

МЕТОД МНОГОСЕТОЧНЫХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В РАСЧЕТАХ КОМПОЗИТНЫХ ОБОЛОЧЕК
ВРАЩЕНИЯ И ДВОЯКОЙ КРИВИЗНЫ

A.D Matveev

METHOD OF MULTIGRID FINITE ELEMENTS OF THE COMPOSITE ROTATIONAL AND BI-CURVED
SHELL CALCULATIONS

Матвеев А.Д. – канд. физ.-мат. наук, доц., ст. науч. сотр. Института вычислительного моделирования СО РАН, г. Красноярск. E-mail: mtv241@mail.ru

Matveev A.D. – Cand. Phys.-Math. Sci., Assoc. Prof., Senior Staff Scientist, Institute of Computing Modeling, SB RAS, Krasnoyarsk. E-mail: mtv241@mail.ru

Для расчета трехмерного напряженного состояния упругих композитных оболочек вращения и двоякой кривизны при статическом нагружении предложен метод многосеточных конечных элементов (ММКЭ), который реализуется на основе алгоритмов метода конечных элементов (МКЭ) с применением трехмерных однородных и композитных криволинейных многосеточных конечных элементов (МНКЭ). При построении МНКЭ (без увеличения их размерности) можно использовать сколь угодно мелкие (базовые) разбиения оболочек, которые позволяют в МНКЭ сколь угодно точно учитывать сложную неоднородную структуру и описывать напряженное состояние уравнениями трехмерной задачи теории упругости. При построении n -сеточного конечного элемента (КЭ) используем n вложенных сеток. Мелкая сетка порождена базовым разбиением МНКЭ, остальные $n - 1$ крупные сетки применяем для понижения размерности МНКЭ. В ММКЭ используются однородные и неоднородные МНКЭ и системы вложенных сеток, что расширяет область его применения. В МКЭ применяются однородные односеточные КЭ. Так как при построении n -сеточного КЭ используется не одна, а n вложенных сеток, $n \geq 2$, то ММКЭ является обобщением МКЭ, т. е. МКЭ – частный случай ММКЭ. Предложен метод образующих КЭ для проектирования трехмерных МНКЭ сложной формы в локальных декартовых системах координат. Метод базируется на том, что область трехмерного МНКЭ получается путем поворота плоского односеточного (образующего) КЭ сложной формы вокруг некоторой оси на малый угол или параллельным перемещением образующего КЭ вдоль заданной прямой на заданное расстояние. При построении МНКЭ используются полиномы Лагранжа. Такой подход позволяет проектировать трехмерные МНКЭ для расчета композитных оболочек вращения (двоякой кривизны) и конструкций, один характерный размер которых значительно больше других. Оболочки двоякой кривизны представляются совокупностью оболочек вращения. Предлагаемые МНКЭ эффективны в расчетах круглых композитных пластин, дисков, колец и валов. Рассмотрены трехмерные МНКЭ, которые могут эффективно применяться при расчете крыльев, фюзеляжей самолетов, корпусов кораблей, ракет и пролетных строений мостов. МНКЭ порождают дискретные модели малой размерности и решения с малой погрешностью.

Ключевые слова: упругость, композиты, многосеточные конечные элементы, образующие КЭ, оболочки вращения и двоякой кривизны, круглые пластины, диски, кольца и валы.

To calculate the stress-strain state of elastic three-dimensional rotational and bi-curved shells of inhomogeneous structure, irregular shape and static loading, multigrid finite element method (MFEM) represented on the basis of finite element method (FEM) algorithms using three-dimensional (homogeneous) composite curvilinear multigrid finite elements (MFE) was proposed. At creation of MFE (without increase in their dimension) it is possible to use as much as small (basic) splittings covers allowing to consider as much as precisely in MFE difficult non-uniform structure and to describe the tension the equations of a three-dimensional task of the theory of elasticity. As at creation of n -net final element (FE) n of enclosed grids is used. Small grid is generated by MFE basic splitting others $n - 1$ large grids are used to decrease MFE dimension. In MFEM uniform and non-uniform MFE and systems of enclosed grids that expands the area of its application are used. In FEM uniform one-net FE are applied. As at creation of n -net FE not one, but n of enclosed grids $n \geq 2$ are used, MFEM is generalization of MFE, i.e. MFE is a special case of MFEM. The method of forming FE for the design of three-dimensional MFE of difficult form in local Cartesian systems of coordinates is offered. The method is based on the area of three-dimensional MFE turns out by turn of flat one-net (forming) FE of difficult form round some axis on a small corner or parallel movement forming FE along the set straight line. At creation of MFE Lagrangian polynomials are used. Such approach allows to project three-dimensional MFE for calculation of composite covers of rotation (double curvature) and designs, one characteristic size of which is much more others. The covers of double curvature are represented by the set of covers of rotation. Offered MFE are effective in calculation of round composite plates, disks, rings and shaft. Three-dimensional MFE which can effectively be applied at calculation of wings, fuselages of planes and frames of the ships, rockets and flying structures of bridges are considered. MFE generate discrete models of small dimension and the decision with small error.

Keywords: elasticity, composites, multigrid final elements forming FE, covers of rotation and double curvature, round plates, disks, rings and shafts.

Введение. При анализе напряженного состояния композитных оболочек вращения и двоякой кривизны сложной формы широко используют микро- и макроподходы. Реализация макроподхода для композитных оболочек регулярной структуры сводится к проблеме нахождения эффективных модулей упругости, которая особенно трудно решается для композитов нерегулярной структуры. Расчет композитных оболочек вращения и двоякой кривизны по МКЭ [1] с применением уравнений трехмерной задачи теории упругости [2] приводит к построению базовых дискретных моделей высокой размерности, порядка $10^8 \div 10^{10}$. Ширина ленты системы уравнений МКЭ для

таких базовых моделей равна $10^5 \div 10^6$. Применение в этом случае программ расчета ANSYS, NASTRAN и других затруднительно. В основе построения приближенных теорий деформирования упругих композитных оболочек лежат гипотезы [3, 4], которые порождают решения с неустраняемой погрешностью.

В данной статье показан расчет трехмерных линейно упругих композитных (однородных) оболочек вращения и двоякой кривизны с различными коэффициентами наполнения с помощью ММКЭ, который базируется на алгоритмах МКЭ с применением МнКЭ. Изложен метод построения в локальных декартовых системах координат трехмерных МнКЭ сложной формы с применением образующих односеточных КЭ сложной формы. Изложенный метод отличается от известных подходов построения МнКЭ [5–8]. Предлагаемые МнКЭ эффективны в расчетах композитных и однородных круглых пластин, дисков, колец и валов. Рассмотрены процедуры построения МнКЭ, которые применяются для расчета крыльев, фюзеляжей самолетов, корпусов кораблей и ракет при произвольных статических нагрузках. МнКЭ порождают дискретные модели малой размерности и численные решения с малой погрешностью. Приведен пример расчета.

