

$\varphi_{кр max}$ ) для комплектаций трактора JD-8310R с одинарными и двояными колесами составил соответственно 0,320–0,465 и 0,340–0,475.

2. Наиболее рациональной для выполнения всех трех групп операций почвообработки является масса трактора  $m_3 = 14936$  кг при  $m_{уд}^* = 66,09$  кг/кВт на двояных колесах. При такой величине  $m_3$  трактора тяговые агрегаты разного технологического назначения имеют наивысшие показатели энергетической эффективности в пределах номинального тягового диапазона ( $\Delta\varphi_{кр.н} = 0,370–0,450$ ).

### Литература

1. Парфенов А.П. Тенденции развития конструкций сельскохозяйственных тракторов // Тракторы и сельхозмашины. – 2015. – № 5. – С. 42–47.
2. Селиванов Н.И., Селиванов И.А., Шрайнер Э.Г. Технологическая потребность в высокомоощных колесных тракторах // Вестн. КрасГАУ. – 2014. – № 5. – С. 215–220.
3. Селиванов Н.И. Эксплуатационные параметры колесных тракторов высокой мощности // Вестн. КрасГАУ. – 2014. – № 3. – С. 176–184.
4. Селиванов Н.И., Макеева В.Н. Эксплуатационные параметры колесных тракторов для зо-

нальных технологий почвообработки // Вестн. КрасГАУ. – 2015. – № 2. – С. 56–63.

5. Селиванов Н.И., Макеева В.Н. Рациональное использование энергонасыщенных колесных тракторов в технологиях почвообработки // Вестн. КрасГАУ. – 2017. – № 3. – С. 58–65.

### Literatura

1. Parfenov A.P. Tendencii razvitija konstrukcij sel'skohozijsstvennyh traktorov // Traktory i sel'hozmashiny. – 2015. – № 5. – S. 42–47.
2. Selivanov N.I., Selivanov I.A., Shrajner Je.G. Tehnologicheskaja potrebnost' v vysokomoshhnyh kolesnyh traktorah // Vestn. KrasGAU. – 2014. – № 5. – S. 215–220.
3. Selivanov N.I. Jekspluatacionnye parametry kolesnyh traktorov vysokoj moshhnosti // Vestn. KrasGAU. – 2014. – № 3. – S. 176–184.
4. Selivanov N.I., Makeeva V.N. Jekspluatacionnye parametry kolesnyh traktorov dlja zonal'nyh tehnologij pochvoobrabotki // Vestn. KrasGAU. – 2015. – № 2. – S. 56–63.
5. Selivanov N.I., Makeeva V.N. Racional'noe ispol'zovanie jenergonasyshennyh kolesnyh traktorov v tehnologijah pochvoobrabotki // Vestn. KrasGAU. – 2017. – № 3. – S. 58–65.



УДК 539.3+532.5

И.О. Богульский

### ХРУПКОЕ РАЗРУШЕНИЕ ЛЕДЯНОГО СЛОЯ ПРИ Понижении Уровня ВОДЫ

I.O. Bogulsky

### BRITTLE FRACTURE OF ICE LAYER UNDER WATER LEVEL LOWERING

**Богульский И.О.** – д-р физ.-мат. наук, проф. каф. высшей математики и компьютерного моделирования Красноярского государственного аграрного университета, г. Красноярск. E-mail: bogul.io@ya.ru

**Bogulsky I.O.** – Dr. Phys. and Math. Sci., Prof., Chair of Higher Mathematics and Computer Modeling, Krasnoyarsk State Agrarian University, Krasnoyarsk. E-mail: bogul.io@ya.ru

*Настоящая работа продолжает изучение поведения толстого ледяного поля, плавающего на поверхности воды, при понижении уровня воды. Ранее рассматривалась стационарная задача о равновесии ледяного слоя вблизи плоского участка берега. Были изучены различные способы контакта с берегом, получено напряженно-деформируемое состояние ледяного поля, как со свободной верхней поверхностью, так и нагружен-*

*ного некоторой силой; выполнена оценка «опасной зоны». Натурные наблюдения разрушения льда говорят о наличии в ледяном поле двух характерных трещин: в месте контакта с берегом и на расстоянии 10–12 толщин. Однако в рамках стационарной задачи не удается объяснить возникновение второй трещины. Все это приводит к необходимости рассматривать динамику поведения ледяного поля после возникновения первой трещи-*

