

МЕТОД МНОГОСЕТОЧНЫХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В РАСЧЕТАХ  
ТРЕХМЕРНЫХ КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН И БАЛОК СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

A.D. Matveev

MULTIGRID FINITE ELEMENT METHOD IN THE CALCULATIONS  
OF THREE-DIMENSIONAL COMPOSITE PLATES AND BEAMS OF IRREGULAR FORM

**Матвеев А.Д.** – канд. физ.-мат. наук, доц., ст. науч. сотр. Института вычислительного моделирования СО РАН, г. Красноярск. E-mail: mtv@icm.krasn.ru

**Matveev A.D.** – Cand. Phys. and Math. Sci., Assoc. Prof., Senior Staff Scientist, Institute of Computing Modeling, SB RAS, Krasnoyarsk. E-mail: mtv@icm.krasn.ru

Для расчета напряженного состояния упругих трехмерных композитных пластин и балок сложной формы при статическом нагружении предложен метод многосеточных конечных элементов, который реализуется на основе алгоритмов метода конечных элементов (МКЭ) с применением трехмерных многосеточных конечных элементов (МНКЭ), имеющих неоднородную и микронеоднородную структуру. Отличие МНКЭ от существующих конечных элементов (КЭ) состоит в следующем. При построении  $m$ -сеточного КЭ используются  $m$  вложенных сеток. Мелкая сетка порождает разбиение, которое учитывает неоднородную структуру и сложную форму МНКЭ, остальные  $m - 1$  крупные сетки применяются для понижения размерности МНКЭ, причем, с увеличением  $m$  размерность МНКЭ уменьшается. Особенность и достоинство МНКЭ состоят в том, что при построении МНКЭ используются сколь угодно мелкие базовые разбиения композитных пластин, балок, состоящих из односеточных КЭ 1-го порядка, т. е. по сути используется микроподход в конечноэлементной форме. Такие мелкие разбиения позволяют учитывать в МНКЭ, т. е. в базовых дискретных моделях композитных пластин, балок, сложную неоднородную, микронеоднородную структуру и форму, сложный характер нагружения и закрепления и описывать сколь угодно точно напряженное деформированное состояние уравнениями трехмерной теории упругости без введения дополнительных упрощающих гипотез. Краткая суть МНКЭ со-

стоит в следующем. На базовом разбиении (на мелкой сетке)  $m$ -сеточного конечного элемента,  $m \geq 2$ , определяем полную потенциальную энергию как функцию  $F$  многих переменных, которыми являются узловые перемещения мелкой сетки. На остальных  $m - 1$  крупных сетках (вложенных в мелкую сетку) строим по МКЭ функции перемещений, которые используем для понижения размерности функции  $F$ , что позволяет проектировать МНКЭ малой размерности. Изложены процедуры построения МНКЭ пластинчатого и балочного типов сложной формы. Достоинства МНКЭ состоят в том, что они порождают дискретные модели малой размерности и сеточные решения с малой погрешностью. Приведен пример расчета композитной балки с применением трехмерных двухсеточных КЭ сложной формы.

**Ключевые слова:** упругость, композиты, пластины и балки сложной формы, многосеточные конечные элементы, микроподход, малая погрешность.

To calculate the stress and strain state of three-dimensional elastic composite plates and beams of heterogeneous structure, irregular shape and static loading the method of multigrid finite elements is provided when implemented on the basis of algorithms of finite element method (FEM), using three-dimensional homogeneous and composite multigrid finite elements (MFE). MFE differs from existing final elements (FE) given below. At creation of  $m$ -net FE  $m$  of enclosed grids are used. Small grid

generates splitting which considers non-uniform structure and FEM difficult form the others  $m - 1$  large grids applied to decrease the dimension of FEM and with the increase in  $m$  dimension of MFE decreases. The peculiarity and advantage of FEM are the following: at the creation of FEM as much as small basic splittings composite plates are used, the beams consisting of one-net FE of the 1-st order i.e. in fact microapproach in finite element form is used. Such small grids allow to consider in FEM, i.e. in basic discrete models of composite plates, beams, difficult non-uniform, micronon-uniform structure and form, difficult nature of loading and fixing and to describe as precisely as possible intense deformed state the equations of three-dimensional theory of elasticity without introduction of additional simplifying hypotheses. Short essence of FEM is as follows. On basic splitting (on a small grid) a net final element,  $m \geq 2$  total potential energy as the function of many variables which nodal movements of a small grid is defined. On the other  $m - 1$  large grids (enclosed in a small grid) on FEM the function of movements used for decreasing dimension of function allowing to project FEM of small dimension is built. The procedures of creation of FEM of lamellar and frame types of complex type are stated. The advantages of FEM are in generating discrete models of small dimension and net decisions with a small error. The example of calculation of a composite beam with application of three-dimensional two-net FE of difficult form is given.

**Keywords:** elasticity, composites, plates and beams of complex shape, multigrid finite elements, microapproach, small error.

