

8. Ресурсосбережение при технической эксплуатации сельскохозяйственной техники: в 2 ч. – М.: Росинформагротех, 2001. – Ч. 2. – 420 с.
9. Хабардин В.Н. Ресурсосберегающие технологии, методы и средства технического обслуживания тракторов. – Иркутск: Изд-во ИрГСХА, 2009. – 384 с.
10. Черноиванов В.И., Северный А.Э., Пильщиков Л.М. Система технического обслуживания и ремонта машин в сельском хозяйстве. – М.: Изд-во ГОСНИТИ, 2001. – 168 с.
- L.V. Vershkova [i dr.]. – М.: Изд-во Goskomjekologii, 1999. – 41 s.
4. GOST 20793-2009. Traktory i mashiny sel'skhozjajstvennyye. Tehnicheskoe obsluzhivanie; Vved. 2011-05-01. – М.: Standartinform, 2011. – 19 s.
5. Nadezhnost' i jeffektivnost' v tehнике: sprav.: v 10 t. T. 1. Metodologija. Organizacija. Terminologija / red. V.S. Avduevskij. – М.: Mashinostroenie, 1986. – 224 s.
6. Nemcev A.E. Sistema tehnicheskogo servisa v APK. – Novosibirsk: Izd-vo RASHN, 2002. – 264 s.
7. Ozhegov S.I. Slovar' russkogo jazyka / pod red. N.Ju. Shvedovoj. – 21-e izd., pererab. i dop. – М.: Russkij jazyk, 1989. – 928 s.
8. Resursosberezhenie pri tehнической jekspluatacii sel'skhozjajstvennoj tehники: v 2 ch. – М.: Rosinformagroteh, 2001. – Ch. 2. – 420 s.
9. Habardin V.N. Resursosberegajushhie tehnologii, metody i sredstva tehнического obsluzhivaniya traktorov. – Irkutsk: Izd-vo IrGSHA, 2009. – 384 s.
10. Chernov Ivanov V.I., Severnyj A.Je., Pil'shnikov L.M. Sistema tehнического obsluzhivaniya i remonta mashin v sel'skom hozjajstve. – М.: Изд-во GOSNITI, 2001. – 168 s.

Literatura

1. Alliluev V.A., Anan'in A.D., Mihlin V.M. Tehnicheskaja jekspluacija mashinno-traktornogo parka: ucheb. posobie. – М.: Agropromizdat, 1991. – 367 s.
2. Al't V.V., Dobroljubov I.P., Savchenko O.F. Informacionnoe obespechenie jekspertizy sostojanija dvigatelej / pod red. V.V. Al'ta. – Novosibirsk: Izd-vo SO RASHN, 2001. – 220 s.
3. Vremennaja metodika opredelenija predotvrashhennogo jekologicheskogo ushherba /

УДК 539.3+532.5

И.О. Богульский

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНТАКТА ТОЛСТОГО УПРУГОГО СЛОЯ НА ОСНОВАНИИ ВИНКЛЕРОВСКОГО ТИПА ПЕРЕМЕННОГО УРОВНЯ С ВЕРТИКАЛЬНОЙ СТЕНКОЙ

I.O. Bogulsky

THE MODELING OF THE CONTACT OF THICK ELASTIC LAYER BASED ON WINKLER TYPE OF VARIABLE LEVEL AGAINST VERTICAL WALL

Богульский И.О. – д-р физ.-мат. наук, проф. каф. высшей математики и компьютерного моделирования Красноярского государственного аграрного университета, г. Красноярск. E-mail: bogul.io@ya.ru

Bogulsky I.O. – Dr. Phys. and Math. Sci., Prof., Chair of Higher Mathematics and Computer Modeling, Krasnoyarsk State Agrarian University, Krasnoyarsk. E-mail: bogul.io@ya.ru

В работе исследуется поведение толстого ледяного поля, плавающего на поверхности воды, вблизи плоского вертикального участка берега или сооружения при перепадах уровня воды в водоеме. Ледяное поле рассматривается в рамках модели плоской деформации как толстая полубесконечная упругая пластина на основании винклеровского типа при различных вариантах контакта с берегом. Натурные наблюдения и эксперименты свидетельствуют, что даже при небольшом, порядка 10 см, понижении уровня воды в водоеме либо повышении его (подпоре) вблизи берега в толстом ледяном поле возникают значительные напряже-

