

МЕТОД МНОГОСЕТОЧНЫХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В РАСЧЕТАХ КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН И БАЛОК

A.D. Matveev

MULTIGRID FINITE ELEMENT METHOD IN COMPOSITE PLATE AND BEAM CALCULATIONS

Мамвеев А.Д. – канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр. отдела № 5 Института вычислительного моделирования СО РАН, г. Красноярск. E-mail: mtv@icm.krasn.ru

Matveev A.D. – Cand. Physical and Math. Sci., Department № 5, Institute of Computing Modeling, SB RAS, Krasnoyarsk. E-mail: mtv@icm.krasn.ru

Для расчета напряженного состояния упругих трехмерных композитных пластин и балок при статическом нагружении предложен метод многосеточных конечных элементов, который реализуется на основе алгоритмов метода конечных элементов (МКЭ) с применением трехмерных многосеточных конечных элементов (МнКЭ), имеющих неоднородную и микронеоднородную структуру. Отличие МнКЭ от существующих конечных элементов (КЭ) состоит в следующем. При построении m -сеточного КЭ используются m вложенных сеток. Мелкая сетка порождает разбиение, которое учитывает неоднородную структуру и форму МнКЭ, остальные $m-1$ крупные сетки применяются для понижения размерности МнКЭ, причем с увеличением m размерность МнКЭ уменьшается. Особенность и достоинство МнКЭ состоят в том, что при построении МнКЭ используются сколь угодно мелкие базовые разбиения композитных пластин, балок, состоящих из односеточных КЭ 1-го порядка, т.е. по сути используется микроподход в конечноэлементной форме. Такие мелкие разбиения позволяют учитывать в МнКЭ, т.е. в базовых дискретных моделях композитных пластин, балок, сложную неоднородную, микронеоднородную структуру и форму, сложный характер нагружения и закрепления и описывать сколь угодно точно напряженное деформированное состояние уравнениями трехмерной теории упругости без введения дополнительных упрощающих гипотез. Краткая суть МнКЭ состоит в следующем. На базовом разбиении (на мелкой сетке) m сеточного конеч-

ного элемента, $m \geq 2$, определяем полную потенциальную энергию как функцию F многих переменных, которыми являются узловые перемещения мелкой сетки. На остальных $m-1$ крупных сетках (вложенных в мелкую сетку) строим по МКЭ функции перемещений, которые используем для понижения размерности функции F , что позволяет проектировать МнКЭ малой размерности. Изложены процедуры построения МнКЭ формы прямоугольного параллелепипеда, пластинчатого и балочного типов. Достоинства МнКЭ состоят в том, что они порождают дискретные модели малой размерности и сеточные решения с малой погрешностью. Приведен пример расчета многослойной пластины с применением трехмерных 3-сеточных КЭ.

Ключевые слова: упругость, композиты, пластины, балки, многосеточные конечные элементы, микроподход, малая погрешность.

To calculate the stress state of elastic three-dimensional plates and beams under static loading a multigrid finite element method implemented on the basis of algorithms of finite element method (FEM), using three-dimensional multigrid finite elements (MFE) of heterogeneous structure has been provided. The differences of MFE from currently available finite elements (FE) are as follows. When building m -grid FE m of nested grids is used. The fine grid generates a partition taking into account inhomogeneous structure and shape of MFE, the other $m-1$ large grids are applied to reduce MFE dimensionality, with MFE dimension decreasing when m is increasing. The peculiarities and

advantages of MFE are to develop MFE, arbitrarily small basic partitions of composite plates and beams containing the 1st order single-grid FE can be used, i.e. in fact, the finite element micro approach is applied. These partitions allow one to take into account in MFE the complex heterogeneous and microscopically inhomogeneous structure, shape and complex loading and fixing nature and to describe the stress and strain state by the equations of three-dimensional elastic theory without any additional simplifying hypotheses. The essence of MFE is as follows. At a basic partition (on the fine grid) of m - grid FE, $m \geq 2$, the total potential energy as a F function of many variables depending on the fine grid nodal displacements has been determined. On the other $m-1$ coarse grids (enclosed in the fine one), the displacement functions used to reduce the dimension of the F function that allows one developing MFE of small dimension are found by FEM. The procedures of developing MFE of rectangular parallelepiped of plate and beam types are given. The advantages of MFE are: they produce small dimensional discrete models and high accuracy numerical solutions. An example of calculating the laminated plate, using three-dimensional 3-grid FE and the reference discrete model are given, with that having 623 millions of FEM nodal unknowns.