**Введение.** При анализе напряженного состояния композитных пластин и балок сложной формы широко используют микро- и макроподходы. Реализация макроподхода для композитных пластин и балок регулярной структуры сводится к проблеме нахождения эффективных модулей упругости, которая особенно трудно решается для композитов нерегулярной структуры [1]. Расчет композитных пластин и балок сложной формы по методу конечных элементов (МКЭ) с применением уравнений трехмерной теории упругости приводит к построению базовых дискретных моделей высокой размерности, порядка  $10^8 \div 10^{10}$ . Ширина ленты системы уравнений МКЭ для таких базовых моделей

равна  $10^5 \div 10^6$  [2–4]. Применение в этом случае программ расчета ANSYS, NASTRAN и других затруднительно. В основе построения приближенных (технических) теорий деформирования упругих композитных пластин и балок лежат гипотезы [5–8], которые порождают решения с неустранимой погрешностью.

**Цель исследований:** анализ напряженного состояния упругих трехмерных композитных пластин и балок сложной формы с различными коэффициентами заполнения при статическом нагружении.

**Методы и результаты исследования.** Предложен метод многосеточных конечных элементов [9, 10], краткая суть которого состоит в следующем. Предлагаемый метод реализуется на основе алгоритмов МКЭ с применением трехмерных однородных и композитных многосеточных конечных элементов (МНКЭ). Отличия МНКЭ от существующих КЭ состоят в том, что в МНКЭ учитывается (в рамках микроподхода [1]) сложная неоднородная структура и форма и описывается напряженное состояние уравнениями трехмерной теории упругости без введения дополнительных упрощающих гипотез. При построении МНКЭ [11–14] используем функции перемещений в виде степенных и лагранжевых полиномов различных порядков и уравнения трехмерной задачи теории упругости [4], записанные в локальных декартовых системах координат. Полиномы Лагранжа эффективно применяются при построении МНКЭ пластинчатого и балочного типов. Показаны процедуры построения МНКЭ формы прямоугольного параллелепипеда и сложной формы. Достоинства предлагаемых МНКЭ состоят том, что они:

- учитывают неоднородную структуру и сложную форму пластин и балок;
- образуют многосеточные дискретные модели, размерность которых в  $10^3 \div 10^5$  раз меньше размерностей базовых моделей пластин и балок;
- порождают приближенные решения с малой погрешностью.

Реализация МКЭ для многосеточных дискретных моделей требует в  $10^3 \div 10^5$  раз меньше объема памяти ЭВМ, чем для базовых моделей.

Следует отметить, что метод многосеточных конечных элементов (ММНКЭ) является более

глобальным, чем МКЭ. Во-первых, ММнКЭ всегда можно использовать при решении всех краевых задач, которые решаются с помощью МКЭ (поскольку вместо односеточных КЭ всегда можно использовать МнКЭ, которые порождают дискретные модели малой размерности). Во-вторых, в МКЭ используются только однородные односеточные КЭ, а в ММнКЭ можно использовать как однородные, так и неоднородные МнКЭ, что позволяет эффективно учитывать неоднородную структуру тел. В-третьих, расчет ряд конструкций сложной формы с неоднородной (микронеоднородной) структурой по МКЭ в рамках микроподхода связан с большими трудностями или невозможен для существующих ЭВМ, а расчет с помощью ММнКЭ возможен (см. пример расчета композитной пластины в работе [9]).

**1. Процедура построения двухсеточных КЭ сложной формы.** Основные положения процедуры покажем на примере построения композитного 2-сеточного КЭ (2сКЭ)  $V_n^a$  сложной формы балочного типа. 2сКЭ  $V_n^a$  формы прямоугольного параллелепипеда размерами  $18h \times 24h \times 18h$ , имеющий отверстие сложной формы, расположен в локальной декартовой системе координат  $Oxyz$  (рис. 1). Считаем, что между компонентами неоднородной структуры 2сКЭ  $V_n^a$  связи идеальны. Пусть 2сКЭ  $V_n^a$  арми-

рован непрерывными волокнами, параллельными оси  $Oy$ . Область 2сКЭ  $V_n^a$  представляем базовым разбиением  $R_a$ , состоящим из однородных односеточных КЭ (1сКЭ)  $V_e$  1-го порядка формы куба со стороной  $h$ ,  $e = 1, \dots, M$ ; где  $M$  – общее число 1сКЭ. На рисунке 1 показано базовое разбиение 2сКЭ  $V_n^a$  на 1сКЭ  $V_e$  в плоскости  $Oxz$ , сечения волокон (размерами  $h \times h$ ) закрашены. Функции перемещений, напряжений и деформаций компонентов удовлетворяют закону Гука и соотношениям Коши, отвечающим трехмерной задаче теории упругости [4], т. е. во всей области 1сКЭ, следовательно, и в 2сКЭ  $V_n^a$  реализуется трехмерное напряженное состояние. Базовое разбиение  $R_a$  учитывает неоднородную структуру и сложную форму 2сКЭ  $V_n^a$  и порождает мелкую узловую сетку  $h_a$ . На мелкой сетке  $h_a$  определяем крупную сетку  $H_a$ , узлы которой на рисунке 2 отмечены точками. Общее число узлов крупной сетки  $H_a$  равно 60. Крупная сетка  $H_a$  вложена в прямоугольную сетку  $n_1 \times n_2 \times n_3$ , которая расположена в целочисленной системе координат  $i, j, k$ ;  $i = 1, \dots, n_1$ ,  $j = 1, \dots, n_2$ ,  $k = 1, \dots, n_3$ , для рисунке 2 имеем  $n_1 = 4$ ,  $n_2 = 5$ ,  $n_3 = 4$ .

