.
4. Golushko S.K., Nemirovskij Ju.V. Prjamyje i obratnye zadachi mehaniki uprugih kompozitnyh plastin i obolochek vrashhenija. – M.: FIZMATLIT, 2008. – 420 s.
5. Matveev A.D., Grishanov A.N. Odn- i dvuhsetochnye krivolinejnye jelementy trehmernyh cilindricheskikh panelej i obolochek // Izvestija AltGU. Ser. Matematika i mehanika. – 2014. – №1/1. – S. 84–89.
6. Matveev A.D., Grishanov A.N. Mnogosetochnye lagranzhevyje krivolinejnye jelementy v trehmernom analize kompozitnyh cilindricheskikh panelej i obolochek // Vestn. KrasGAU. – 2015. – № 2. – S. 75–85.
7. Matveev A.D., Grishanov A.N. Trehmernye kompozitnye mnogosetochnye konechnye jelementy obolochecnogo tipa // Izvestija AltGU. Ser. Fiz.-mat. nauki. – 2017. – № 4. – S. 120–125.
8. Matveev A.D. Raschet tonkih plastin i obolochek s primeneniem mnogosetochnyh konechnykh jelementov so svobodnymi granicami // Vestn. KrasGAU. – 2014. – № 3. – S. 44–47.
9. Matveev A.D. Metod mnogosetochnyh konechnykh jelementov v raschetah trehmernyh odnorodnyh i kompozitnyh tel // Uchen. zap. Kazan. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki. – 2016. – T. 158, Kn. 4. – S. 530–543.
10. Matveev A.D. Multigrid finite element method in stress of three-dimensional elastic bodies of heterogeneous structure // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. – 2016. – V. 158. – № 1. – Art. 012067. – P. 1–9.
11. Matveev A.D. Metod mnogosetochnyh konechnykh jelementov v raschetah kompozitnyh plastin i balok // Vestn. KrasGAU. – 2016. – № 12. – S. 93–100.
12. Matveev A.D. Metod mnogosetochnyh konechnykh jelementov v raschetah kompozitnyh plastin i balok slozhnoj formy // Vestn. KrasGAU. – 2017. – № 11. – S. 131–140.
13. Matveev A.D. Metod mnogosetochnyh konechnykh jelementov // Vestn. KrasGAU. – 2018. – № 2. – S. 90–103.
14. Matveev A.D. Metod mnogosetochnyh konechnykh jelementov v raschetah kompozitnyh obolochek vrashhenija i dvojakoj krivizny // Vestn. KrasGAU. – 2018. – № 3. – S. 126–137.
15. Matveev A.D. Raschet uprugih konstrukcij s primeneniem skorrektirovannyh uslovij prochnosti // Izv. AltGU. Ser. Fiz.-mat. nauki. – 2017. – № 4. – S. 116–119.
16. Matveev A.D. Opredelenie fiktivnyh modulej uprugosti dlja trehmernyh kompozitov na osnove zhestkostnyh sootnoshenij odnorodnyh konechnykh jelementov // Vestn. KrasGAU. – 2008. – № 5. – S. 34–47.
17. Matveev A.D. Opredelenie fiktivnyh modulej uprugosti kompozitov slozhnoj struktury s otverstijami // Vestn. KrasGAU. – 2006. – № 5. – S. 212–222.
18. Matveev A.D. Sovmestnoe primenenie mikro- i makropodhodov v diskretnom analize dvumernyh kompozitov s malym koeficientom napolnenija // Chislennye metody reshenija zadach uprugosti i plastichnosti: tr. XXI Vseros. konf. – Novosibirsk: Parallel', 2009. – S. 158–167.
19. Matveev A.D. Vzaimno odnoznachnaja svjaz' mezhdu uprugimi i zhestkostnymi koeficientami odnorodnyh konechnykh jelementov // Matematicheskie modeli i metody ih issledovanija: tr. Mezhdunar. konf. – Krasnojarsk, 2001. – T. 2. – S. 90–93.



УДК 621.321

П.П. Долгих, Г.Н. Хусенов

ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ ОБЛУЧЕНИЯ НА УРОЖАЙНОСТЬ И КАЧЕСТВЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ САЛАТА СОРТОВ КРИЛДА И АУВОНА

P.P. Dolgikh, G.N. Khusenov

THE INFLUENCE OF RADIATION PARAMETERS ON THE PRODUCTIVITY AND QUALITATIVE CHARACTERISTICS OF SALAD OF KRILDA AND AUVONA VARIETIES

Долгих П.П. – канд. техн. наук, доц. каф. системозенергетики Красноярского государственного аграрного университета, г. Красноярск. E-mail: dpp10@yandex.ru

Хусенов Г.Н. – асп. каф. системозенергетики Красноярского государственного аграрного университета, г. Красноярск. E-mail: dpp10@yandex.ru

Dolgikh P.P. – Cand. Techn. Sci., Assoc. Prof., Chair of Systems of Energetics, Krasnoyarsk State Agrarian University, Krasnoyarsk. E-mail: dpp@rambler.ru

Khusenov G.N. – Post-Graduate Student, Chair of Systems of Energetics, Krasnoyarsk State Agrarian University, Krasnoyarsk. E-mail: dpp10@yandex.ru

Для получения качественной овощной продукции в технологическом процессе овощеводства защищенного грунта применяют светодиодные облучательные ус-

тановки, эффективность которых не вызывает сомнения. Установлено, что для управления продукционным процессом необходимо формировать спектр фитоизлу-