ния. При этом существенным оказывается влияние льда (толщиной порядка метра и более) на береговые сооружения, опоры мостов и др. При понижении уровня воды вблизи берега возникает так называемый «зависающий участок» – область сильно напряженного льда. Дальнейшее изменение уровня воды (20 см и более) обычно приводит к хрупкому разрушению в этой области – возникновению трещин. Оценка этой «опасной зоны» чрезвычайно важна для планирования различных работ со льда, прокладки зимников и т.д. С помощью расчетов, натурных наблюдений и экспериментов возможно моделировать природу контакта ледя-

ного поля с берегом или сооружением. Сформулирована и решена приближенно методом, основанным на аппроксимации неизвестных функций полиномами Лежандра, стационарная задача о напряженно-деформируемом состоянии полосы льда вблизи берега при понижении уровня воды. Рассмотрены случаи полосы, свободной от внешних нагрузок и нагруженной внешней силой. Полученное решение вполне удовлетворительно качественно и количественно согласуется с натурными наблюдениями и экспериментами. А именно – прослеживается возможность появления трещины в месте контакта льда с берегом. Натурный эксперимент проводился в порту Дудинка. Во время разгрузки барж, замороженных в толстый (0,6–0,8 м) лед, фиксировалось изменение профиля ледяного поля во время всплытия баржи до и после возникновения трещины.

Ключевые слова: численное моделирование, упругая пластина, ортогональные полиномы, винклеровский тип.

In the study the behavior of thick ice field floating on water surface near flat vertical site of the coast or the construction at differences of water level in the reservoir is investigated. The ice field is considered within the model of flat deformation as thick semi-infinite elastic plate on the basis of Winkler type at various options of contact with the coast. Natural supervision and experiments testify that even at small, about 10 cm, abatement of water level in the reservoir or increase to its (subtime) near the coast in a thick ice field considerable tension arises. Thus essential is ice influence (about a meter thick and more) on coastal constructions, support of bridges, etc. At abatement of water level near the coast there is so-called "hanging site" – the area of strongly intense ice. Further change of water level (20 cm and more) usually leads to fragile destruction in this area, i.e. to the emergence of cracks. The assessment of this of "dangerous zone" is extremely important for planning of various works from ice, laying of winter roads, etc. By means of calculations, natural supervision and experiments it is possible to model the nature of contact of ice field with the coast or the construction. It is formulated and solved approximately by the method based on the approximation of unknown functions by Legendre's polynoms, a stationary task about intense and deformable condition of a strip of ice near the coast at abatement of water level. The cases of the strip, free from external loadings and loaded external force were considered. Received decision will quite well qualitatively and quantitatively agree with natural supervision and experiments. Namely, the possibility of emergence of the crack in the place of contact of ice with the coast was traced. Natural experiment was made in the port of Dudinka. During unloading of barges, frozen in thick

(0.6–0.8 m) ice, the change of the profile of the ice field during emersion of the barge before the emergence of the crack was fixed.

Keywords: numerical simulation, elastic plate, orthogonal polynomials, Winkler type.

Введение. Исследуется поведение толстого ледяного поля, плавающего на поверхности воды, вблизи плоского вертикального участка берега при перепадах уровня воды. Ледяное поле рассматривается в рамках модели плоской деформации как упругая пластина на основании винклеровского типа. Натурные наблюдения и эксперименты говорят о том, что даже при небольшом, порядка 10 см, понижении уровня воды либо повышении его (подпоре) вблизи берега в толстом ледяном поле возникают значительные напряжения. При этом существенным оказывается влияние льда на береговые сооружения, опоры мостов и др. [1].

При понижении уровня воды вблизи берега возникает так называемый «зависающий участок» – область сильно напряженного льда. Дальнейшее изменение уровня воды (20 см и более) обычно приводит к хрупкому разрушению в этой области – возникновению трещин. Оценка этой «опасной зоны» чрезвычайно важна для планирования ведения различных работ со льда, прокладки зимников и т.д.

В работе сформулирована и решена приближенно методом, основанным на аппроксимации неизвестных функций полиномами Лежандра, стационарная задача о напряженно-деформируемом состоянии полосы льда вблизи берега при понижении уровня воды. Полученное решение вполне удовлетворительно качественно и количественно согласуется с натурными наблюдениями и экспериментами. Натурный эксперимент проводился в порту Дудинка. Во время разгрузки барж, замороженных в толстый (0,6–0,8 м) лед, фиксировалось изменение профиля ледяного поля во время всплытия баржи до и после возникновения трещины.