ны. В работе сделана попытка смоделировать поведение льда таким образом, чтобы напряженное состояние ледяного слоя давало концентрацию растягивающих напряжений вблизи берега и на некотором расстоянии от него, что, вероятно, и обеспечивает разрушение вблизи этих участков. В работе получено приближенное решение динамической контактной задачи, учитывающей несжимаемость воды, на которой плавает лед. Учет несжимаемости приводит к подпору ледяного поля водой и быстрому возникновению второй трещины. При численном решении задачи возникли серьезные трудности. Решение было основано на методах операционного исчисления. К краевой задаче для системы дифференциальных уравнений с частными производными от функций с тремя переменными было применено преобразование Лапласа по времени и косинус-преобразование Фурье по одной из пространственных переменных. Ограниченное решение полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений удалось выписать в виде сходящихся несобственных интегралов. Численное обращение преобразования Лапласа изображения неизвестной функции вызвало наибольшие трудности. Известные методы численного обращения оказались неприемлемы, так как они требуют знания порядка убывания изображения. Обращение пришлось делать с помощью синус- и косинус-преобразования Фурье с большим количеством узлов интегрирования. Вычисления обеспечили необходимую точность.

**Ключевые слова:** численное моделирование, упругая пластина, ортогональные полиномы.

*The work continues studying of behavior of thick ice field floating on water surface at abatement of water level. Earlier stationary task of equilibrium of ice layer near flat site of the coast was considered. Various ways of contact with the coast were studied, intense and deformable fortune of an ice field, as with free top surface, and loaded with some force come into; the assessment of "dangerous zone" is executed. Natural supervision of the destruction of ice testifies about the existence in the ice field of two characteristic cracks: in the place of contact with the coast and at the distance of 10–12 thickness. However, within stationary task it is not possible to explain the emergence of the second crack. All these results need considering dynamics of behavior of an ice field after the emergence of the first crack. In the study the attempt to simulate the behavior of ice is made so that the tension of an ice layer gave concentration of stretching tension near the coast and at some distance from it that is probable and provides destruction near these sites. In the study approximate solution of dynamic contact task considering incompressibility of water on*

*which ice floats was received. The accounting of incompressibility brings to the ice field subtime water and to fast emergence of the second crack. At numerical solution of the task there were serious difficulties. The decision was based on the methods of operational calculation. Laplace's transformation on time and Fourier's cosine transformation on one of spatial variables was applied to regional task to the system of differential equations with private derivative of functions with three variables. Limited decision of received system of ordinary differential equations managed to be written out in the form of meeting not own integrals. Numerical address of transformation of Laplace of the image of unknown function caused the greatest difficulties. Known methods of numerical address were unacceptable as they demand the knowledge of the order of decrease of the image. The address was necessary to do with the help of sine – and Fourier's cosine transformation with a large number of integrating knots. Calculations provided necessary accuracy.*

**Keywords:** numerical simulation, elastic plate, orthogonal polynomials.

**Введение.** Рассматривается динамическая задача о движении тяжелого ледяного поля, плавающего на поверхности воды после «мгновенной» смены граничных условий, связанной с возникновением трещины в месте контакта с берегом.

В рамках стационарной задачи не удается объяснить возникновение второй трещины. Это приводит к необходимости рассматривать динамику поведения ледяного поля после возникновения первой трещины, учитывать несжимаемость воды и инерционные члены, которые могут дать дополнительные растягивающие напряжения в слое.

Решение сформулированной динамической контактной задачи плоского упругого слоя и идеальной несжимаемой жидкости выявляет концентрацию существенных растягивающих напряжений на некотором участке, что обосновывает экспериментальный факт возникновения второй трещины.

**Динамика упругого слоя на упругом основании.** Рассмотрим задачу о движении упругого слоя под действием собственного веса на упругом основании. Пусть ледяное поле представляет собой полубесконечную упругую пластину толщиной  $h$  (рис. 1). Движение вызывается резкой сменой граничных условий. Левый торец, будучи начально жестко закрепленным в месте контакта с берегом, после возникновения трещины в месте заделки «мгновенно» освобождается, оставаясь опертым о берег. Таким образом, возникает возможность вращения вокруг точки опоры.