Keywords: *elasticity, composites, plates, beams, multigrid finite elements, micro-approach, high accuracy.*

Введение. При анализе напряженно-деформированного состояния пластин, балок с неоднородной структурой широко используют микро- и макроподходы [1]. Реализация макроподхода для композитных пластин, балок регулярной структуры сводится к сложной проблеме нахождения эффективных модулей упругости. Однако для композитов нерегулярной структуры определение эффективных модулей упругости связано с большими трудностями, особенно для композитных пластин, балок с малыми коэффициентами заполнения [1]. Расчет композитных пластин, балок по МКЭ [2] в постановке трехмерной задачи теории упругости [3] производится с учетом их сложной неоднородной, микро-неоднородной структуры по правилам микроподхода, т.е. каждая компонента неоднородной структуры тела представляется однородными

трехмерными КЭ, что приводит к построению базовых разбиений высокой размерности. Размерности таких разбиений могут достигать несколько миллиардов ($10^7 \div 10^{10}$ узловых неизвестных МКЭ), ширина ленты системы уравнений (СУ) МКЭ – более миллиона. Применение в этом случае известных программ расчета ANSYS, NASTRAN [4] и другие затруднительно. Кроме того, решение, полученное для СУ МКЭ высокого порядка, содержит вычислительную погрешность, определить точное значение которой достаточно сложно. Построение аналитических решений для пластин, балок, имеющих сложную неоднородную структуру, связано с большими трудностями.

Цель и метод исследований. В данной работе для анализа напряженного состояния упругих трехмерных композитных пластин и балок с различными коэффициентами заполнения при статическом нагружении предложен метод многосеточных конечных элементов (ММКЭ). Краткая суть ММКЭ состоит в следующем. ММКЭ реализуется на основе алгоритмов МКЭ с применением однородных и композитных МнКЭ. Отличие МнКЭ от существующих КЭ состоит в том, что в МнКЭ учитываются (по правилам микроподхода [1]) сложная неоднородная и микро-неоднородная структура, форма и описывается напряженное состояние уравнениями трехмерной теории упругости без введения дополнительных упрощающих гипотез. Для построения МнКЭ [5, 6] используются степенные и лагранжевые полиномы различных порядков и уравнения трехмерной задачи теории упругости [3], записанные в локальных декартовых системах координат. Полиномы Лагранжа эффективно применяются при построении МнКЭ пластинчатого и балочного типов. Кратко показаны процедуры построения МнКЭ формы прямоугольного параллелепипеда. Достоинства МнКЭ состоят том, что они:

- учитывают неоднородную и микро-неоднородную структуру пластин, балок;
- образуют многосеточные дискретные модели, размерность которых в $10^3 \div 10^5$ раз меньше размерностей базовых моделей пластин, балок;
- порождают численные решения с высокой скоростью сходимости к точным решениям, что

позволяет строить решения с малой погрешностью.

Расчеты показывают, что реализация МКЭ для многосеточных дискретных моделей требует в $10^3 \div 10^5$ раз меньше объема памяти ЭВМ, чем для базовых. Построены и численно исследованы 3-сеточные КЭ пластинчатого типа.

1. Первая процедура построения композитных 2-сеточных КЭ. Основные положения данной процедуры (не теряя общности суждений) покажем на примере построения композитного 2-сеточного КЭ V_a (ДвКЭ) 2-го порядка формы куба размерами $6h \times 6h \times 6h$ (рис. 1). Считаем, что между компонентами неоднородной структуры ДвКЭ связи идеальны. Функции перемещений, напряжений и деформаций компонентов удовлетворяют закон Гука и соотношения Коши, отвечающие трехмерной задаче теории упругости [3], т.е. во всей области ДвКЭ реализуется трехмерное напряженное состояние без упрощающих гипотез. Пусть ДвКЭ армирован волокнами, параллельными оси Oy .