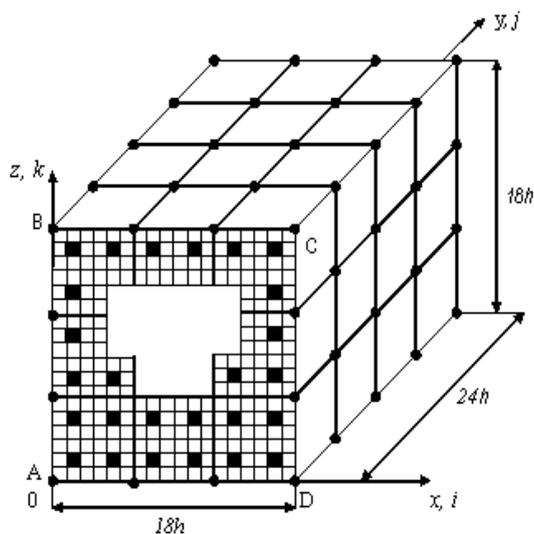


Рис. 1. 2сКЭ  $V_n^a$  сложной формы

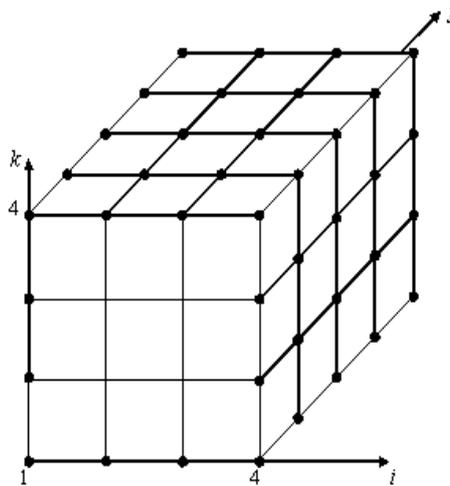


Рис. 2. Сетка  $H_a$

При построении базисных функций перемещений  $\psi_{ijk}(x, y, z)$  2скЭ  $V_n^a$  используем полиномы Лагранжа  $L_j(y)$  и двумерный интерполяционный полином  $P_a(x, z)$ . Общее число функций  $\psi_{ijk}$  равно 60. Основание 2скЭ  $V_n^a$ , которое лежит в плоскости  $Oxz$  и имеет 12 узлов крупной сетки, рассматриваем квадратным КЭ  $ABCD$  3-го порядка с отверстием (см. рис. 1). Для аппроксимации перемещений КЭ  $ABCD$  используем полином  $P_a(x, z)$  вида

$$P_a(x, z) = a_1 + a_2x + a_3z + a_4xz + a_5x^2 + a_6z^2 + a_7x^2z + a_8xz^2 + a_9xz^3 + a_{10}zx^3 + a_{11}x^3 + a_{12}z^3, \quad (1)$$

где  $a_i$  – постоянные,  $i = 1, \dots, 12$ .

Базисную функцию  $\psi_{ijk}(x, y, z)$  для узла  $i, j, k$  крупной сетки  $H_a$  2скЭ  $V_n^a$  с координатами  $x_i, y_j, z_k$  представляем в следующей форме:

$$\psi_{ijk}(x, y, z) = N_{ik}(x, z)L_j(y), \quad (2)$$

где  $N_{ik}(x, z)$  – базисные функции перемещений КЭ  $ABCD$  (см. рис. 1), которые отвечают полиному  $P_a(x, z)$  вида (1),  $i = 1, \dots, 4$ ,  $j = 1, \dots, 5$ ,  $k = 1, \dots, 4$ ;  $L_j(y)$  – полином Лагранжа 4-го порядка [2]:

$$L_j(y) = \prod_{\alpha=1, \alpha \neq j}^5 \frac{y - y_\alpha}{y_j - y_\alpha}. \quad (3)$$

Для каждого узла  $i, j, k$  крупной сетки  $H_a$  2скЭ  $V_n^a$  определим число  $\beta$  и введем обозначение  $N_\beta = \psi_{ijk}$ ,  $\beta = 1, \dots, 60$ . Тогда функции перемещений  $u_a, v_a, w_a$  2скЭ  $V_n^a$  (построенные на крупной сетке  $H_a$ ) представим в форме

$$u_a = \sum_{\beta=1}^{60} N_\beta u_\beta, \quad v_a = \sum_{\beta=1}^{60} N_\beta v_\beta, \quad w_a = \sum_{\beta=1}^{60} N_\beta w_\beta, \quad (4)$$

где  $N_\beta, u_\beta, v_\beta, w_\beta$  – базисная функция и перемещения  $\beta$ -го узла сетки  $H_a$ .

