Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Красноярский государственный аграрный университет»

Т.А. Ширяева, А.А. Шлёпкин

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Рекомендовано учебно-методическим советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Красноярский государственный аграрный университет» для внутривузовского использования в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по всем специальностям

Красноярск 2018

ББК 22.17

Ш 64

Рецензенты:

С.И. Сенашов, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. каф. Экономических информационных систем СибГАУ

Н.М. Сучков, д-р физ.-мат. наук, проф. каф. «Алгебра и математическая логика» СФУ

Ш64 ***Ширяева, Т.А.***

Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие / *Т.А. Ширяева, А.А. Шлёпкин*; Краснояр. гос. аграр. ун-т. – Красноярск, 2018. – 140 с.

Учебное пособие соответствует актуальным требованиям федерального государственного образовательного стандарта высшего образования, отражает компетентностный подход к образовательному процессу.

Предназначено для обучающихся по всем специальностям

ББК 22.17

©Ширяева Т.А., Шлёпкин А.А., 2018
©ФГБОУ ВО «Красноярский государственный аграрный университет», 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Понятие вероятности восходит к древним временам, оно было известно уже античным философам. Мысль о том, что законы природы проявляются через множество случайных событий, впервые возникла у древнегреческих математиков. Она подробно изложена в поэме Лукреция Кара «О природе вещей». Однако принято считать, что теория вероятностей – сравнительно молодая ветвь математики. Ее развитие как самостоятельной науки началось с переписки Паскаля и Ферма в 1656 г. и было связано с решением задач, возникающих в азартных играх. Эти задачи не укладывались в рамки существовавших тогда математических моделей и стимулировали введение новых подходов и идей.

В конце прошлого и начале этого века стали появляться более серьезные задачи естествознания (теория ошибок наблюдений, теория стрельбы, проблемы статистики), которые привели к дальнейшему развитию теории вероятностей.

Основным объектом изучения теории вероятностей является случайность или неопределенность, связанная с незнанием. Классический пример – выпадение герба при подбрасывании монеты. Но если рассматривать случайные явления массового характера, то оказывается, что и здесь действуют определенные закономерности, поэтому коротко можно сказать, что теория вероятностей изучает закономерности в случайных явлениях.

Учебное пособие конкретизирует государственные требования к дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» для обучающихся по основной профессиональной образовательной программе высшего образования,направление подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика». Пособие является элементом информационного обеспечения дисциплины и раскрывает содержание ее видов, что должно способствовать правильной организации работы обучающихся.

Дисциплина нацелена на формирование общепрофессиональных компетенций (ОПК-1) и профессиональных компетенций (ПК-1, ПК-2) выпускника.

Целями освоения дисциплины «Теории вероятностей и математической статистики» являются:

- ознакомление студентов с элементами математического аппарата теории вероятностей и математической статистики, необходимого для решения теоретических и практических задач;
- изучение общих принципов описания стохастических явлений;
- ознакомление студентов с вероятностными методами исследования прикладных вопросов;
- формирование навыков самостоятельного изучения специальной литературы, понятия о разработке математических моделей для решения практических задач;
- развитие логического мышления, навыков математического исследования явлений и процессов, связанных с профессиональной деятельностью.

Задачи дисциплины:

- изучение случайных событий, случайных величин как основы для изучения случайных процессов;
- оценка неизвестных величин по данным наблюдения;
- выдвижение и проверка гипотез.

Глава 1
СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

1.1. Стохастические эксперименты. Пространство элементарных событий

Исходными понятиями теории вероятностей являются понятия стохастического эксперимента и пространства элементарных событий. Стохастическими называются эксперименты, результаты которых нельзя предугадать заранее. Говоря об эксперименте в теории вероятностей, мы не интересуемся его технической стороной, а только тем, какие события в этом эксперименте могут наблюдаться и что в результате проведенного эксперимента действительно наблюдалось. Примеры стохастических экспериментов: бросание монеты, бросание игральной кости, проведение лотереи, азартные игры, стрельба по цели, поступление звонков на телефонную станцию.

Каждому стохастическому эксперименту можно поставить в соответствие некоторое множество Ω, которое содержит полную информацию о предполагаемых результатах при проведении этого эксперимента. Результаты эксперимента будем называть элементарными событиями (или элементарными исходами). Элементарные события (исходы) должны быть взаимоисключающими и равновозможными. Такое множество Ω будем называть пространством элементарных событий.

Пример 1. Один раз бросают монету. Пространство элементарных событий этого эксперимента имеет вид $\Omega = \{\Gamma, \text{Р}\}$, где буква Г означает появление герба, буква Р – появление решки.

Пример 2. Бросают шестигранную игральную кость. Нас интересует число выпавших очков. Пространством элементарных событий здесь будет множество $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Пример 3. Вынимаем карты из колоды, содержащей 36 игральных карт. Здесь Ω будет состоять из 36 элементарных событий, каждое из которых есть одна фиксированная карта.

В приведенных примерах понятие равновозможности элементарных событий означает, что если взята монета, то она должна быть «правильной», т. е. ее центр тяжести должен совпадать с центром симметрии, то же относится и к игральной кости; а в колоде не должно быть меченых карт.

В рассматриваемых примерах пространство элементарных исходов Ω было конечным множеством. Но во многих задачах теории вероятностей приходится иметь дело с экспериментами, имеющими бесконечное число исходов.

Пример 4. Наудачу выбирают любое натуральное число. Данное пространство элементарных исходов является бесконечным счетным множеством.

Пример 5. Стрелок стреляет по круглой мишени, нас интересует точка, в которую попала пуля. В качестве пространства элементарных событий можно принять множество, состоящее из точек рассматриваемого круга и одной дополнительной точки O, обозначающей непопадание стрелка в мишень. Данное пространство элементарных исходов является бесконечным несчетным множеством.

Из приведенных выше примеров ясно, что можно рассматривать различные типы пространств элементарных событий в зависимости от того, какое число элементов они содержат:

1-й тип: Ω является конечным множеством;

2-й тип: Ω является бесконечным счетным множеством;

3-й тип: Ω является бесконечным несчетным множеством.

Задачи

Опишите пространства элементарных событий указанных ниже стохастических экспериментов.

Стохастические эксперименты:

1. Симметричную монету подбрасывают 2 раза.
2. Одновременно бросают 3 монеты.
3. Наугад выбирают число из натурального ряда.
4. В урне $\propto$ белых и β черных шаров. Из урны вынимают шар.
5. В квадрат $[0,1] \times [0,1]$ наудачу бросают точку.
6. Два человека условились встретиться в интервале времени $[0,\ T]$.

1.2. Определение случайного события

Определение. *Подмножество пространства элементарных событий называется случайным событием.*

Событие может состоять из одного или нескольких элементарных исходов, а также может состоять из счетного или несчетного числа элементарных исходов. События будем обозначать заглавными латинскими буквами A, B, C.

Пример 1. Монету бросают дважды, случайное событие A состоит в том, что хотя бы один раз появится герб. Тогда

$$\Omega = \{ГГ, ГР, РГ, РР\}, A = \{ГГ, ГР, РГ\}.$$

Пример 2. Случайным образом выбрано натуральное число. Пусть $A -$ событие, состоящее в том, что выбрано четное число. Тогда

$$\Omega = \{1, 2, 3, \dots\}, A = \{2, 4, \dots\}.$$

Пример 3. Пусть есть проволока длиной 1 метр. Ее растягивают за концы, в результате чего происходит разрыв в какой-то точке. Множество Ω – это все точки на проволоке, которые математически можно задать отрезком [0,1]. Пусть событие A состоит в том, что разрыв произошел ближе к левому концу. Тогда $A = [0, \frac{1}{2})$.

Так как случайное событие есть подмножество множества Ω, то для них можно ввести некоторые операции. Приведем таблицу, связывающую понятия теории вероятностей и теории множеств.

Обозначения	Язык теории множеств	Язык теории вероятностей
Ω	Универсальное множество (для фиксированного эксперимента)	Пространство элементарных событий (элементарных исходов). Достоверное событие
ω	Элемент Ω	Исход.элементарное событие
$\emptyset$	Пустое множество	Невозможное событие
A	Подмножество Ω	Случайное событие A
$A \subset B$	A подмножество B	Из наступления события A следует наступление события B
$A \cup B$ $A + B$	Объединение множества A и B – множество точек, входящих или вA, или в B	Объединение событий A и B – событие, состоящее в том, что произошло A или B

Окончание табл.

$A \cap B$ $A \cdot B$	Пересечение множеств A и B – множество точек, входящих и в A, и в B	Пересечение событий A и B – событие, состоящее в том, что одновременно произошли A и B
$A \cap B = \emptyset$ $A \cdot B = \emptyset$	A и B– непересекающиеся множества	Событие A и B несовместны, т. е. не могут наступить одновременно
$\overline{A} = \Omega \backslash A$	Дополнение множества A, т. е. множество точек, не входящих в A	$\overline{A}$ – обратное событие к A или противоположное событие
$A \backslash B$	Разность множеств A и B	Событие, состоящее в том, что произойдет событие A, но не произойдет событие B

Пример 4. Бросаем игральную кость. Пусть событие A – выпало четное число, событие B – выпало число, кратное трем. Тогда:

$A \cup B = \{2, 4, 6\} \cup \{3, 6\} = \{2, 3, 4, 6\}$ –

выпавшее число делится или на 2, или на 3,

$A \cap B = \{2, 4, 6\} \cap \{3, 6\} = \{6\}$ –

выпавшее число делится и на 2, и на 3,

$\overline{A} = \Omega \backslash A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \setminus \{2, 4, 6\} = \{1, 3, 5\}$ –

выпавшее число нечетное,

$A \backslash B = \{2,4\}$ –

число четное, но на 3 не делится.

Приведенные операции над событиями обладают следующими свойствами:

1. $A \cup B = B \cup A$.
2. $A \cap B = B \cap A$.
3. $A \cup \overline{A} = \Omega$.
4. $A \cap \Omega = A$.
5. $A \cap B \subseteq A$.
6. $A \backslash A = \emptyset$.

7. $\overline{\overline{A}} = A$.
8. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
9. $A \cup B = \overline{A} \cap \overline{B}$.
10. $A \cap B = \overline{A} \cup \overline{B}$.

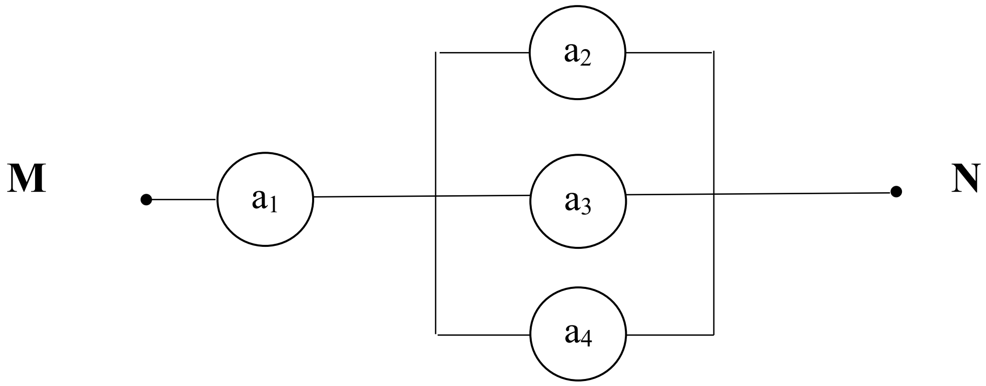
Эти свойства непосредственно следуют из определения операций над событиями.

Задачи

1. Когда возможны равенства $A \cup B = A,\ A \cap B = B$? Из множества натуральных чисел N наугад взято одно число. Событие A – число делится на 5, событие B – число оканчивается нулем. Что означают события $\overline{A}, \overline{B}, A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B,\ A \cap \overline{B}$?

2. Совместны ли события $A, \overline{A \cup B}$?

3. Электрическая цепь между точками M и N приведена на схеме, указанной ниже.



Событие A_τ– выход из строя элемента A_τ, где τ = 1, 2, 3, 4. Пусть событие C – разрыв цепи. Записать C через A_τ.

1.3.Классическое определение вероятности случайного события

В процессе развития теории вероятностей как математической дисциплины было сформулировано несколько определений вероятностей случайного события. Это было связано с тем, что, как указывалось выше, существуют 3 типа пространств элементарных событий. И для каждого случая было дано свое определение.

Классическое определение вероятностей случайного события предполагает, что пространство элементарных исходов Ω является конечным множеством.

Определение. *Вероятностью* $P(A)$*случайного события* A *называется отношение числа исходов, благоприятствующих событию* A, *к числу всех возможных исходов стохастического эксперимента:*

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m *– число благоприятных исходов* (*т.е. число элементов подмножества* A); n *– число всех исходов* (*т.е. число элементов множества* Ω).

Пример 1. В урне находится tбелых, kчерных и rсиних шаров. Наудачу вынимаем один шар. Найти вероятность того, что этот шар будет белый.

Решение. Число всех возможных исходов данного эксперимента равно $n = t + k + r$ – количество всех шаров в урне.Число благоприятных исходов равно $m = t$ – количество белых шаров. Пусть событие A – вынули белый шар. Тогда $P(A) = \frac{t}{t+k+r}$.

Пример 2. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера. Полученные кубики тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что кубик, извлеченный наудачу, будет иметь две окрашенные стороны.

Решение. Всего кубиков $n = 1000.$ Куб имеет 12 ребер, на каждом из которых по 8 кубиков с двумя окрашенными сторонами. Тогда $m = 8 \cdot 12 = 96.$ Поэтому $P(A) = \frac{m}{n} = 0{,}096.$

Задачи

1. Случайно выбранная кость домино оказалась не дублем. Найти вероятность того, что вторую так же взятую наудачу кость домино можно приставить к первой.

2. Симметричную игральную кость бросают дважды. Пусть событие A состоит в том, что сумма выпавших очков равна 5. Найти $P(A)$.

3. Цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 написаны на карточках, которые тщательно перемешаны. Произвольным образом вынимают три карточки подряд и кладут в ряд. Найти вероятность того, что число, составленное из трех цифр, которые написаны на карточках, больше 587?

4. Из колоды в 36 карт вынимают одну карту. Найти вероятность появления карты пиковой масти.

1.4.Элементы комбинаторики

Комбинаторным анализом (комбинаторикой) называется раздел математики, рассматривающий законы о размещении объектов в соответствии со специальными правилами и нахождении числа способов, которыми это может быть сделано. Методы комбинаторики играют важную роль при вычислении классических вероятностей.Изложим основные понятия комбинаторики.

Определение. *Множество, состоящее из различных n элементов, будем называть n-множеством* (*все элементы множества различны между собой*).

Рассмотрим следующую задачу: из города Ав город В ведут 2 дороги, а из города Вв город С ведут 3 дороги. Каким числом различных путей можно совершить путешествие из города Ав город Счерез город В? Очевидно, что число таких путей равно 2 · 3=6.

Приведенная задача хорошо иллюстрирует основной принцип комбинаторики – правило умножения, которым мы часто пользуемся в жизни. Сформулируем его в виде теоремы.

Теорема (основной принцип комбинаторики). *Пусть имеется* n_1*-множество*; n_2*-множество*; ...; n_k*-множество. Число различных комбинаций наборов элементов вида* $(a^1, a^2, \dots, a^k)$*, где* a^1*– некоторый элемент из* n_1 *-множества,* a^2 *– некоторый элемент* n_2*-множества, ...,* a^k *– некоторый элемент* n_k*-множества, равно* $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$.

Доказательство проведем методом математической индукции.Пусть $k = 2$, т.е. имеется n_1 -множество, n_2-множество. Рассмотрим различные пары (a^1, a^2), для этого составим таблицу так, что элементы n_1-множества запишем в строку, а элементы n_2-множества – в столбец:

n_1	n_2	a_1^1	a_2^1	a_3^1	…	a_n^1
a_1^2		$a_1^1 a_1^2$	$a_2^1 a_1^2$	$a_3^1 a_1^2$	…	$a_n^1 a_1^2$
a_2^2		$a_1^1 a_2^2$	$a_2^1 a_2^2$	$a_3^1 a_2^2$	…	$a_n^1 a_2^2$
a_3^2		$a_1^1 a_3^2$	$a_2^1 a_3^2$	$a_3^1 a_3^3$	…	$a_n^1 a_3^2$
…		…	…	…	…	…
a_n^2		$a_1^1 a_n^2$	$a_2^1 a_n^2$	$a_3^1 a_n^2$	…	$a_n^1 a_{n_2}^2$

Каждая пара встречается один раз, число пар $n_1 \cdot n_2$. Предположим, что теорема выполнена для $k = r$, докажем ее для $k = r + 1$. Первые r элементов можно рассматривать как один элемент вида $b^1 = (a^1,\ a^2, \dots a^r)$. По предположению число различных элементов этой группы $m = n_1 \cdot n_2 \cdot\ \dots\ \cdot n_r$. Любой элемент $(a^1,\ a^2, \dots, a^{r+1})$ из группы, состоящей из $r + 1$ элемента, представим в виде $(a^1,\ a^2, \dots,\ a^{r+1}) = (b^1, a^{r+1})$. Используя полученную формулу для случая двух множеств, получим, что число комбинаций элементов вида $(a^1, a^2, \dots,\ a^{r+1})$ определяется равенством $n = m \cdot n_{r+1} = n_1 \times \times n_2 \cdot \dots \cdot n_{r+1}$. Значит, формула о числе элементов верна и для $k = r + 1$. Теорема доказана.

