

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ КОЛЕСНОЙ МАШИНЫ В ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

A.S. Nenaydenko, V.I. Poddubny

MATHEMATICAL MODELING OF MOVEMENT OF WHEELED MACHINERY IN HORIZONTAL PLANE

Ненайденко А.С. – асп. каф. теоретической механики и механики машин, программист отдела единой автоматизированной информационной системы университета Алтайского государственного технического университета им. И.И. Ползунова, г. Барнаул. E-mail: nenaydenko.a.s@mail.ru

Поддубный В.И. – д-р техн. наук, доц., зав. каф. теоретической механики и механики машин Алтайского государственного технического университета им. И.И. Ползунова, г. Барнаул. E-mail: poddubny@list.ru

Nenaydenko A.S. – Post-Graduate Student, Chair of Theoretical Mechanics and Mechanics of Cars, Programmer, Department of University Uniform Automated Information System, Polzunov Altai State Technical University, Barnaul. E-mail: nenaydenko.a.s@mail.ru

Poddubny V.I. – Dr. Techn. Sci., Assoc. Prof., Head, Chair of Theoretical Mechanics and Mechanics of Cars, Polzunov Altai State Technical University, Barnaul. E-mail: poddubny@list.ru

Одним из наиболее эффективных способов повышения производительности труда в сельском хозяйстве является использование точного земледелия, предполагающего использование спутниковых радионавигационных систем для управления движением колесными сельскохозяйственными машинами. Их использование позволяет обеспечить рабочее движение сельскохозяйственных машин по задаваемой траектории без участия водителя с высокой точностью. Это позволяет уменьшить пройденный путь, тем самым снизить расход топлива, повысить качество выполняемых полевых работ, а также уменьшить психомоторные затраты механизатора на управление. В Алтайском государственном техническом университете проводится работа по созданию системы управления движением, не уступающей по своим характеристикам импортным системам и имеющей более приемлемую стоимость для сельхозпроизводителей. Важной задачей при этом является разработка алгоритма управления и его программно-аппаратная реализация. Алгоритм управления условно разбивается на два модуля – локальное и глобальное регулирование. Проверка работоспособности алгоритмов управления осуществляется экспериментально. Полевые испытания связаны со значительными финансовыми и временными затратами. Поэтому целесообразным представляется проверка работоспособности электромеханической системы управления и разработанных алгоритмов в лаборатории с использованием математического моделирования в режиме реального времени. При этом подходе большая часть механической системы, за исключением исследуемого узла, описывается механико-математической моделью в виде дифференциальных уравнений. В данной статье представлены этапы получения математической модели движения колесной машины на основе дифференциальных уравнений движения в горизонтальной плоскости. Было проведено математическое моделирование стандартных маневров в пакете Matlab. Анализ полученных результатов подтвердил адекватность разработанной модели реальной колесной машине, что позволяет использовать ее для симуляции движения колесной ма-

шины в режиме реального времени и разработке алгоритма управления с использованием теории автоматического регулирования.

Ключевые слова: точное земледелие, система управления движением, колесная машина, кинематические уравнения, угол увода колеса, дифференциальные уравнения движения, математическая модель, Matlab.

One of the most effective ways of increasing labor productivity in agriculture is using exact agriculture assuming using satellite radio navigational systems for traffic control by wheel farm vehicles. Their use allows providing labor movement of farm vehicles on the set trajectory without participation of the driver with high precision. It allows reducing passable way, thereby to cut fuel consumption, to increase the quality of performed field works, and also to reduce psychomotor costs of machine operator of management. At Altai State Technical University the work on creation of control system of the movement which is not conceding according to the characteristics to import systems and having more acceptable cost for agricultural producers is carried out. An important task thus is the development of algorithm of management and its software and hardware realization. The algorithm of management conditionally breaks into two modules, i.e. local and global regulation. The check of operability of algorithms of management is carried out experimentally. Field tests are connected with considerable financial and time expenditure. Therefore the check of operability of electromechanical control system and developed algorithms in laboratory with use of mathematical modeling in real time is represented expedient. At this approach the most part of mechanical system, except for studied knot, is described by mechanical and mathematical model in the form of differential equations. The stages of receiving mathematical model of the movement of wheel car on the basis of differential equations of the movement in the horizontal plane are presented in the study. Mathematical modeling of standard maneuvers in Matlab package was carried out. The analysis of received results confirmed adequacy to the developed model to the real wheel car that allows using it for simulation of the movement of wheel car in real time and development of algorithm of management with use of the theory of automatic control.