Для построения ДвКЭ используем две вложенные сетки: мелкую h_a и крупную H_a . Сетка h_a порождена базовым разбиением R_a ДвКЭ, которое состоит из однородных КЭ V_e 1-го порядка формы куба со стороной h [2]. Базовое разбиение R_a учитывает сложную неоднородную структуру ДвКЭ, форму, сложный характер нагружения и закрепления, $e=1, \dots, M$; M – общее число КЭ V_e . Равномерная узловая сетка h_a размерности $m_1 \times m_2 \times m_3$ имеет шаг h . Для рисунка 1 имеем $m_1, m_2, m_3 = 7$, сечения волокон закрашены. На сетке h_a определяем крупную сетку H_a размерности $n_1 \times n_2 \times n_3$ с шагами: H_1 по оси Ox , H_2 по оси Oy и H_3 по оси Oz , причем $H_1 = k_1 h$; $H_2 = k_2 h$; $H_3 = k_3 h$, где k_1, k_2, k_3 – целые. Узлы сетки H_a отмечены точками (рис. 1); $k_1, k_2, k_3 = 3$; $H_1, H_2, H_3 = 3h$; $n_1, n_2, n_3 = 3$.

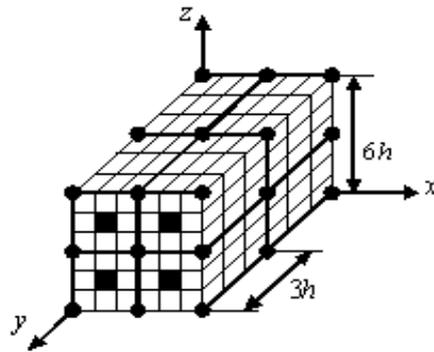


Рис. 1. Сетки ДвКЭ V_a, V_s

Полную потенциальную энергию Π_a базового разбиения ДвКЭ V_a представим

$$\Pi_a = \sum_{e=1}^M \left(\frac{1}{2} \mathbf{q}_e^T [K_e] \mathbf{q}_e - \mathbf{q}_e^T \mathbf{P}_e \right), \quad (1)$$

где $[K_e]$ – матрица жесткости; \mathbf{P}_e – вектор узловых сил; \mathbf{q}_e – вектор узловых перемещений КЭ V_e ; T – транспонирование.

С помощью полиномов Лагранжа [2] (2-го порядка) на сетке H_a определяем функции пе-

ремещений u_a, v_a, w_a ДвКЭ, которые запишем в форме

$$\begin{aligned} u_a &= \sum_{\beta=1}^n N_{\beta} u_{\beta}, \\ v_a &= \sum_{\beta=1}^n N_{\beta} v_{\beta}, \quad w_a = \sum_{\beta=1}^n N_{\beta} w_{\beta}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $u_{\beta}, v_{\beta}, w_{\beta}, N_{\beta}$ – перемещения и функция формы β -го узла сетки H_a ; n – общее число узлов сетки H_a , $n = n_1 n_2 n_3$, для ДвКЭ V_a $n = 27$ (см. рис. 1).

Пусть $\mathbf{q}_a = \{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n\}^T$ – вектор узловых перемещений крупной сетки H_a , т.е. вектор узловых перемещений ДвКЭ. Используя (2), вектор \mathbf{q}_e выражаем через вектор \mathbf{q}_a , в результате получим равенство

$$\mathbf{q}_e = [A_e^a] \mathbf{q}_a, \quad (3)$$

где $[A_e^a]$ – прямоугольная матрица, $e = 1, \dots, M$.

Подставляем (3) в (1) и из условия минимизации потенциальной энергии $\Pi_a(\mathbf{q}_a)$, т.е. из выполнения $\partial \Pi_a(\mathbf{q}_a) / \partial \mathbf{q}_a = 0$, получаем соотношение $[K_a] \mathbf{q}_a = \mathbf{F}_a$, отвечающее равновесному состоянию ДвКЭ V_a , где

$$[K_a] = \sum_{e=1}^M [A_e^a]^T [K_e] [A_e^a], \mathbf{F}_a = \sum_{e=1}^M [A_e^a]^T \mathbf{P}_e, \quad (4)$$

здесь $[K_a]$, \mathbf{F}_a – матрица жесткости и вектор узловых сил ДвКЭ V_a .