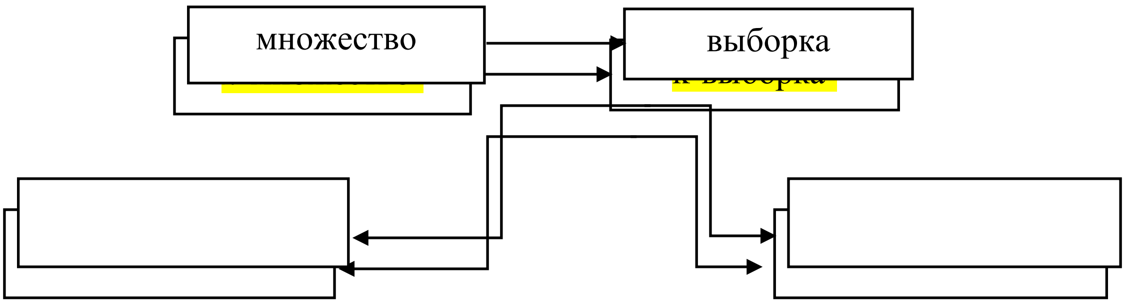
Пусть имеется n-множество, из него можно осуществить выбор элементов, соблюдая различные условия:

1) учитывать или не учитывать порядок выбора элементов;
2) возвращать либо не возвращать элемент назад в n-множество.

Определение. *Совокупность k выбранных элементов из -множества будем называть k-выборкой.*

Выше было сказано, что k-выборка может быть сформирована различным образом, поэтому можно выделить 4 класса k-выборок.

1. k-выборка с учетом порядка.
2. k-выборка без учета порядка.
3. k-выборка с возвращением.
4. k-выборка без возвращения.



Определение. *k-выборку из n-множества с учетом порядка следования элементов без возвращения называют размещением из* n *элементов по*k*(очевидно, здесь* $k \leq n$*) и обозначают символом* A_n^k.

Пример 1. Трехзначные номера машин без одинаковых цифр есть выбор без возвращения с учетом порядка 3 элемента из 10, т.е. размещение из 10 по 3 – A_{10}^3.

Пример 2. Шестизначный телефонный номер из различных цифр есть A_{10}^6.

Крайний случай, когда $k = n$, – размещение есть просто перестановка элементов в -множестве, за такой k-выборкой естественным образом закреплено и название n-перестановка, обозначают ее символомp_n.

Пример 3. Расписание сдачи экзаменов по 5 предметам есть 5-перестановка, т. е. p_5.

Найдем число всевозможных различных размещений A_n^kи число всевозможных различных перестановок, которое будем обозначатьP_n.

Теорема 1. $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Доказательство. Каждое разрешение можно представить как комбинацию (набор) из -множества $(n-1)$ -множества, … $((n-(k-1))$-множества, так как выбор осуществляется без возвращения. По правилу умножения таких комбинаций *n* (*n*– 1) … (*n* – (*k*– 1)) $= \frac{n!}{(n-k)!}$ (Напомним, что $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$). Теорема доказана.

Следствие. $P_n = n!$ (так как по определению 0! = 1).

Пример 4. В классе изучают 10 предметов. В понедельник – 6 уроков, причем все уроки различные. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник?

Решение. Число способов равно$A_{10}^6 = \frac{10!}{4!} = 1551200$.

Определение.*k-выборку из n-множества с учетом следования элементов с возвращением называют размещением с возвращением (или с повторением) из* n *элементов по* k *и обозначают символом*B_n^k (*очевидно, здесь* k – *любое, т.е.* $k \leq n$ *или* $k > n$).

Пример 5. Слово «мама» есть размещение с возвращением из 33 элементов по 4 – B_{33}^4 (так как в русском алфавите 33 буквы). Найдем число размещений B_n^k.

Теорема 2.$B_n^k = n^k$.

Доказательство. Каждое размещение с возвращением можно представить как комбинацию k элементов из*n*-множества, *n*-множества, …, *n*-множества (всего *n*-множеств *k*штук). Применяя правило умножения, получим, что $B_n^k = n^k$. Теорема доказана.

Пример 6.Сколько «слов», состоящих из 4 букв, можно составить, используя: а) русский алфавит, б) английский алфавит.

Решение. Каждое «слово» есть размещение с возвращением, поэтому: а) $B_{33}^4 = 33^4$ = 1186121, б) B = 26^4 = 456976.

Определение. *k-выборку изп-множества без учета порядка следования элементов и без возвращения называют сочетанием из n элементов по k и обозначают символом C_n^k (очевидно, здесь $k \le n$).*

Пример 7. Выбор студентом для изучения любых трех спецкурсов из предложенных семи есть сочетание из 7 по 3, C_7^3.

Найдем число различных сочетаний C_n^k.

Теорема 3. $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Доказательство. Число сочетаний C_n^k в $k!$ раз меньше, чем число размещений A_n^k, так как если в каждом сочетании элементы переставить между собой местами, то получим $k!$ размещений. Поэтому $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Теорема доказана.

Пример 8. В примере 7 студент может осуществить выбор спецкурсов C_7^3 способами, т.е. $C_7^3 = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = 35$.

Пример 9. Дано n точек, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой. Сколько прямых можно провести, соединяя точки попарно?

Решение. Каждая прямая – это выбор двух точек из n, причем в каком порядке выбраны точки, не имеет значения. Поэтому число прямых, которые можно провести, равно $C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{(n-2)n}{2}$.

Определение. *k-выборку из n-множества без учета порядка следования элементов и с возращением называют сочетанием с возвращением (с повторением) из n элементов по k и обозначают символом D_n^k (очевидно, здесь k – любое, т.е. $k \le n$ или $k > n$).*

Пример 10. Кость домино есть сочетание с возвращением (так как есть «дубли») из 7 элементов (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) по 2 – D_7^2. Найдем число различных сочетаний с возвращением.

Теорема 4.$D_n^k = C_{n+k-1}^k$.

Доказательство. Сочетание с возвращением есть сочетание, но уже из $(n + k - 1)$-множества. Теорема доказана.

Пример 11. В примере 10 рассматривалась кость домино, теперь понятно, почему их 28, так как $D_7^2 = C_{7+2-1}^2 = \frac{8!}{2!6!} = \frac{7\cdot 8}{2} = 28$.

Пример 12. Известно, что молекулы белка разлагаются на стандартные аминокислоты. Аминокислота, в свою очередь, кодируется триплетом нуклеотидов, возможно одинаковых. Нуклеотидов же всего 4: аденин, тенин, гунин, цитанин. Сколько стандартных аминокислот существует?

Решение. Каждая аминокислота есть выбор 3 нуклеотидов без учета порядка с повторением из четырех, поэтому число всех аминокислот равно$D_4^3 = C_{4+3-1}^3 = C_6^3 = \frac{6!}{3!3!} = 20$.

Приведем примеры, когда используются элементы комбинаторики для нахождения вероятностей событий в случае конечного пространства элементарных событий (классическое определение вероятности события).

Пример 13. Колода из 36 карт перемешана. Найти вероятность того, что все 4 туза расположены рядом.

Решение. Число возможных исходов n есть число возможных перестановок из 36 карт, т.е. $n = P_{36} = 36!$. Чтобы найти число благоприятных исходов, представим, что сложили вместе тузы как одну карту, тогда число таких перестановок будет $P_{32+1} = P_{33} = 33!$. Затем учтем, что тузы тоже могут между собой быть переставлены, т.е. получим еще $P_4 = 4!$ перестановок. Теперь воспользуемся правилом умножения: всех благоприятных исходов будет $m = P_{33}P_4 = 33!4!$. Тогда, если обозначим событие A – 4 туза, расположеные рядом, то $P(A) = \frac{33!4!}{36!} = \frac{1}{1785}$.

Пример 14. В ящике имеется 15 теннисных мячей, из которых 9 новых и 6 старых. Для игры взяли 3 мяча. Найти вероятность того, что все мячи новые.

Решение. Пусть событие A – взяли 3 новых теннисных мяча для игры. Это есть выбор без учета порядка и без возвращения. Поэтому число всех возможных исходов $n = C_{15}^3$. Благоприятными будут исходы, когда мячи берутся из 9 новых, т.е. число благоприятных исходов равно $m = C_9^3$. Поэтому $P(A) = \frac{C_9^3}{C_{15}^3} = \frac{12}{65}$.

Пример 15. В партии из *k*изделий *r*бракованных. Найти вероятность того, что среди *s* выбранных наудачу для проверки изделий ровно *t*окажутся бракованными.

Решение. Пусть событие А– взяли *s*изделий, среди которых *t* бракованных. Число всех возможных способов взять *s* изделий из *k*равно $n = C_k^s$. Благоприятными являются исходы, когда из общего числа *r*бракованных изделий выбрали ровно *t*бракованных – это можно сделать C_r^t способами, а остальные *s* – *t*изделий оказались небракованными – количество способов выбора равноC_{k-r}^{s-t}, поэтому число благоприятных исходов $m = C_r^t C_{k-r}^{s-t}$(использовали правило умножения). Тогда $P(A) = \frac{C_r^t C_{k-r}^{s-t}}{C_k^s}$.

Задачи

1. В лотерее имеются 10 билетов: 5 выигрышных и 5 проигрышных. Берут 2 билета. Какова вероятность проигрыша?
2. В урне A белых и B черных шаров. Из урны вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.
3. Наудачу взят телефонный номер, состоящий из 5 цифр. Чему равна вероятность того, что все цифры различные?
4. На полке стоят 15 книг, 5 из них в переплетах. Берут наудачу 3 книги. Какова вероятность того, что среди выбранных книг только одна в переплете?
5. При наборе телефонного номера абонент забыл две последние цифры и набрал их наудачу, помня только, что эти цифры нечетные. Какова вероятность того, что номер набран правильно?

6. Среди 100 фотографий есть фотографии артиста. Взяли наудачу 10 фотографий. Какова вероятность того, что среди них есть фотография артиста?

1.5. Статистическое определение вероятности случайного события

Классическое определение вероятности при переходе от простых примеров к рассмотрению сложных задач наталкивается на трудности принципиального характера. Рассмотрим такой пример. Пусть имеется бесконечный натуральный ряд чисел. Наугад выбирается число, требуется найти вероятность того, что оно четное. Из теории множеств известно, что множество натуральных чисел и множество четных чисел находятся во взаимно-однозначном соответствии, т.е., проще говоря, сколько натуральных чисел, столько и четных. Исходя из этого, если бы мы использовали классическое определение вероятности события, то получили бы, что искомая вероятность равна 1.

Как видно из приведенного примера, в случае бесконечных счетных пространств элементарных исходов классическое определение вероятности события нельзя использовать. Как поступить в приведенном примере? Если мы будем рассматривать только первые n членов натурального ряда, то тогда, используя классические определения, вероятность того, что число четное, будет равна либо $P_n(A) = 1/2$, если nсамо четное, либо$P_n(a) = \frac{k}{2k+1}$, если nнечетное: $n = 2k + 1$. Увеличивая n, получим, что$P_n(A)$все меньше отличается от 0,5.

В общем случае, если проводятся длительные наблюдения над появлением или непоявлением некоторого события A при большом числе повторений испытаний, проходящих при неизменных условиях, то опыт показывает, что число появлений или непоявлений событияA подчиняется устойчивым закономерностям. А именно, если через μ_nобозначим число появлений события A при nнезависимых испытаниях, то оказывается, что отношение$\frac{\mu_n}{n}$при достаточно больших n сохраняет почти постоянную величину. Эту постоянную, являющуюся объективной числовой характеристикой явления, естественно назвать вероятностью случайного события A. Поэтому Р. Мизес ввел следующее определение вероятности события, которое называют статистическим:

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mu_n}{n}.$$

Имеется огромный опытный материал по проверке этого определения. Приведем результаты экспериментов с бросанием монеты.

Экспериментатор Ж.Л.Л. Бюффон:

n –число бросаний	μ_n – число выпадений герба	$\frac{\mu_n}{n}$
4040	2048	0,5080

Экспериментатор К. Пирсон:

n–число бросаний	μ_n– число выпадений герба	$\frac{\mu_n}{n}$
12000	6019	0,5016
24000	12012	0,5005

1.6. Геометрическое определение вероятности случайного события

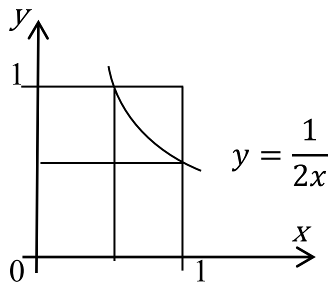
Если пространство элементарных событий Ω является бесконечным несчетным множеством, то приведенные выше определения вероятности случайного события использовать становится невозможно. Поэтому определение вероятности было видоизменено и появилось геометрическое определение, где используется понятие меры множества. Если рассматривать линейное множество, то его мера –это длина линии; если плоское множество, то его мера – это площадь; если множество в пространстве, то его мера –это объем.

Определение. *Вероятностью случайного события А называется отношение меры множества благоприятных исходов к мере множества всех исходов:*

$$P(A) = \frac{mesA}{mes\,\Omega}.$$

Пример 1. Наудачу выбирают 2 числа из отрезка [0,1]. Найти вероятность того, что их произведение меньше $\frac{1}{2}$.

Решение. Пусть x, y – выбранные числа. Множество всех возможных исходов есть множество точек квадрата Ω = [0,1] × [0,1]. Множество благоприятных исходов $A = \{(x,\ y) \in \ \Omega\ ,\ x\ \cdot y < 1/2\}$ – это точки квадрата, которые лежат под кривой y = $\frac{1}{2x}$.



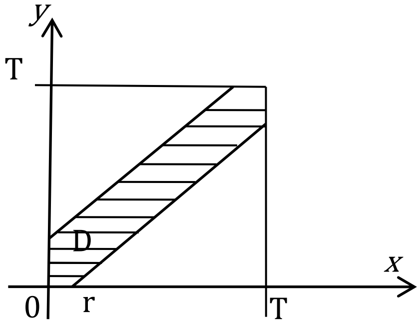
$$mes\ A = S_D = \frac{1}{2} + \int \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2}(1 + \ln 2),$$

$$mes\ \Omega = 1,$$

$$P(A) = \frac{1}{2}(1 + \ln 2).$$

Пример 2. В любые моменты промежутка времени T равно возможны поступления в приемник 2 сигналов. Приемник будет занят, если разность между моментами поступления сигналов будет меньше *r*.Найти вероятность того, что приемник будет занят.

Решение. Пусть x, y – моменты поступления сигналов в приемник. Областью возможных значений x, y является квадрат **Ω** = [0, T] × [0, T], $mes\ \Omega = \ T^2$. Приемник будет занят (событие A), если | $x - y| \leq r$. Данное множество лежит между прямыми $x - y = r$ и $y = x + r$.



Поэтому

$$mes\, A = S_D = T^2 - (T - r)^2,$$

$$mes\, \Omega = 1,$$

$$P(A) = \frac{T^2 - (T - r)^2}{T^2}.$$

Задачи

1. В круг радиуса R наудачу бросается точка. Найти вероятность того, что точка попадает в круг радиуса rс тем же центром, $r < R$.

2. На плоскость, разделенную параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии 6 см, наудачу брошен круг радиуса 1 см. Найти вероятность того, что круг не пересечет ни одной прямой.

3. На отрезке длины tнаудачу выбраны две точки. Какова вероятность того, что расстояние между ними меньше $0{,}3\ t$?

4. Два парохода должны подойти к одному причалу. Время прихода обоих проходов независимо и равновозможно в течение данных суток. Найти вероятность того, что одному из пароходов придется ожидать освобождения причала, если время стоянки одного один час, другого – два часа.

5. На отрезке длиной L наугад поставлены две точки. Найти вероятность того, что из трех получившихся отрезков можно построить треугольник.

6. Наудачу взяты 2 положительных числа x и y, каждое из которых не превышает 2. Найти вероятность того, что их произведение меньше 1, а частное ${}^{x}/_{y}$ не больше 2.

1.7. Аксиомы теории вероятностей

В современной математике принято аксиомами называть те предположения, которые принимаются за истину и в пределах данной теории не доказываются. Все остальные положения этой теории должны выводиться чисто логическим путем из принятых аксиом. Формулировка аксиом, т.е. тех фундаментальных положений, на базе которых строится обширная теория, представляет собой не начальную стадию развития математической науки, а является результатом длительного накопления фактов и логического анализа полученных результатов с целью выявления действительно основных первичных факторов.