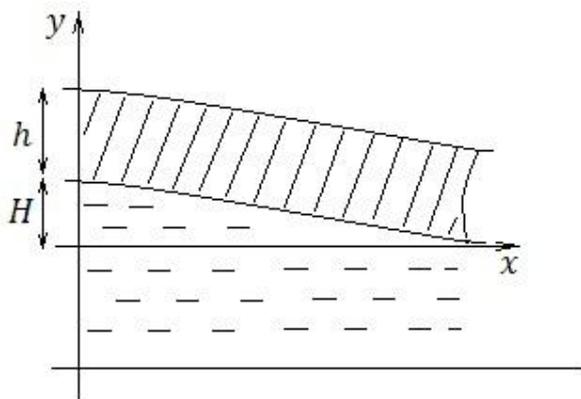


Рис. 1. Полубесконечный упругий слой

Задача состоит в определении в области  $D = \{0 \leq y \leq h, 0 \leq x \leq \infty\}$  являющимися функциями координат  $x, y$  и времени  $t$  компонент тензора напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$  и вектора смещений  $u, v$ . Известные функции удовлетворяют в области  $D$  уравнениям движения

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} + X_y = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (1)$$

закону Гука

$$\sigma_1 = \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \sigma_2 = \beta \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \tau_{12} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (2)$$

где  $\alpha = \lambda + 2\mu$ ;  $\beta = \lambda$ ;  $\lambda$  и  $\mu$  – упругие постоянные Ламе;  $X_y$  – проекция плотности массовых сил на ось  $y$ , граничным условиям на  $y = 0$  и  $y = h$ .

$$\tau_{12}|_{y=h} = 0, \quad \sigma_2|_{y=h} = 0, \quad \tau_{12}|_{y=0} = 0, \quad \sigma_2|_{y=0} = -X_y c(v|_{y=0} - kh).$$

Считаем, что неизвестные функции ограничены при  $x \rightarrow \infty$ . На левом торце  $x = 0$  выполнены граничные условия

$$\int_0^h u(x, y, t)|_{x=0} dy = \int_0^h v(x, y, t)|_{x=0} dy = 0, \\ = \int_0^h \sigma_1(x, y, t)|_{x=0} (2y - h) dy = 0.$$

Это означает, что торец имеет возможность вращаться. В начальный момент времени смещения  $u$  и  $v$  точек слоя известны и совпадают с решением статической задачи о равновесии упругого слоя с граничными условиями типа «жестко заделанного торца». Движение начинается без начальной скорости:

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0.$$

**Приближенное решение динамической задачи.** Решение получим предложенным в [1] методом.

Неизвестные функции  $d_i, q_i, s_i, u_i, v_i$  представляют собой первые члены разложения искомого компонента тензора напряжений и вектора смещений в ряды по полиномам Лежандра по толщине пластины и являются теперь функциями координаты  $x$  и времени  $t$ .

Таким образом, мы приходим к смешанной задаче для системы дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными.

Эта система уравнений имеет вид

$$d_1' = 3ps_0 + \rho/\mu \ddot{u}_1; \\ s_0' = p^2 b/2 v + \rho/\mu \ddot{v};$$

$$u_1' = 1/3 d_1; \quad v' = -pu_1.$$

Граничные условия для этой системы имеют вид  $v(0) = H; \quad d_1(0) = 0$ .

Начальные условия являются решением стационарной задачи

$$V|_{t=0} = He^{-bpx} [\cos(bpx) + \sin(bpx)], \\ V_t|_{t=0} = 0.$$

В итоге задача приводится к смешанной задаче для уравнений в частных производных четвертого порядка

$$\ddot{V}/tt + V_x^{(IV)} + 4V = 0;$$

$$V|_{x=0} = H; V_x''|_{x=0} = 0; \\ V|_{t=0} = He^{-x}(\cos x + \sin x); V_t|_{t=0} = 0.$$

Решать задачу будем методом разделения переменных, линейной заменой сделав краевые условия однородными.