Считаем, что порядок ДвКЭ при $n = n_1 = n_2 = n_3$ равен $n - 1$.

Замечание 1. Решение, построенное для сетки H_a ДвКЭ V_a , с помощью формулы (3) проецируем на мелкую сетку h_a базового разбиения ДвКЭ V_a , что дает возможность вычислять напряжения в любом КЭ V_e базового разбиения ДвКЭ V_a , т.е. определять напряжения в любом компоненте неоднородной структуры пластин и балок.

Замечание 2. При построении аппроксимирующих функций перемещений для ДвКЭ на сетке H_a можно применять полиномы 1-го, 2-го и 3-го порядка [2].

2. Вторая процедура построения композитных ДвКЭ. Вторую процедуру кратко рассмотрим (не теряя общности суждений) на примере построения ДвКЭ V_s формы куба размерами $6h \times 6h \times 6h$, который имеет неоднородную структуру и расположен в локальной декартовой системе координат $Oxyz$, как и ДвКЭ V_a (см. рис. 1). В процедуре используем мелкую сетку h_a и базовое разбиение R_a ДвКЭ V_a . На базовом разбиении R_a ДвКЭ V_s с помощью метода конденсации [2] строим супер-

элемент G . Полную потенциальную энергию Π_g суперэлемента G запишем в виде

$$\Pi_g(\mathbf{q}_g) = \frac{1}{2} \mathbf{q}_g^T [K_g] \mathbf{q}_g - \mathbf{q}_g^T \mathbf{P}_g, \quad (5)$$

где $[K_g]$ – матрица жесткости; \mathbf{P}_g , \mathbf{q}_g – вектор узловых сил и перемещений суперэлемента G .

На границе суперэлемента G определяем крупную сетку H_s , вложенную в мелкую сетку h_a . Пусть \mathbf{q}_s – вектор узловых перемещений сетки H_s , т.е. узловых перемещений ДвКЭ V_s . Используя функции перемещений, построенные по МКЭ на крупной сетке H_s , между векторами \mathbf{q}_s , \mathbf{q}_g установим связь вида

$$\mathbf{q}_g = [A_g^s] \mathbf{q}_s, \quad (6)$$

где $[A_g^s]$ – прямоугольная матрица.

Подставляем (6) в (5). Из условия минимизации потенциальной энергии $\Pi_g(\mathbf{q}_s)$, т.е. из выполнения $\partial \Pi_g(\mathbf{q}_s) / \partial \mathbf{q}_s = 0$, следует соотношение $[K_s] \mathbf{q}_s = \mathbf{F}_s$, которое отвечает равновесному состоянию ДвКЭ V_s , где

$$\mathbf{F}_s = [A_g^s]^T \mathbf{P}_g, [K_s] = [A_g^s]^T [K_g] [A_g^s],$$

здесь $[K_s]$ – матрица жесткости; \mathbf{F}_s – вектор узловых сил ДвКЭ V_s .

Композитные ДвКЭ формы прямоугольника проектируются по процедурам, которые аналогичны процедурам п. 1 и п. 2. При построении ДвКЭ формы треугольника используем полиномы 1-го, 2-го и 3-го порядка [2].

Замечание 3. Как показывают расчеты, ДвКЭ V_s (построенные по 2-й процедуре) порождают более точные решения, чем ДвКЭ V_a (построенные по 1-й процедуре). Однако 2-я процедура включает построение суперэлементов G , что связано с обращением матриц высокого порядка. Это увеличивает временные затраты на построение ДвКЭ V_s .