Именно так складывались аксиомы геометрии, знакомство с которыми дается в курсе элементарной математики, подобный же путь прошла теория вероятностей. Впервые задача аксиоматического построения теории вероятностей была поставлена и решена в 1917 г. С.Н. Бернштейном, который исходил из качественного сравнения случайных событий. Но в 1939 г. А.Н. Колмогоров предложил иной подход, который связывает теорию вероятностей с теорией множества и теорией функций. Именно эта аксиоматика рассматривается ниже.

Пусть имеется множество – пространство элементарных событий Ω; $\boldsymbol{A}$ – некоторая система подмножеств множества Ω. $\boldsymbol{A}$ называется алгеброй в случае:

1. Если $\Omega \in \boldsymbol{A}$.
2. Если $A \in \boldsymbol{A}$, $B \in \boldsymbol{A}$, то $A \cup B \in \boldsymbol{A}$, $A \cap B \in \boldsymbol{A}$.
3. Если $A \in \boldsymbol{A}$, то $\overline{A} \in \boldsymbol{A}$.

Рассмотрим пространство Ω и какую-нибудь выделенную систему множества $\boldsymbol{A}$, образующую алгебру событий.

Определение. *Вероятность* P *на* $(\Omega, \boldsymbol{A})$ *есть числовая функция, определенная на множествах из* $\boldsymbol{A}$ *и обладающая следующими свойствами:*

I. $P(A) \geq 0$ для любого $A \in \boldsymbol{A}$.

II. $P(\Omega) = 1$.

III. Если $A \in \boldsymbol{A}$, $B \in \boldsymbol{A}$, $A \cap B = \emptyset$, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Тройку $\{\Omega,\ \boldsymbol{A},\ P\}$ называют вероятностным пространством.

Как видно, приведенное определение вероятности включает в себя все изученные ранее определения, так как здесь Ω может быть любого типа.

1.8. Свойства вероятности

Свойство 1. *Вероятность невозможного события равна нулю:* $P(\emptyset) = 0$.

Доказательство. Так как $\emptyset \cap \Omega = \emptyset$ и $\emptyset \cap \Omega = \Omega$, то по аксиомам II и III $P(\Omega) = P(\emptyset) + P(\Omega)$, так как $P(\Omega) = 1$, то $P(\emptyset) = 0$.

Свойство 2. *Вероятность события, противоположного А, равна* $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Доказательство. Так как $A \cup \overline{A} = \Omega$, $A \cap \overline{A} = \emptyset$ то по аксиоме III $P(A) + P(\overline{A}) = 1$, тогда $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Свойство 3. *Если из наступления события А следует наступление события* B *(т.е.* $A \subseteq B$*), то* $P(A) \leq P(B)$.

Доказательство. Так как $B = A \cup (\overline{\overline{A} \cap B})$, $A \cap (\overline{A} \cap B) = \emptyset$, то по аксиоме III$P(B) = P(A) + P(\overline{A} \cap B)$, по аксиоме I$P(\overline{A} \cap B) \geq 0$, значит, $P(B) \geq P(A)$.

Свойство 4. *Для любого события* A: $0 \leq P(A) \leq 1$.

Доказательство.Так как любое событие $A \subseteq \Omega$, то по свойству 3 $P(A) \leq P(\Omega) = 1$.

Свойство 5. *Теорема сложения вероятностей случайных событий: вероятность объединения двух событий равна сумме их вероятностей без вероятности пересечения этих событий.*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Доказательство.Так как

$$A \cup B = A \cup (B \backslash (A \cap B)), A \cap (B(A \cap B)) = \emptyset,$$
$$B = (B \backslash (A \cap B)) \cup (A \cap B), (B \backslash (A \cap B)) \cap (A \cap B) = \emptyset,$$

то по аксиоме III

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \backslash (A \cap B)),$$
$$P(B) = P(B \backslash (A \cap B)) + P(A \cap B),$$

поэтому

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Пример 1. На стеллаже библиотеки в случайном порядке расставлены 15 учебников, причем 5 из них в переплете. Наудачу берут 3 учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников окажется в переплете.

Решение.Пусть событие A – хотя бы один учебник в переплете.

Тогда $\overline{A}$ – все 3 учебника без переплета. $P(\overline{A}) = \frac{C_{10}^3}{C_{15}^3}$, так как $n = C_{15}^3$ – все возможные исходы, m=$C_{10}^3 m = C_{10}^3$ – благоприятные исходы (10 учебников без переплета). Поэтому

$$P(A) = 1 - P\left(\frac{C_{10}^3}{C_{15}^3}\right) = 1 - \frac{24}{91} = \frac{67}{91}.$$

Пример 2. В ящике 12 белых, 7 черных, 11 синих шаров одинакового радиуса. Наудачу вынимают шар. Найти вероятность того, что шар не белый.

Решение. Пусть событие A – вынули белый шар, B – черный, а C– синий. Нужно найти$P(\overline{A})$, так как $\overline{A} = B \cup C$, то по теореме сложения вероятностей $P(A) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$, но $B \cap C = \emptyset,$значит$P(B \cap C) = 0,$ поэтому $P(A) = P(B) + P(C) = \frac{7}{30} + \frac{11}{30} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$, так как всего шаров 30.

Задачи

1. Среди одинаковых по внешнему виду 20 деталей находятся 4 бракованных. Наудачу берут 3 детали. Найти вероятность того, что среди них хотя бы одна бракованная.

2. От коллектива бригады, которая состоит из шести мужчин и четырех женщин, на профсоюзную конференцию выбраны два человека. Найти вероятность того, что среди выбранных хотя бы одна женщина.

3. Производится стрельба по области D, состоящей из трех зон: A_1, A_2, A_3. Вероятности попадания в область A_1 зону соответственно равны 0,5; 0,1; 0,17. Найти вероятность попадания в область D.

4. На рынок поступила продукция четырех обувных фабрик в соответствующих пропорциях: 2:3:1:4. Фабрики, поставившие меньшее количество продукции, выпускают более качественную продукцию. Найти вероятность того, что случайный покупатель купит качественную обувь.

1.9. Условная вероятность. Независимость событий

Рассмотрим вопрос о том, как определить вероятность какого-либо события A при условии, что уже произошло другое событие B. Начнем с примера. Пусть брошена игральная кость и результат неизвестен, но известно, что выпало четное число. Мы хотим, зная эту информацию, подсчитать вероятность того, что выпало число больше 3. Тогда речь идет об условной вероятности события $A = \{$выпало число больше трех$\}$ при условии, что произошло событие $B = \{$выпало четное число$\}$.

Нам уже известно, что выпало либо $\{2\}$, либо $\{4\}$, либо $\{6\}$, и все эти исходы равновозможны. Среди этих исходов событию A удовлетворяют лишь исходы $\{4\}$ и $\{6\}$. Поэтому, используя классическое определение, естественно ожидать отношение $\frac{2}{3}$. Условную вероятность будем обозначать символом $P(A\ /\ B)$. В приведенном примере $P(A\ /\ B) = \frac{2}{3}$. С другой стороны, $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $P(AB) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Тогда $P(A/B) = \frac{2}{5} = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} = \frac{2}{3}$.

Пусть теперьбесконечное несчетное множество. Определим условную вероятность$P(A/B)$, когда все исходы равновозможны.Так как известно, что событие B произошло, то будем рассматривать только те элементарные исходы, которые соответствуют событию B. Рассмотрим новое пространство элементарных событий $\Omega_1 = B$. Выберем множество исходов из A, которое входит в B, обозначим его $A_1 = A \cap B$.За условную вероятность $P(A\ /\ B)$ можно взять вероятность события A при условии, что рассматриваются только события, содержащиеся в B. Для нового пространства Ω_1 эта вероятность равна $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.Поэтому условная вероятность определяется следующим образом.

Определение. *Условной вероятностью события A при условии, что произошло событие B с $P(B) > 0$, называется число*

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Если это равенство записать иначе:

$$P(A \cap B) = P(A)P(A/B),$$

то его называют теоремой умножения вероятностей событий.Так как

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(B)P(B \,/\, A),$$

то

$$P(A)P(A/B) = P(B)P(B \,/\, A).$$

Учитывая теорему умножения вероятностей, приведенная ранее теорема сложения вероятностей может быть записана так:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(A/B) =$$
$$= P(A) + P(B) - P(B)P(B \,/\, A).$$

Определение. *События А и В называются независимыми, если*$P(A \cap B) = P(A)P(B)$.*Другими словами, события А и В независимы, если условная вероятность события А равна безусловной его вероятности, т.е.* $P(A) = P(A/B)$*или* $P(B) = P(B/A)$.

Определение. *События*$A_1, A_2, \ldots, A_n$*называются независимыми в совокупности, если для любого набора индексов*

$$1 \leq k_1 < k_2 < \ \ldots < k_m \leq n$$

выполняется равенство

$$P\left(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \ldots \cap \ A_{k_m}\right) = P\left(A_{k_1}\right)P\left(A_{k_2}\right) \ldots \ P\left(A_{k_m}\right).$$

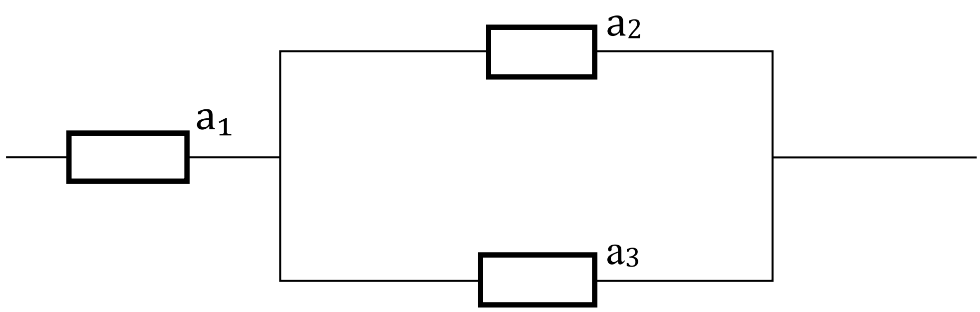
Попарной независимости событий недостаточно для независимости *n* событий в совокупности. Это показывает следующий пример.

Пример Бернштейна. На плоскость бросают тетраэдр, три грани которого окрашены соответственно вкрасный, синий и зеленый цвета, а на четвертую нанесены все три цвета. Событие A означает, что при бросании тетраэдра на плоскость выпала грань, содержащая красный цвет, событие B – грань, содержащая синий цвет, событие C – грань, содержащая зеленый цвет. Так как каждый из трех цветов содержится на двух гранях, то $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Вероятность пересечения любой пары введенных событий равна $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$, так как искомая пара цветов есть только на одной грани. Это означает попарную независимость всех трех событий. Но

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8},$$

т.е. независимости в совокупности нет.

Пример 1. Пусть имеется электрическая цепь в виде



Известно, что элементы $a_i (i = 1,2,3)$ выходят из строя независимо друг от друга с вероятностью p_i. Найти вероятность того, что цепь выйдет из строя.

Решение. Пусть событие $A_i = \{$выход из строя $a_i\}$, тогда $P(a_i) = p_i$. Событие A – цепь вышла из строя, тогда $A = A_1 \cup (A_2 \cap A_3)$. Используя теоремы сложения и умножения вероятностей, а также условия независимости событий A_i, получаем, что

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap (A_2 \cap A_3)) =$$
$$= P(A_1) + P(A_2)P(A_3) - P(A_1)P(A_2)P(A_3) = p_1 + p_2p_3 - p_1p_2p_3.$$

Пример 2. Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара, случайно без возвращений последовательно извлекают шары. Найти вероятность того, что черный шар впервые появится при третьем испытании.

Решение.Пусть событие A – при третьем испытании впервые появился черный шар; событие B_i – при -м испытании появился черный шар ($i = 1, 2, 3$). Выразим событие A через события B_i: $A = \overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap B_3$. Поэтому по теореме умножения получим

$$P(A) = P\left(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap B_3\right) =$$

$$= P(\overline{B_1}) \cdot P(\overline{B_2}/\overline{B_1}) \cdot P(B_3/(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}.$$

Задачи

1. В двух урнах находятся шары, отличающиеся только цветом, причем в первой урне 5 белых, 11 черных и 8 красных шаров, а во второй – соответственно 10,8,6. Из каждой урны наудачу извлекают по одному шару. Какова вероятность того, что оба шара одного цвета?

2. Два спортсмена независимо друг от друга стреляют по мишени. Вероятность попадания первого спортсмена –0,7, а второго –0,8. Какова вероятность того, что мишень будет поражена?

3. Вероятность поломки первого станка в течение смены равна 0,2; второго –0,13; третьего –0,09. Чему равна вероятность того, что станки потребуется налаживать в течение смены, если их поломка происходит независимо?

4. В трех залах кинотеатра идут три различных фильма. Вероятность того, что на определенный час в кассе 1-го зала есть билеты, равна 0,3; в кассе второго зала – 0,2; а в кассе 3-го зала – 0,4. Какова вероятность того, что на данный час имеется возможность купить билет хотя бы на один фильм?

5. Сколько надо бросить игральных костей, чтобы с вероятностью меньше 0,3 можно было ожидать, что ни на одной из выпавших граней не появится число 6?

6. Вероятность уничтожения цели при одном выстреле равна p. Найти число выстрелов n, необходимых для поражения цели с вероятностью, большей или равной q.

7. Игрок А поочередно играет с игроками В и С по две партии. Вероятность выигрыша первых партий для В и С равна 0,1 и 0,2 соответственно, вероятность выиграть во второй партии для В равна 0,3,для С равна 0,4. Какова вероятность того, что: а) первым выиграет В; б) первым выиграет С.

8. Двое поочередно бросают монету, выигрывает тот, у которого раньше появился орел. Какова вероятность выигрыша для каждого из игроков?

9. Два стрелка поочередно стреляют по мишени до первого попадания. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,2, для второго –0,3. Какова вероятность того, что первый стрелок сделает больше выстрелов, чем второй?

10. Какова вероятность $P(A \cap B)$, если известна вероятность $P(A) = a, P(B) = b, P(A \cup B) = c$?

1.10. Формула полной вероятности.Формула Байеса

Пусть A–некоторое событие, которое может произойти с одним из событий $H_1, H_{2,} \dots, H_n$,причем – $H_1, H_{2,} \dots, H_n$ – попарно несовместные события $P(H_i) > 0$ и$\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1$.

Теорема (формула полной вероятности):

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i).$$

Доказательство.Из приведенных условий следует, что $A = \bigcup_{i=1}^{n}(H_i \cap A)$. Далее, события $A \cap H_1, A \cap H_2, \dots, A \cap H_n$ несовместны, поэтому, используя теоремы сложения и умножения вероятностей, получаем, что

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i \cap A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i).$$

Теорема доказана.

Замечание.События $H_1, H_2, \dots, H_n$ часто называют гипотезами.

Пример 1. Имеются три одинаковых урны, в первой урне –2 белых и 1 черный шар, во второй – 3 белых и 1 черный шар, в третьей – 2 белых и 2 черных шара. Наудачу берем урну и из нее вынимаем шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

Решение.Рассмотрим три гипотезы: H_1– взята первая урна; H_2– взята вторая урна; H_3– взята третья урна. Событие A – появление белого шара. Так как гипотезы по условию задачи равновозможные, то $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$, условная вероятность события A при этих гипотезах соответственно равна $P(A/H_1) = \frac{2}{3}$, $P(A/H_2) = \frac{3}{4}$, $P(A/H_3) = \frac{1}{2}$.По формуле полной вероятности находим, что

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{23}{36}.$$

Пример 2. Некоторая деталь производится на двух заводах. Известно, что объем продукции первого завода в n раз превышает объем продукции второго завода. Доля брака на первом заводе p_1, а на втором–p_2. Найти вероятность того, что наугад взятая деталь окажется бракованной.

Решение.Рассмотрим гипотезы:H_1– взята деталь 1-го завода, H_2– взята деталь 2-го завода.Тогда $P(H_1) = \frac{n}{n+1}$, $P(H_2) = \frac{1}{n+1}$,а условная вероятность $P(A/H_1) = p_1,\ P(A/H_2 = \ p_2$. Поэтому

$$P(A) = \frac{p_1 \cdot n}{n+1} + \frac{p_2 \cdot 1}{n+1} = \frac{1}{n+1}(p_1 n + p_2).$$

Можно решать и обратную задачу: опыт произведен, и в его результате наблюдалось появление события A. Как тогда надо оценить вероятности гипотез $H_i(i = 1, 2, \dots, n)$в связи с появлением этого события A ? Значит, надо найти условные вероятности $P(H_i\ /\ A)$ $(i = 1,2, \dots,)$. Из теоремы умножения вероятностей имеем, что

$$P(A/H_i) = P(A)P(H_i/A) = P(H_i)P(A\ /\ H_i).$$

Тогда

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{P(A)}.$$

Выразим $P(A)$с помощью формулы полной вероятности:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(H_j) \cdot P(A/H_j)},\ i = 1,2, \dots, n.$$

Эта формула носит название ***формулы Байеса***.