Обозначим:

$\mathbf{q}_n^a = \{u_1, \dots, u_{60}, v_1, \dots, v_{60}, w_1, \dots, w_{60}\}^T$  – вектор узловых перемещений сетки  $H_a$ , т. е. вектор узловых перемещений 2скЭ  $V_n^a$ . Полную потенциальную энергию  $\Pi_n^a$  базового разбиения  $R_a$  2скЭ  $V_n^a$  представим в виде

$$\Pi_n^a = \sum_{e=1}^M \left( \frac{1}{2} \mathbf{q}_e^T [K_e^h] \mathbf{q}_e - \mathbf{q}_e^T \mathbf{P}_e \right), \quad (5)$$

где  $[K_e^h]$  – матрица жесткости;  $\mathbf{P}_e, \mathbf{q}_e$  – векторы узловых сил и перемещений 1скЭ  $V_e$ .

Используя (4), вектор  $\mathbf{q}_e$  узловых перемещений 1сКЭ  $V_e$  выражаем через вектор  $\mathbf{q}_n^a$  узловых перемещений 2сКЭ  $V_n^a$ . В результате получим равенство

$$\mathbf{q}_e = [A_e^a] \mathbf{q}_n^a, \quad (6)$$

где  $[A_e^a]$  – прямоугольная матрица,  $e = 1, \dots, M$ .

Подставляя (6) в выражение (5), из условия  $\partial \Pi_n^a / \partial \mathbf{q}_n^a = 0$  получаем матричное соотношение  $[K_n^a] \mathbf{q}_n^a = \mathbf{F}_n^a$ , отвечающее равновесному состоянию 2сКЭ  $V_n^a$ :

$$[K_n^a] = \sum_{e=1}^M [A_e^a]^T [K_e^h] [A_e^a], \quad \mathbf{F}_n^a = \sum_{e=1}^M [A_e^a]^T \mathbf{P}_e, \quad (7)$$

где  $[K_n^a]$ ,  $\mathbf{F}_n^a$  – матрица жесткости и вектор узловых сил 2сКЭ  $V_n^a$ .

Порядок  $n_a$  2сКЭ  $V_n^a$  при  $p = n_1 = n_2 = n_3$  равен  $n_a = p - 1$ .

*Замечание 1.* В силу (6) размерность вектора  $\mathbf{q}_n^a$  (т. е. размерность 2сКЭ  $V_n^a$ ) не зависит от числа  $M$ , т. е. от размерности разбиения  $R_a$ . Поэтому для учета сложной неоднородной структуры и формы, сложного характера нагружения 2сКЭ  $V_n^a$  можно использовать сколь угодно мелкие базовые разбиения  $R_a$ , состоящие из 1сКЭ  $V_e$ . В этом случае в 1сКЭ  $V_e$ , следовательно, и в 2сКЭ  $V_n^a$  сколь угодно точно описывается трехмерное напряженное состояние [4].

*Замечание 2.* Решение, построенное для сетки  $H_a$  2сКЭ  $V_n^a$ , с помощью формулы (6) проецируем на мелкую сетку  $h_a$  базового разбиения 2сКЭ  $V_n^a$ , что дает возможность вычислять напряжения в любом 1сКЭ  $V_e$  базового разбиения 2сКЭ  $V_n^a$ , т. е. определять напряжения в любом компоненте неоднородной структуры пластин и балок.

*Замечание 3.* При построении 2сКЭ пластинчатого (балочного) типа используем полиномы

Лагранжа, имеющие по осям  $Ox$ ,  $Oy$  (по оси  $Oy$ ) более высокий порядок аппроксимаций, чем по оси  $Oz$  (по осям  $Oz$ ,  $Ox$ ), т. е.  $n_1, n_2 > n_3$  ( $n_2 > n_1, n_3$ ). Достаточно мелкие разбиения композитных пластин, балок представляются однородными 2сКЭ. При проектировании однородных 2сКЭ используется процедура, аналогичная п. 1.

**2. Процедура построения  $n$ -сеточных КЭ.** Рассмотрим процедуру построения  $n$ -сеточного КЭ  $V_\alpha^n$  формы прямоугольного параллелепипеда,  $n \geq 2$  [14]. Область КЭ  $V_\alpha^n$  состоит из  $(n-1)$ -сеточных КЭ  $V_i^{n-1}$ ,  $i = 1, \dots, M_{n-1}$ ,  $M_{n-1}$  – общее число КЭ  $V_i^{n-1}$ . При этом КЭ  $V_i^{n-1}$  имеют одинаковые геометрические размеры, крупные сетки, неоднородную структуру и базовые разбиения. Крупные сетки КЭ  $V_i^{n-1}$  ( $i = 1, \dots, M_{n-1}$ ) образуют сетку  $h_n$ , на которой определяем крупную  $H_n$  сетку для КЭ  $V_\alpha^n$  (сетка  $H_n$  вложена в сетку  $h_n$ ). Функции перемещений  $u_n, v_n, w_n$   $n$ -сеточного КЭ  $H_n$ , построенные на крупной сетке  $H_n$  с помощью полиномов Лагранжа (степенных полиномов), запишем в форме

$$u_n = \sum_{\beta=1}^{m_0} N_\beta^n q_\beta^u, \quad v_n = \sum_{\beta=1}^{m_0} N_\beta^n q_\beta^v, \quad w_n = \sum_{\beta=1}^{m_0} N_\beta^n q_\beta^w, \quad (8)$$

где  $N_\beta^n$  – базисная функция  $\beta$ -го узла сетки  $H_n$ ;  $q_\beta^u, q_\beta^v, q_\beta^w$  – значения соответственно функций  $u_n, v_n, w_n$  в  $\beta$ -м узле сетки  $H_n$ ;  $m_0$  – общее число узлов сетки  $H_n$ .