Keywords: exact precision farming, motion control system, wheeled machinery, kinematic equations, wheel slip angle, differential equations of the movement, mathematical model, Matlab.

Введение. С каждым годом в сфере АПК все более широко применяются системы точного земледелия. Их использование позволяет обеспечить рабочее движение сельскохозяйственных машин по задаваемой траектории без участия водителя с высокой точностью. Это позволяет уменьшить пройденный путь, тем самым снизить расход топлива, повысить качество выполняемых полевых работ, а также уменьшить психомоторные затраты механизатора на управление. Для реализации подхода точного земледелия используются автопилоты и подруливающие устройства таких известных на рынке фирм, как Leica, Trimble, TeeJet, JohnDeer, Klaas и другие [1]. Устройства данных производителей отлично зарекомендовали себя, однако существенным их недостатком является достаточно высокая стоимость для сельхозпроизводителей и то, что в большинстве случаев они не могут быть использованы на российской сельскохозяйственной технике вследствие несогласованности параметров (в частности, тугое рулевое управление отечественных колесных тракторов приводит к тому, что система воспринимает это как вмешательство человека в управление и отключается) [2]. К сожалению, следует отметить отсутствие на нашем рынке систем подруливания и автопилотирования отечественной разработки (можно встретить в основном только агронавигаторы и курсоуказатели).

В Алтайском государственном техническом университете им. И.И. Ползунова проводятся исследования, целью которых является разработка и создание системы управления движением колесной сельскохозяйственной машины для отечественной техники, не уступающей по своим характеристикам импортным системам и имеющей более приемлемую стоимость для сельхозпроизводителей [3].

Важной задачей при создании системы управления является разработка алгоритма управления, обеспечивающего движение сельскохозяйственной машины по задаваемой траектории, и его программно-аппаратная реализация. Алгоритм управления условно можно разбить на два больших модуля – глобальное и локальное регулирование [4]. Локальное регулирование обеспечивает реализацию текущего задаваемого значения угла поворота управляемых колес. Реализация задачи локального регулирования описана в [5]. Глобальное регулирование должно по величине отклонения от задаваемой траектории определять величину угла поворота управляемых колес (или угла слома рамы), которую необходимо реализовать, чтобы достичь движения по заданной траектории.

Проверка работоспособности разработанных алгоритмов управления осуществляется экспериментально. Полевые испытания связаны со значительными финансовыми и временными затратами. В последнее время в конструкторско-исследовательской работе широко используется идеология моделирования поведения механических систем в режиме реального времени. Суть ее заключается в том, что большая часть механической системы, за исключением исследуемого узла, описывается механико-математической моделью. При симуляции движения в режиме реального времени исследуемый узел посредством измерительной аппаратуры, блоков ЦАП, АЦП взаимодействует с моделью системы. Таким образом, текущие значения силовых и кинематических параметров исследуемого узла передаются в математическую модель. Соответственно дорогостоящие экспериментальные исследования механической системы можно заменить испытаниями в лабораторных условиях.

Целесообразным представляется проверка работоспособности электромеханической системы управления и разработанных алгоритмов в лаборатории. При проведении эксперимента реально существуют передние управляемые колеса, рулевое управление, подруливающее устройство, представляющее собой электродвигатель с электронным блоком управления, и комплект аппаратуры. Колесная машина заменена ее механико-математической моделью в виде дифференциальных уравнений движения. При интегрировании уравнений в реальном времени система глобального регулирования по отклонениям машины от задаваемой траектории определяет необходимое значение текущего угла поворота управляемых колес, обеспечивающего задаваемое движение. Система локального регулирования реализует приближение текущего угла к задаваемому.

Следовательно, актуальной представляется разработка механико-математической модели колесной машины для симуляции ее движения в режиме реального времени.

Цель исследования: разработка математической модели колесной машины для симуляции ее движения в режиме реального времени, проверка ее адекватности по результатам моделирования стандартных маневров – переставка, движение по кругу.

Для реализации этой цели были поставлены **задачи:** составить дифференциальные уравнения плоского движения колесной машины; разработать программную реализацию для интегрирования уравнений в среде Matlab [6]; провести математическое моделирование движения и оценить адекватность модели реальному объекту.