Пусть  $V = T(t)X(x)$ , тогда

$$T X + \ddot{T} X_x^{(IV)} + 4TX = 0,$$

где  $X'|_{x=0} = X''|_{x=0} = 0$ , а  $X$  ограничено при  $x \rightarrow \infty$ .

В итоге получаем краевую задачу для определения  $X$

$$X^{(IV)} + 4(1 + \nu)X = 0, \\ X|_{x=0} = X''|_{x=0} = 0.$$

Окончательно полным решением задачи будет

$$V(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} [a(\lambda) \cos(t\sqrt{\lambda^4 + 4}) + \\ + b(\lambda) \sin(t\sqrt{\lambda^4 + 4})] \sin \lambda x d\lambda,$$

где функции  $a(\lambda)$  и  $b(\lambda)$  следует определять из начальных условий

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} b(\lambda) \sqrt{\lambda^4 + 4} \sin \lambda x d\lambda,$$

$$He^{-x} \sin x = \int_{-\infty}^{\infty} a(\lambda) \sin \lambda x d\lambda.$$

Таким образом,  $a(\lambda)$  и  $b(\lambda)$  являются функциями разложения начальных условий в синус-интеграл Фурье, следовательно,

$$V(x, t) = \\ \frac{2H}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda^4 + 4} \cos(t\sqrt{\lambda^4 + 4}) \sin \lambda x d\lambda.$$

Окончательное решение задачи имеет вид

$$V(x, t) = \\ = \frac{4H}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda^4 + 4} \cos(t\sqrt{\lambda^4 + 4}) \sin \lambda x d\lambda + \\ + He^{-x} \cos x.$$

Интеграл вычислялся численно методом с равностоящими узлами для вычисления синус- и косинус-интегралов Фурье [2] и по формуле трапеции по  $\lambda$ . Было выбрано 5000 узлов интегрирования, что обеспечило точность порядка  $10^{-4}$  при вычислении  $V(x, t)$ .

Для некоторых моментов времени кривые  $V(x, t)$  и  $\sigma_1(x, t)$  приведены на рисунках 2 и 3. Решение позволяет проследить движение упругой пластины вплоть до выхода на стационарное решение.