Пример 3. Два стрелка независимо один от другого стреляют на одной линии, делая по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка – 0,8; для второго – 0,4. После стрельбы в мишени обнаружена одна пуля. Найти вероятность того, что эта пуля принадлежит первому стрелку.

Решение. Пусть событие A– в мишень попала одна пуля. До опыта возможны следующие гипотезы:

H_1– ни первый, ни второй стрелок не попадает.
H_2– оба стрелка попадают.
H_3– первый стрелок попадает, а второй нет.
H_4– второй стрелок попадает, а первый нет.

Вероятности этих гипотез:

$P(H_1) = 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}12$; $P(H_2) = 0{,}8 \cdot 0{,}4 = 0{,}32$;
$P(H_3) = 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}48$; $P(H_4) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08$.

Условные вероятности наблюдаемого события при этих гипотезах равны следующему:

$$P(A / H_1) = 0, P(A / H_2) = 0, P(A / H_3) = 1, P(A / H_4) = 1.$$

После опыта вероятности гипотез H_i будут равны:

$$P(H_1/A) = 0, P(H_2/A) = 0,$$

$$P(H_3/A) =, \frac{0{,}48 \cdot 1}{0{,}48 \cdot 1 + 0{,}08 \cdot 1} = \frac{6}{7},$$

$$P(H_4 / A) = \frac{0{,}08 \cdot 1}{0{,}48 \cdot 1 + 0{,}08 \cdot 1} = \frac{1}{7}.$$

Значит, вероятность того, что пуля принадлежит первому стрелку, равна 6/7.

Задачи

1. В коробке есть 3 новых и 3 уже использованных теннисных мяча. Для первой игры наудачу берут из коробки 2 мяча, а затем возвращают их назад. Какова вероятность для второй игры из этой коробки наудачу вынуть 2 новых мяча?

2. В урну, содержащую 4 шара, опущен белый шар, после чего из нее наудачу извлечен один шар. Найти вероятность того, что извлеченный шар окажется белым, если равновозможны все предположения о первоначальном составе шаров по цвету.

3. В пирамиде 5 винтовок, 3 из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95, для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произвел один выстрел из наугад взятой винтовки.

4. Вероятность поступления K вызовов на телефонную станцию за промежуток времени tравна $P_t(k)$. Считая число вызовов за любые два соседних промежутка времени независимыми, определить вероятность$P_{2t}(K)$поступления K вызовов за промежуток времени $2t$.

5. Два станка производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого станка вдвое больше производительности второго. Первый станок производит в среднем 60% деталей отличного качества, а второй– 84%. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь произведена на первом станке.

6. Число грузовых автомашин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых машин, проезжающих по тому же шоссе, как 3:2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,1; для легковой машины эта вероятность равна 0,15. К бензоколонке подъехала машина для заправки. Найти вероятность того, что это грузовая машина.

7. Батарея из трех орудий произвела залп, причем два снаряда попали в цель. Найти вероятность того, что первое орудие дало попадание, если вероятность попадания в цель первым, вторым и третьим орудием соответственно равны 0,4; 0,3; 0,5.

1.11. Последовательные независимые испытания (схема Бернулли)

Пусть производится nпоследовательных независимых одинаковых стохастических экспериментов (испытаний), в каждом из которых событие A может наступить или нет. Под независимыми понимаются такие эксперименты, в которых события, возникающие в результате него, являются независимыми в совокупности. Так как испытания одинаковы, то в любом из них событие A наступает с одинаковой вероятностью, обозначим ее $p = P(A)$. Вероятность противоположного события $\overline{A}$ (ненаступления A) обозначим

$$q = P\left(\overline{A}\right) = 1 - p.$$

Наступление события A обычно называют успехом, а ненаступление – неудачей. Требуется найти вероятность $P_n(m)$того, что событие Aв таких nопытах появится m раз.

Теорема. $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$.

Доказательство.Рассмотрим событие B_m, состоящее в том, что событие A появится в n опытах ровно m раз. Это событие может осуществиться различными способами. Разложим событие B_mна объединение пересечений событий, состоящих в появлении или непоявлении события A в отдельном опыте. Будем обозначать A_i– появление события Aв i-м опыте, $\overline{A_i}$–непоявление события $\bar{A}$ в -м опыте. Каждый вариант события B_mдолжен состоять из m появлений события A и$(n-m)$непоявлений, т.е. $\overline{A}$ с различными индексами. Такимобразом,

$$B_m = \sum_{m=0}^{n} A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_m \cdot \overline{A}_{m+1} \cdot \ldots \cdot \overline{A}_n,$$

причем в каждое пересечение события A должно находить m раз, а $\overline{A}$ должно входить $n - m$раз. Число всех комбинаций такого рода равно C_n^m, т.е. числу способов, какими можно из nопытов выбрать m, в которых произошло событие A. Вероятность каждой такой комбинации по теореме умножения вероятностей равна.Так как комбинации между собой несовместны, то по теореме сложения вероятностей вероятность события B_mравна следующему:

$$P_n(m) = P(B_m) = \underbrace{p^m q^{n-m} + \cdots + p^m q^{n-m}}_{C_n^m} = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Теорема доказана.

Формула $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$называется ***формулой Бернулли***.

Следствие. *Пусть $P_n(m_1;m_2)$ – вероятность того, что событие A произошло не менее m_1 и не более m_2 раз в испытаниях. Тогда* $P_n(m_1, m_2) = \sum_{k=m_1}^{m_2} C_n^k p^k q^{n-k}$.

Доказательство

$$P_n(m_1, m_2) = P\left(B_{m_1} + B_{m_1+1} + \cdots + B_{m_2}\right) = \sum_{k=0}^{m_2-m_1} P\left(B_{m_1+k}\right) =$$

$$= \sum_{k=m_1}^{m_2} C_n^k p^k q^{n-k}.$$

так как события $B_{m_1}, \ldots, B_{m_2}$несовместны.

Пример 1. Игральную кость бросают 3 раза. Какова вероятность того, что число 5 выпало 2 раза?

Решение.Пусть событие A – выпадение числа 5 при одном бросании кости, тогда $P(A)$ =1/6. Здесь производится 3 независимых испытания, нужно, чтобы «успех» осуществился 2 раза, поэтому $P_3(2) = C_3^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{72}$.

Пример 2. Система радиолокационных станций ведет наблюдение за группой объектов, состоящей из 10 единиц. Каждый из объектов может быть (независимо от других) потерян с вероятностью 0,1. Найти вероятность того, что хотя бы один из объектов будет потерян.

Решение.Вероятность потери хотя бы одного объекта $P_{10}(1,10)$ можно было найти по формуле

$$P_{10}(1,10) = P_1(1) + P_2(2) + \cdots + P_{10}(10),$$

но проще воспользоваться вероятностью противоположного события – ни один объект не потерян, тогда

$$P_{10}(1{,}10) = 1 - P_{10}(10) = 1 - 0{,}9^{10}.$$

Задачи

1. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле из лука равна 1/3. Производится 6 выстрелов. Какова вероятность: а) ровно трех попаданий; б) не менее двух попаданий.

2. В семье 10 детей. Считая вероятность рождения мальчика и девочки равными 1/2, найти вероятность того, что в данной семье равное количество мальчиков и девочек.

3. В помещении 4 лампы. Вероятность работы в течение года для каждой лампы 0,8. Найти вероятность того, что к концу года будут гореть 3 лампы.

4. Два баскетболиста делают по 3 броска в корзину. Вероятность попадания мяча при каждом броске равна соответственно 0,6 и 0,7. Найти вероятность того, что у обоих будет равное количество попаданий.

5. Одинаковы ли шансы на успех у трех человек, если первому надо получить хотя бы одну шестерку при бросании игральной кости 6 раз, второму – не менее двух шестерок при 12 бросаниях, а третьему – не менее трех шестерок при 18 бросаниях (Дж. Смит).

1.12. Предельные теоремы для схемы Бернулли

Продолжим рассматривать последовательные независимые испытания. В предыдущем параграфе была получена формула Бернулли для нахождения вероятностей$P_n(m)$.Но когда число испытаний n велико, применять эту формулу неудобно. Поэтому были доказаны предельные теоремы для вероятностей $P_n(m)$.

Пусть при больших n вероятность p уменьшается обратно пропорционально n, т. е. это означает, что $n \cdot p \approx \lambda$, где λ – некоторая постоянная.

Теорема Пуассона. Предположим, что произведение $n \cdot p$ является постоянной величиной, когда nнеограниченно возрастает. Обозначим $n \cdot p \approx \lambda$, m– ограничено. Тогда для любого фиксированного λ

$$P_n(m)=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}.$$

Доказательство. По формуле Бернулли

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}=\frac{n!}{n!\,(n-m)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^m\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-m}=$$

$$=\frac{1}{m!}n(n-1)\ldots(n-m+1)\left(\frac{\lambda}{n}\right)^{\mathrm{m}}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-m}=$$

$$=\frac{\lambda}{m!}^m\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots(1-\frac{m-1}{n})\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n.$$

Так как для любого фиксированного ограниченного mимеет место сходимость $1-\frac{m}{n}\to 1$ при$n\to\infty$, то $P_n(m)\approx\frac{\lambda}{m!}^m\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n$. По второму замечательному пределу $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n=e^{-\lambda}$ получаем, что

$$\lim_{n\to\infty}P_n\,(m)=\frac{\lambda}{m!}^m\,e^{-\lambda}\,.$$

Теорема доказана.

Замечание. Теорема Пуассона применима, когда $n > 30$; $p < 0{,}1$; $0{,}1 < \lambda < 10$.

Пример 1. Радиоаппаратура состоит из 2000 элементов. Вероятность отказа одного элемента в течение года равна 0,001. Найти вероятность отказа: а) двух элементов за год; б) не менее двух элементов за год.

***Решение*:**

а) Работу каждого элемента рассматривают как отдельное испытание. Пусть событие A – отказ элемента за год. По условию

$p = P(A) = 0{,}001,\ \lambda = np = 2000 \cdot 0{,}001 = 2$. Тогда по формуле Пуассона $P_{2000}(2) \approx \frac{2^2}{2!} e^{-2} = 2e^{-2} \approx 0{,}2707$.

б) Здесьнужно найти

$P_{2000}(2,\ 2000) = 1 - P_{2000}(0) - P_{2000}(1) = 1 - \frac{2^0}{0!}e^{-2} - \frac{2^1}{1!}e^{-2} \approx$ $\approx 0{,}594$.

Рассмотрим еще одну приближенную формулу для $P_n(m)$, когда $n > 30$, $0{,}1 \le p \le 0{,}9,\ npq > 9$.

Теорема (локальная предельная – Муавра – Лапласа). Пусть

$x_n = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$ и при $n \to \infty$, $\mathrm{m} \to \infty$ величины x_n ограничены. Тогда $\sqrt{npq} \cdot P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Доказательствотеоремы не приводим, его можно найти в [2].

Замечание. Для значений функции $\varphi(\mathrm{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ составлена таблица. Функция $\varphi(\mathrm{x})$ является четной, т. е. $\varphi(\mathrm{x}) = \varphi(-\mathrm{x})$.

Пример 2. Найти вероятность того, что при 150 выстрелах мишень будет поражена ровно 70 раз, если вероятность попадания при одном выстреле равна 0,4.

Решение.Пусть событие A – попадание при одном выстреле, $p = P(A) = 0{,}4$, тогда $q = 1 - p = 0{,}6$. По теореме Муавра – Лапласа $x_n = \frac{70-150\cdot0{,}4}{\sqrt{150\cdot0{,}4\cdot0{,}6}} = 1{,}67$ и $P_{150}(70) \approx \frac{1}{\sqrt{150\cdot0{,}4\cdot0{,}6}} \cdot \varphi(1{,}67) \approx 0{,}0165$, где $\varphi(\mathrm{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$; значения этой функции занесены в таблицу П.1, поэтому, зная значение аргумента, находим значения $\varphi(\mathrm{x})$.

Для вероятности $P_n(m_1, m_2)$– того, что событие A наступило не менее m_1 и не более m_2 раз в n испытаниях, когда n велико, тоже имеется приближенная формула.

Теорема (интегральная предельная – Муавра – Лапласа)

Пусть $a_n = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $b_n = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$, а при$n \to \infty$, $m_1 \to \infty$, $m_2 \to \infty$ величины a_nи b_nограничены. Тогда

$$P_n(m_1, m_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a_n}^{b_n} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Доказательствотеоремы не приводим, его можно найти в [2].

Замечание. Для значений функций $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{dx}$ составлена таблица П.2. Функция $\Phi(x)$ является нечетной, т. е. $-\Phi(x) = \Phi(-x)$. Тогда $P_n(m_1, m_2) = \Phi(b_n) - \Phi(a_n)$.

Пример 3. Вероятность изделия некоторого производства оказаться бракованным равна 0,005. Чему равна вероятность того, что из 10 000 взятых изделий бракованных оказывается не более 70?

Решение.По интегральной теореме Муавра – Лапласа, чтобы найти вероятность $P_{10000}(0;\ 70)$, нужно знать a_n и b_n.Подсчитаем сначала их значения:

$$a_n = \frac{0 - 10000 \cdot 0{,}002}{\sqrt{10000 \cdot 0{,}005 \cdot 0{,}995}} \approx –7{,}09,$$

$$b_n = \frac{70 - 10000 \cdot 0{,}002}{\sqrt{10000 \cdot 0{,}005 \cdot 0{,}995}} \approx 0{,}84.$$

Тогда

$$P_{10000}(0;\ 70) = \Phi(2{,}84) - \Phi(-7{,}09) = \Phi(2{,}84) + \Phi(7{,}09) \approx 0{,}9975.$$

Задачи

1. Завод отправил в магазин 5 000 лампочек. Вероятность того, что лампочка разобьется, равна 0,0002. Найти вероятность того, что в магазин привезли не более трех разбитых лампочек.
2. Вероятность найти белый гриб среди прочих равна 1/5. Найти вероятность того, что среди 300 грибов белых будет 75.
3. В партии из 1 000 арбузов каждый арбуз оказывается неспелым с вероятностью 1/4. Найти вероятность того, что спелых арбузов будет больше 700.
4. Текст содержит 20 000 букв. Каждая буква может быть неправильно напечатана с вероятностью 0,0004. Какова вероятность, что в тексте не менее двух опечаток?

5. Счетчик регистрирует попадающие в него частицы с вероятностью 0,9. Найти вероятность того, что он зарегистрировал не менее 95 % частиц, если в него попало 2 000 частиц.

6. На прядильной фабрике работница обслуживает 800 веретен. Вероятность обрыва пряжи в течение времени T равна 0,005. Найти вероятность того, что в течение времени T будет не более трех обрывов пряжи.

1.13. Последовательные зависимые испытания (цепи Маркова)

В схеме Бернулли изучают последовательные независимые испытания. Рассмотрим случай зависимых испытаний.

Пусть G есть некоторый эксперимент, который имеет конечное множество исходов $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$.Предположим, что мы неограниченно повторяем эксперимент G, т. е. производим последовательность испытаний, в каждом из которых может осуществляться только одно из событий E_k, $k = 1, 2, \dots, n$.

Определение.*Последовательность испытаний образует простую цепь Маркова, если условная вероятность того, что в -м испытании* $(r = 1, 2, \dots)$ *осуществляется событие* k, *зависит только от того, каким было событие в* $(r-1)$ *испытании, и не зависит от событий, произошедших в более ранних испытаниях.*

Исторически сложилось так, что при изложении цепей Маркова используют несколько иную терминологию, которую приведем ниже. Некоторая физическая система G может находиться в одном из состояний E_k, $k = 1, 2, \dots, n$.Она меняет свое состояние только в моменты времениt1, t2, …. t_1, t_2 , … . Пусть E_k^rозначает, что система G пришла в состояние E_kв момент времени t_r, т. е. на -миспытании. Тогда для простой цепи Маркова выполнено условие

$$P\left(E_k^r / E_{l_1}^{r-1}, E_{l_2}^{r-2}, \dots, E_{l_{r-1}}^1\right) = P\left(E_k^r / E_{l_1}^{r-1}\right).$$

где l_j любые из $\{1, 2, \dots, n\}$, j= 1, 2, …, $r-1$.

Далее ограничимся рассмотрением только однородных цепей Маркова.

Определение. *Однородной цепью Маркова называется цепь, в которой условная вероятность $P(E_t^r/E_l^{r-1})$ не зависит от номера испытания r, а зависит только от предыдущего и последующего состояний, т.е. $P(E_k^r/E_l^{r-1}) = P(E_k/E_l) = p_{kl}$ — это вероятность перехода из состояния E_lв состояние E_kза одно испытание или, как принято говорить, за один шаг.*

Полная вероятностная картина возможных изменений, осуществляющихся при переходе из одного состояния к непосредственно следующему, задается матрицей

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} p_{11}p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21}p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ p_{n1}p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрица Π_1 называется матрицей перехода за один шаг.