Цель исследований. Моделирование контакта толстого упругого слоя на основании винклеровского типа переменного уровня с вертикальной стенкой.

Постановка задачи. Рассматривается задача о напряженно-деформируемом состоянии ледяного поля вблизи плоского участка берега. Ледяной слой моделируется тяжелой полубесконечной пластиной (рис. 1), ограниченной с одной стороны прямолинейным участком берега. Пластина плавает на воде, т.е. находится на упругом основании (винклеровского типа). К верхней поверхности может быть приложена нагрузка. Координата x направлена вдоль пластины и отсчитывается от берега, координату y будем отсчитывать от нижней поверхности. Таким образом, имеем задачу о плоской деформации упругого слоя.

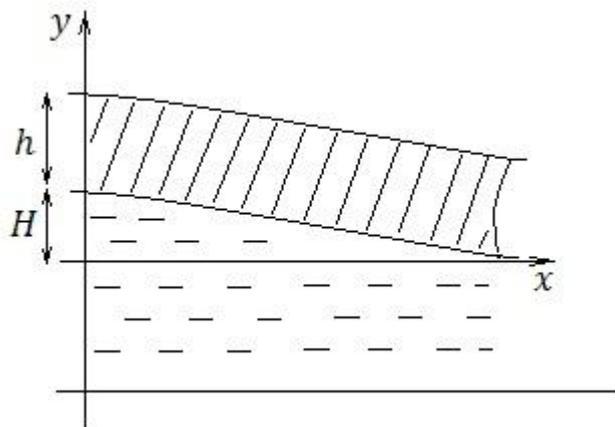


Рис. 1. Полубесконечный упругий слой

Натурные наблюдения показывают, что разрушение происходит уже при падении уровня на 20–30 см при толщине полосы около метра. Следовательно, задачу можно рассматривать в рамках линейной теории упругости, пренебрегая нелинейными членами, связанными с большими поворотами.

Математическая формулировка имеет вид: в области $D = \{0 \leq y \leq h, 0 \leq x \leq \infty\}$ определить компоненты тензора напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$ и вектора смещений u и v , удовлетворяющих уравнениям равновесия и закону Гука:

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} + X_y = 0; \quad (1)$$

$$\sigma_1 = \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \sigma_2 = \beta \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \sigma_1 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (2)$$

где $\alpha = \lambda + 2\mu$; $\beta = \lambda$; λ и μ – упругие постоянные Ламе; X_y – проекция плотности массовых сил на ось y . Неизвестные функции удовлетворяют граничным условиям на поверхностях $y = 0$ и $y = h$.

На нижней поверхности отсутствует трение, и пластина лежит на упругом основании

$$\tau_{12}|_{y=0} = 0, \quad \sigma_2|_{y=0} = -X_y c (v|_{y=0} - kh).$$

На верхнюю поверхность действует нагрузка

$$\tau_{12}|_{y=h} = \tau^*(x), \quad \sigma_2 = \sigma_2^*(x),$$

где τ^*, σ_2^* – заданные функции.

Рассмотрим задачу со свободной от нагрузки верхней поверхностью. В предыдущих формулах h – толщина льда; c – отношение плотностей воды и льда; $k = \frac{h-H}{h}$; H – перепад уровня воды.

Потребуем, чтобы при $x \rightarrow \infty$ неизвестные функции были ограничены. На левом торце должно быть выполнено одно из условий:

а) $\sigma_1 = \sigma_1^*, \tau_{12} = \tau_{12}^*$ – задана нагрузка, приложенная к торцу;

б) $v = v^*, u = u^*$ – задано смещение торца;

в) $\sigma_1 = \sigma_1^*, v = v^*$ – смещение по y и распределенное по торцу усилие;

г) $\tau_{12} = \tau_{12}^*, u = u^*$ – смещение торца и касательные напряжения заданы.

В рассматриваемой модельной задаче примем:

$$c=0,9; \quad \rho=10^3 \text{ кг/м}^3; \quad c_p = 3980 \frac{\text{м}}{\text{с}}; \quad c_s=1990 \text{ м/с}.$$

Далее у нас будет возникать малый безразмерный параметр $b \sim 0,02$ и при решении задачи величинами порядка b будем пренебрегать по сравнению с единицей.