Цель исследования: анализ напряженного состояния упругих трехмерных композитных оболочек вращения и двоякой кривизны сложной формы с различными коэффициентами наполнения при статическом нагружении.

Методы исследования. В данном исследовании для анализа напряженного состояния упругих трехмерных композитных оболочек вращения (двоякой кривизны) предложен ММКЭ [9–13], краткая суть которого состоит в следующем. Предлагаемый метод реализуется на основе алгоритмов МКЭ с применением трехмерных однородных и композитных МнКЭ. Отличия МнКЭ от существующих КЭ состоят в том, что в МнКЭ учитывается (в рамках микроподхода) неоднородная, микронеоднородная структура и напряженное состояние описывается уравнениями трехмерной задачи теории упругости (в декартовой системе координат) без введения дополнительных упрощающих гипотез. При построении МнКЭ используем функции перемещений в виде степенных и лагранжевых полиномов различных порядков, записанные в локальных декартовых и криволинейных системах координат. Предлагаемые МнКЭ образуются путем поворота плоского КЭ вокруг оси оболочки на угол, отвечающий дискретизации оболочки. МнКЭ в оболочках:

- учитывают неоднородную (микронеоднородную) структуру;
- описывают трехмерное напряженное состояние;
- образуют многосеточные дискретные модели, размерности которых в $10^2 - 10^5$ раз меньше размерностей базовых моделей;
- порождают решения с малой погрешностью.

Достоинства и отличия ММКЭ от МКЭ

1. ММКЭ сколь угодно точно учитывает неоднородную структуру и описывает трехмерное напряженное состояние тел, чем МКЭ. В ММКЭ можно применять сколь угодно мелкие базовые разбиения тел, что позволяет сколь угодно точно учитывать их сложную форму, неоднородную структуру и описывать трехмерное напряженное состояние упругих тел (без увеличения размерностей МнКЭ). В МКЭ невозможно использовать сколь угодно мелкие разбиения тел, так как ресурсы ЭВМ ограничены, т. е. ММКЭ в этом смысле более эффективный метод, чем МКЭ.

2. ММКЭ является более практичным методом, чем МКЭ. Реализация ММКЭ требует в $10^3 - 10^6$ раз меньше объема памяти ЭВМ и временных затрат, чем реализация МКЭ для базовых моделей, т. е. ММКЭ более экономичный, чем МКЭ.

3. В ММКЭ используются однородные и неоднородные МнКЭ и системы вложенных сеток, что расширяет область применения и повышает эффективность ММКЭ. В МКЭ применяются только однородные односеточные КЭ. Кроме того, следует отметить следующее. При решении статических задач упругости всегда вместо МКЭ можно применять ММКЭ, так как вместо односеточных КЭ всегда можно использовать МнКЭ. Поскольку при построении n -сеточного КЭ используется не одна, а n вложенных сеток, $n \geq 2$, то ММКЭ можно считать обобщением МКЭ, т. е. МКЭ отражает частный случай ММКЭ.

Результаты исследований

1. Однородные криволинейные односеточные КЭ.

Рассмотрим кратко процедуру построения криволинейных однородных односеточных КЭ (более подробно в [5, 7]), которые образуют базовую дискретную модель оболочки, на примере односеточного КЭ (1сКЭ) V_e 1-го порядка с характерными размерами $h_x^e \times h_y^e \times h_z^e$ (8 узлов). 1сКЭ V_e расположен в локальной декартовой системе координат $O_1 x_1 y_1 z_1$ (рис. 1). Для 1сКЭ V_e введены обозначения: $z_1 O_1 y_1$ – геометрическая плоскость симметрии; cd – ось оболочки; $R_1^e (R_2^e)$ – радиус кривизны нижней (верхней) поверхности; h_z^e – толщина; h_y^e – длина; h_x^e – ширина; $h_x^e = \alpha_e R_1^e$, α_e – угол раствора.

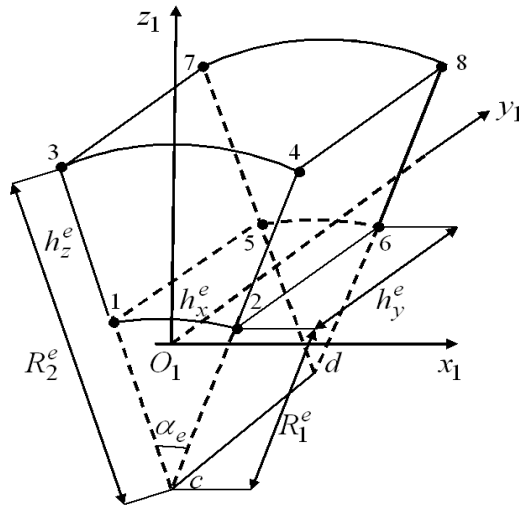


Рис. 1. Односеточный КЭ V_e

Форма 1сКЭ V_e есть прямая призма высотой h_y^e . Деформирование 1сКЭ V_e описывается уравнениями трехмерной задачи теории упругости [2], записанных в локальной декартовой системе координат $O_1x_1y_1z_1$ (см. рис. 1). При построении аппроксимирующих функций перемещений для 1сКЭ V_e используем полином вида

$$P(x_1, y_1, z_1) = a_1 + a_2x_1 + a_3y_1 + a_4z_1 + a_5x_1y_1 + a_6x_1z_1 + a_7y_1z_1 + a_8x_1y_1z_1 \quad (1)$$

Используя полином (1), матрицу жесткости $[K_e^1]$ и вектор узловых сил \mathbf{P}_e^1 1сКЭ V_e определяем по формулам [1]

$$[K_e^1] = \int_{V_e} [B_e]^T [D_e] [B_e] dV, \quad \mathbf{P}_e^1 = \int_{V_e} [N_e]^T \mathbf{F}_e dV + \int_{S_e} [N_e]^T \mathbf{q}_e dS, \quad (2)$$

где $[B_e]$, $[D_e]$ – матрицы дифференцирования и модулей упругости 1сКЭ V_e ; \mathbf{F}_e , \mathbf{q}_e – векторы объемных и поверхностных сил 1сКЭ V_e ; $[N_e]$ – матрица функций формы; V_e , S_e – область и поверхность 1сКЭ V_e .