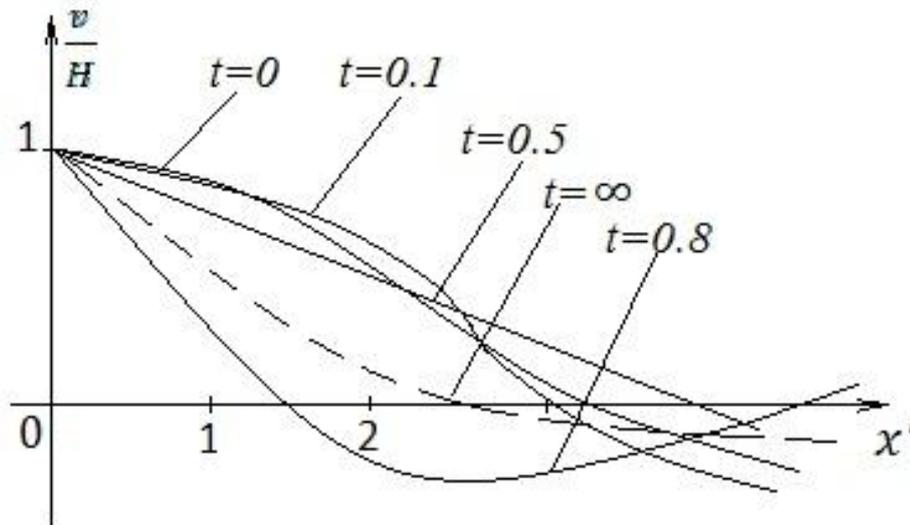


Рис. 2. Прогиб срединной поверхности упругого слоя

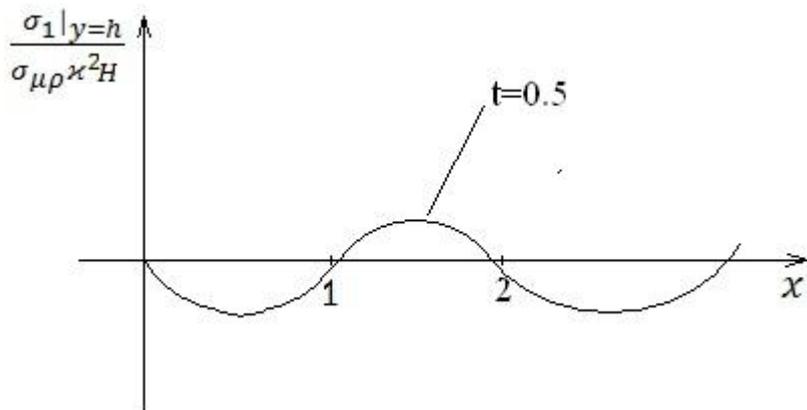


Рис. 3. Напряжения в упругом слое

Тем не менее необходимо признать, что описание процесса движения тяжелой полосы в рамках модели, рассматривающей воду лишь как упругое основание, не позволяет объяснить возникновение второй трещины. Учтем условие несжимаемости воды, которое при наличии близкой стенки, очевидно, обеспечит подпор упругого слоя жидкостью. Подобные постановки рассматривались в [3].

Таким образом, предлагается сформулировать плоскую задачу о контакте упругой полубесконечной полосы и полубесконечного объема идеальной несжимаемой жидкости.

**Динамическая контактная задача.** Пусть в области II:  $\{ -\infty < \tilde{y} \leq V|_{y=0}, 0 \leq x < \infty \}$  (рис. 4) потенциал скорости  $\varphi(x, \tilde{y}, t)$  и давление в жидкости  $P(x, \tilde{y}, t)$  удовлетворяют уравнению несжимаемости

$$\varphi_{xx} + \varphi_{\tilde{y}\tilde{y}} = 0$$

и интегралу Коши – Лагранжа

$$\frac{P}{\rho_B} = -g\tilde{y} - \frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

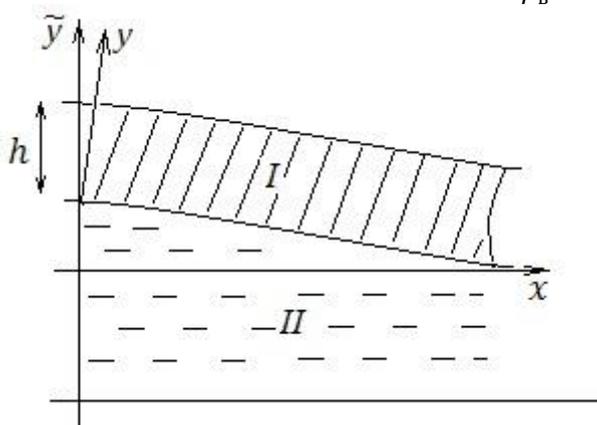


Рис. 4. Контакт упругого слоя и жидкости

На границе выполнено условие непротекания через стенку:  $\frac{\partial\varphi}{\partial x}|_{x=0} = 0$ . Потребуем, чтобы  $\varphi(x, \tilde{y}, t)$  и  $P(x, \tilde{y}, t)$  были ограничены при  $x \rightarrow \infty, \tilde{y} \rightarrow \infty$ .

В области I:  $\{0 \leq y \leq h, 0 \leq x < \infty\}$  компоненты вектора смещений  $u$  и  $V$  и тензора напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$  удовлетворяют сформулированным в предыдущем разделе уравнениям движения, закону Гука, граничным условиям на поверхности и краевым условиям на левом торце  $x = 0$ .

В начальный момент функции  $u$  и  $V$  – есть решение стационарной задачи с условием на торце в виде «жесткой заделки», и движение начинается без начальной скорости, т.е.  $u_t = V_t = 0$ . Кроме того, выполнены условия контакта пластины с жидкостью: совпадение скоростей

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tilde{y}}|_{\tilde{y}=V|_{y=0}} = \frac{\partial V}{\partial t}|_{y=0},$$

и равенство давлений

$$\sigma_2|_{y=0} = P|_{\tilde{y}=V|_{y=0}}.$$

Здесь  $\tilde{y}$ ,  $x$  – неподвижные эйлеровы координаты;  $y$ ,  $x$  – лагранжевы координаты; связанные с упругим слоем;  $\rho_v$  – плотность воды;  $g$  – ускорение свободного падения. Задача состоит в определении неизвестных функций  $\varphi, P, u, V, \sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$ , удовлетворяющих сформулированным выше дифференциальным уравнениям, граничным и начальным условиям и условиям контакта.