Пример 1. Пусть система G может находиться в состояниях E_1, E_2, E_3.

Переход из состояния в состояние происходит по схеме однородной цепи Маркова с матрицей перехода Π_1:

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Если система находится в состоянии E_1, то после изменения состояния за один шаг она с вероятностью 1/2 остается в этом же состоянии, с вероятностью 1/6 перейдет в состояние E_2, с вероятностью 1/3 перейдет в состояние E_3. Если система находилась в состоянии E_2, то остаться в этом состоянии она не может, а обязательно перейдет либо в состояние E_1, либо в состояние E_3, причем этот переход осуществится с одинаковой вероятностью. Из состояния E_3 система может перейти в любое из возможных состояний с одной и той же вероятностью 1/3.

Пример 2. *Блуждания с отражением.* Пусть частица, находящаяся на прямой, блуждает по целым точкам между 0 и a. Если $0 < k < a$, то из точки k с вероятностью 1/2 частица переходит в $k-1$ или $k+1$. Если k равно 0 или a, то частица отражается, т. е. переходит в точку 1 или в точку $a-1$ соответственно с вероятностью 1.Запишем матрицу перехода Π_1 для данной системы G:

$$\Pi_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2\,. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица Π_1 будет иметь размерность $(a+1)\times(a+1)$.

Пример 3. *Блуждания с поглощением.*Пусть частица, находящаяся на прямой, блуждает по целым точкам между 0 и a. Если $0 < k < a$, то из точки k с вероятностью 1/2 частица переходит в $k-1$или $k+1$. Если k равно 0 или a, то частица остается в них с вероятностью 1. Запишем матрицу перехода Π_1 для данной системы G:

$$\Pi_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & \ldots.0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & \ldots 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots. & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица Π_1 будет иметь размерность $(a+1)\times(a+1)$. Рассмотрим, каким условиям удовлетворяет матрица перехода Π_1:

1. Все элементы матрицы p_{kl} есть неотрицательные числа $0 \le p_{kl} \le 1$ для всех k, l.

2. Так как из состояния E_k система обязательно переходит в любое другое возможное состояние, то сумма элементов каждой строки матрицы Π_1 равна единице $\sum_{l=1}^{n} p_{kl} = 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Пусть система G из состояния E_k в состояние E_l перешла за 2 шага, найдем вероятность $p_{kl}(2)$ такого перехода. Для этого воспользуемся формулой полной вероятности $p_{kl}(2) = \sum_{r=1}^{n} p_{kr}\, p_{rl}$, т. е. система из состояния E_kперешла сначала за один шаг в любое другое возможное состояние E_r, а затем уже из этого E_r состояния следующим шагом перешла в состояние E_l. Каждое $p_{kl}(2)$ есть элемент новой матрицы перехода Π_2 за 2 шага, и, как видим, тогда новая матрица Π_2 есть произведение двух матриц: $\Pi_2 = \Pi_1 \cdot \Pi_1$.

Если рассматривать вероятность $p_{kl}(m)$ как вероятность перехода из состояния E_k в состояние E_l за m шагов, то аналогично по формуле полной вероятности можно получить, что $p_{kl}(m) = \sum_{r=1}^{n} p_{kr}\ p_{rt}(m-1)$. Поэтому, применив метод математической индукции, легко можно показать, что матрица перехода Π_m за m шагов есть m-я степень матрицы Π_1, т. е. $\Pi_m = \Pi_1^m$.

Пример 4. Матрица перехода за один шаг имеет вид

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу перехода за три шага.

Решение. $\Pi_3 = \Pi_1^3$. Найдем сначала Π_2:

$$\Pi_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/12 & 7/12 \\ 7/18 & 11/18 \end{pmatrix}.$$

Теперь найдем Π_3:

$$\Pi_3 = \begin{pmatrix} 5/12 & 7/12 \\ 7/18 & 11/18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 29/72 & 43/72 \\ 43/108 & 65/108 \end{pmatrix}.$$

Состояния, которые имеются в цепи Маркова, могут быть довольно различны по характеру. Поэтому вводится классификация состояний, которую очень коротко опишем ниже.

Определение. *Состояние E_k называется несущественным, если существует такое состояние E_j и такое число шагов m, что $p_{kj}(m) > 0$, но $p_{jk}(r) = 0$ для всех k. Все остальные состояния называют существенными.*

Несущественное состояние обладает свойством, что из него можно с положительной вероятностью попасть в некоторое другое состояние, но из другого состояния вернуться в несущественное уже нельзя. Так, в примере 3 все состояния, кроме крайних E_0 и E_a, несущественные, а состояния E_0 и E_aбудут существенными. В заключение приведем предельную теорему без доказательства.

Теорема Маркова. Если при некотором $k > 0$ все элементы матрицы перехода Π_k положительны, то существуют такие постоянные числа p_j $(j = 1, 2, \dots, n)$, что независимо от индекса имеют место равенства

$$\lim_{m\to\infty} p_{ij}(m) = p_j.$$

Другими словами, неважно из какого состояния вышла система, а важно, куда она идет, т. е. важно направление ее движения.

Задачи

1. Вероятности перехода задаются матрицей

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Чему равно число состояний? Найти вероятности перехода за два шага.

2. Пусть имеется маятник, у которого фиксируются только 2 положения: крайнее левое E_1 и крайнее правое E_2. Записать матрицу перехода для этой цепи Маркова. Есть ли здесь несуществующие состояния?

3. Электрон может находиться на одной из трех орбит. Переход с i-й орбиты на -ю происходит с вероятностью $\frac{c_i}{|i-j|}$. Найти матрицы перехода за 1 и 2 шага, постоянные c_i.

4. Вероятности перехода задаются матрицей

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Есть ли здесь несущественные состояния? Применима ли предельная теорема?

Глава 2
СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

2.1. Определение случайной величины

В практической жизни часто приходится сталкиваться с различными величинами. Значения одних из встречающихся величин могут быть известны (количество минут в часе, число членов парламента и т. д.), значения же других величин можно найти из опыта, путем измерения, пересчета (расстояние между двумя точками, число выпавших гербов при бросании монеты 3 раза и т. д.). Величины, которые могут принять в результате опыта любое из возможных значений, называют случайными.

Можно провести много примеров таких величин: 1) число космических частиц, попадающих на определенный участок земной поверхности за сутки; 2) число вызовов, поступающих на телефонную станцию; 3) размер уклонения точки падения снаряда от центра цели при стрельбе; 4) скорость молекулы газа. Несмотря на разнородность содержания приведенных примеров, все они с точки зрения математики обладают следующим свойством: каждая из этих величин под влиянием случайных обстоятельств способна принимать различные значения.

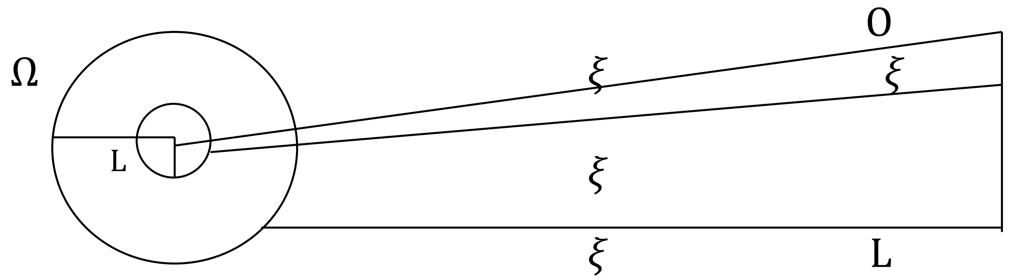
Определение. *Случайной величиной ξ называется функция, отображающая пространство элементарных исходов Ω в множество действительных чисел R; $\xi : \Omega \to R; \xi \to \varepsilon(\omega), \omega \in \Omega$.*

Пример 1. Монету бросают 2 раза. Нас интересует число выпадений герба. Здесь число выпадений герба – случайная величина. Исходное пространство элементарных событий Ω имеет вид Ω={рр, рг, гр, гг}. Тогда определим случайную величину ξ в виде следующей схемы:

$\Omega \to R$

$\omega_1 = \text{рр} \to 0 \ \xi(\omega_1) = 0$
$\omega_2 = \text{рг} \to 1 \ \xi(\omega_2) = 1$
$\omega_3 = \text{гр} \to 1 \ \xi(\omega_3) = 1$
$\omega_4 = \text{гг} \to 2 \ \xi(\omega_4) = 2$
Здесь ξ принимает всего три значения: 0, 1, 2.

Пример 2. Пусть имеется круг радиуса L. В круг наугад бросают точку. Расстояние от центра круга до выбранной случайной точки – случайная величина ξ. Здесь исходное пространство элементарных событий Ω–все множество точек круга. Тогда определим случайную величину ξ в виде схемы.



То есть:

$\xi\ (\omega_0 - \text{центр круга}) = 0;$
$\xi\ (\omega_1 - \text{ точка окружности радиуса } l) = l, 0 < l < L;$
$\xi\ (\omega_{\mathrm{L}} - \text{ точка граница круга }) = L.$

В данном примере ξ принимает значения из отрезка $[0, \mathrm{L}] \in R$.

Определение. *Для любого исхода $\omega \in \Omega$ значение $\xi = \xi(\omega)$называется реализацией случайной величины при данном исходе.*

В зависимости от того, во множество какого типа – дискретное или непрерывное – осуществляется отображение пространства Ω, случайные величины можно разделить на 2 класса:

1) дискретные случайные величины;

2) непрерывные случайные величины.

В приведенных выше примерах заданы дискретная случайная величина (пример 1), непрерывная случайная величина (пример 2).

2.2. Дискретные случайные величины

Рассмотрим сначала дискретные случайные величины. Дискретная случайная величина может принимать не более чем счетное число значений $x_1, x_2, ..., x_n, ...$.Значение случайной величины ξ наступает с некоторой вероятностью, обозначим ее $p_i = P(\xi = x_i)$.Соответствие, которое каждому значению x_i дискретной случайной величины ξ сопоставляет его вероятность p_i, называется законом распределения случайной величины ξ. Закон распределения случайной величины ξ удобно записывать в виде таблицы, которую называют рядом распределения.

ξ	x_1	x_2	…	x_n	…
$p=(\xi = x_1)$	p_1	p_2	…	p_n	…

Если перечислены все возможные значения случайной величины ξ, то $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = \sum_{i=1}^{\infty} P(\xi = x_i) = 1$.

Пример 1. Случайная величина ξ – число выпавших очков при однократном бросании игральной кости. Построить ряд распределения случайной величины. ξ

Решение. Ряд распределения имеет следующий вид:

ξ	1	2	3	4	5	6
p	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Случайная величина ξ может принять одно из следующих значений: 1, 2, 3, 4, 5, 6; причем вероятность каждой реализации равна 1/6.

Пример 2. Пусть вероятность появления события A при каждой из бесконечной последовательности испытаний равна p. Рассмотрим случайную величину ξ – номер испытания, при котором произошло первый раз событие A. Найти ряд распределения случайной величины ξ.

Решение. Случайная величина ξ может принимать любое положительное значение: 1, 2, 3, … .

$P(\xi = 1) = p_1$ – это вероятность того, что событиеA произойдет при первом испытании, где $p_1 = p$.

$P(\xi = 2) = p_2$– это вероятность того, что событиеA не произойдет при первом испытании, а произойдет при втором, тогда $p_2 = (1 - p)p$ и т. д.

$P(\xi = k) = p_k$ – это вероятность того, что событие A при первых $(k - 1)$ испытаниях не произойдет, а произойдет только при k-м испытании, тогда $p_k = (1 - p)^{k-1}p$ и т. д.Поэтому ряд распределения имеет следующий вид:

ξ	1	2 …	k	…
p	p	$(1-p)p$ ….	$(p-1)^{k-1}p$	…

Задачи

1. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте.

2. В урне 5 белых и 10 черных шаров. Вынули 2 пары. Построить ряд распределения случайной величины ξ – числа вынутых белых шаров.

3. Производятся последовательные испытания 5 приборов на надежность. Каждый следующий прибор испытывается только в том случае, если предыдущий оказался надежным. Построить ряд распределения числа испытаний, если вероятность выдержать испытания для каждого из них равна 0,5.

4. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8. Имеются 4 снаряда. Стрельба ведется до первого попадания. Построить ряд распределения израсходованных снарядов.

5. В партии из 6 деталей имеются 4 стандартных. Наудачу отобраны 3 детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

6. Дискретная случайная величина ε имеет закон распределения:

ξ	0	π/6	π/2	$5\pi/6$	π
p	1/10	3/10	1/10	2/10	3/10

Построить ряд распределения случайной величины$\eta = sin(\xi)$.

7. Два баскетболиста поочередно забрасывают мяч в корзину до тех пор, пока один из них не попадет в нее. Построить ряд распределения случайного числа бросков, производимых каждым из баскетболистов, если вероятность попадания для первого равна 0,4, а для второго – 0,6.

2.3. Функция распределения случайной величины

Для характеристики поведения дискретной случайной величины выше рассматривалась вероятность того, что ξ принимает конкретные значения. Но такой способ становится неприемлемым, если рассматривать непрерывную случайную величину, так как множество ее значений бесконечно и сплошь заполняет некоторый отрезок или интервал на прямой. Поэтому можно рассматривать вероятности других событий, таких как $\xi < x$, где x – некоторое действительное число. Причем эти события можно определить для обоих классов случаев, как дискретных, так и непрерывных.

Определение. *Функцией распределения случайной величины* ξ *называется функция* $F(x) = P(\xi < x),\ \ x \in R$.

Функция распределения $F(x)$обладает рядом свойств.

Свойство 1. $F(x)$ – *неубывающая функция.*

Доказательство. Пусть $x_1 < x_2$, тогда событие $\xi < x_1$влечет за собой событие $\xi < x_2$; по свойству вероятности

$$P(\xi < x_1) \leq \ P(\xi < x_2),$$

т. е. $F(x_1)\ \leq\ F(x_2)$, значит функция $F(x)$ – неубывающая.

Свойство 2. $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$.

Доказательство.Так как событие $(\xi < -\infty) = 0$ (невозможное событие), то $P(\xi < -\infty) = F(-\infty) = 0$. Так как событие $(\xi \leq +\infty) =\Omega$ (достоверное событие), то $P(\xi \leq \infty) = F(\infty) = 1$.

Свойство 3. *Функция$F(x)$непрерывна слева.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – произвольная монотонно возрастающая последовательность, сходящаяся в точке x, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.Обозначим через A_n – событие $(x_n \leq \xi < x)$. Тогда при $i > j,\ A_i \subset A_j$.Поэтому $P(A_n) = P(x_n \leq \xi < x) = F(x) - F(x_n)$,

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty}\left(F(x) - F(x_n)\right) = F(x) - \lim_{n\to\infty} F(x_n) =$$
$$= F(x) - F(x - 0) = 0.$$

Свойство 3 доказано.

Свойство 4. *Для любых $a < b$ выполнено равенство*

$$P(a \leq \xi < b) = F(b) - F(a).$$

Доказательство. Рассмотрим событие:

$$A = (\xi < b), B = (\xi \geq a), C = (a \leq \xi < b).$$

Тогда $A = B + C$ причем B и C несовместны, по теореме сложения вероятностей имеем, что $P(\xi < b) = P(\xi < a) + P(a \leq \xi < b)$, значит$P(a \leq \xi < b) = F(b) - F(a)$.Свойство 4 доказано.

Пусть интервал (a, b)неограниченно уменьшают, т. е. $b \to a$. Тогда вместо вероятности попадания в интервал будет получена вероятность того, что ξ примет значение a.

$$P(\xi = a) = \lim_{b\to a} P(a \leq \xi < b) = \lim_{b\to a} F(b) - F(a).$$

Значение этого предела зависит от того, имеет ли функция$F(a)$в точке$x = a$ разрыв или нет. Если в точке a функция F(x) имеет разрыв, то $P(\xi = a)$ равно значению скачка функции$F(x)$в точке а. Если $F(x)$ в точке a непрерывна, то $P(\xi = a) = 0$.

Следствие. Вероятность любого отдельно взятого значения непрерывной случайной величины равна нулю. Из того, что вероятность события $\{ \xi = a \}$ имеет вероятность, равную нулю для непрерывных случаев, не следует, что это событие не будет появляться, а следует только, что при неограниченном повторении опыта это событие будет появляться сколь угодно редко.

Пример 1. Дискретная случайная величина ε задана законом распределения.

ξ	2	4	7
p	0,5	0,2	0,3

Найти функцию$F(x)$и начертить ее график.

Решение:

1. Если $x \leq 2,$ то $F(x) = 0$, так как значений, меньших числа 2, величина ξ не принимает.

2. Если $2< x \leq 4$, то $F(x)$=0,5, так как ξ может принять значение 2 с вероятностью 0,5.