Полную потенциальную энергию  $\Pi_\alpha^n$   $n$ -сеточного КЭ  $V_\alpha^n$  представим как сумму полных потенциальных энергий  $(n-1)$ -сеточных КЭ  $V_i^{n-1}$ , т. е. имеем

$$\Pi_\alpha^n = \sum_{i=1}^{M_{n-1}} \left\{ \frac{1}{2} (\mathbf{q}_i^{n-1})^T [K_i^{n-1}] \mathbf{q}_i^{n-1} - (\mathbf{q}_i^{n-1})^T \mathbf{P}_i^{n-1} \right\}, \quad (9)$$

где  $[K_i^{n-1}]$ ,  $\mathbf{P}_i^{n-1}$  – матрица жесткости и вектор узловых сил КЭ  $V_i^{n-1}$ ;  $\mathbf{q}_i^{n-1}$  – вектор узловых перемещений  $V_i^{n-1}$ .

Обозначим через  $\mathbf{q}_\alpha^n$  вектор узловых перемещений крупной сетки  $V_H^n$  КЭ  $V_\alpha^n$ .

Используя (8), вектор  $\mathbf{q}_i^{n-1}$  выражаем через вектор  $\mathbf{q}_\alpha^n$ . В результате получим

$$\mathbf{q}_i^{n-1} = [A_i^n] \mathbf{q}_\alpha^n, \quad (10)$$

где  $[A_i^n]$  – прямоугольная матрица,  $i = 1, \dots, M_{n-1}$ .

Подставляя (10) в (9), из условия  $\partial \Pi_\alpha^n / \partial \mathbf{q}_\alpha^n = 0$  получаем матричное соотношение вида  $[K_\alpha^n] \mathbf{q}_\alpha^n = \mathbf{P}_\alpha^n$ :

$$[K_\alpha^n] = \sum_{i=1}^{M_{n-1}} [A_i^n]^T [K_i^{n-1}] [A_i^n], \quad \mathbf{P}_\alpha^n = \sum_{i=1}^{M_{n-1}} [A_i^n]^T \mathbf{P}_i^{n-1}, \quad (11)$$

где  $[K_\alpha^n]$ ,  $\mathbf{P}_\alpha^n$  – матрица жесткости и вектор узловых сил  $n$ -сеточного КЭ  $V_\alpha^n$ .

*Замечание 4.* Построение матрицы жесткости и вектора узловых сил  $n$ -сеточного КЭ  $V_\alpha^n$  проводится по единой процедуре (по единым формулам (11)) с применением матриц  $[K_i^{n-1}]$ ,  $\mathbf{P}_i^{n-1}$  ( $n-1$ )-сеточных КЭ  $V_i^{n-1}$  ( $i = 1, \dots, M_{n-1}$ ) и матриц  $[A_i^n]$ ,  $[A_i^n]^T$ , построенных с помощью функций перемещений (8)  $n$ -сеточного КЭ  $V_\alpha^n$ . Отметим, что  $n$ -сеточные КЭ  $V_\alpha^n$  порождают

дискретные модели композитных пластин, блоков меньшей размерности, чем  $(n-1)$ -сеточные КЭ  $V_i^{n-1}$ .

**3. Многосеточные КЭ формы прямой призмы с основанием сложной формы.** Рассмотрим 2сКЭ  $V_b$  неоднородной структуры формы прямой треугольной призмы с отверстием. Процедура построения 2сКЭ  $V_b$  аналогична процедуре п. 1. На рисунке 3 показаны мелкая и крупная сетки 2сКЭ  $V_b$  формы прямой треугольной призмы. Узлы крупной сетки 2сКЭ  $V_b$  отмечены точками (24 узла), сечение отверстия (ось которого параллельна оси  $Oy$ ) закрашено. Основание 2сКЭ  $V_b$ , которое лежит в плоскости  $Oxz$  и имеет 6 узлов крупной сетки, рассматриваем треугольным КЭ 2-го порядка с отверстием (см. рис. 3). Для аппроксимации перемещений треугольного КЭ используем полином вида

$$P_b(x, z) = a_1 + a_2x + a_3z + a_4xz + a_5x^2 + a_6z^2, \\ a_i = const.$$

В формуле (2) для 2сКЭ  $V_b$  используется полином Лагранжа  $L_j(y)$  3-го порядка,  $j = 1, \dots, 4$ . На рисунке 4 показан 2сКЭ  $V_d$  формы прямой призмы с трапециевидным основанием.