Отметим, что криволинейная форма 1сКЭ V_e учитывается при определении аппроксимирующих функций перемещений и при вычислении интегралов (2). На криволинейных границах 1сКЭ V_e (см. рис. 1) непрерывность перемещений нарушается. Однако, как известно, выполнение непрерывности перемещений на границах криволинейных 1сКЭ не является необходимым условием для сходимости численных решений к точным. Тестовые расчеты показывают, что при уменьшении характерных размеров криволинейных однородных 1сКЭ V_e численные решения сходятся к точным. Процедуры построения од-

нородных криволинейных 1сКЭ 2-го и 3-го порядка, геометрически подобных 1сКЭ V_e (см. рис. 1), аналогичны процедуре п. 1.

2. Метод образующих конечных элементов

2.1. Композитные двухсеточные КЭ оболочек вращения. Кратко рассмотрим предлагаемый метод построения композитных двухсеточных КЭ (2сКЭ) оболочек вращения (двойкой кривизны) на примере упругого криволинейного 2сКЭ V_d (рис. 2). Считаем, что между компонентами неоднородной структуры 2сКЭ V_d связи идеальны. Область 2сКЭ V_d представляем базовым разбиением R_d , которое состоит из однородных 1сКЭ V_e 1-го порядка (см. рис. 1), $e = 1, \dots, M$; где M – общее число 1сКЭ, учитывает его неоднородную структуру и порождает мелкую сетку h_d . На сетке h_d определяем крупную криволинейную сетку H_d 2сКЭ V_d , узлы которой отмечены точками (36 узлов, рис. 2). Функции перемещений, напряжений и деформаций однородного 1сКЭ V_e удовлетворяют закону Гука и соотношениям Коши, отвечающим трехмерной задаче теории упругости [2] и записанным в локальной декартовой системе координат $O_1x_1y_1z_1$ (см. рис. 1), т. е. во всей области 1сКЭ V_e , следовательно, и в 2сКЭ V_d реализуется трехмерное напряженное состояние. Область 2сКЭ образуется путем поворота плоского 1сКЭ сложной формы, который будем называть образующим КЭ, вокруг оси оболочки на угол, отвечающий разбиению оболочки на 2сКЭ. Угол поворота образующего КЭ будем называть углом раствора 2сКЭ. Образующий 1сКЭ имеет форму криволинейного многоугольника (прямоугольника, треугольника), узлы которого есть узлы крупной сетки 2сКЭ. Таким образом, узлы всякого поперечного сечения крупной сетки являются узлами образующего 1сКЭ.

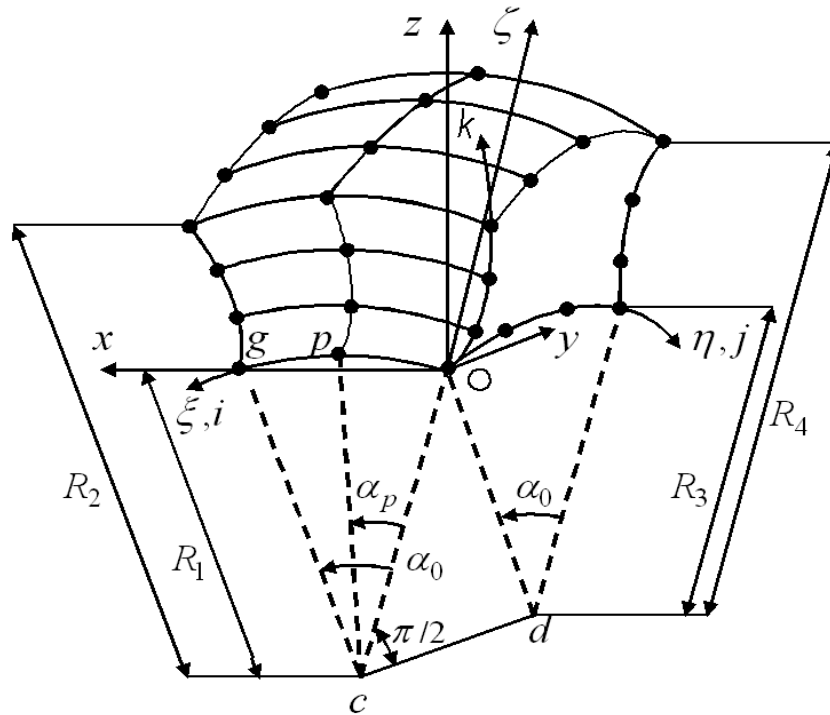


Рис. 2. Оболочечный 2сКЭ V_d

На рисунке 2 обозначено: α_0 – угол раствора 2сКЭ V_d ; cd – ось оболочки. Радиусы R_1, R_3 (R_2, R_4) описывают нижние (верхние) границы боковых поверхностей 2сКЭ V_d . Для 2сКЭ V_d введем две локальные системы координат: декартовую $Oxyz$ и криволинейную $O\xi\eta\zeta$, как показано на рисунках 2, 3. Начало координат этих систем совпадают и находятся в узле O крупной сетки H_d . Плоскость $O\eta\zeta$ проходит через ось cd оболочки. Отметим, что образующий 1сКЭ V_d^a лежит в плоскости $O\eta\zeta$ (рис. 3). Ось $O\eta$ проходит по нижней границе образующего 1сКЭ V_d^a (рис. 2, 3), ось $O\xi$ проходит по нижней границе боковой поверхности 2сКЭ, описанной радиусом R_1 , ось $O\zeta$ является продолжением радиуса Oc вращения начала координат системы $O\xi\eta\zeta$ (т. е. узла O сетки H_d) (рис. 2). Ось Oy расположена в плоскости $O\eta\zeta$, причем $Oy \perp O\zeta$. Ось Ox перпендикулярна биссектрисе угла α_0 раствора 2сКЭ V_d , т. е. проходит через крайние узлы (через узлы O, g) крупной сетки H_d , лежащих на оси $O\xi$ (рис.

2). Так как плоскость $O\eta\zeta$ перпендикулярна плоскости $O\xi\zeta$, то $Ox \perp Oy$. Для узлов крупной сетки H_d введем криволинейную целочисленную систему координат $Oijk$ (рис. 2, 3), где $j, k = 1, \dots, 4$, $i = 1, \dots, 3$. Ось Oi совпадает с осью $O\xi$. Оси Oj, Ok совпадают со смежными сторонами 1сКЭ V_d^a , как показано на рисунках 2, 3. Для узла p имеем $i = 2, j, k = 1$. При малых углах α_0 для точки $M(x, y, z)$ 2сКЭ V_d принимаем

$$x = \xi, z = \zeta. \quad (3)$$

При построении базисных функций перемещений для узлов крупной сетки H_d используем полиномы Лагранжа $L_i(x)$ и интерполяционный полином $P_d(y, \zeta)$, с помощью которого определяем аппроксимируются функции перемещений образующего КЭ. Полином $P_d(y, \zeta)$ для 1сКЭ V_d^a 3-го порядка имеет вид

$$P_d(y, \zeta) = a_1 + a_2 y + a_3 \zeta + a_4 y \zeta + a_5 y^2 + a_6 \zeta^2 + a_7 y^2 \zeta + a_8 y \zeta^2 + a_9 y \zeta^3 + a_{10} y^3 \zeta + a_{11} y^3 + a_{12} \zeta^3. \quad (4)$$