Замечание 4. В силу (3) размерность вектора \mathbf{q}_a (размерность ДвКЭ V_a) не зависит от числа M , т.е. от размерности разбиения R_a . Поэтому для учета в ДвКЭ V_a сложной неоднородной и микрон неоднородной структуры можно использовать сколь угодно мелкие базовые разбиения

R_a , состоящие из КЭ V_e (см. п. 1). В этом случае в КЭ V_e сколь угодно точно описывается трехмерное напряженное состояние (без введения дополнительных упрощающих гипотез). При резком увеличении размерностей базовых разбиений ДвКЭ, т.е. числа M (размерности суперэлемента G , см. п. 2), резко увеличиваются временные затраты на построение ДвКЭ V_a , V_s . В этом случае целесообразно применять 3-сеточные КЭ, построение которых требует

меньше временных затрат и которые порождают дискретные модели меньшей размерности, чем ДвКЭ.

3. Процедура построения композитных трехсеточных КЭ. Основные положения процедуры рассмотрим на примере построения 3-сеточного КЭ (ТрКЭ) V_b 3-го порядка формы куба размерами $12h \times 12h \times 12h$, который расположен в локальной декартовой системе координат $Oxyz$ (рис. 2).

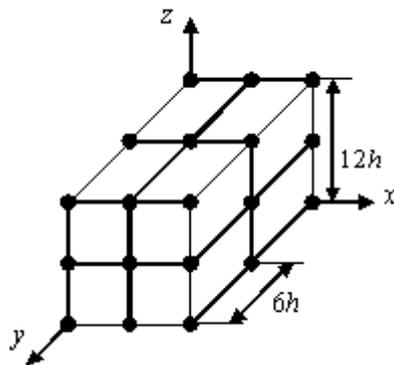


Рис. 2. ТрКЭ V_b

Область ТрКЭ V_b состоит из ДвКЭ V_n^a , $n = 1, \dots, N$, N – общее число ДвКЭ V_n^a (размерами $6h \times 6h \times 6h$), для рисунка 2 $N = 8$. Крупные сетки ДвКЭ V_n^a образуют мелкую сетку h_b ТрКЭ, на которой определяем крупную сетку H_b . На рисунке 2 – 27 узлов сетки H_b отмечены точками. Функции перемещений u_b, v_b, w_b ТрКЭ, построенные на сетке H_b с помощью полиномов Лагранжа, запишем в форме

$$u_b = \sum_{\beta=1}^m N_{\beta} q_{\beta}^u, v_b = \sum_{\beta=1}^m N_{\beta} q_{\beta}^v, w_b = \sum_{\beta=1}^m N_{\beta} q_{\beta}^w, \quad (7)$$

где $q_{\beta}^u, q_{\beta}^v, q_{\beta}^w, N_{\beta}$ – перемещения и функция формы β -го узла крупной сетки H_b ; $\beta = 1, \dots, m$, m – общее число узлов сетки H_b , для рисунка 2 имеем $m = 27$.

При построении ТрКЭ V_b используем три характерные сетки: две сетки ДвКЭ V_n^a и круп-

ную сетку H_b . Полную потенциальную энергию W_b ТрКЭ V_b представим выражением

$$W_b = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{2} (\mathbf{q}_n^a)^T [K_n^a] \mathbf{q}_n^a - (\mathbf{q}_n^a)^T \mathbf{P}_n^a \right), \quad (8)$$

где $[K_n^a]$ – матрицы жесткости, $\mathbf{P}_n^a, \mathbf{q}_n^a$ – векторы узловых сил и перемещений ДвКЭ V_n^a .

Пусть \mathbf{q}_b – вектор узловых перемещений сетки H_b . Используя (7), выражаем узловые перемещения вектора \mathbf{q}_n^a через узловые перемещения вектора \mathbf{q}_b крупной сетки H_b . В результате построим равенство

$$\mathbf{q}_n^a = [A_n^b] \mathbf{q}_b, \quad (9)$$

где $[A_n^b]$ – прямоугольная матрица, $n = 1, \dots, N$.