Метод и результаты решения. Задача решается приближенным методом [2, 3], позволяющим свести ее к краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений, основанном на разложении неизвестных функций в ряды по толщине по полиномам Лежандра.

В качестве первого приближения примем следующее разложение по толщине для неизвестных функций:

$$\sigma_1 = d_0 P_0(z) + d_1 P_1(z), \quad \sigma_2 = q_0 P_0(z) + q_1 P_1(z),$$

$$\tau_{12} = s_0 P_0(z) + s_1 P_1(z) + s_2 P_2(z), \quad v = v_0 P_0(z) + v_1 P_1(z) + v_2 P_2(z),$$

$$u = u_0 P_0(z) + u_1 P_1(z) + u_2 P_2(z) + u_3 P_3(z).$$

Здесь переменная $z = y/h, 0 \leq z \leq 1$. $P_i(z)$ – смещенные полиномы Лежандра, ортогональные на отрезке $[0, 1]$.

Как отмечено в [4], представление напряжений и смещений в виде рядов по полиномам Лежандра является существенным преимуществом по сравнению с представлением в виде рядов по каким-либо

другим функциям. Первые члены рядов имеют вполне конкретный физический смысл, а именно: d_0, d_1, s_0 пропорциональны усилию, моменту и перерезывающей силе.

Будем удовлетворять системе уравнений упругости интегрально:

$$\int_0^h \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} \right) \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \end{pmatrix} dy = 0, \int_0^h \left(\frac{\partial \tau_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} + X_y \right) P_0 dy = 0,$$

$$\int_0^h (\sigma_1 - \alpha \varepsilon_1 - \beta \varepsilon_2) \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \end{pmatrix} dy = 0, \int_0^h (\sigma_2 - \beta \varepsilon_1 - \alpha \varepsilon_2) \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \end{pmatrix} dy = 0,$$

$$\int_0^h (\tau_{12} - 2\mu \varepsilon_{12}) \begin{cases} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{cases} dy = 0.$$

Деформации $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}$ принимаются в следующем виде:

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial}{\partial x} (u_0 P_0 + u_1 P_1), \varepsilon_2 = \frac{\partial}{\partial y} (v_0 P_0 + v_1 P_1 + v_2 P_2),$$

$$2\varepsilon_{12} = \frac{\partial}{\partial x} (v_0 P_0) + \frac{\partial}{\partial y} (u_0 P_0 + u_1 P_1 + u_2 P_2 + u_3 P_3).$$

Возникает система обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка, и ее решение

не вызывает проблем. В результате решения получим

$$v_0 = e^{-bpx} [c_1 \cos(bpx) + c_2 \sin(bpx)] - H, d_0 = 0,$$

$$v_0 = be^{-bpx} [(c_1 - c_2) \cos(bpx) + (c_2 + c_1) \sin(bpx)],$$

$$d_1 = 6\mu b^2 e^{-bpx} [c_2 \cos(bpx) - c_1 \sin(bpx)],$$

$$s_0 = -2\mu b^3 e^{-bpx} [(c_1 - c_2) \cos(bpx) + (c_2 - c_1) \sin(bpx)].$$

Окончательно необходимо определить c_1 и c_2 с помощью известных при $x = 0$ граничных условий.

Варианты контакта льда с берегом:

а) предположим, что полоса льда «примержла» к абсолютно твердой стенке, т.е.

$$v_0(0) = 0, u_1(0) = 0.$$

Тогда

$$v_0 = H [e^{-bpx} (\cos(bpx) + \sin(bpx)) - 1],$$

$$d_1 = 6\mu b^2 H e^{-bpx} [\cos(bpx) - \sin(bpx)].$$

Растягивающее напряжение $\sigma_1(x)$ будет наибольшим на поверхности $y = h$ при $x = 0$ – в месте заделки (рис. 3, кривая а). Как показывают наблюдения, именно здесь и происходит образование первой трещины. Смещение $v(x) = H + v_0(x)$ приведено на рисунке 2 (кривая а);

б) «свободно опертый торец»

Пусть $v_0 = 0, d_1 = 0$, тогда $c_1 = H, c_2 = 0$,

$$v_0 = H [e^{-bpx} \cos(bpx) - 1],$$

$$d_1 = 6\mu b^2 H e^{-bpx} \sin(bpx).$$

В этом случае растягивающее напряжение $\sigma_1(x)$ будет наибольшим на нижней поверхности $y = 0$ на расстоянии $x^* = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{\mu}{\rho g h}} h \approx 18 \div 19h$ от стенки (рис.3, кривая б). Смещение $v(x)$ приведено на рисунке 2 (кривая б).