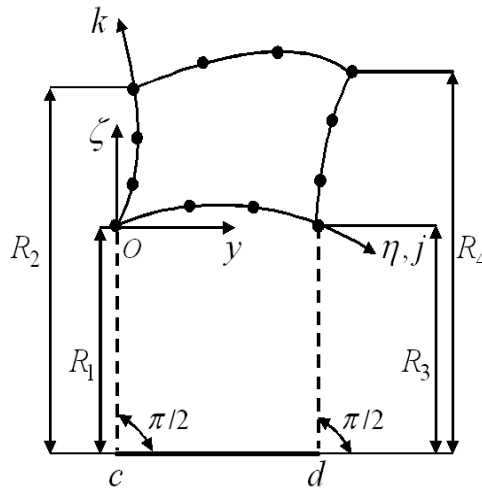


Рис. 3. Образующий 1сКЭ V_d^a

Базисную функцию $\psi_{ijk}(x, y, \zeta)$ для узла i, j, k крупной сетки H_d 2сКЭ V_d представляем в форме

$$\psi_{ijk}(x, y, \zeta) = N_{jk}(y, \zeta)L_i(x), \quad (5)$$

где $N_{jk}(y, \zeta)$ – базисные функции 1сКЭ V_d^a ; которые отвечают полиному $P_d(y, \zeta)$ вида (4), $j, k = 1, \dots, 4$; $L_i(x)$ – полином Лагранжа 2-го порядка, имеющий для точки M вид

$$L_i(x) = \prod_{p=1, p \neq i}^3 (x - x_p) / (x_i - x_p), \quad (6)$$

где $i = 1, \dots, 3$, x_p (x_i) – координата узла p (узла i), лежащего на оси $O\xi$ (рис. 2).

Отметим, что при построении аппроксимирующих функций перемещений для образующих 1сКЭ можно использовать степенные и лагранжевые полиномы различных порядков, представленные в локальной декартовой системе координат $Oy\zeta$ (рис. 3). В силу малости угла α_0 раствора 2сКЭ V_d с учетом (3) имеем

$$x = \xi = \alpha R_1, \quad x_i = \xi_i = \alpha_i R_1, \quad x_p = \xi_p = \alpha_p R_1, \quad i = 1, \dots, 3, \quad (7)$$

где α – угол раствора (точки M) плоскости, которая проходит через ось cd и включает точку M ; α_p (α_i) – угол раствора узла p (узла i), лежащего на оси $O\xi$ (рис. 2).

Учитывая представления (7) в формулах (5), (6), получаем

$$\psi_{ijk}(\alpha, y, \zeta) = N_{jk}(y, \zeta)L_i(\alpha), \quad (8)$$

где

$$L_i(\alpha) = \prod_{p=1, p \neq i}^3 \frac{\alpha - \alpha_p}{\alpha_i - \alpha_p}, \quad i = 1, \dots, 3. \quad (9)$$

При $\psi_{ijk}(\alpha, y, \zeta) = L_i(\alpha)L_j(y)L_k(\zeta)$ получаем частный случай, описанный в [7]. Для каждого узла i, j, k сетки H_d определим целое число $\beta \geq 1$, введем обозначение $N_\beta = \psi_{ijk}$, $\beta = 1, \dots, 36$, и функции перемещений u_d, v_d, w_d 2сКЭ V_d представим в виде

$$u_d = \sum_{\beta=1}^{36} N_\beta u_\beta, \quad v_d = \sum_{\beta=1}^{36} N_\beta v_\beta, \quad w_d = \sum_{\beta=1}^{36} N_\beta w_\beta. \quad (10)$$

где $N_\beta, u_\beta, v_\beta, w_\beta$ – базисная функция и перемещения β -го узла сетки H_d .

Функционал полной потенциальной энергии Π_d базового разбиения R_d 2сКЭ V_d , состоящего из 1сКЭ V_e (см. рис. 1), запишем в виде

$$\Pi_d = \sum_{e=1}^M \left(\frac{1}{2} \delta_e^T [K_e] \delta_e - \delta_e^T P_e \right), \quad (11)$$

где $[K_e], P_e, \delta_e$ – матрица жесткости, векторы узловых сил и перемещений 1сКЭ V_e , представленные в локальной декартовой системе координат $Ox\eta\zeta$ 2сКЭ V_d (рис. 2).

Используя (10), вектор узловых перемещений δ_e КЭ V_e выражаем через вектор узловых перемещений δ_d крупной сетки H_d 2скЭ V_d :

$$\delta_e = [A_e^d] \delta_d, \quad (12)$$

где $[A_e^d]$ – прямоугольная матрица, $e = 1, \dots, M$.

Подставляя (12) в (11) и выполняя принцип минимума полной потенциальной энергии для 2скЭ V_d , т. е. $\partial \Pi_d(\delta_d) / \partial \delta_d = 0$, получаем соотношение $[K_d] \delta_d = F_d$, отвечающее равновесному состоянию 2скЭ V_d , где

$$[K_d] = \sum_{e=1}^M [A_e^d]^T [K_e] [A_e^d],$$

$$F_d = \sum_{e=1}^M [A_e^d]^T P_e,$$

где $[K_d]$ – матрица жесткости; F_d – вектор узловых сил 2скЭ V_d .

Отметим, что функции (10) используются только для понижения размерности функционала (11), крупная

сетка H_d определяет размерность 2скЭ V_d , которая меньше размерности базового разбиения R_d .

Замечание. В силу (12) размерность вектора δ_d (т. е. размерность 2скЭ V_d) не зависит от M – общего числа КЭ V_e , из которых состоит область 2скЭ V_d . Следовательно, можно использовать сколь угодно мелкие базовые разбиения R_d . Такие мелкие разбиения позволяют сколь угодно точно учитывать сложную форму, неоднородную и микронеоднородную структуру, сложный характер закрепления и нагружения и описывать трехмерное напряженное состояние 2скЭ V_d без увеличения его размерности.

Используя 2скЭ, по известным процедурам строим 3-(n)-сеточные КЭ [6, 7]. При расчете оболочек вращения сложной формы, прямых круговых конических и цилиндрических оболочек постоянной толщины целесообразно при построении криволинейных 2скЭ в качестве образующих КЭ соответственно использовать 1скЭ формы (криволинейного) треугольника (рис. 4, а), параллелограмма (рис. 4, б) и прямоугольника (рис. 4, в) 1-го, 2-го и 3-го порядка.