Подставляя (9) в функционал (8) и минимизируя его по перемещениям \mathbf{q}_b , получаем соотношение $[K_b] \mathbf{q}_b = \mathbf{F}_b$, которое отвечает равновесному состоянию ТрКЭ V_b , где $[K_b]$ – матрица жесткости, \mathbf{F}_b – вектор узловых сил ТрКЭ V_b , определяемые по формулам

$$[K_b] = \sum_{n=1}^N [A_n^b]^T [K_n^a] [A_n^b], \mathbf{F}_b = \sum_{n=1}^N [A_n^b]^T \mathbf{P}_n^a. \quad (10)$$

В силу (9) размерность вектора \mathbf{q}_b (т.е. размерность ТрКЭ V_b) не зависит от числа N ДвКЭ V_n^a , значит, разбиение ТрКЭ V_b на ДвКЭ V_n^a может быть сколь угодно мелким (т.е. размеры ДвКЭ могут быть сколь угодно малы). В этом случае в базовых разбиениях ДвКЭ V_n^a , т.е. в КЭ V_e (см. п. 1, 2) описывается трехмерное напряженное состояние (без упрощающих гипотез). Определение напряжений в ТрКЭ V_b сводится к следующему. Пусть найден вектор \mathbf{q}_b . По формуле (9) находим векторы \mathbf{q}_n^a узловых перемещений ДвКЭ V_n^a (рис. 2) и по алгоритмам п. 1 определяем напряжения в КЭ V_e базового разбиения ДвКЭ V_n^a , $n=1, \dots, N$. Композитные ТрКЭ формы прямоугольника проектируются по процедуре, которая аналогична процедуре п. 3. При построении ТрКЭ формы треугольника используем полиномы 1-го, 2-го и 3-го порядка [2].

Замечание 5. Используя ТрКЭ по процедуре, аналогичной п. 3, проектируем 4-сеточные КЭ. С помощью $m-1$ сеточных КЭ строим m -сеточные КЭ [7, 8], $m \geq 4$. Отметим, что m -сеточные КЭ порождают дискретные модели

пластин, балок меньшей размерности, чем $m-1$ сеточные КЭ.

Замечание 6. При построении МНКЭ пластинчатого (балочного) типа используем полиномы Лагранжа, имеющие по осям Ox , Oy (по оси Oy) более высокий порядок аппроксимаций, чем по оси Oz (по осям Oz , Ox), т.е. $n_1, n_2 > n_3$ ($n_2 > n_1, n_3$); при этом применяем соотношения $N_1, N_2 > N_3$ ($N_2 > N_1, N_3$), см. п. 1.

Достаточно мелкие разбиения композитных пластин, балок представляются однородными МНКЭ. При проектировании однородных МНКЭ используются процедуры, которые аналогичны процедурам, описанных в пп. 1–3. Процедуры построения МНКЭ сложной формы и смешанных многосеточных дискретных моделей композитных тел сложной формы изложены в работах [9, 10].

4. Результаты численных экспериментов. Рассмотрим модельную задачу изгиба трехмерной шестислойной прямоугольной (в плане) пластины V_0 размерами $216h_x \times 216h_y \times 6h_z$ (рис. 3), где $h_x = h_y = 3,5$; $h_z = 6$; $h = 6h_z$ – толщина пластины. При $y = 0: u = v = w = 0$.

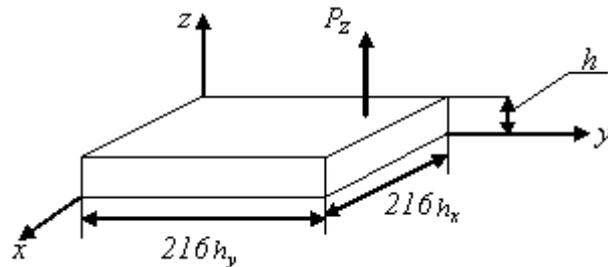


Рис. 3. Размеры пластины V_0

Слои являются изотропными однородными телами и имеют толщину $h_0 = h_z / 6 = 6$. Модули Юнга слоев, начиная с нижнего, соответственно равны: 10, 25, 40, 55, 70, 85. Коэффициент Пуассона равен 0,3. При $y \geq 108h_y$, $z = h$ пластина нагружена равномерной нагрузкой $P_z = 0,002$.