Таким образом, при дальнейшем падении уровня воды возможно возникновение второй трещины на расстоянии $18 \div 19$ толщин льда от стенки.

Можно предположить, что осуществляется упругий контакт со стенкой, обусловленный ее податливостью;

в) «упругий контакт»

При $x = 0$ принимаем $v_0 = 0, d_1(0) = \beta u_1(0), 0 \leq \beta \leq \infty$.

Тогда

$$c_1 = H, c_2 = \frac{\beta}{6\mu b + \beta} H = \alpha H, 0 \leq \alpha \leq 1.$$

$$v_0 = H [e^{-bpx} (\cos(bpx) + \alpha \sin(bpx)) - 1],$$

$$d_1 = 6\mu b^2 H e^{-bpx} [\alpha \cos(bpx) - \sin(bpx)].$$

Момент и перемещение приведены на рисунках 2, 3 (кривые в).

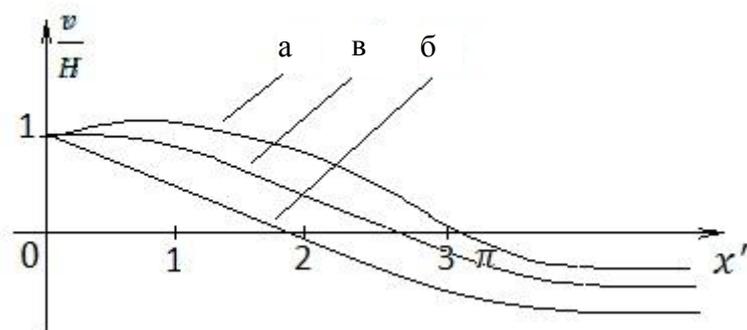


Рис. 2. Смещение срединной поверхности

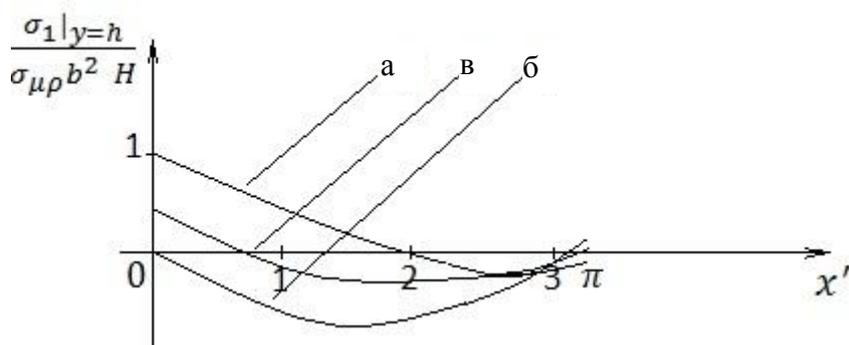


Рис. 3. Растягивающие напряжения в пластине

Деформация ледяного поля с учетом внешней нагрузки. В практических задачах представляет интерес расчет напряженно-деформируемого состояния «зависающего» участка льда с дополнительно приложенной нагрузкой на поверхности $y = h$. Расчет таких задач удобнее проводить, выделяя область с реальной нагрузкой, требуя сопряжения решения с решением в соседних областях.

Пусть на поверхности $y = h$ действует сила F , равномерно распределенная по отрезку $[L_1, L_2]$ (рис. 4). Задачу о деформации ледяного поля формулируем следующем образом.

В области $D_I = \{0 \leq y \leq h, 0 \leq x \leq L_1\}$ определить функции напряжения и перемещения, удовлетворяющие уравнению упругости.

В области $D_{II} = \{0 \leq y \leq h, L_1 \leq x \leq L_2\}$ определить функции напряжения и перемещения, удовлетворяющие уравнению упругости и крайевым условиям

$$\tau^*(x) = 0, \sigma_2^* = \frac{F}{L_2 - L_1},$$

а в области $D_{III} = \{0 \leq y \leq h, L_2 \leq x \leq \infty\}$, удовлетворяющие уравнениям упругости и условиям ограниченности на бесконечности.