Математическая модель колесной машины. При разработке математической модели использовались дифференциальные уравнения плоского движения автомобиля [7]:

$$M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^n F_{kx}^E, M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^n F_{ky}^E, I_C\ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^n m_C(\vec{F}_k^E).$$

В модели боковые силы, действующие в контакте колеса с опорой, представляются как функции угла увода. Для определения углов увода через кинематические параметры движения автомобиля (скорость центра масс,

угловую скорость в горизонтальной плоскости и его геометрические размеры) рассмотрим схему кинематики плоского движения автомобиля, изображенную на рисунке 1.

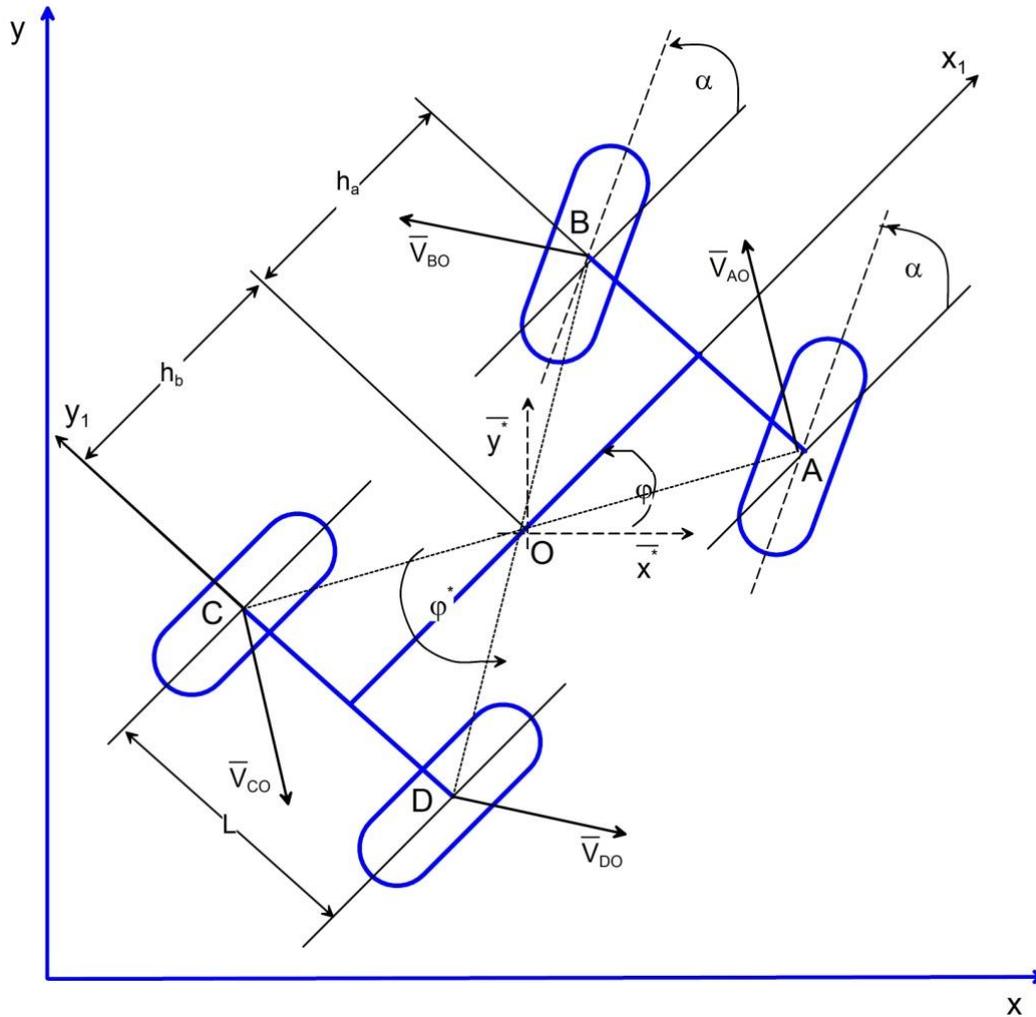


Рис. 1. Кинематика плоского движения автомобиля

На схеме использованы следующие обозначения: \vec{x}, \vec{y} – составляющие скорости центра масс (точка O); h_a, h_b – расстояние от передней и задней оси до центра масс; α – угол поворота управляемых колес; L – ширина колеи; $\varphi, \dot{\varphi}$ – угол поворота продольной оси в горизонтальной плоскости и угловая скорость; $\vec{V}_{AO}, \vec{V}_{BO}, \vec{V}_{CO}, \vec{V}_{DO}$ – вращательные скорости относительно центра масс.