Базовые дискретные модели R_n^0 пластины состоят из односеточных КЭ V_e^n 1-го порядка размерами $h_n^x \times h_n^y \times h_n^z$, $h_n^x = h_x / (2n-1)$, $h_n^y = h_y / (2n-1)$, $h_n^z = h_z / (2n-1)$, $n=1, \dots, 6$, $e=1, \dots, N_n$, N_n – общее число КЭ V_e^n модели R_n^0 . Узловая сетка модели R_n^0 имеет размер-

ность $m_n^1 \times m_n^2 \times m_n^3$, где $m_n^1 = 216(2n-1)+1$, $m_n^2 = 216(2n-1)+1$, $m_n^3 = 6(2n-1)+1$, $n = 1, \dots, 6$.

На базовых моделях R_n^0 ($n = 1, \dots, 6$) проектируем многосеточные дискретные модели R_n пластины V_0 . Дискретные модели R_n состоят из ТрКЭ V_n^P размерами $108h_n^x \times 108h_n^y \times 6h_n^z$, (см. п. 3). Крупная сетка ТрКЭ V_n^P имеет по осям Ox , Oy , Oz шаги $36h_n^x$, $36h_n^y$, $6h_n^z$, т.е. полиномы Лагранжа имеют третий порядок по осям Ox , Oy и первый – по оси Oz . ТрКЭ V_n^P состоит из ДвКЭ W_j^n 3-го порядка формы куба размерами $6h_n^x \times 6h_n^y \times 6h_n^z$ (см. п. 3), $j = 1, \dots, 324$. Крупная сетка ДвКЭ имеет 32 узла. Шаги сетки по осям Ox , Oy , Oz соответ-

ственно равны $2h_n^x$, $2h_n^y$, $2h_n^z$. ДвКЭ строим по процедуре п. 2. На крупной сетке ДвКЭ аппроксимирующие функции перемещений определяем с помощью полиномов 3-го порядка.

Результаты расчетов даны в таблице, где w_n^m , σ_n^m – максимальные прогиб и эквивалентное напряжение многосеточной дискретной модели R_n , параметры $\Delta_n^m(\%)$, $\delta_n^m(\%)$ находим по формулам:

$$\delta_n^m(\%) = 100\% | \sigma_n^m - \sigma_{n-1}^m | / \sigma_n^m,$$

$$\Delta_n^m(\%) = 100\% | w_n^m - w_{n-1}^m | / w_n^m, n \geq 2.$$

Напряжения σ_n^m определяем по 4-й теории прочности, $n = 1, \dots, 6$.

Максимальные прогибы и эквивалентные напряжения многосеточных дискретных моделей пластины

R_n	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6
w_n^m	434,168	484,070	491,726	494,094	495,093	495,605
$\Delta_n^m(\%)$	–	10,309	1,557	0,479	0,202	0,103
σ_n^m	1,764	2,499	2,834	2,994	3,081	3,128
$\delta_n^m(\%)$	–	29,412	11,821	5,344	2,824	1,503

Анализ результатов показывает (см. табл.), что характер изменения величин $\Delta_n^m(\%)$, $\delta_n^m(\%)$ ($n = 1, \dots, 6$) демонстрирует высокую скорость сходимости напряжений σ_n^m и перемещений w_n^m к точным решениям. Так как $\Delta_6^m = 0,00103$, $\delta_6^m = 0,01503$ малы и параметры $\Delta_n^m(\%)$, $\delta_n^m(\%)$ имеют высокую скорость изменения, то значения $w_6^m = 495,605$, $\sigma_6^m = 3,128$ можно считать точным решением.

Базовая модель R_6^0 пластины имеет 1135198240 узловых неизвестных (т.е. 1,1 млрд неизвестных МКЭ), ширина ленты системы уравнений (СУ) МКЭ равна 955967. Размерность многосеточной модели R_6 равна 158400, ширина ленты СУ МКЭ – 14699. Реализация МКЭ для многосеточной модели R_6 требует в 468350 раз

меньше объема памяти ЭВМ, чем для базовой модели R_6^0 .