**Построение приближенного решения.** Предлагается приближенно определять напряженно-

деформируемое состояние упругой пластины (обл. I), а линеаризованное течение жидкости в обл. II определять точно. Линеаризация проводится так же, как и в [4], при изучении волн на свободной поверхности. В качестве приближенного метода принимается используемый выше, при решении динамической задачи, подход, основанный на разложении неизвестных функций в ряды по толщине пластины по полиномам Лежандра.

В итоге задача в первом приближении (с учетом малости параметра  $\kappa$ ) сводится к краевой задаче для уравнения Лапласа в четверти плоскости:

$$\begin{aligned} \varphi_{x'x'} + \varphi_{y'y'} &= 0, & V_{t't'} + V_{x'}^{(IV)} + 4V + m\varphi|_{y'=0} &= 0, \\ \varphi_{x'}|_{x'=0} &= 0, & \varphi_{y'}|_{y'=0} &= V_{t't'}, & V_{x'x'}|_{x'=0} &= 0, & V|_{x'=0} &= H, \\ V_{t'}|_{t'=0} &= 0, & V|_{t'=0} &= He^{-x'}(\cos x' + \sin x'). \end{aligned}$$

Здесь введены безразмерные переменные  $x' = \kappa r x, y' = \kappa r y, t' = \sqrt{g/4h} t, m = 1/2\kappa \approx 25, p = 2/h$ . В дальнейшем штрихи будем опускать.

Задача сводится к интегродифференциальному уравнению следующим образом. Для задачи Неймана для  $\varphi$  можно выписать функцию Грина

$$\begin{aligned} G(x, y, \xi, \eta) &= -\frac{1}{2\pi} \ln \left\{ [(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2]^{\frac{1}{2}} [(\xi + x)^2 + (\eta - y)^2]^{\frac{1}{2}} [(\xi + x)^2 \right. \\ &\quad \left. + (\eta + y)^2]^{\frac{1}{2}} [(\xi - x)^2 + (\eta + y)^2]^{\frac{1}{2}} \right\}. \end{aligned}$$

Затем выразить решение через функцию Грина и неизвестную пока функцию  $V$  и выписать  $\varphi$  при

$y \rightarrow 0$ . Тогда для определения функции  $V$  получим интегродифференциальное уравнение

$$V_{tt} + V_x^{(IV)} + 4V + \frac{m}{\pi} \int_0^\infty \ln|x^2 - \xi^2| V_{tt}(\xi) d\xi = 0.$$

Анализ уравнения показывает, что учет нежесткости вносит в уравнение динамики дополнительное слагаемое того же порядка, что и имеющиеся. Будем решать смешанную задачу для системы дифференциальных уравнений.

К системе уравнений

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad V_{tt} + V_x^{(IV)} + 4V + m\varphi|_{y=0} = 0, \quad \varphi_{x}|_{x=0} = 0, \quad \varphi_{y}|_{y=0} = V_{tt}$$

применим преобразование Лапласа по переменной  $t$ . Получим

$$s^2\tilde{V} - sHe^{-x}\sin x + \tilde{V}_x^{(IV)} + 4\tilde{V} + m\tilde{\varphi}|_{y=0} = 0,$$

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{xx} + \tilde{\varphi}_{yy} &= 0, \\ \tilde{\varphi}_y|_{y=0} &= s^2\tilde{V} - sHe^{-x}\sin x, & \tilde{\varphi}_x|_{x=0} &= 0, \end{aligned}$$