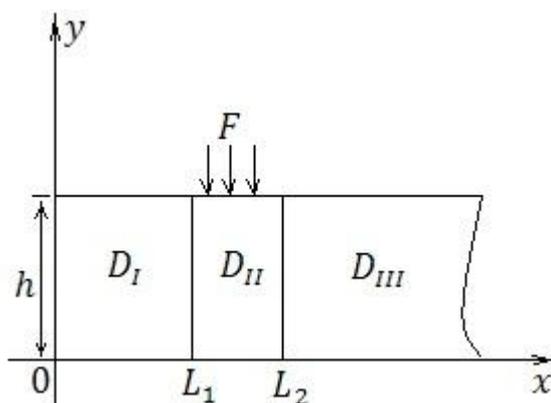


Рис. 4. Пластина под внешней нагрузкой

При $x = L_1$ и $x = L_2$ выполнены условия сопряжения решений. В итоге получаем:

$$\begin{aligned} V^I &= C_1 chx' cosx' + C_2 chx' sinx' + C_3 shx' cosx' + C_4 shx' sinx', \\ V^{II} &= K_1 chx' cosx' + K_2 chx' sinx' + K_3 shx' cosx' + K_4 shx' sinx' - \frac{kH}{l_2 - l_1}, \\ V^{III} &= D_1 chx' cosx' + D_2 chx' sinx' + D_3 shx' cosx' + D_4 shx' sinx', \end{aligned}$$

где $v(x) = H + v_0(x)$, $x' = bpx$, $l_1 = bpL_1$, $l_2 = bpL_2$, $k = \frac{2bF}{Hg\rho h}$.

$$\begin{aligned} u_1^r &= -b[(c_2^r + c_3^r)chx' cosx' + (c_4^r - c_1^r)chx' sinx' + (c_1^r + c_4^r)shx' cosx' + (c_2^r - c_3^r)shx' sinx'], \\ d_1^r &= 6\mu\rho b^2[c_4^r chx' cosx' - c_3^r chx' sinx' + c_2^r shx' cosx' - c_1^r shx' sinx'], \\ s_0^r &= -2\mu\rho b^3[(c_2^r - c_3^r)chx' cosx' - (c_4^r + c_1^r)chx' sinx' - (c_1^r - c_4^r)shx' cosx' + (c_2^r - c_3^r)shx' sinx']. \end{aligned}$$

Здесь $r = 1, 2, 3$, $c_i^1 = c_i$, $c_i^2 = k_i$, $c_i^3 = d_i$, $d_3 = d_1$, $d_4 = -d_2$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Десять неизвестных констант определяются из условия сопряжения.

Наиболее простым, но интересным вариантом приложения нагрузки к поверхности $y = h$ является случай действия сосредоточенной в точке силы.

Пусть $l_1 \rightarrow l_2$, при этом сила F остается постоянной. Перейдя к пределу по $l_1 \rightarrow l_2$, получим решение задачи о деформации упругой пластины под действием сосредоточенной силы.

Если условия на торце соответствуют задаче б, получаем

$$\begin{aligned} c_4 &= 0, c_1 = H, c_2 = kHe^{-l_1}(cosl_1 - sinl_1), c_3 = -H - kHe^{-l_1}(cosl_1 + sinl_1). \\ V^I(x) &= He^{-x}cosx + kHe^{-l_1}[(cosl_1 - sinl_1)chx' sinx' - (cosl_1 + sinl_1)shx' cosx'], \\ V^{III}(x) &= He^{-x}cosx + kHe^{-x}[(chl_1 sinl_1 - shl_1 cosl_1)cosx' - (chl_1 sinl_1 + shl_1 cosl_1)sinx']. \end{aligned}$$

Поперечное смещение точек пластины приведено на рисунке 5.

Распределение по длине напряжения – на рисунке 6.