При составлении кинематических уравнений углы поворота управляемых колес были приняты как одинаковые. Скорости центров колес определяются как векторная сумма скорости центра масс (\vec{V}_O) и их вращательных скоростей относительно центра масс ($\vec{V}_{AO}, \vec{V}_{BO}, \vec{V}_{CO}, \vec{V}_{DO}$): $\vec{V}_A = \vec{V}_O + \vec{V}_{AO}$, $\vec{V}_B = \vec{V}_O + \vec{V}_{BO}$, $\vec{V}_C = \vec{V}_O + \vec{V}_{CO}$, $\vec{V}_D = \vec{V}_O + \vec{V}_{DO}$.

Вращательные скорости – это произведение расстояний от центров масс колес до центра масс на угловую скорость автомобиля в горизонтальной плоскости.

После проецирования уравнений на подвижные оси x_1 и y_1 , связанные с автомобилем, получаем проекции скоростей центров колес на эти оси:

$$\begin{aligned} V_{Ax_1} &= \dot{x}_O \cos \varphi + \dot{y}_O \sin \varphi + \dot{\varphi} \frac{L}{2}, \\ V_{Ay_1} &= -\dot{x}_O \sin \varphi + \dot{y}_O \cos \varphi + \dot{\varphi} h_a, \\ V_{Bx_1} &= \dot{x}_O \cos \varphi + \dot{y}_O \sin \varphi - \dot{\varphi} \frac{L}{2}, \\ V_{By_1} &= -\dot{x}_O \sin \varphi + \dot{y}_O \cos \varphi + \dot{\varphi} h_a, \\ V_{Cx_1} &= \dot{x}_O \cos \varphi + \dot{y}_O \sin \varphi - \dot{\varphi} \frac{L}{2}, \\ V_{Cy_1} &= -\dot{x}_O \sin \varphi + \dot{y}_O \cos \varphi - \dot{\varphi} h_b, \\ V_{Dx_1} &= \dot{x}_O \cos \varphi + \dot{y}_O \sin \varphi + \dot{\varphi} \frac{L}{2}, \\ V_{Dy_1} &= -\dot{x}_O \sin \varphi + \dot{y}_O \cos \varphi - \dot{\varphi} h_b. \end{aligned}$$

Для задних колес отношение проекции скорости на ось y_1 и проекции на ось x_1 есть тангенс угла увода (угол, полученный между вектором скорости центра колеса с плоскостью обода). А для передних управляемых колес угол увода вычисляется как разность между углом поворота α и углом, составленным вектором скорости с осью x_1 .

Соответственно, получаются следующие формулы для определения углов увода:

$$\delta_A = \alpha - \arctan \frac{-\dot{x}_0 \sin \varphi + \dot{y}_0 \cos \varphi + \dot{\varphi} h_a}{\dot{x}_0 \cos \varphi + \dot{y}_0 \sin \varphi + \dot{\varphi} \frac{L}{2}},$$

$$\delta_B = \alpha - \arctan \frac{-\dot{x}_0 \sin \varphi + \dot{y}_0 \cos \varphi + \dot{\varphi} h_a}{\dot{x}_0 \cos \varphi + \dot{y}_0 \sin \varphi - \dot{\varphi} \frac{L}{2}},$$

$$\delta_C = -\arctan \frac{-\dot{x}_0 \sin \varphi + \dot{y}_0 \cos \varphi - \dot{\varphi} h_b}{\dot{x}_0 \cos \varphi + \dot{y}_0 \sin \varphi - \dot{\varphi} \frac{L}{2}},$$

$$\delta_D = -\arctan \frac{-\dot{x}_0 \sin \varphi + \dot{y}_0 \cos \varphi - \dot{\varphi} h_b}{\dot{x}_0 \cos \varphi + \dot{y}_0 \sin \varphi + \dot{\varphi} \frac{L}{2}}.$$

Боковые силы принимаются пропорционально углам бокового увода (K_A, K_A, K_A, K_A – коэффициенты сопротивления уводу колес): $F_{бок.A} = K_A \delta_A$, $F_{бок.B} = K_B \delta_B$, $F_{бок.C} = K_C \delta_C$, $F_{бок.D} = K_D \delta_D$.