Выводы. В данной работе предложен метод многосеточных конечных элементов для расчета упругих трехмерных композитных пластин и балок при статическом нагружении. Предлагаемый метод реализуется на основе алгоритмов метода конечных элементов (в форме метода Ритца) с применением трехмерных однородных и композитных многосеточных конечных элементов. Достоинства многосеточных конечных элементов состоят в том, что они учитывают по правилам микроподхода неоднородную и микронеоднородную структуру пластин, балок, порождают дискретные модели малой размерности и численные решения с малой погрешностью.

Литература

1. Фудзии Т., Дзакко М. Механика разрушений композиционных материалов. – М.: Мир, 1982. – 232 с.
2. Норри Д., Ж. де Фриз. Введение в метод конечных элементов. – М.: Мир, 1981. – 304 с.
3. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высш. шк., 1982. – 264 с.
4. Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. – М.: Физматлит, 2006. – 391 с.
5. Матвеев А.Д. Некоторые подходы проектирования упругих многосеточных конечных элементов. – Деп. в ВИНТИ, 2000, № 2990–В00.
6. Матвеев А.Д. Многосеточное моделирование композитов нерегулярной структуры с малым коэффициентом заполнения // Прикладная механика и техническая физика. – 2004. – № 3. – С. 161–171.
7. Матвеев А.Д. Построение сложных многосеточных элементов с микронеоднородной структурой // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: тез. докл. XXIII Всерос. конф. (Барнаул, 2013 г.). – Новосибирск: Параллель, 2013. – С. 142–144.
8. Матвеев А.Д. Построение сложных многосеточных конечных элементов с неоднородной и микронеоднородной структурой // Известия Алтайского государственного университета. Сер. Математика и механика. – 2014. – № 1/1. – С. 80–83.
9. Матвеев А.Д. Расчет трехмерных композитных балок сложной формы с применением двухсеточных конечных элементов // Вестник КрасГАУ. – 2015. – № 8. – С. 92–98.
10. Матвеев А.Д. Смешанные дискретные модели в анализе упругих трехмерных неоднородных тел сложной формы // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. – 2013. – № 1. – С. 182–195.

Literatura

1. Fudzii T., Dzako M. Mehanika razrushenij kompozicionnyh materialov. – M.: Mir, 1982. – 232 s.
2. Norri D., Zh. de Friz. Vvedenie v metod konechnyh jelementov. – M.: Mir, 1981. – 304 s.
3. Samul' V.I. Osnovy teorii uprugosti i plastichnosti. – M.: Vyssh. shk., 1982. – 264 s.
4. Golovanov A.I., Tjuleneva O.N., Shigabutdinov A.F. Metod konechnyh jelementov v statike i dinamike tonkostennyh konstrukcij. – M.: Fizmatlit, 2006. – 391 s.
5. Matveev A.D. Nekotorye podhody proektirovanija uprugih mnogosetochnyh konechnyh jelementov. – Dep. v VINITI, 2000, № 2990–V00.
6. Matveev A.D. Mnogosetochnoe modelirovanie kompozitov nereguljarnoj struktury s malym koeficientom napolnenija // Prikladnaja mehanika i tehničeskaja fizika. – 2004. – № 3. – S. 161–171.
7. Matveev A.D. Postroenie slozhnyh mnogosetochnyh jelementov s mikroneodnorodnoj strukturoj // Chislennye metody reshenija zadach teorii uprugosti i plastichnosti: tez. dokl. XXIII Vseros. konf. (Barnaul, 2013 g.). – Novosibirsk: Parallel', 2013. – S. 142–144.
8. Matveev A.D. Postroenie slozhnyh mnogosetochnyh konechnyh jelementov s neodnorodnoj i mikroneodnorodnoj strukturoj // Izvestija Altajskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Matematika i mehanika. – 2014. – № 1/1. – S. 80–83.
9. Matveev A.D. Raschet trehmernyh kompozitnyh balok slozhnoj formy s primeneniem dvuhsetochnyh konechnyh jelementov // Vestnik KrasGAU. – 2015. – № 8. – S. 92–98.
10. Matveev A.D. Smeshannye diskretnye modeli v analize uprugih trehmernyh neodnorodnyh tel slozhnoj formy // Vestnik Permskogo nacional'nogo issledovatel'skogo politehnicheskogo universiteta. – 2013. – № 1. – S. 182–195.