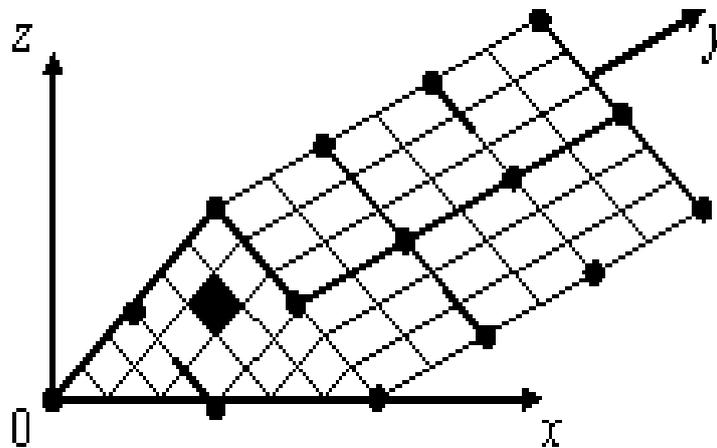


Рис. 3. 2сКЭ  $V_b$

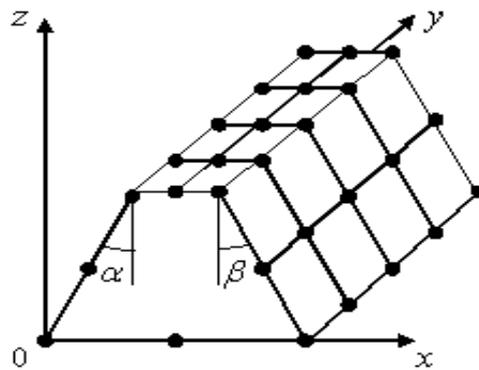


Рис. 4. 2сКЭ  $V_d$

Узлы крупной сетки 2сКЭ  $V_d$  отмечены точками (40 узлов), считаем, что углы  $\alpha, \beta$  малы. Основание 2сКЭ  $V_d$ , которое лежит в плоскости  $Oxz$  и имеет 8 узлов крупной сетки, рассматриваем КЭ 2-го порядка формы трапеции (см. рис. 4), для аппроксимации перемещений которого используем полином  $P_d(x, z)$  вида

$$P_d(x, z) = a_1 + a_2x + a_3z + a_4xz + a_5x^2 + a_6z^2 + a_7x^2z + a_8xz^2. \quad (12)$$

В формуле (2) для 2сКЭ  $V_d$  полином Лагранжа  $L_j(y)$  имеет 4-й порядок,  $j = 1, \dots, 5$ . Рассмотрим 2сКЭ  $V_q$  сложной формы, показанный на рисунке 5. Боковая поверхность 2сКЭ  $V_q$  состоит из цилиндрической поверхности (образующая которой перпендикулярна к основаниям 2сКЭ  $V_q$ ) и граней в форме прямоугольников (ребра которых перпендикулярны к основаниям 2сКЭ  $V_q$ ).

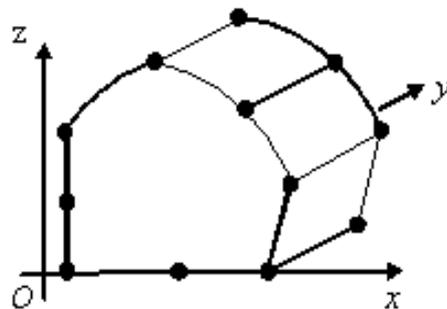


Рис. 5. 2сКЭ  $V_q$

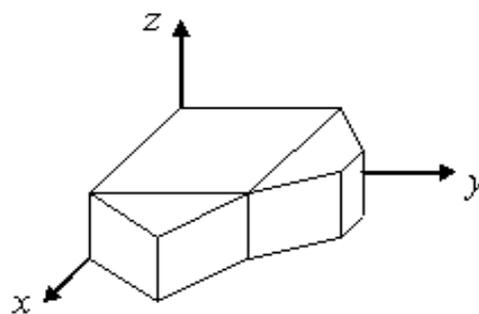


Рис. 6. Пластинчатый 2сКЭ  $V_p$

Узлы крупной сетки 2сКЭ  $V_q$  на рисунке 5 отмечены точками (16 узлов). Основание 2сКЭ  $V_q$ , которое лежит в плоскости  $Oxz$  и имеет 8 узлов крупной сетки, рассматриваем криволинейным КЭ  $V_q^2$  2-го порядка (см. рис. 5). Для аппроксимации перемещений криволинейного КЭ  $V_q^2$  используем полином вида (12). В формуле (2) применяем полиномы Лагранжа 1-го порядка,  $j = 1, 2$ . С помощью 2сКЭ  $V_b$  ( $V_d, V_q$ ) по процедуре, аналогичной п. 2, проектируем трехсеточный КЭ ( $n$ -сеточный КЭ,  $n \geq 2$ , [14]) сложной формы.

*Замечание 5.* При использовании мелких разбиений композитные тела представляются однородными МнКЭ. Расчеты показывают, что МнКЭ  $n$ -го порядка ( $n = 1, 2, 3$ ) формы прямоугольного параллелепипеда (треугольника, прямоугольника), спроектированные с применением мелких разбиений, для однородных тел порождают решения, совпадающие с решениями, построенными с применением однородных односеточных КЭ  $n$ -го порядка формы прямоугольного параллелепипеда (треугольника, прямоугольника) таких же размеров, как МнКЭ, узловые сетки которых совпадают с крупными сетками МнКЭ. Как известно [1–3], однородные известные односеточные КЭ  $n$ -го порядка порождают решения, которые сходятся в пределе

к точным. Следовательно, решения, построенные для неоднородных тел с применением однородных и композитных МнКЭ  $n$ -го порядка формы прямоугольного параллелепипеда (треугольника, прямоугольника), в пределе сходятся к точным.