Боковые силы ($\vec{F}_{бок}$) направляются перпендикулярно плоскости обода, движущие силы ($\vec{F}_{движ}$) и силы сопротивления качению ($\vec{F}_{сопр}$) – по линии вектора скорости центра колеса в соответствующих направлениях. Силы, действующие на автомобиль, представлены на рисунке 2.

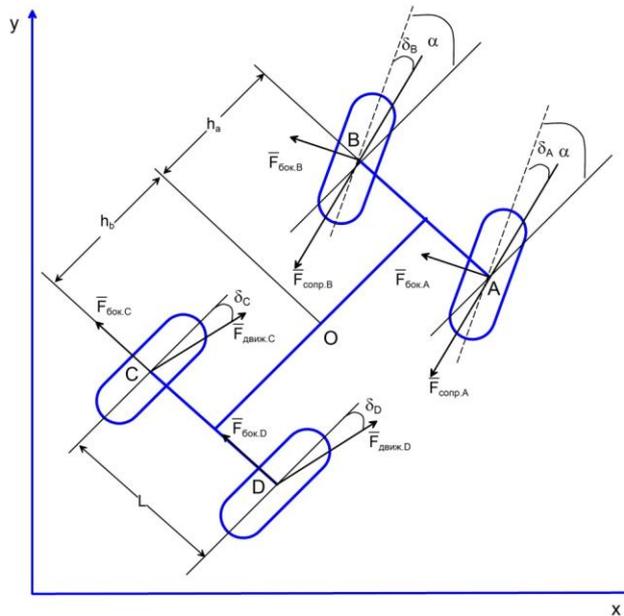


Рис. 2. Силы, действующие на автомобиль

На схеме использованы следующие обозначения: h_a, h_b – расстояние от передней и задней оси до центра масс (точка O); α – угол поворота управляемых колес; L – ширина колеи; $\delta_A, \delta_B, \delta_C, \delta_D$ – углы увода колес; $\vec{F}_{бок.A}, \vec{F}_{бок.B}, \vec{F}_{бок.C}, \vec{F}_{бок.D}$ – боковые силы; $\vec{F}_{сопр.A}, \vec{F}_{сопр.B}$ – силы сопротивления; $\vec{F}_{движ.C}, \vec{F}_{движ.D}$ – движущие силы.

Получаем следующие формулы проекций сил на оси OX и OY для центров всех колес:

$$F_{AX} = -F_{сопр.A} \cos(\varphi + \alpha - \delta_A) - F_{бок.A} \sin(\varphi + \alpha),$$

$$F_{BX} = -F_{сопр.B} \cos(\varphi + \alpha - \delta_B) - F_{бок.B} \sin(\varphi + \alpha),$$

$$F_{CX} = F_{движ.C} \cos(\varphi - \delta_C) - F_{бок.C} \sin \varphi,$$

$$F_{DX} = F_{движ.D} \cos(\varphi - \delta_D) - F_{бок.D} \sin \varphi,$$

$$F_{AY} = -F_{сопр.A} \sin(\varphi + \alpha - \delta_A) + F_{бок.A} \cos(\varphi + \alpha),$$

$$F_{BY} = -F_{сопр.B} \sin(\varphi + \alpha - \delta_B) + F_{бок.B} \cos(\varphi + \alpha),$$

$$F_{CY} = F_{движ.C} \sin(\varphi - \delta_C) - F_{бок.C} \cos \varphi,$$

$$F_{DY} = F_{движ.D} \sin(\varphi - \delta_D) - F_{бок.D} \cos \varphi.$$

Моменты сил относительно точки O:

$$M_A = -F_{сопр.A} \cos(\alpha - \delta_A) \frac{L}{2} - F_{сопр.A} \sin(\alpha - \delta_A) h_a + F_{бок.A} \cos(\alpha) h_a - F_{бок.A} \sin(\alpha) \frac{L}{2},$$

$$M_B = F_{сопр.B} \cos(\alpha - \delta_B) \frac{L}{2} - F_{сопр.B} \sin(\alpha - \delta_B) h_a + F_{бок.B} \cos(\alpha) h_a + F_{бок.A} \sin(\alpha) \frac{L}{2},$$

$$M_C = -F_{движ.C} \cos(\delta_C) \frac{L}{2} + F_{движ.C} \sin(\delta_C) h_b - F_{бок.C} h_b,$$

$$M_D = F_{движ.D} \cos(\delta_D) \frac{L}{2} + F_{движ.D} \sin(\delta_D) h_b - F_{бок.D} h_b.$$