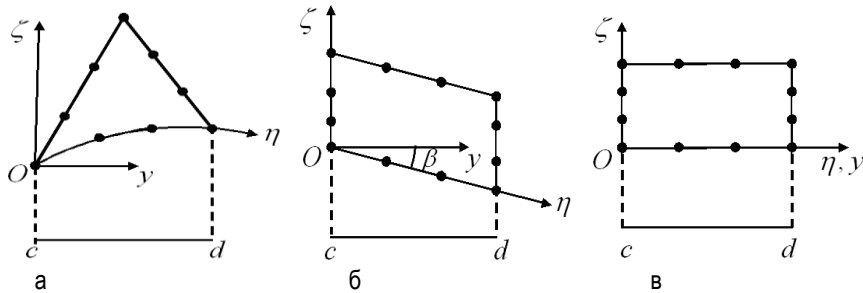


Рис. 4. Образующие 1скЭ

На рисунке 4, б показан образующий 1скЭ, применяемый для расчета конических оболочек с углом 2β при вершине. При построении функций перемещений для образующих 1скЭ, показанных на рисунках 4, б, в, используется полином вида (4), для 1скЭ, представленного на рисунке 4, а, – полином вида

$$P_a(y, \zeta) = a_1 + a_2 y + a_3 \zeta + a_4 y \zeta + a_5 y^2 + a_6 \zeta^2 + a_7 y^2 \zeta + a_8 y \zeta^2 + a_9 y^2 \zeta^2. \quad (12)$$

2.2. Двухсеточные композитные КЭ оболочек двоякой кривизны. Рассмотрим композитные оболочки двоякой положительной гауссовой кривизны, прямоугольные в плане, срединные поверхности которых образуются путем параллельного перемещения кривой кругового, параболического или эллиптического очертания по другой кривой. Рассмотрим тонкую композитную оболочку V_q , срединная поверхность S которой образована ортого-

нальными кривыми l_1, l_2 . На рисунке 5 обозначено: \vec{n} – нормаль к поверхности S ; R_1, R_2 – радиусы кривых $l_1, l_2, R_1, R_2 = const$; α_1 – угол раствора кривой l_1 . Разбиваем кривую l_2 на элементарные дуги $ds_i, i = 1, \dots, n$. Через середину дуги ds_i (через точку p_i), $i = 1, \dots, n$, проводим кривую $l_i \in S$, которую обозначим l_i^1 . Определим окружность G_i радиуса R_1 , которая включает кривую l_i^1 . Ось $c_i d_i$ дуги ds_i проходит через центр o_i окружности G_i и перпендикулярна ее плоскости $Q_i, Q_i \parallel Q_{i+1}, i = 1, \dots, n-1$ (рис. 6).

Поворачивая дуги ds_1, \dots, ds_n вокруг соответственно осей $c_1 d_1, \dots, c_n d_n$ на угол раствора α_1 кривой l_1 ,

получаем поверхность S_q , которая приближенно представляет поверхность S , причем при $ds_i \rightarrow 0$, (при $n \rightarrow \infty$) имеем $S_q \rightarrow S$, $i = 1, \dots, n$.

Область оболочки V_q приближенно представляем оболочками вращения V_q^i размерами $ds_i \times l_i^1 \times h$, где h – толщина оболочки V_q ; $c_i d_i$ – ось оболочки V_q^i , $i = 1, \dots, n$. Пусть дискретная модель оболочки V_q состоит из 2сКЭ V_α^i , $\alpha = 1, \dots, N_i$. По толщине оболочки используем один 2сКЭ V_α^i . Образующий 1сКЭ V_α^b тол-

щиной h имеет 12 узлов крупной сетки 2сКЭ V_α^i (рис. 7).

Область 2сКЭ V_α^i получается путем поворота вокруг оси $c_i d_i$ образующего 1сКЭ V_α^b на угол раствора α_i 2сКЭ.

Для аппроксимации перемещений 1сКЭ V_α^b используем полином (4). Матрица жесткости и вектор узловых сил 2сКЭ V_α^i определяются по процедурам п. 2.1. Отметим, однородные МНКЭ проектируются по процедурам пп. 2.1, 2.2 и очень эффективны в расчетах однородных оболочек вращения и двоякой кривизны.

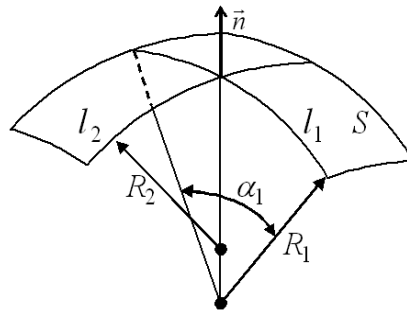


Рис. 5. Кривые l_1, l_2

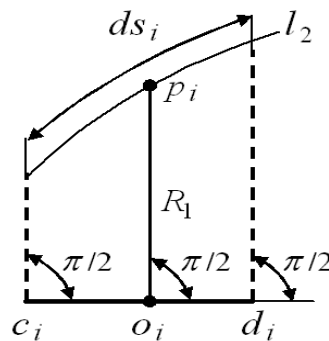


Рис. 6. Ось $c_i d_i$ дуги ds_i

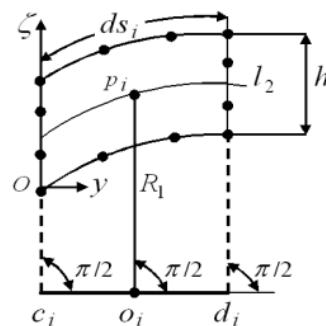


Рис. 7. Образующий 1сКЭ V_α^b

2.3. Трехмерные МНКЭ круглых колец, пластин и дисков. Процедуры, изложенные в пп. 1, 2.1, 2.2, используются при проектировании трехмерных криволинейных МНКЭ, которые эффективны при расчете круглых тонких,

толстых композитных (однородных) пластин, дисков с круглым центральным отверстием, колец со сложным поперечным сечением, валов с кольцевым поперечным сечением, которые имеют произвольное нагружение.

В случае расчета сплошной круглой пластины (сплошного диска, вала) в центре дискретной модели пластины (диска, вала) используем 2сКЭ формы прямой призмы, в основании которых лежат криволинейные многоугольники. На рисунке 8 в основании 2сКЭ V_m^q лежит криволинейный треугольный КЭ V_q 2-го порядка, узлы крупной сетки 2сКЭ V_m^q отмечены точками, od – ось 2сКЭ V_m^q (ось пластины, диска, вала). Образующий КЭ

V_q для 2сКЭ V_m^q показан на рисунке 9, который получается путем поворота стороны OA КЭ V_q вокруг оси Oy на угол α_0 , где α_0 – угол раствора 2сКЭ V_m^q . Область 2сКЭ V_m^q образуется путем параллельного перемещения КЭ V_q вдоль оси Oy на расстояние od (рис. 8, 9).