**4. Пластинчатые двухсеточные КЭ сложной формы.** Пластинчатые 2сКЭ сложной формы можно рассматривать как гибридные, состоящие из 2сКЭ более простой формы. Пластинчатый 2сКЭ  $V_p$  сложной формы (рис. 6) состоит из следующих 2сКЭ, имеющих более простую форму: формы прямоугольного параллелепипеда, прямой треугольной призмы и прямой призмы, в основании которой лежит трапеция. С помощью 2сКЭ, из которых состоит гибридный 2сКЭ  $V_p$ , по процедуре, аналогичной п. 2, проектируем 3-сеточный пластинчатый КЭ ( $n$ -сеточный КЭ,  $n \geq 2$ , [2]) сложной формы.

**5. Результаты численных экспериментов.** В качестве модельной задачи рассмотрим расчет балки  $V_0$  сложной формы волокнистой структуры (рис. 7). Балка  $V_0$  расположена в глобальной декартовой системе координат  $Oxyz$ , при  $y = 0 : u = v = w = 0$ , т. е. балка жестко закреплена. Волокна параллельны оси  $Oy$ .

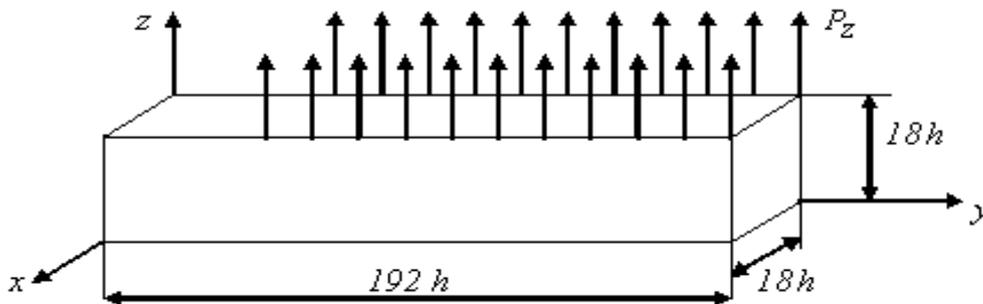


Рис. 7. Композитная балка  $V_0$

Базовое разбиение  $\mathbf{R}_0$  балки состоит из однородных КЭ  $V_j^h$  1-го порядка формы куба со стороной  $h=0.5$ , учитывает неоднородную структуру балки, сложную форму и порождает мелкую сетку  $h_a$  размерности  $19 \times 193 \times 19$ . Двухсе-

точная модель  $\mathbf{R}_h$  балки состоит из 2сКЭ  $V_n^a$  размерами  $18h \times 24h \times 18h$  (см. рис. 1), построенными по процедуре п. 1,  $n = 1, \dots, N$ ,  $N$  – общее число 2сКЭ  $V_n^a$ ,  $N = 8$ . Модуль Юнга связующего материала равен 1, волокон – 10, ко-

коэффициент Пуассона для волокон и связующего материала равен 0,3. Длина балки  $L = 192h$ , поперечное сечение балки размерами  $18h \times 18h$  имеет отверстие сложной формы (см. рис. 1). В узлах сетки  $h_a$  с координатами  $x_i, y_j, z = 18h$ , где  $x_i = 18h(\alpha - 1)$ ,  $\alpha = 1, 2$ ,  $y_j = 12h + 6h(\beta - 1)$ ,  $\beta = 1, \dots, 31$ , на балку действуют вертикальные силы  $P_z = 0,015$ , которые схематично показаны на рисунке 7.

Анализ результатов расчета балки показывает, что максимальные эквивалентные напряжения двухсеточной  $\sigma_h = 1,828$  и базовой –  $\sigma_0 = 1,969$  моделей балки отличаются на 7,16%. Максимальные перемещения двухсеточной  $w_h = 112,301$  и базовой –  $w_0 = 114,463$  моделей отличаются 1,86%. Размерность модели  $\mathbf{R}_0$  балки равна 178 560, ширина ленты системы уравнений (СУ) МКЭ – 1985. Двухсеточная модель  $\mathbf{R}_h$  балки имеет 1152 неизвестных (т. е. имеет в 155 раз меньше неизвестных базовой модели), ширина ленты СУ МКЭ равна 359 (в 5,5 раз меньше ширины ленты СУ МКЭ базовой модели). Реализация МКЭ для модели  $\mathbf{R}_h$  требует в 855 раз меньше объема памяти ЭВМ и в 120 раз меньше временных затрат, чем для модели  $\mathbf{R}_0$ . Эквивалентные напряжения определяем по 4-й теории прочности.

### Выводы

В данной статье предложен метод многосеточных конечных элементов для расчета упругих трехмерных композитных пластин и балок сложной формы при статическом нагружении. Предлагаемый метод реализуется на основе соотношений и алгоритмов метода конечных элементов (в форме метода Ритца) с применением трехмерных однородных и композитных многосеточных конечных элементов.