Исходя из дифференциальных уравнений движения центра масс и дифференциального уравнения вращательного движения и используя выведенные проекции сил на

оси и формулы вычисления моментов сил, получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x}_O &= F_{AX} + F_{BX} + F_{CX} + F_{DX}, \\
 m\ddot{y}_O &= F_{AY} + F_{BY} + F_{CY} + F_{DY}, \\
 I_O\ddot{\phi} &= M_A + M_B + M_C + M_D.
 \end{aligned}$$

Моделирование движения в Matlab. Для того чтобы проверить работоспособность математической модели в пакете Matlab, была разработана функция для вычисления правых частей полученной системы дифференциальных уравнений. Переменные состояния данной функции: координата X; проекция скорости на ось OX; координата Y; проекция скорости на ось OY; угол поворота продольной оси машины; угловая скорость машины в горизонтальной плоскости.

Входные параметры модели: масса автомобиля; расстояние от центра масс до передней оси; расстояние от

центра масс до задней оси; ширина колеи; величины сил сопротивления и движения; момент инерции автомобиля относительно центра масс; коэффициенты сопротивления уводу колес.

На рисунке 3 представлены зависимости угла поворота управляемых колес от времени и полученная траектория движения. Угол поворота колес задавался как шаговая функция, которая плавно аппроксимирует переход от одного значения к другому, используя кубический полином.

На рисунке 4 представлены зависимости угла поворота управляемых колес от времени и полученная траектория движения при маневре переставка.