В случае, если край пластины «вморожен» в жесткую стенку, получаем

$$\begin{aligned} c_2 + c_3 &= 0, c_1 = H, c_3 = -H - kHe^{-l_1}(cosl_1 + sinl_1), \\ c_4 &= H + kHe^{-l_1}(cosl_1 + sinl_1), c_4 = -H - 2kHe^{-l_1} sinl_1. \end{aligned}$$

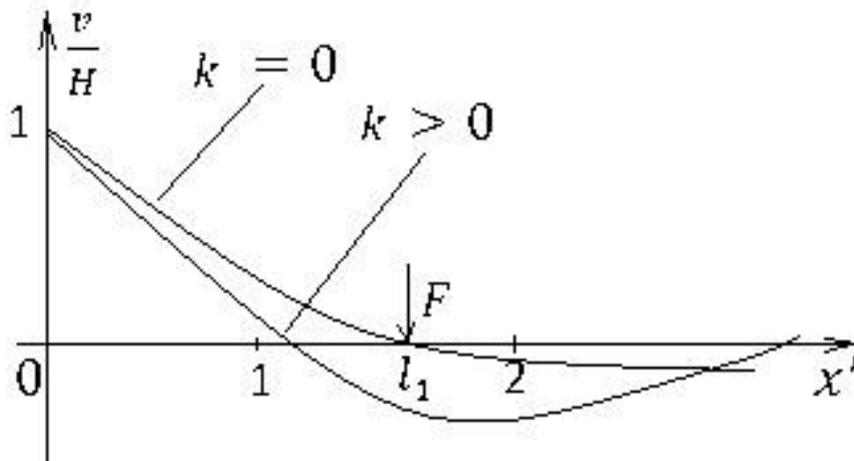


Рис. 5. Поперечное смещение пластины

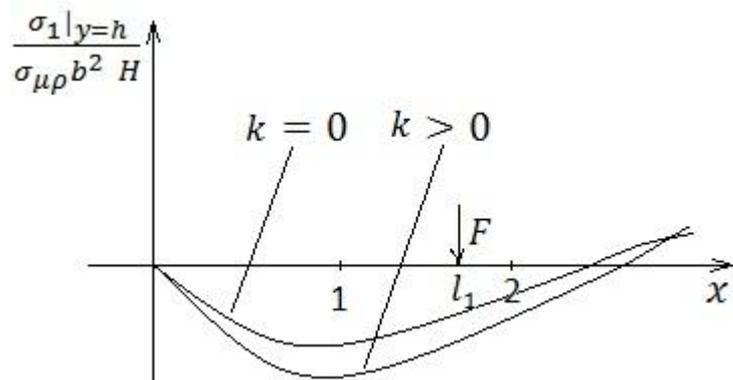


Рис. 6. Распределение напряжений по длине полосы

Выводы. Таким образом, можно сделать вывод, что растягивающее напряжение на верхней поверхности ледяного поля в месте заделки льда в берег не зависит от действия сосредоточенной силы F , если она приложена в точках

$$l_1 = \pi n, n = 0, 1, \dots$$

И наоборот, наибольшее влияние на растягивающие напряжения в месте заделки оказывает сосредоточенная сила, приложенная к поверхности льда в точке $l_1 = \frac{\pi}{4}$, т.е. на расстоянии приблизительно $18 \div 19$ толщин льда от берега.

Заметим, что это расстояние совпадает с «опасным» расстоянием, полученным в задаче о деформации свободной от нагрузок полосы льда со свободно опертым торцом.

Литература

1. Богородский В.В., Гаврило В.П. Лед. – Л.: Гидрометеиздат, 1980. – 385 с.
2. Иванов Г.В. Решение плоской смешанной задачи теории упругости в виде рядов по полиномам Лежандра // Прикладная механика и техническая физика. – 1976. – № 6. – С. 27–34.
3. Кикоин И.К. Таблицы физических величин. – М.: Атомиздат, 1976. – 1005 с.
4. Иванов Г.В. Теория пластин и оболочек: учеб. пособие. – Новосибирск, 1980. – 84 с.

Literatura

1. Bogorodskij V.V., Gavrilov V.P. Led. – L.: Gidrometeoizdat, 1980. – 385 s.
2. Ivanov G.V. Reshenie ploskoj smeshanoj zadachi teorii uprugosti v vide rjadov po polinomam Lezhandra // Prikladnaja mehanika i tehniceskaja fizika. – 1976. – № 6. – S. 27–34.
3. Kikoin I.K. Tablicy fizicheskikh velichin. – M.: Atomizdat, 1976. – 1005 s.
4. Ivanov G.V. Teorija plastin i obolochek: ucheb. posobie NGU. – Novosibirsk, 1980. – 84 s.