Достоинства многосеточных конечных элементов состоят в том, что они учитывают в рамках микроподхода неоднородную и микронеоднородную структуру, сложную форму пластин и балок, порождают дискретные модели малой размерности и численные решения с малой погрешностью.

### Литература

1. Фудзии Т., Дзако М. Механика разрушений композиционных материалов. – М.: Мир, 1982. – 232 с.
2. Норри Д., Ж. де Фриз. Введение в метод конечных элементов. – М.: Мир, 1981. – 304 с.
3. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 542 с.
4. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высш. шк., 1982. – 264 с.
5. Лехницкий С.Г. Кручение анизотропных и неоднородных стержней. – М.: Наука, 1971. – 240 с.
6. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. – М.: Гостехиздат, 1957. – 463 с.
7. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 2008. – 430 с.
8. Голушко С.К., Немировский Ю.В. Прямые и обратные задачи механики упругих композитных пластин и оболочек вращения. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 420 с.
9. Матвеев А.Д. Метод многосеточных конечных элементов в расчетах трехмерных однородных и композитных тел // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. «Физико-математические науки». – 2016. – Т. 158, кн. 4. – С. 530–543.
10. Matveev A.D. Multigrid finite element method in stress of three-dimensional elastic bodies of heterogeneous structure // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2016. – V. 158, № 1. – Art. 012067, P. 1-9.
11. Матвеев А.Д. Многосеточное моделирование композитов нерегулярной структуры с малым коэффициентом заполнения // Прикладная механика и техническая физика. – 2004. – № 3. – С. 161–171.
12. Матвеев А.Д. Построение сложных многосеточных конечных элементов с неоднородной и микронеоднородной структурой // Изв. Алтайского гос. ун-та. Сер. «Математика и механика». – 2014. – № 1/1. – С. 80–83.
13. Матвеев А.Д. Расчет трехмерных композитных балок сложной формы с применением двухсеточных конечных элементов // Вестн. КрасГАУ. – 2015. – № 8. – С. 92–98.

14. *Matveev A.D.* Построение сложных много-сеточных элементов с микронеоднородной структурой // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: тез. докл. XXIII Всерос. конф. – Барнаул, 2013. – Новосибирск: Параллель, 2013. – С. 142–144.

#### Literatura

1. *Fudzii T., Dzako M.* Mehanika razrushenij kompozicionnyh materialov. – M.: Mir, 1982. – 232 s.
2. *Norri D., Zh. de Friz.* Vvedenie v metod konechnyh jelementov. – M.: Mir, 1981. – 304 s.
3. *Zenkevich O.* Metod konechnyh jelementov v tehnikе. – M.: Mir, 1975. – 542 s.
4. *Samul' V.I.* Osnovy teorii uprugosti i plastichnosti. – M.: Vyssh. shk., 1982. – 264 s.
5. *Lehnickij S.G.* Kruchenie anizotropnyh i neodnorodnyh sterzhnej. – M.: Nauka, 1971. – 240 s.
6. *Lehnickij S.G.* Anizotropnye plastinki. – M.: Gostehizdat, 1957. – 463 s.
7. *Alfutov N.A., Zinov'ev P.A., Popov B.G.* Raschet mnogoslojnyh plastin i obolochek iz kompozicionnyh materialov. – M.: Mashinostroenie, 2008. – 430 s.
8. *Golushko S.K., Nemirovskij Ju.V.* Prjamyje i obratnye zadachi mehaniki uprugih

- kompozitnyh pla-stin i obolochek vrashhenija. – M.: FIZMATLIT, 2008. – 420 s.
9. *Matveev A.D.* Metod mnogosetochnyh konechnyh jelementov v raschetah trehmernyh odnorodnyh i kompozitnyh tel // Uchen. zap. Kazan. un-ta. Ser. «Fiziko-matematicheskie nauki». – 2016. – T. 158, kn. 4. – S. 530–543.
10. *Matveev A.D.* Multigrid finite element method in stress of three-dimensional elastic bodies of heterogeneous structure // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2016. – V. 158, № 1. – Art. 012067, P. 1-9.
11. *Matveev A.D.* Mnogosetochnoe modelirovanie kompozitov nereguljarnoj struktury s malym koeficientom napolnenija // Prikladnaja mehanika i tehničeskaja fizika. – 2004. – № 3. – S. 161–171.
12. *Matveev A.D.* Postroenie slozhnyh mnogosetochnyh konechnyh jelementov s neodnorodnoj i mikroneodnorodnoj strukturoj // Izv. Altajskogo gos. un-ta. Ser. «Matematika i mehanika». – 2014. – № 1/1. – S. 80–83.
13. *Matveev A.D.* Raschet trehmernyh kompozitnyh balok slozhnoj formy s primeneniem dvuhsetochnyh konechnyh jelementov // Vestn. KrasGAU. – 2015. – № 8. – S. 92–98.
14. *Matveev A.D.* Postroenie slozhnyh mnogosetochnyh jelementov s mикroneodnorodnoj strukturoj // Chislennye metody reshenija zadach teorii uprugosti i plastichnosti: tez. dokl. XXIII Vseros. конф. – Barnaul, 2013. – Новосибирск: Parallel', 2013. – С. 142–144.