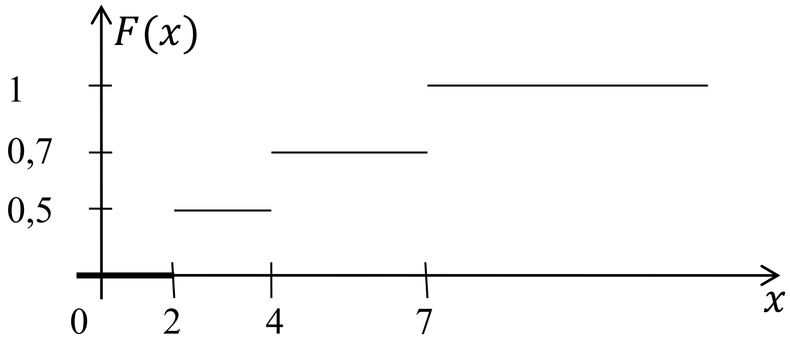
3. Если $4< x \leq 7$, то $F(x) = 0{,}7$, так как ξ может принять значение 2 с вероятностью 0,5 и значение 4 с вероятностью 0,2, значит, одно из этих значений, безразлично какое, ξ может принять (по теореме сложения вероятностей для несовместных событий) с вероятностью 0,5+0,2=0,7.

4. Если $x > 7$, то $F(x) = 1$, так как событие $\xi \leq 7$ достоверно.

Поэтому искомая функция распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ 0{,}5, & 2 < x \leq 4 \\ 0{,}7, & 4 < x \leq 7, \\ 1, & x > 7. \end{cases}$$

График этой функции примет следующий вид:



Пример 2. Случайная величина ξ имеет функцию распределения $F(x)$. Найти функцию распределения случайной величины $\eta = a\xi + b$, где $a \in R$, $b \in R$, $a > 0$.

Решение. Обозначим функцию распределения случайной величины η через $F_\eta(x)$. Тогда $F_\eta(x) = P(\eta < x) = P(a\,\xi + b < x) =$ $= P(a\xi < x - b) = P(\xi < \frac{1}{a}(x-b) = F\left(\frac{x-b}{a}\right)$.

Пример 3. Случайная величина ξ задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1, \\ \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}, & -1 < x < \frac{1}{3}, \\ 1, & x > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания величина ξ примет значение из интервала $\left(0, \frac{1}{3}\right)$.

Решение

$$P\left(\xi \in \left(0, \frac{1}{3}\right)\right) = F\left(\frac{1}{3}\right) - F(0) = \left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{3}{4}\cdot 0 + \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}.$$

Задачи

1. Дискретная случайная величина задана законом распределения:

ξ	3	4	7	10
p	0,2	0,1	0,4	0,3

Найти функцию распределения и построить ее график.

2. Случайная величина ξ задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ 0{,}5(x-2), & 2<x\le 4,\\ 1, & x>4.\end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания ξ примет значения:

а) меньше 0,2;

б) меньшее 3;

в) не меньше 5;

г) $\xi \in (1{,}3)$.

3. Случайная величина ξ имеет функцию распределения $F(x)$. Найти функцию распределения случайной величины $\eta = a\xi,\ a \in R$, 1) $a>0$; 2) $a<0$.

4. Функция распределения случайной величины ξ имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ a+b\arcsin(x), & -1\le x\le 1\ ,\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

Найти постоянныеa иb.

5. Опыт состоит из трех независимых бросаний монеты. Герб выпадет с вероятностью 0,5. Для случайного числа появлений герба построить график функции распределения.

2.4. Плотность распределения непрерывнойслучайной величины

Пусть имеется непрерывная случайная величина ξ с функцией распределения $F(x)$. Пусть функция $F(x)$ непрерывна и дифференцируемая.

Определение.*Плотностью распределения случайной величины ξ называется производная от функции распределения$f(x)=\dot{F}(x)$.*

Термин «плотность распределения» используется неслучайно. Действительно,

$$f(x)=\dot{F}(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x\le\xi<x+\Delta x)}{\Delta x},$$

так как рассматривается предел отношения вероятности попадания случайной величины ξ в интервал $(x, x+\Delta x)$ к длине этого интервала, причем длина интервала стремится к нулю. Поэтому $f(x)$ характеризует как бы плотность, с которой распределяются значения случайной величины в данной точке.

Рассмотрим свойства плотности распределения.

Свойство 1.*Плотность распределения есть неотрицательная функция* $f(x) \geq 0$.

Доказательство. $f(x) \geq 0$ есть производная неубывающей функции $F(x)$, значит $f(x) \geq 0$.

Свойство 2.$P(a \leq \xi < b) = \int_a^b f(x)dx$.

Доказательство. Так как первообразная функция $f(x)$ есть $F(x)$, то$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = P(a \leq \xi < b)$.

Следствие 1. $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Доказательство

$$F(x) = P(\xi < x) = P(-\infty \leq \xi < x) =\int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Следствие 2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ (свойство нормировки).

Доказательство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(-\infty = 1 - 0 = 1.$$

Пример 1. Функция распределения непрерывной случайной величины ξ задана выражением

$$F(x) =\begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ ax^2 & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Найти a; $f(x)$; $P(\xi \in (0{,}25; 0{,}5))$.

Решение. Так как функция распределения случайной величины ξ непрерывна при $x = 1$, то $ax^2 = 1$, значит $a = 1$. Плотность распределения

$$f(x) = F^{\prime}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0,1], \\ 2x, & x \notin [0,1]. \end{cases}$$

$$P\big(\xi \in (0{,}25; 0{,}5)\big) = F(0{,}5) - F(0{,}25) = 0{,}5^2 - 0{,}25^2 = 0{,}1875.$$

Задачи

1. Функция распределения случайной величины ξ имеет вид $F(x) = a + b\,arctg(x), x \in (-\infty, +\infty)$. Найти $a, b, f(x), P(\xi \in (-1{,}1))$.

2. Плотность распределения случайной величины ξ имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin x, & x \in (0,\pi), \\ 0, & x \notin (0,\pi). \end{cases}$$

Найти $F(x)$, $P(\xi \in (1{,}2; 1{,}5))$.

3. Функция распределения безотказной работы аппаратуры в течение времени tимеет вид $P(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}, t \geq 0, T > 0$. Найти $f(x)$, $P(\xi \in (0{,}2T))$.

2.5. Числовые характеристики случайных величин

В предыдущих параграфах были определены законы распределения случайных величин. Каждый закон распределения представляет собой некоторую функцию, и указание этой функции полностью описывает случайную величину с вероятностной точки зрения. Но во многих вопросах практики нет необходимости исчерпывающим образом описывать случайную величину, достаточно бывает указать только отдельные числовые параметры: например, какое-то среднее значение, около которого группируются возможные значения случайной величины, какое-либо число, характеризующее степень разнообразности этих значений относительно среднего.

Рассмотрим числовые характеристики для дискретных и непрерывных случайных величин.

Дискретные случайные величины

Определение. *Математическим ожиданием дискретной случайной величины* ξ *называется число* $M\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i$. *Если случайная величина* ξ *имеет счетное число значений, т. е.* $n = \infty$, *то тогда математическое ожидание существует, если сходится ряд* $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$, *в противном случае математическое ожидание не существует.*

Математическое ожидание является вероятностным аналогом среднего арифметического. Если грубо оценить $p_к$, то $p_к \approx \mu$, где $\mu = \frac{m_k}{N}$, m_k– сколько раз встретилось значение x_k, когда проводилось N испытаний. Поэтому $M\xi \approx \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{m_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{N}$. Математическое ожидание обладает свойствами, которые следуют из его определения.

Свойство 1. *Математическое ожидание постоянной равно этой постоянной.*

Доказательство. ПостояннуюC можно рассматривать как дискретную случайную величину, которая может принимать только одно значение Cс вероятностью 1, потому $MC = C\cdot 1 = C$.

Свойство 2. *Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий:* $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$.

Доказательство. Пусть $a_1 \ldots a_n$– возможные значения случайной величины ξ, $p_1 \ldots p_m$ – вероятность этих значений, $b_1 \ldots b_n$ – возможные значения случайной величины η, $q_1 \ldots q_m$– вероятность этих значений. Возможные значения $\xi + \eta$ имеют вид $a_k + b_i$, $1 \le k \le n$, $1 \le \mathrm{I} \le m$. Обозначим p_{ki} – вероятность того, что ξ примет значение a_k , η – значение b_i . Тогда $M(\xi + \eta) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (a_k + b_i) p_{ki} = \sum_{k=1}^{n} a_k (\sum_{i=1}^{m} p_{ki}) + \sum_{i=1}^{m} b_i (\sum_{k=1}^{n} p_{ki})$, но $\sum_{k=1}^{n} p_{ki} = p_i$, $\sum_{i=1}^{m} p_{ki} = q_i$, значит $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$.

Следствие. Математическое ожидание суммы конечного числа случайных величин равно сумме их математических ожиданий:

$$M(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n) = M\xi_1 + M\xi_2+\ldots+ M\xi_n.$$

Свойство 3. *Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:* $M(\eta\xi) = M(\eta)M(\xi)$.

Доказательство. Воспользуемся обозначениями, которые были введены в доказательстве свойства 2. Тогда вероятность того, что $\xi\eta$ примет значение $a_k b_i$, будет равна $p_k q_i$, т. е. $P(\xi\eta = a_k b_i) = p_k q_i$, так как величины ξ, η независимы. Тогда по определению математического ожидания

$$M(\xi\eta) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_k b_i p_k q_i =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k p_k \sum_{i=1}^{m} b_i q_i = M(\xi)M(\eta)\ .$$

Следствие.Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания $M(C\,\xi) = CM\,\xi$.

2.6. Непрерывные случайные величины

Пусть непрерывная случайная величина ξ имеет плотность $f(x)$.

Определение. *Математическим ожиданием непрерывной случайной величины* ξ *называется число* $M\,\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)dx$. *Говорят, что математическое ожидание случайной величины* ξ *существует, если несобственный интеграл сходится.*

Математическое ожидание для непрерывных случайных величин обладает теми же свойствами, что и математическое ожидание дискретных случайных величин:

1. $M(\xi+\eta) = M\xi + M\eta$.
2. Если ξ и ηнезависимы, то $M(\xi\eta) = M\xi \cdot M\eta$.

3. $M(C\xi) = CM\xi$, C – постоянная.

Предлагаем читателю доказать их самостоятельно. Кроме математического ожидания, которое указывает некоторое среднее значение случайной величины, можно рассматривать и средний разброс случайной величины около своего математического ожидания. Мерой этого разброса (рассеивания) служит дисперсия.

Определение. *Дисперсией случайной величины ξ называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от своего математического ожидания* $D(\xi) = M(\xi - M\xi)^2$.

Поэтому для дискретных случайных величин

$$D(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - M(\xi)^2 p_i,$$

а для непрерывных случайных величин

$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - M(\xi)\right)^2 f(x)dx.$$

Величина $\sigma = \sqrt{D(\xi)}$называется среднеквадратическим отклонением. Рассмотрим свойства дисперсии.

Свойство 1. *Дисперсия постоянной равна* 0.

Доказательство. $D(C) = M(C - M(C))^2 = (C - C)^2 = 0$.

Свойство 2. *Если C –постоянная, то* $D(C\xi) = C^2$.

Доказательство

$D(C\xi) = M(C\xi - M(C\xi))^2 = M(C^2(\xi - M(\xi))^2) = C^2 D(\xi)$.

Свойство 3. *Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий*: $D(\xi + \eta) = D(\xi) + D(\eta)$.

Доказательство. $D(\xi + \eta) = M\left((\xi + \eta) - M(\xi + \eta)\right)^2 =$

$$= M((\xi + \eta)^2) - \left(M(\xi + \eta)\right)^2 = D(\xi) + D(\eta) +$$
$$+ 2(M\left(\xi\eta - M(\xi)M(\eta)\right) = D(\xi) + D(\eta).$$

Поскольку величины ξ, η независимы, $M\left(\xi\eta - M(\xi)M(\eta)\right) = 0$.

Кроме характеристик положения случайной величины ξ на прямой используется еще ряд других характеристик, каждая из которых описывает то или иное свойство распределения.

Определение. *Начальным моментом k-го порядка величины* ξ *называется математическое ожидание k-й степени случайной величины* $M_k = M(\xi^k)$. *Очевидно, что для дискретных случайных величин* $M_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k\, p_i$, *для непрерывных случайных величин*

$$M_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx.$$

Определение. *Центральным моментом k-го порядка случайной величины* ξ *называется математическое ожидание k-й степени разности случайной величины от своего математического ожидания.*

Очевидно, что для дискретных случайных величин

$$D_k = \sum_{i=1}^{n}((x_i - M(\xi))^k p_i.$$

Для непрерывных случайных величин

$$D_k = \int_{-\infty}^{+\infty}(x - M\,\xi)^k f(x) dx.$$

В частности, дисперсия – это центральный момент 2-го порядка. Для нахождения дисперсии удобно пользоваться иногда формулой вида

$$D(\xi) = M(\xi^2) - (M\xi)^2.$$

Действительно,

$$D(\xi) = M\big(\xi - M(\xi)\big)^2 = M(\xi^2 - \ 2\xi M(\xi) + (M\xi)^2) =$$
$$= \ M(\xi^2) - M(2\xi M\xi) + M(\big(M(\xi)\big)^2 = M(\xi^2) - 2(M(\xi))^2 + (M\xi)^2 =$$
$$= M(\xi^2) - (M\xi)^2.$$

Пример 1. Дискретная случайная величина ξ задана рядом распределения ξ

ξ	2	5	8	19
p	0,2	0,3	0,4	0,1

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ.

Решение. $M\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 2 \cdot 02 + 5 \cdot 03 + 8 \cdot 04 + 19 \cdot 01 = 7.$
Для нахождения дисперсии используем формулу

$$D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2.$$

$$M(\xi^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i = 2^2 \cdot 0{,}2 + 5^2 \cdot 0{,}3 + 8^2 \cdot 0{,}4 + 19^2 \cdot 0{,}1 = 70.$$

$$D\xi = 70 - 7^2 = 70 - 49 = 21.$$

Пример 2. Плотность распределения непрерывной случайной величины ξ имеет вид

$$f(x) = \begin{Bmatrix} 3x^2, x \in [-1{,}0] \\ 0, \quad x \notin [-1{,}0] \end{Bmatrix}.$$

Найти математическое ожидание и дисперсию.

Решение

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{-1} xf(x)dx + \int_{-1}^{0} xf(x)dx + \int_{0}^{+\infty} xf(x)dx =$$
$$= \int_{-1}^{0} xf(x)dx = -\frac{3}{4}.$$

Дисперсию найдем по формуле $D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2$:

$$M\xi^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) = \int_{-1}^{0} 3x^4 dx = \frac{3}{5}.$$

Поэтому $D\,\xi = \frac{3}{5} - (-\frac{3}{4})^2 = \frac{3}{80}$.

Задачи

1. Случайная величина ξ задана рядом распределения

ξ	2	4	7	10	12
p	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Найти математическое ожидание и дисперсию.

2. Два прибора испытывали на надежность. Вероятность отказа первого прибора 0,1, а второго – 0,05. Найти математическое ожидание и дисперсию случайного числа отказавших приборов.

3. Вероятность приема позывного сигнала одной радиостанции другой радиостанцией равна 0,2 при каждой посылке. Позывные подаются каждые 5 секунд до тех пор, пока не будет получен ответный сигнал, принимаемый достоверно. Общее время прохождения позывного и ответного сигналов равно 16 секунд. Найти среднее число подаваемых позывных сигналов до установления двухсторонней связи.

4. Непрерывная случайная величина ξ имеет равномерное распределение.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}.$$

Найти математическое ожидание и дисперсию.

5. Непрерывная случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром $\lambda > 0$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ 1 - e^{\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию.

6. Функция распределения случайной величины ξ имеет следующий вид (закон арксинуса):

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arcsin(x), & -1 < x \leq 1, \\ 1, & 1 < x. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию.

2.7. Нормальное распределение (Гаусса)

Одним из наиболее часто встречающихся распределений является нормальное распределение (Гаусса). Оно играет большую роль в теории вероятностей, а связано это с тем, что нормальный закон распределения является предельным законом, к которому приближаются другие законы распределения.

Определение. *Непрерывная случайная величина ξ имеет нормальное распределение, если ее плотность распределения имеет вид*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где a и σ – некоторые постоянные, называемые параметрами распределения.

Функция распределения$F(x)$принимает вид

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Найдем основные числовые характеристики нормального распределения.