где величины с «волной» – изображение по Лапласу соответствующих функций. Умножим эти уравнения на  $\cos \lambda x$  ( $\lambda \geq 0$ ) и проинтегрируем по  $x$  от 0 до  $\infty$ . Получающаяся система обыкновенных дифференциальных уравнений по  $y$  для косинус-преобразований Фурье неизвестных функций, ограниченных при  $y \rightarrow -\infty$ , имеет тривиальное решение. Окончательно

$$\begin{aligned} \tilde{V}(x, s) &= \alpha(s)e^{-x} + \\ &+ \beta(s) \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda \cos \lambda x d\lambda}{[\lambda^5 + \lambda(s^2 + 4) + m s^2]} + \\ &+ \alpha(s) \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{[\lambda^3 - \lambda(s^2 + 4) - m s^2] \cos \lambda x d\lambda}{(\lambda^2 + 1)[\lambda^3 + \lambda(s^2 + 4) + m s^2]} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2Hs}{\pi} \int_0^\infty \frac{(2 + \lambda^2)(\lambda + m)\cos\lambda x \, d\lambda}{(\lambda^2 + 4)[\lambda^3 + \lambda(s^2 + 4) + ms^2]}, \\
 \beta(s) &= \frac{I_2 I_6 - I_3 I_5}{I_1 I_5 + I_2^2}, \quad \alpha(s) = \frac{I_2 I_3 + I_1 I_6}{I_1 I_5 + I_2^2}, \\
 I_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda \, d\lambda}{[\lambda^5 + \lambda(s^2 + 4) + ms^2]}, \quad I_2 = 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{[\lambda^3 - \lambda(s^2 + 4) - ms^2] \, d\lambda}{(\lambda^2 + 1)[\lambda^5 + \lambda(s^2 + 4) + ms^2]}, \\
 I_3 &= \frac{2sH}{\pi} \int_0^\infty \frac{(\lambda + m)(2 - \lambda^2) \, d\lambda}{(\lambda^4 + 4)[\lambda^5 + \lambda(s^2 + 4) + ms^2]}, \quad I_5 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{[\lambda(s^2 + 4) + ms^2] \, d\lambda}{[\lambda^5 + \lambda(s^2 + 4) + ms^2]}, \\
 I_6 &= -\frac{2sH}{\pi} \int_0^\infty \frac{(\lambda + m)(2 - \lambda^2)\lambda^2 \, d\lambda}{(\lambda^4 + 4)[\lambda^5 + \lambda(s^2 + 4) + ms^2]}.
 \end{aligned}$$

Оригинал  $V(x, t)$  определяется по изображению  $\tilde{V}(x, s)$  через интеграл Меллина

$$V(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} \tilde{V}(x, s) \, ds.$$

Все интегралы вычислялись на основе метода с равностоящими узлами. Обеспечивалась точность их вычисления до четвертого знака.

Не удалось применить специальные методы численного обращения преобразования Лапласа, для использования которых необходимо знать поряд-

ок убывания изображения по  $s$ . Интеграл Меллина просто сводился к синус- и косинус-интегралам Фурье. Было замечено, что изображение «медленно» убывает по  $s$ , что потребовало для получения необходимой точности большого количества узлов интегрирования.

**Выводы.** На рисунках 5 и 6 приведены прогибы  $V(x, t)$  и напряжения  $\sigma_1(x, t)$  на верхней поверхности пластины  $y = h$  в начальный момент времени  $t = 0$  и в момент времени  $t = 0,05$  с.