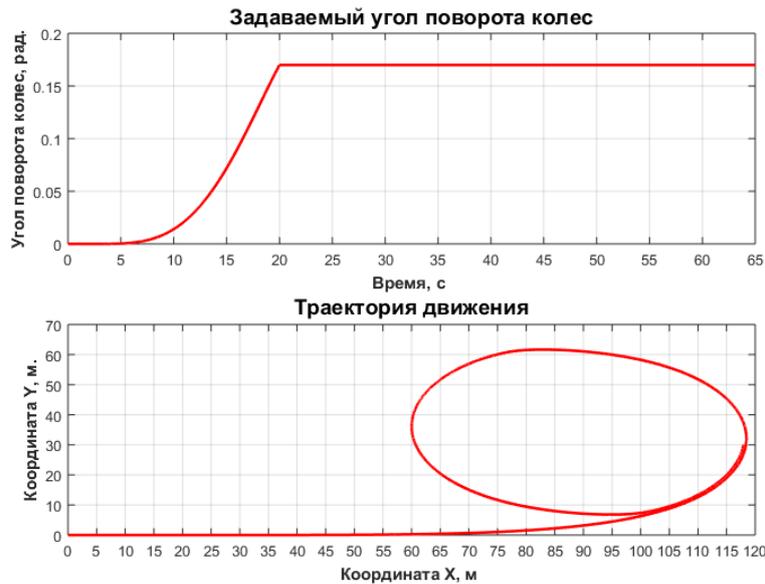


Рис. 3. Результаты моделирование движения по круговой траектории

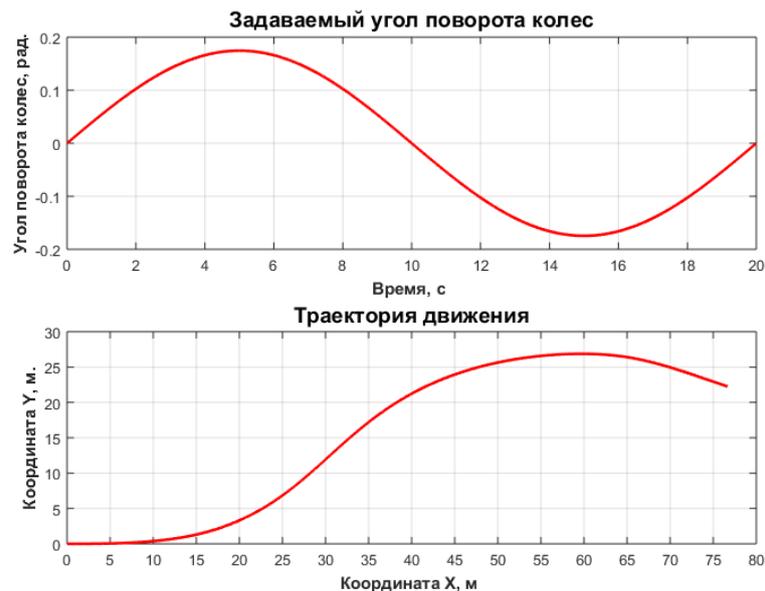


Рис. 4. Результаты моделирования движения при переставке

Выводы. Из анализа рисунков 3-4 можно сделать вывод, что траектория движения при рассмотренных маневрах соответствует действительности.

Следовательно, результаты моделирования в среде Matlab подтвердили адекватность разработанной математической модели реальной машины, что позволяет в дальнейшем использовать ее для симуляции движения колесной машины в режиме реального времени и при разработке алгоритма управления с использованием теории автоматического регулирования.

Литература

1. Подруливающие устройства. – URL: <http://агронавигация.рф/podrulivayushchie-devices> (дата обращения: 13.12.2017).
2. Березовский Е., Захаренко А., Полин В. Внедрение технологий точного земледелия: опыт Тимирязевской академии // Аграрное обозрение. – 2009. – № 4. – С. 12–17.
3. Управление движением колесного трактора с использованием спутниковых радионавигационных систем / В.И. Поддубный [и др.] // Тракторы и сельхозмашины. – 2016. – № 2. – С. 46–49.
4. Поддубный В.И. Повышение эффективности использования колесных мобильных машин в АПК на основе улучшения их устойчивости и управляемости: дис. ... д-ра техн. наук / Алтайский гос. техн. ун-т. – Барнаул, 2011.
5. Поддубный В.И., Ненайденко А.С., Валежжанин А.И. Разработка ПИД-регулирования для реализации задаваемого закона изменения угла поворота колес сельскохозяйственной машины // Ползуновский вестник. – 2017. – № 1. – С. 63–67.
6. Дьяконов В.П. Матлаб 6.5+Simulink 4/5. – М.: СОЛОН-Пресс, 2002. – 768 с.

7. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики: статика, кинематика, динамика: учеб. пособие для вузов. – 14-е изд., испр. – М.: Интеграл-пресс, 2007. – 608 с.

Literatura

1. Podrulivajushhie ustrojstva. – URL: <http://агронавигация.рф/podrulivayushchie-devices> (дата обращения: 13.12.2017).
2. Berезovskij E., Zaharenko A., Polin V. Vnedrenie tehnologij tochnogo zemledelija: opyt Timirjazevskoj akademii // Agrarnoe obozrenie. – 2009. – № 4. – S. 12–17.
3. Upravlenie dvizheniem kolesnogo traktora s ispol'zovaniem sputnikovyh radionavigacionnyh sistem / V.I. Poddubnyj [i dr.] // Traktory i sel'hoz mashiny. – 2016. – № 2. – S. 46–49.
4. Poddubnyj V.I. Povыshenie jeffektivnosti ispol'zovanija kolesnyh mobil'nyh mashin v APK na osnove uluchshenija ih ustojchivosti i upravljaemosti: dis. ... d-ra tehn. nauk / Altajskij gos. tehn. un-t. – Barnaul, 2011.
5. Poddubnyj V.I., Nenaјdenko A.S., Valekzhanin A.I. Razrabotka PID-regulirovanija dlja realizacii zadavaemogo zakona izmenenija ugla povorota koles sel'skoho-zjajstvennoj mashiny // Polzunovskij vestnik. – 2017. – № 1. – S. 63–67.
6. D'jakonov V.P. Matlab 6.5+Simulink 4/5. – M.: SOLON-Press, 2002. – 768 s.
7. Jablonskij A.A., Nikiforova V.M. Kurs teoreticheskoj mehaniki: statika, kinematika, dinamika: ucheb. posobie dlja vuzov. – 14-e izd., ispr. – M.: Integral-press, 2007. – 608 s.