Математическое ожидание

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Сделаем замену переменной $u = \frac{x-a}{\sigma}$. Тогда $x = \sigma u + a, dx = \sigma du$, а пределы интегрирования остаются тем же, в чем нетрудно убедиться.Получаем

$$M\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma u + a) e^{-\frac{u^2}{2}} du =$$
$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} ue^{-\frac{u^2}{2}} du + \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Первый из интервалов в правой части полученного равенства равен нулю, как интеграл от нечетной функции в симметричных пределах, а второй интеграл (так называемый интеграл Пуассона) равен $\sqrt{2\pi}$. Тогда $M\xi = a$. Значит, параметр анормального распределения равен математическому ожиданию соответствующей случайной величины. Найдем дисперсию нормально распределительной случайной величины:

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty}(x - M\xi)^2 f(x)dx - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2\, edx.$$

Используем замену переменной $u = \frac{x-a}{\sigma}$. Тогда

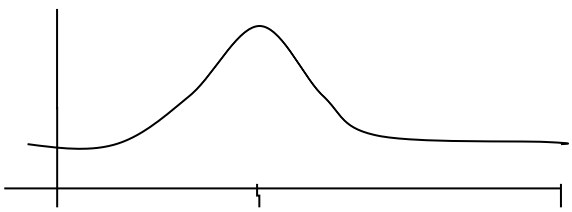
$$D\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma^3\, u^2 edu = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}u^2\, edu.$$

Далее интегрируем по частям, полагая $u = t$, $ue^{-1}du = du$, откуда $dt = du$, $u = -e$, поэтому

$$D\xi = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}(ue).$$

Первое из слагаемых в скобках равно нулю, а второе равно $\sqrt{2\pi}$. Итак, дисперсия нормально распределенной случайной величины ξ равна σ^2, т. е. $D\xi = \sigma^2$, σ есть среднеквадратическое отклонение, так как $\sqrt{D\xi} = \sqrt{\sigma^2} = \sigma$. После вычисления математического ожидания и дисперсии становится ясным вероятностный смысл параметров a и σ нормального распределения. График функции $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ приведен на рисунке ниже.

f(x)



Функция плотности нормального распределения $f(x)$ с параметрами$a = 0$, $\sigma = 1$ называется плотностью стандартного нормального распределения случайной величины, т. е. для стандартной нормальной случайной величины

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Для вычисления вероятности попадания значения случайной величины, распределенной нормально, в заданный интервал (α, β) обычно пользуются специальной функцией:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Эта функция называется функцией Лапласа, или интегралом вероятности. Ее значения даны в таблице П.2. При использовании таблицы П.2 следует помнить, что функция $\Phi(x)$ – нечетная функция, поэтому в таблице П.2 приведены ее значения только для положительного аргумента.

Найдем вероятность попадания нормальной величины ξ в интервал (α, β), используя стандартную нормальную величину. Для этого введем случайную величину $\eta = \frac{\xi-\alpha}{\sigma}$. Тогда $M\eta = 0$, $D\eta = 1$ (предлагается читателю проверить самостоятельно). Неравенство $\alpha \leq \xi \leq \beta$ равносильно неравенству

$$\frac{\alpha - a}{\sigma} \leq \frac{\xi - a}{\sigma} \leq \frac{\beta - a}{\sigma}.$$

Поэтому вероятности выполнения этих неравенств равны, т. е.

$$P(\alpha \leq \xi \leq \beta) = P\left(\frac{\alpha-a}{\sigma} \leq \frac{\xi-\alpha}{\sigma} < \frac{\beta-\alpha}{\sigma}\right).$$

Теперь можно записать:

$$P(\alpha \leq \xi < \beta) = P(\frac{\alpha-a}{\sigma} \leq \eta \leq \frac{\beta-a}{\sigma}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} edx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a-1} edx =$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} edx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{u}^{-1} edx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} edx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{1} edx -$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{-1} edx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{1} edx = \Phi(\frac{\beta-a}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha-a}{\sigma}).$$

Итак, для нормально распределенной случайной величины с параметрами α и σимеем

$$P(\alpha \leq \xi \leq \beta) = \Phi(\frac{\beta-a}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha-a}{\sigma}).$$

В частности, можно посчитать вероятности:

$P(|\xi - a| < \sigma) = 0{,}6837;$
$P(|\xi - a| < 2\sigma) = 0{,}9545;$
$P(|\xi - a| < 3\sigma) = 0{,}9973.$

Последнее из равенств – правило трех сигм; оно показывает, что вероятность отклонения случайной величины ξ от своего математического ожидания α меньше чем на 3σ близка к 1, т. е. такое отклонение является практически достоверным событием.

Пример 1. Случайная величина ξ распределена нормально с параметрами $a = 8$, $\sigma = 3$. Найти вероятность того, что случайная величина в результате опыта примет значение, заключенное в интервале (12,5; 14).

Решение. Здесь $\alpha = 12{,}5$, $\beta = 14$, поэтому $p(12{,}5 \le \xi < 14) = \Phi\left(\frac{14-8}{3}\right) - \Phi\left(\frac{12.5-8}{3}\right) = \Phi(2) - \Phi(1.5) = 0.4773 - 0.4332 = 0.0441$. По таблице П.2 $\Phi(2) = 0{,}4773$, $\Phi(1{,}5) = 0{,}4332$.

Пример 2. Случайная погрешность измерения подчинена нормальному закону распределения с параметрами $a = 0$, $\sigma = 9$. Проводят три независимых измерения. Найти вероятность того, что погрешность хотя бы одного измерения не превосходит по абсолютной величине 3.

Решение. Найдем вероятность того, что погрешность измерения в одном испытании не превышает 3:

$$P(|\xi| < 3) = \Phi\left(\frac{-3}{9}\right) = 2\Phi\left(\frac{3}{9}\right) = 0{,}2586.$$

Вероятность того, что эта погрешность превышает 3:

$$P(|\xi| > 3) = 1 - P(|\xi| < 3) = 0{,}7414.$$

Вероятность того, что во всех трех испытаниях погрешность измерения превышает 3, по теореме умножения вероятностей равна произведению вероятностей $(P(|\xi| < 3))^3 = 0{,}4075$, тогда искомая вероятность равна 1-$(P(|\xi| < 3))^3 = 0{,}5925$.

Задачи

1. Математическое ожидание нормальной случайной величины $\xi a = 3$, а среднеквадратическое отклонение $\sigma = 2$. Написать функцию плотности вероятности ξ.

2. Математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины ξ соответственно равны 10 и 2. Найти вероятность того, что в результате испытания ξ примет значение, заключенное в интервале (12, 14).

3. Производится измерение диаметра вала без систематических ошибок. Случайные ошибки измерения ξ подчинены нормальному закону со среднеквадратическим отклонением $\sigma = 10$. Найти вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 15.

4. Систематическая ошибка удержания высоты самолетом +20 м, случайная ошибка характеризуется среднеквадратическим отклонением, равным 50 м. Для полета самолета отведен коридор высотой 100 м. Найти вероятность того, что самолет будет лететь ниже, внутри и выше коридора, если самолету задана высота, соответствующая середине коридора.

5. Нормальная случайная величина ξ есть ошибка измерения некоторого расстояния. При измерении допускается систематическая ошибка в сторону завышения на 1,2 см, среднеквадратическое отклонение ошибки измерения равно 0,8 см. Найти вероятность того, что отклонение измеренного значения от истинного не превзойдет по абсолютной величине 1,6 см.

2.8. Некоторые вероятностные распределения

В теории вероятностей кроме нормального распределения используется еще ряд других распределений, некоторые из них приводятся ниже.

Дискретные распределения

1.*Вырожденное распределение*– случайная величина ξ сосредоточена в точке a, т. е. $P(\xi=a) = 1$, его характеристики: $M\xi = \alpha$, $D\xi = 0$.

2.*Биноминальное распределение*– случайная величина ξ задана законом распределения

$$P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k},\ k = 0,1,\dots,n \text{ , где } q = 1 - p.$$

Тогда$M\xi= np$, $D\xi= npq$.

3.*Геометрическое распределение* – случайная величина ξзадается рядом распределения

$$P(\xi = k) = p(1-p)^k,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots\ .$$

Тогда$M\xi= \frac{1-p}{p}$, $D\xi= \frac{1-p}{n}$.

4. *Распределение Пуассона* – случайная величина ξ задана рядом распределения $P(\xi=\text{k})= \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$. Тогда $M\xi = \lambda$, $D\xi= \lambda$.

Непрерывные распределения

1.*Равномерное распределение* – случайная величина ξ имеет функцию плотности вероятности

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a,b], \\ \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b]. \end{cases}$$

Тогда $M\xi =\frac{b+a}{2}$, $D\xi =\frac{(b-a)^2}{12}$.

2. *Распределение Симпсона*– случайная величина ξ имеет функцию плотности вероятности

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{b-a} - \dfrac{2}{(b-a)^2} \cdot \left| a+b-2x \right|, x \in [a,b] \\ 0, \quad x \notin [a,b]. \end{cases}$$

Тогда $M\xi =\frac{2}{3(b-a)}\left(a^3 + b^2 - 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^3\right)$, $D\xi = \frac{(a-b)^2}{24}$.

3. *Показательное* (*экспоненциальное*) *распределение*– случайная величина ξ имеет функцию плотности вероятности

$$F(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, \ x \geq 0, \ \lambda > 0, \\ 0, \ x < 0. \end{cases}.$$

Тогда $M\xi = \frac{1}{\lambda}, \ D\xi = \frac{1}{\lambda^2}$.

4. ***Распределение Лапласа***–случайная величина ξ имеет функцию плотности вероятности

$$F(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda}, x \in (-\infty, +\infty), \lambda > 0.$$

Тогда $M\xi = a, \ D\xi = \frac{2}{\lambda^2}$.

5. ***Распределение Вейбулла–Гнеденко***–случайная величина ξ имеет функцию плотности вероятности

$$F(x) = \begin{cases} 2\lambda x^{a-1} \, \mathrm{e}^{-\lambda x}, x > 0, \\ 0, x \leq 0, \end{cases}$$

где$a > 0, \lambda > 0$. Тогда

$$M\xi = \lambda^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right), D\xi = \lambda^{-\frac{2}{a}} [\frac{2}{a} \Gamma\left(\frac{2}{a}\right) - \frac{1}{a^2} (\Gamma\left(\frac{1}{a}\right))^2,$$

где $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ – гамма-функция.

6. ***Закон арксинуса***– случайная величина ξ имеет функцию плотности вероятности

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{a - x}}, x \in (-a, a), \\ 0, x \notin (-a, a). \end{cases}$$

Тогда $M\xi = 0, \ D\xi = \frac{a^2}{2}$.

7. ***Распределение Максвелла***–случайная величинаξ имеет функцию плотности распределения.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4h^3}{\sqrt{\pi}}x^2e^{-h^2x^2}, x>0,\\ 0, x<0.\end{cases}$$

8.*Гамма распределение*–случайная величина ξ имеет функцию плотности распределения

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}x^{\alpha}e^{-\frac{x}{\beta}}, x>0,\\ 0, x\le 0.\end{cases}$$

9.*Бета-распределение*– случайная величина ξ имеет функцию плотности вероятности

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}, x\in(0,1)\\ 0, \quad x\notin(0,1).\end{cases}$$

10.*Распределение Релея*–случайная величина ξ имеет функцию плотности распределения

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sigma}{x^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, x\ge 0,\\ 0, x<0.\end{cases}$$

11. *Распределение Коши*–случайная величина ξ имеет функцию плотности вероятности

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\lambda}{\lambda-(x-a)^2}, \lambda>0.$$

Математическое ожидание и дисперсия не существуют.

12*.Логарифмически нормальное (логнормальное) распределение* – случайная величина ξ имеет функцию плотности вероятности

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - a)^2}{2\sigma^2}}, x > 0, \\ 0, x \leq 0. \end{cases}$$

Тогда $M\xi = e^{-\frac{\sigma^2}{2}+a}, D\xi = e^{\sigma^2+2a}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$.

13.χ^2***-квадрат распределение*** – случайная величина $\xi = \sum_{i=1}^{n} \eta_{i,}^2$ где η_i – независимые нормально распределенные случайные величины с параметрами 0, 1. Тогда функция плотности вероятности

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x > 0, \\ 0, x \leq 0. \end{cases}$$

Тогда $M\xi = n, D\xi = 2n, n$ – число степеней свободы, $\Gamma(x)$ – гамма-функция.

14.*Распределение Стьюдента*– случайная величина $\xi = \frac{\eta\sqrt{n}}{\sqrt{\rho_n}}$, где η – нормально распределенная случайная величина с параметрами распределения 0, 1; ρ_n – независимая от ηслучайная величина с распределениемχ^2-квадратсnстепенями свободы.Тогда функция плотности вероятности имеет вид

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{n\pi}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

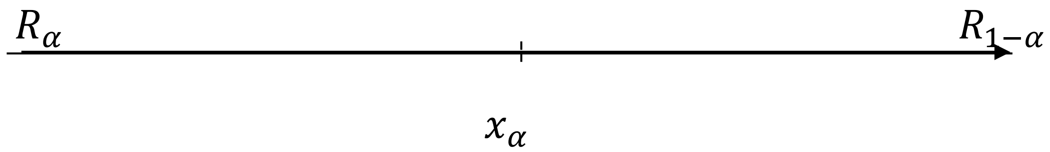
Тогда $M\xi = 0, D\xi = \begin{cases} \frac{n}{n-2} \text{ если } n > 2, \\ \infty, \text{ если } n \leq 2. \end{cases}$

2.9. Квантиль распределения

В теории вероятностей и особенно в математической статистике используются квантили распределений. Пусть задана некоторая случайная величина ξи число α, такое, чтобы $0< \alpha < 1$.

Определение.*α-квантиль (или квантиль уровня α) распределения случайной величины ξ – такое вещественное число x_α, что $P(\xi < x_\alpha) \leq \alpha$.*

Схематически это можно представить как некоторую границу x_α на множестве R значений случайной величины ξ. Вторая разбивает его на два непересекающихся подмножества R_1 и R_α, т. е. $R = R_\alpha \cup R_{1-\alpha}$, где $R_\alpha \cap R_{1-\alpha} = \emptyset$ и $P(\xi \in R_\alpha) \leq \alpha$, а $P(\xi \in R_{1-\alpha}) \leq 1 - \alpha$.



Определение. *0,5-квантиль называется медианой распределения. Если функция распределения $F_\xi(x)$ непрерывна, то а-квантиль есть решение уравнения $F_\xi(x_\alpha) = \alpha$, т. е. x_α есть функция, обратная к $F_\xi(x)$.*

Уравнение$F_\xi(x_\alpha) = \alpha$не всегда можно решить точно. Поэтому с целью удобства для многих распределений составлены таблицы квантилей. Например, для стандартного нормального, χ^2-квадрат, Стьюдента распределений эти таблицы можно найти в [4].

Пример 1. Пусть случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 2$. Найти 0,9-квантиль.

Решение.Функция распределения в данном случае равна $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, где $x> 0$. Так как $\lambda = 2$, то имеем уравнение

$$1 - e^{-2x_{0,9}} = 0{,}9.$$

Поэтому $e^{-2x_{0,9}} = 0{,}1$ или $-2x_{0,9} = \ln 0{,}1 = -\ln 10$. Значит $x_{0,9} =$
$$= \frac{1}{2}\ln 10.$$

Пример 2. Воспользуемся таблицами для стандартного нормального распределения. Из таблицы имеем $F_\xi(1{,}645) = 0{,}95$. Значит $x_{0,95} = 1{,}645$.

Замечание. В данном случае $F_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{25}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$, но решить уравнение $F_\xi(x_\alpha) = 0{,}95$ точно здесь невозможно, так как интеграл $\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t2}{2}}\,dt$ не имеет первообразную. Поэтому это уравнение решается приближенно численными методами. Результаты решений для различных α сведены в таблицы.

2.10. Закон больших чисел

Ранее уже отмечалось, что массовые случайные явления обладают своими закономерностями. Свойство устойчивости, в какой бы области оно не появлялось, коротко можно охарактеризовать так: конкретные особенности каждого отдельного явления почти не сказываются на среднем результате массы таких явлений; случайные отклонения от среднего значения в каждом отдельном явлении в массе взаимно погашаются, нивелируются, выравниваются. Именно эта устойчивость средних и представляет собой физическое содержание «закона больших чисел», понимаемого в широком смысле слова: при очень большом числе случайных явлений средний их результат практически перестает быть случайным и может быть предсказан с большой степенью определенности.

В узком смысле слова «закон больших чисел» в теории вероятностей понимается как ряд математических теорем, в каждой из которых для тех или иных условий устанавливается факт приближения средних характеристик большого числа опытов к некоторым определенным постоянным. Рассмотрим сначала неравенство Чебышева.

Неравенство Чебышева. Для любой случайной величины ξ, имеющий конечную дисперсию, при каждом $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$P(|\xi - M\xi| \geq \xi) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

Доказательство. Пусть $f(x)$ – функция плотности случайной величины ξ, тогдав области интегрирования

$$P(|\xi - M\xi| \geq \xi) = \int f(x)dx.$$

Следовательно,

$$\int f(x)dx \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\int (x - M\xi)^2 f(x)dx \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

Неравенство доказано.

Следствие. Для любой случайной величины ξ справедливо неравенство

$$P(|\xi - M\xi| \geq 3\sqrt{D\xi}) \leq \frac{1}{9}.$$

Доказательство. Пусть в неравенстве Чебышева $\varepsilon = 3\sqrt{D\xi}$, тогда $P(|\xi - M\xi| \geq 3\sqrt{D\xi}) \leq \frac{D\xi}{(3\sqrt{D\xi})^2} = \frac{1}{9}$, т. е. для любой случайной величины вероятность того, что отклонение случайной величины от ее математического ожидания выйдет за пределы трех средних квадратических отклонений, не может быть больше 1/9.