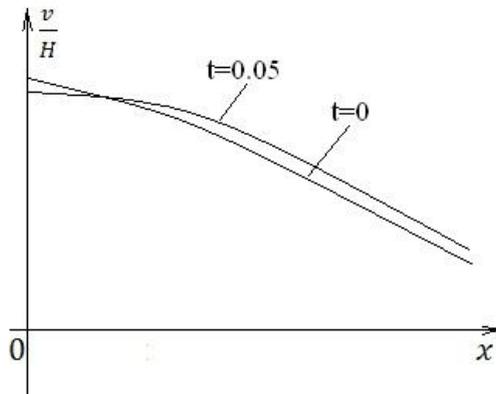


Рис. 5. Прогиб срединной поверхности упругого слоя

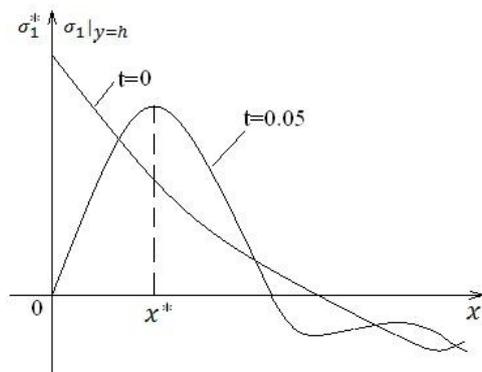


Рис. 6. Напряжения в упругом слое

На рисунке 6 при  $t = 0,05$  с видна существенная концентрация растягивающих напряжений в упругом слое на расстоянии приблизительно 10–12 толщин льда. Можно считать, что моделирование процесса хрупкого разрушения льда в рамках динамической контактной задачи упругого слоя и несжимаемой жидкости качественно описывает поведение ледяного поля, и факт появления второй трещины в рамках данной модели достаточно обоснован.

#### Литература

1. Иванов Г.В. Решение плоской смешанной задачи теории упругости в виде рядов по полиномам Лежандра // Прикладная механика и техническая физика. – 1976. – № 6. – С. 27–34.
2. Крылов В.И., Шульгина Л.Т. Справочная книга по численному интегрированию. – М.: Наука, 1966. – 370 с.

3. Слепян Л.И. Нестационарные упругие волны. – Л.: Судостроение, 1972. – 376 с.
4. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. – М.: Физматгиз, 1963. – Ч. I.

#### Literatura

1. Ivanov G.V. Reshenie ploskoj smeshannoj zadachi teorii uprugosti v vide rjadov po polinomam Lezhandra // Prikladnaja mehanika i tehniceskaja fizika. – 1976. – № 6. – S. 27–34.
2. Krylov V.I., Shul'gina L.T. Spravochnaja kniga po chislennomu integrirovaniju. – M.: Nauka, 1966. – 370 s.
3. Slepjan L.I. Nestacionarnye uprugie volny. – L.: Sudostroenie, 1972. – 376 s.
4. Kochin N.E., Kibel' I.A., Roze N.V. Teoreticheskaja gidromehanika. – M.: Fizmatgiz, 1963. – Ch. I.

УДК 539.3

А.Д. Матвеев

### ТЕОРЕМЫ ОБ УСЛОВИЯХ ПРОЧНОСТИ ДЛЯ УПРУГИХ КОНСТРУКЦИЙ С УЧЕТОМ ПОГРЕШНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ

A.D. Matveev

### STRENGTH CONDITION THEOREMS FOR THE ELASTIC STRUCTURES WITH A STRESS ERROR

**Матвеев А.Д.** – канд. физ.-мат. наук, доц., ст. науч. сотр. Института вычислительного моделирования СО РАН, г. Красноярск. E-mail: mtv241@mail.ru

**Matveev A.D.** – Cand. Phys.-Math. Sci., Assoc. Prof., Senior Staff Scientist, Institute of Computing Modeling, SB RAS, Krasnoyarsk. E-mail: mtv241@mail.ru

Как известно, для коэффициентов запаса упругих конструкций и деталей определенного класса (например, авиационных конструкций) заданы ограничения (условия прочности), т.е. значения коэффициентов запаса таких конструкций должны лежать в заданном диапазоне. Следует отметить, что ограничения задаются для коэффициентов запаса, которые отвечают аналитическим (точным) решениям задач теории упругости, сформулированных для конструкций. Построение аналитических (точных) решений для большинства конструкций, особенно сложной формы, связано с большими трудностями. Для ряда конструкций широко применяют приближенные подходы решения задач упругости, например технические теории деформирования однородных и композитных пластин, балок и оболочек. Технические теории, построенные на основе гипотез, порождают приближенные (технические) решения с не-

устранимой погрешностью, точное значение которой определить сложно. В расчетах конструкций на прочность при заданном малом диапазоне для коэффициентов запаса применение технических (сопроматовских) решений затруднительно. Однако существуют методы (например, метод конечных элементов) построения приближенных решений задач упругости со сколь угодно малой погрешностью. В данной работе предложены скорректированные условия прочности для упругих конструкций, которые учитывают погрешность напряжений. Предлагаемые условия прочности сформулированы в двух теоремах. Показано, что из выполнения скорректированных условий прочности для коэффициента запаса конструкции, который отвечает приближенному решению, следует выполнение заданных условий прочности для коэффициента запаса данной конструкции, который отвечает точному решению. Для заданных