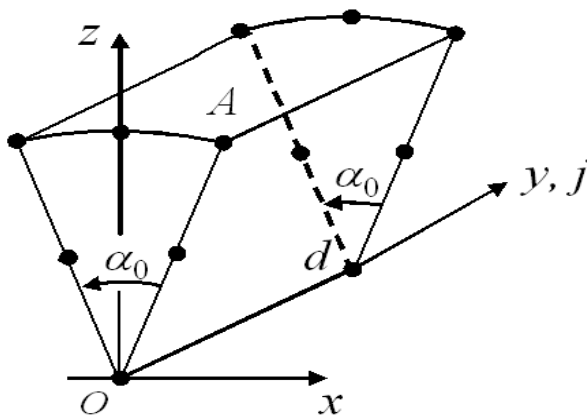


Рис. 8. 2сКЭ V_m^q

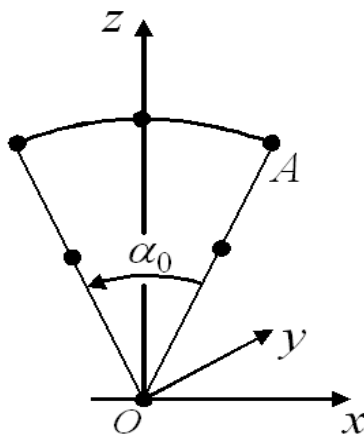


Рис. 9. Образующий КЭ V_q

При построении функций перемещений для КЭ V_q используем полином $P_2(x, z)$ вида

$$P_2(x, z) = a_1 + a_2x + a_3z + a_4xz + a_5x^2 + a_6z^2. \quad (13)$$

Базисные функции перемещений, построенные для узлов крупной сетки 2сКЭ V_m^q , представляем в виде

$$\psi_{ij}(x, y, z) = N_i(x, z)L_j(y), \quad (14)$$

где $N_i(x, z)$ – базисные функции КЭ V_q , т. е. полинома (13), $i = 1, \dots, 6$; $L_j(y)$ – полиномы Лагранжа 1-го порядка, $j = 1, 2$.

Соотношения для 2сКЭ V_m^q определяем с помощью процедур п. 2.1, 2.2 и работ [5, 7].

2.4. Расчет крыльев, фюзеляжей самолетов, корпусов кораблей и ракет с применением трехмерных МКЭ. Рассмотрим расчет крыла самолета, оболочка которого подкреплена продольными лонжеронами (стенками) и стержнями (стрингерами, балками) (рис. 10). Крыло имеет 6 стержней (стрингеров, балок), положение ко-

торых на рисунке 10 отмечены точками, и две стенки. Дискретная модель крыла состоит из трехмерных 2сКЭ (МнКЭ), которыми представляем продольные стенки, стержни (балки) и оболочку крыла (постоянной толщины h). Области 2сКЭ получаются путем параллельного перемещения образующих 1сКЭ (расположенных в плоскостях, параллельных плоскости Oxz) вдоль оси Oy на заданное расстояние (см. рис. 10). Базисные функции перемещений, построенные для узлов крупной сетки 2сКЭ, представляем в виде

$$\psi_{ij}(x, y, z) = N_i(x, z)L_j(y), \quad (15)$$

где $N_i(x, z)$ – базисные функции образующего 1сКЭ, $i = 1, \dots, m$; m – количество узлов (крупной сетки 2сКЭ) образующего 1сКЭ; $L_j(y)$ – полиномы Лагранжа, $j = 1, \dots, n$.

На рисунке 11 показаны: криволинейный образующий 1сКЭ V_0 толщиной h для 2сКЭ V_e^0 (длиной d) оболочки крыла, и криволинейный прямоугольный образующий 1сКЭ V_b сечением $a \times b$ для 2сКЭ V_α^b формы балки длиной d (рис. 12). Узлы крупных сеток 2сКЭ V_e^0 и V_α^b на рисунке 12 отмечены точками. 1сКЭ V_0 имеет 12 узлов крупной сетки 2сКЭ, 1сКЭ V_b – 4 узла. В фор-

муле (15) для 2сКЭ V_e^0 базисные функции $N_i(x, z)$, $i = 1, \dots, 12$, $j = 1, 2$, отвечают полиному

$$P_0(x, z) = a_1 + a_2x + a_3z + a_4xz + a_5x^2 + a_6z^2 + a_7x^2z + a_8xz^2 +$$

$$a_9xz^3 + a_{10}x^3z + a_{11}x^3 + a_{12}z^3, \text{ для 2сКЭ } V_\alpha^b -$$

базисные функции $N_i(x, z)$, $i = 1, \dots, 4$, $j = 1, 2$, отвечают полиному

$$P_b(x, z) = a_1 + a_2x + a_3z + a_4xz. \text{ Стенки крыла}$$

представляются 2сКЭ V_r^S формы прямоугольного параллелепипеда [9, 11]. Базисные функции для узлов крупной сетки 2сКЭ V_r^S целесообразно использовать в виде произведения полиномов Лагранжа, т. е. $\psi_{ijk}(x, y, z) = L_i(x)L_j(y)L_k(z)$ или в форме (15).

Для расчета трехмерного напряженного состояния фюзеляжей самолетов, корпусов кораблей и ракет, подкрепленных продольными и поперечными вертикальными стенками, балками, горизонтальными перекрытиями (палубой) 2сКЭ (МнКЭ) проектируются с применением образующих 1сКЭ по процедурам пп. 2.1, 2.3, 2.4. Для 2сКЭ (МнКЭ) большой длины d в формуле (15) целесообразно использовать полиномы Лагранжа высокого порядка, что позволяет строить решения с малой погрешностью.

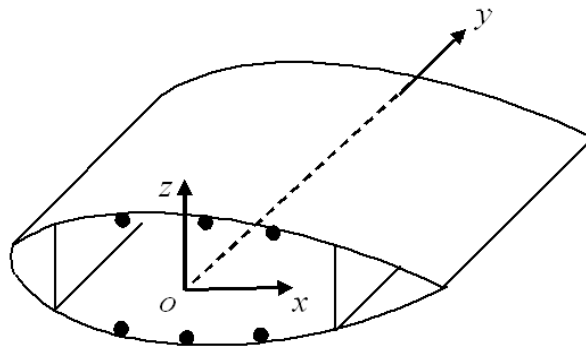


Рис. 10. Силовые элементы крыла

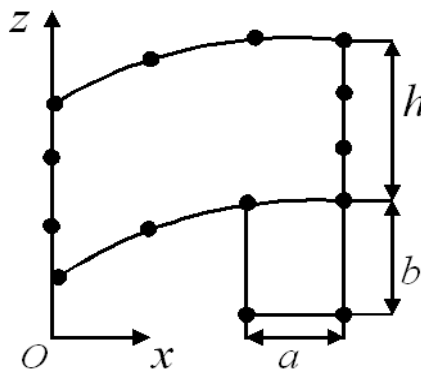


Рис. 11. Образующие 1сКЭ V_0, V_b

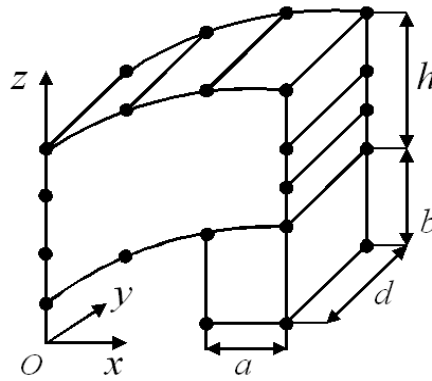


Рис. 12. 2сКЭ V_e^0, V_α^b

3. Верификация МКЭ оболочечного типа. Верификация предлагаемых трехмерных криволинейных МКЭ проводится с помощью известного численного метода [1, 7]. Тестовые расчеты сводятся к решению осесимметричных трехмерных задач теории упругости [14], сформулированных для оболочек вращения, круглых пластин, валов и колец с применением новых МКЭ. Следует отметить следующее. Упругие трехмерные криволинейные МКЭ проектируются с применением известных степенных и лагранжевых полиномов (которые широко применяются в МКЭ и обеспечивают сходимость приближенных решений к точным решениям), уравнений трехмерной задачи теории упругости [2]. При этом выполняется принцип минимума полной потенциальной энергии для каждого МКЭ и для многосеточной дискретной модели оболочки вращения (оболочки двойкой кривизны, круглой пластины, диска, вала). Это обеспечивает сходимость приближенных решений (полученных при уменьшении размеров МКЭ) к точному решению, что подтверждается тестовыми расчетами и верификацией МКЭ [7].

4. Результаты численных экспериментов. Рассмотрим в декартовой системе координат $Oxyz$ модельную задачу для композитной цилиндрической оболочки V_0 постоянной толщины при локальном нагружении (рис. 13). Левый торец оболочки жестко закреплен, т. е. при $y = 0$ имеем $u = v = w = 0$. Внутренний

радиус оболочки равен 5,4; внешний – 8,4; толщина $h = 3$; длина $L = 54$. Оболочка армирована продольными непрерывными волокнами. Связи между компонентами неоднородной структуры оболочки идеальные. Модуль Юнга связующего материала равен 1, волокна – 10, коэффициент Пуассона – 0,3. Базовая дискретная модель R_0 оболочки V_0 , состоящая из однородных 1сКЭ V_e^1 1-го порядка с характерными размерами $h_x^e \times h_y^e \times h_z^e$ (см. рис. 1), порождает мелкую криволинейную сетку размерности $43 \times 109 \times 7$, которая равномерна по оси Oy , по круговой координате (при постоянном радиусе) и по толщине оболочки.

Регулярная ячейка сечения оболочки, покрытая мелкой сеткой, с характерными размерами $6h_x^e \times 6h_z^e$, показана на рисунке 14, сечения волокон заштрихованы (4 волокна). На внешней поверхности S (с углом раствора $\alpha = 2\pi/7$) в узлах мелкой сетки с координатами: $i = 1,3,5,7, j = 1,7,13, \dots, 109, k = 7$, действуют вертикальные силы $p = 0,05$. Область S симметрична относительно плоскости Oyz , на рисунке 13 поверхность S заштрихована. В расчетах используем половину области оболочки, $x \geq 0$.

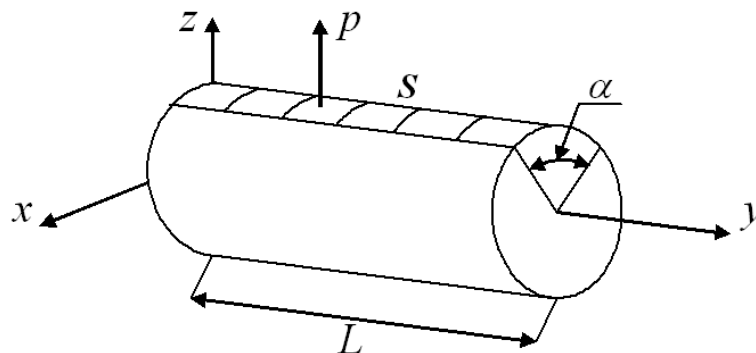


Рис. 13. Расчетная схема оболочки V_0

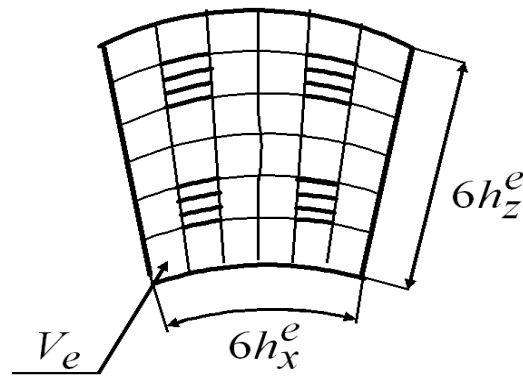


Рис. 14. Регулярная ячейка сечения

Двухсеточная дискретная модель \mathbf{R}_h оболочки состоит из 2сКЭ V_n^d с характерными размерами $6h_x^e \times 6h_y^e \times 6h_z^e$. 2сКЭ V_n^d имеют мелкие криволинейные сетки размерности $7 \times 7 \times 7$. Модель \mathbf{R}_h имеет по длине оболочки 18 КЭ V_n^d , по толщине – 1, по дуговой координате – 7. Итак, модель \mathbf{R}_h состоит из 126 оболочечных 2сКЭ V_n^d , $n = 1, \dots, 126$. Образующим КЭ для 2сКЭ V_n^d является квадратный КЭ 3-го порядка со стороной, равной 3. В формуле (8) $L_i(\alpha)$ есть полином Лагранжа 3-го порядка, $\alpha_i = \alpha_0(i-1)/3$, $i = 1, \dots, 4$, где α_0 – угол раствора 2сКЭ V_n^d , $\alpha_0 = \pi/7$ (см. п. 2).

Результаты расчетов оболочки V_0 показывают, что максимальное перемещение – 31,084 (эквивалентное напряжение – 2,722) двухсеточной дискретной модели \mathbf{R}_h отличается от максимального перемещения – 29,738 (эквивалентного напряжения – 2,824) базовой модели \mathbf{R}_0 на 4,33 % (на 3,75 %). Размерность базовой модели \mathbf{R}_0 равна 96012, ширина ленты системы уравнений (СУ) МКЭ равна 916. Двухсеточная модель \mathbf{R}_h имеет 9216 узловых неизвестных (т. е. в 10,4 раза меньше неизвестных модели \mathbf{R}_0), ширина ленты СУ МКЭ равна 559. Реализация МКЭ для двухсеточной модели \mathbf{R}_h требует в 17 раз меньше памяти ЭВМ, чем для базовой. Эквивалентные напряжения определяем по 4-й теории прочности.

Заключение. В данной статье для расчета композитных оболочек вращения и двойкой кривизны (круговых колец, пластин, дисков и валов, крыльев и фюзеляжей самолетов, корпусов ракет и кораблей) сложной формы

при статическом нагружении предложен метод многосеточных конечных элементов, который базируется на алгоритмах метода конечных элементов в форме метода Ритца с применением многосеточных конечных элементов. Достоинства многосеточных конечных элементов состоят в том, что они сколь угодно точно учитывают сложную форму тел, неоднородную и микронеоднородную структуру, описывают трехмерное напряженное состояние (без увеличения размерностей многосеточных конечных элементов), образуют многосеточные дискретные модели малой размерности и порождают приближенные решения с малой погрешностью.

Литература

1. Норри Д., Ж. де Фриз. Введение в метод конечных элементов. – М.: Мир, 1981. – 304 с.
2. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высш. шк., 1982. – 264 с.
3. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 2008. – 430 с.
4. Голушко С.К., Немировский Ю.В. Прямые и обратные задачи механики упругих композитных пластин и оболочек вращения. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 420 с.
5. Матвеев А.Д., Гришанов А.Н. Одно- и двухсеточные криволинейные элементы трехмерных цилиндрических панелей и оболочек // Изв. АлтГУ. Сер. «Математика и механика». – 2014. – №1/1. – С. 84–89.
6. Матвеев А.Д., Гришанов А.Н. Многосеточные лагранжьевы криволинейные элементы в трехмерном анализе композитных цилиндрических панелей и оболочек // Вестн. КрасГАУ. – 2015. – № 2. – С. 75–85.
7. Матвеев А.Д., Гришанов А.Н. Трехмерные композитные многосеточные конечные элементы оболочечного типа // Изв. АлтГУ. Сер. «Физико-математические науки». – 2017. – № 4/1. – С. 120–125.
8. Матвеев А.Д. Расчет тонких пластин и оболочек с применением многосеточных конечных элементов со свободными границами // Вестн. КрасГАУ. – 2014. – № 3. – С. 44–47.

9. *Матвеев А.Д.* Метод многосеточных конечных элементов в расчетах трехмерных однородных и композитных тел // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. «Физ.-матем. науки». – 2016. – Т. 158, кн. 4. – С. 530–543.
10. *Matveev A.D.* Multigrid finite element method in stress of three-dimensional elastic bodies of heterogeneous structure. // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2016. V. 158, № 1. Art. 012067, P. 1–9.
11. *Матвеев А.Д.* Метод многосеточных конечных элементов в расчетах композитных пластин и балок // Вестн. КрасГАУ. – 2016. – № 12. – С. 93–100.
12. *Матвеев А.Д.* Метод многосеточных конечных элементов в расчетах композитных пластин и балок сложной формы // Вестн. КрасГАУ. – 2017. – № 11. – С. 131–140.
13. *Матвеев А.Д.* Метод многосеточных конечных элементов // Вестн. КрасГАУ. – 2018. – № 2. – С. 90–103.
14. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 542 с.

Literatura

1. *Norri D., Zh. de Friz.* Vvedenie v metod konechnyh jelementov. – М.: Mir, 1981. – 304 s.
2. *Samul' V.I.* Osnovy teorii uprugosti i plastichnosti. – М.: Vyssh. shk., 1982. – 264 s.
3. *Alfutov N.A., Zinov'ev P.A., Popov B.G.* Raschet mnog-oslojnyh plastin i obolochek iz kompozicionnyh materialov. – М.: Mashinostroenie, 2008. – 430 s.
4. *Golushko S.K., Nemirovskij Ju.V.* Prjamyje i obratnye zadachi mehaniki uprugih kompozitnyh plastin i obolochek vrashhenija. – М.: FIZMATLIT, 2008. – 420 s.
5. *Matveev A.D., Grishanov A.N.* Odno- i dvuhsetochnye krivolinejnye jelementy trehmernyh cilindricheskikh panelej i obolochek // Izv. AltGU. Ser. «Matematika i mehanika». – 2014. – №1/1. – С. 84–89.
6. *Matveev A.D., Grishanov A.N.* Mnogosetochnye lagranzhevyje krivolinejnye jelementy v trehmernom analize kompozitnyh cilindricheskikh panelej i obolochek // Vestn. KrasGAU. – 2015. – № 2. – С. 75–85.
7. *Matveev A.D., Grishanov A.N.* Trehmernye kompozitnye mnogoseochnye konechnye jelementy obolochecnogo tipa // Izv. AltGU. Ser. «Fiziko-matematicheskie nauki». – 2017. – №4/1. – С. 120–125.
8. *Matveev A.D.* Raschet tonkih plastin i obolochek s primeneniem mnogoseochnyh konechnyh jelementov so svobodnymi granicami // Vestn. KrasGAU. – 2014. – № 3. – С. 44–47.
9. *Matveev A.D.* Metod mnogoseochnyh konechnyh jelementov v raschetah trehmer-nyh odnorodnyh i kompozitnyh tel // Uchen. zap. Kazan. un-ta. Ser. «Fiz.-matem. nauki». – 2016. – Т. 158, кн. 4. – С. 530–543.
10. *Matveev A.D.* Multigrid finite element method in stress of three-dimensional elastic bodies of heterogeneous structure. // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2016. V. 158, № 1. Art. 012067, P. 1–9.
11. *Matveev A.D.* Metod mnogoseochnyh konechnyh jelementov v raschetah kompozitnyh plastin i balok // Vestn. KrasGAU. – 2016. – № 12. – С. 93–100.
12. *Matveev A.D.* Metod mnogoseochnyh konechnyh jelementov v raschetah kompozitnyh plastin i balok slozhnoj formy // Vestn. KrasGAU. – 2017. – № 11. – С. 131–140.
13. *Matveev A.D.* Metod mnogoseochnyh konechnyh jelementov // Vestn. KrasGAU. – 2018. – № 2. – С. 90–103.
14. *Zenkevich O.* Metod konechnyh jelementov v tehnikе. – М.: Мир, 1975. – 542 s.