Теорема Чебышева.Если $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \dots$ – последовательность попарно независимых случайных величин, имеющих конечные дисперсии, ограниченные одной и той же постоянной $D\xi_1 \leq C$, $D\xi_2 \leq C, \dots, D\xi_n \leq C$, то для любого постоянного$\varepsilon > 0$.

$$P(|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k| < \varepsilon) = 1.$$

Такая сходимость последовательности случайных величин называется сходимостью по вероятности.

Доказательство. Учитывая попарную независимость случайных величин, получим, что

$$M(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k; D(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D\xi_k.$$

Так как $D\xi \le C$ для всех k, то $D(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k) \le \frac{C}{n}$. Используя переход к пределу при$n \to \infty$, получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} P(\left| \frac{1}{n}\sum_{k-1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k \right| < \xi) \ge 1.$$

Но так как вероятность не может быть больше единицы, то отсюда и следует утверждение теоремы.

Следствие 1 (теорема Бернулли). Пусть μ – число наступлений событияA в n независимых испытаниях, p есть вероятность наступления события A в каждом из испытаний. Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P(\left| \frac{\mu}{n} - p \right| < \varepsilon) = 1.$$

Доказательство. Введем случайные величины μ_k, равные числу появлений событияA при k-м испытании, т. е. μ_k есть либо 0, либо 1, имеем μ $=\mu_1 + \mu_2+\ldots+\mu_n$, а так как $M\mu_i = p, D\mu_i = pq \le \frac{1}{4}$, то теорема Бернулли – частный случай теоремы Чебышева.

Следствие 2 (теорема Пуассона). Если в последовательности независимых испытаний вероятность появления событияA в k-м испытании равна p_k, то

$$\lim_{n\to\infty} P(\left| \frac{\mu}{n} - \frac{\sum_{k=1}^{n}p_k}{k} \right| < \xi) = 1,$$

где μ – число появлений событияA в первых n испытаниях.

Доказательство. Рассмотрим случайные величины μ_k, равные числу появления событияA в k-м испытании. Тогда $M\mu_k = p_k$, $D\mu_k = p_k q_k \le \frac{1}{4}$и теорема Пуассона есть частный случай теоремы Чебышева.

В теореме Чебышева есть два жестких требования: 1) независимость случайных величин; 2) конечность дисперсий случайных величин. Приведем без доказательства две теоремы, в которых эти условия заменены на другие.

Теорема Маркова. Пусть имеются зависимые случайные величины

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \dots .$$

Если $\frac{D(\sum_{k=1}^{n} \xi_k)}{n^2} \to 0, n \to \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$.

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k \right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Теорема Хинчина. Если случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ независимы, одинаково распределены и имеют конечные математические ожидания $(a = M\xi_k)$,то

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k - a \right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Пример 1. Используем неравенство Чебышева с целью оценить вероятность того, что $|\xi - M\xi| < 0{,}2$, если $D\xi = 0{,}004$.

Решение. Неравенство Чебышева $P(|\xi - M\xi| > \xi) \leq \frac{D\xi}{\xi^2}$, поэтому $P(|\xi - M\xi| > \varepsilon) \geq 1 - \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$, тогда $P(|\xi - M\xi| < 0{,}2) \geq 1 - \frac{0{,}004}{0{,}2^2} = 0{,}9$.

Пример 2. Устройство состоит из десяти независимых работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время T равна 0,05. Оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом отказавшихся элементов и средним числом отказов за время T окажется: а) меньше двух; б) не меньше двух.

Решение:

а)Обозначим через ξ число отказавших приборов за время T. Тогда ξ – дискретная случайная величина с биноминальным распределением, поэтому $M\xi = np = 10 \cdot 0{,}05 = 0{,}5$; $D\xi = npq = 10 \cdot 0{,}005 \cdot 0{,}95 = 0{,}475$. Как было сказано выше, из неравенства Чебышева следует, что $P(\left|\xi - M\xi\right| > \varepsilon) \geq 1 = \frac{D\xi}{n^2}$, значит, $P(\left|\xi - 0{,}5\right| < 2 \geq 1 - \frac{0{,}475}{4} = 0{,}88$.

б) По неравенству Чебышева получим, что $P(\left|\xi - 0{,}5\right| \geq 2) \leq \frac{0{,}475}{4} = 0{,}12$.

Пример 3. Последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \dots$ задана законом распределения:

ξ_n	$-na$	o	na
p	$\frac{1}{2n^2}$	$1-\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{2n^2}$

Применима ли к заданной последовательности теорема Чебышева?

Решение. Для того чтобы к последовательности случайных величин была применима теорема Чебышева, нужно, чтобы выполнялись два условия: 1) случайные величины должны быть попарно независимыми; 2) их дисперсии должны быть ограничены одной константой. Первое условие обеспечено условием задачи. Проверим второе условие, для этого сначала найдем $M\xi_n$:

$$M\xi_n = (-na)\frac{1}{2n^2} + 0 \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + na \cdot \frac{1}{2n^2} = 0.$$

Тогда

$$D\xi_n = (-na)^2 \frac{1}{2n^2} + 0^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + (na)^2 \cdot \frac{1}{2n^2} = a^2.$$

Итак, $D\xi_n = a^2$, значит закон больших чисел для данной последовательности случайных величин выполняется.

Задачи

1. Дискретная случайная величина ξ задана законом распределения:

ξ	0,3	0,6
p	0,2	0,8

Оценить $P(|\ \xi - M\xi\ | < 0{,}2)$.

2. Дискретная случайная величина ξ задана законом распределения:

ξ	0,1	0,4	0,6
p	0,2	0,3	0,4

Оценить $P(|\ \xi - M\xi\ | > \sqrt{0{,}4})$.

3. В осветительную сеть параллельно включены 20 лампочек. Вероятность того, что за времяT лампа будет включена, равна 0,8. Оценить, что за время T $P(|\ \xi - M\xi\ |\big| < 3)$ и $P(\big|\ \xi - M\xi\ | \geq 3)$.

4. Последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ ... задана законом распределения:

ξ_n	-*a*	*a*
p	$\frac{n+1}{2n+1}$	$\frac{n}{2n+1}$

Применима ли к заданной последовательности теорема Чебышева?

5. Последовательность независимых случайных величин $\xi_{1,}\xi_2$, ...,$\xi_n\dots$ задана законом распределения

ξ_n	-$\sqrt{3}$	0	-$\sqrt{3}$
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Верен ли закон больших чисел для данной последовательности случайных величин? Использовать теорему Хинчина.

6. Последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \dots$ задана законом распределения

$$f_{\xi_n}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}.$$

Верен ли закон больших чисел для заданной последовательности случайных величин?

2.11. Характеристические функции

Определение.*Характеристической функцией случайной величины* ξ *называется комплекснозначная функция* $\varphi_\xi(t) = Me^{it\xi}$, *определенная для всех действительных значений* t .

Из определения следует, что для дискретной случайной величины с рядом распределения

ξ	x_1	x_2	……	x_n	……
p	p_1	p_2	……	p_n	……

характеристическая функция будет определяться формулой

$$\varphi_\xi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{itx_n} p_n,$$

а для непрерывной случайной величины:

$$\varphi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)dx.$$

Рассмотрим свойства характеристических функций.

Свойство 1. $\varphi_\xi(0)=1$ для любой случайной величины ξ.

Доказательство. $\varphi_\xi(0) = Me^0 = M \cdot 1 = 1.$

Свойство 2. $\left|\varphi_\xi(t)\right| \le 1$ для всех $t \in R$.

Доказательство. $\mid \phi_\xi(t) \mid = \mid Me^{it\xi} \mid \le M\left|e^{it\xi}\right| = M\left|\cos(t\xi) +\right.$
$\left.+ isin(t\xi)\right| = M\sqrt{cos^2(t\xi) + sin^2(t\xi)} = M \cdot 1 = 1.$

Свойство 3. Для любых $a, b \in R \phi_{a\xi+b}(t) = e^{ibt}\phi_\xi(at)$.

Доказательство. $\phi_{a\xi+b}(t) = Me^{it(a\xi+b)} = M\left(e^{ita\xi}e^{itb}\right) =$
$= e^{itb}\phi_\xi(at)$.

Свойство 4. Пусть случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ ... независимы, тогда $\varphi_{\xi_1+\dots+\xi_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{\xi_k}$.

Доказательство. Учитывая независимость случайных величин, имеем, что

$$\varphi_{\xi_1+\dots+\xi_n}(t) = M\left(\prod_{k=1}^{n} e^{it\xi_k}\right) = \prod_{k=1}^{n} Me^{it\xi_k} = \prod_{k=1}^{n} \phi_{\xi_k}(t).$$

Свойство 5. Пусть случайная величина ξ имеет абсолютный момент k-го порядка. Тогда $\varphi_\xi^{(k)}(0) = i^k M\xi^k$,где $\varphi_\xi^{(k)}(0)$ – производнаяk-го порядка функции $\varphi_\xi(t)$.

Доказательство. Используя формулу дифференцирования показательной функции, получим, что

$$\frac{d^k}{dt^k}\varphi_\xi(t) = \frac{d^k}{dt^k} M\left(e^{it\xi}\right) = M\left(\frac{d^k}{dt^k}e^{it\xi}\right) = \xi^k M\left(\xi^k e^{it\xi}\right).$$

Если $t = 0$, то

$$\varphi_\xi^{(k)}(0) = \xi^k M\left(\xi^k e^{i0\xi}\right) = i^k M(\xi^k \cdot 1) = i^k M\xi^k.$$

Пример 1.Найдем характеристическую функцию для случайной величины ξ, имеющей распределение Пуассона:

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k = 0, 1, 2, \dots .$$

$$\varphi_\xi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} e^{itk}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(e^{it}\lambda)^k}{k!} = e^{\lambda(it-1)}.$$

Здесь использовали разложение в ряд функции

$$y = e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(e^{it}\lambda)^k}{k!}.$$

Пример 2. Найдем характеристическую функцию нормального распределения случайной величины ξ. Случайная величина имеет функцию плотности вероятности $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, поэтому

$$\varphi_t(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Сделаем замену переменной $z = \frac{x-a}{a} - it\sigma$. Тогда $x = \sigma z + it\sigma^2 + a$, $dx = \sigma dz$, поэтому

$$\varphi_t(t) = e^{iat-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty-i+\sigma}^{\infty-i+\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}}dz.$$

Известно, что

$$\int_{-\infty-i+\sigma}^{\infty-i+\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}}dz = 2\pi,$$

значит,

$$\varphi_t(t) = e^{iat-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

Замечание. Для стандартной нормальной величины (параметры 0,1) характеристическая функция $\varphi_t(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Если задана функция распределения случайной величины ξ, то ее характеристическая функция находится однозначно. Но оказывается, что по характеристической функции можно также однозначно задать закон распределения случайной величины.

Теорема обращения. Справедливы следующие утверждения:

1. Для целочисленной случайной величины ξ

$$p_k = P(\xi = k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itk}\,\varphi_{\xi}(t)dt, k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots .$$

2. Если характеристическая функция φ_t случайной величины ξ абсолютно интегрируема, то существует плотность распределения $f(x)$, определяемая формулой

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\,\varphi(t)dt.$$

Теорема приводится без доказательства. Доказательство можно найти в [1].

Пример 3. Найти закон распределения случайной величины ξ с характеристической функцией $\varphi(t) = cos(t)$.

Решение.Характеристическая функция $\varphi(t) = cos(t)$ не является абсолютно интегрируемой на всей прямой, поэтому предполагаем, что ξ – дискретная случайная величина.Тогда характеристическая функция имеет вид

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itx_k}p_k = \sum_{k=1}^{\infty} p_k\, co\,s(tx_k) + i\sum_{k=1}^{\infty} p_k\, sin(tx_k)\,.$$

Так как $\varphi(t) = \cos(t)$, то ясно, что ξ сможет принимать только два значения: 1 и -1 с равными вероятностными, т. е.

$$p_1 = P(\xi = -1) = \frac{1}{2}, p_2 = P(\xi = 1) = 1/2.$$

Задачи

1. Найти характеристическую функцию случайной величины ξ, для которой плотность вероятности имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 2x, \in [0,1], \\ 0, x \notin [0,1]. \end{cases}$$

2. Найти характеристическую функцию случайной величины ξ, плотность вероятности которой имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}.$$

3. Пусть $\varphi(t)$ – характеристическая функция случайной величины ξ. Найти характеристическую функцию случайной величины ξ.

4. Пусть ξ и η – независимые одинаково распределенные случайные величины с характеристической функцией $\varphi(t)$. Найти характеристическую функцию случайной величины $\xi - \eta$.

5. Найти закон распределения, которому соответствует характеристическая функция $\varphi(t) = 2/3 + 1/3\cos(3t)$.

2.12. Центральная предельная теорема

В рассмотренном выше законе больших чисел были указаны условия, когда суммы случайных величин сходятся по вероятности к некоторым предельным. Но ничего не было сказано про законы распределения предельных случайных величин. Предельные законы распределения являются предметом изучения центральной предельной теоремы, которую иногда называют количественной формой закона больших чисел. Сначала дадим определение сходимости, которой будем пользоваться.

Определение.*Последовательность случайных величин*(ξ_n)*слабо сходится к случайной величине* ξ*, если для любой непрерывной и ограниченной функции* $\varphi(x)$ *выполняется условие при* $n \to \infty$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dF_n(x) \to \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dF(x),$$

где F_n и F – функции распределения случайных величин ξ_n, ξ. Обозначается это $F_n \Rightarrow F$.

В дальнейшем нам понадобится теорема непрерывности.

Теорема непрерывности. *Для сходимости* $F_n \Rightarrow F$ *необходимо и достаточно, чтобы* $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$ *при каждом t, где* $\varphi_n(t)$ *и* $\varphi(t)$– *характеристические функции* ξ_n *и* ξ.

Доказательство теоремы не приводим, его можно найти в [1].

Пусть $\{\xi_k \mid k = 1, 2, \dots\}$ – последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин. Пусть $M\xi_k = a$, $D\xi_k = \sigma^2$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$, $\Phi(x)$ – стандартный нормальный закон распределения (параметры 0,1). Рассмотрим последовательность случайность величин $\zeta_n = \frac{S_n - an}{\sigma\sqrt{n}}$.

Теорема центральная предельная. Если $0 < \sigma^2 < \infty$, то при $n \to \infty$, $F_{\zeta_n}(x) \Rightarrow \Phi(x)$,$x \in (-\infty, \infty)$, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$.

Доказательство. Без ограничения общности моно считать, что $a = 0$, так как иначе можно было бы рассмотреть последовательность $\{\dot{\xi_k} = \xi_k - a \mid k = 1,2, \dots\}$, при этом последовательность $\{\xi_k\}$ не изменится.

Учитывая теорему непрерывности, достаточно доказать, что $\varphi_{\zeta_n}(t) \to e^{-\frac{t^2}{2}}$, когда a= 0. По свойству характеристической функции и так как ξ_k независимы и одинаково распределены, имеем, что

$$\varphi_{\zeta_n}(t) = Me^{it\zeta_n} = Me^{it\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\xi_k} = \varphi_{\xi_1}^{n}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \varphi^{n}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right),$$

где $\varphi(t) = \varphi_{\xi_1}(t)$ –характеристическая функция ξ_1.

Так как $M\xi_1^2$существует, то используем разложение в ряд функции φ(e) (поскольку $a = 0$, то $D\xi_1 = M\xi_1^2$):

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t\dot{\varphi}(0) + \frac{t^2}{2}\ddot{\varphi}(0) + o(t^2),$$

но

$$\varphi(0) = 1, \dot{\varphi}(0) = iM\xi_1 = 0, \ddot{\varphi}(0) = i^2 M\xi^2 + o(t^2),$$

поэтому

$$\varphi(t) = 1 - \frac{t^2\sigma^2}{2} + o(t^2).$$

Найдем $\ln \varphi_{\zeta_n}(t)$:

$$\ln \varphi_{\zeta_n}(t) = \ln \varphi^n \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = n \ln \varphi \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = n \ln(1 - \frac{\sigma^2}{2} (\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})^2 + o\left(\frac{t^2}{\sigma^2 n}\right)).$$

Воспользуемся разложением в ряд функции

$$\ln(1 - x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots\right),$$

поэтому

$$\ln \varphi_{\zeta_n}(t) = n\left(-\frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{\sigma^2 n}\right)\right) \to -\frac{t^2}{2}, n \to \infty.$$

Итак, доказано, что при $n \to \infty \ln \varphi_{\zeta_n}(t) \to -\frac{t^2}{2}$, тогда $\varphi_{\zeta_n}(t) \to e^{-\frac{t^2}{2}}$, а это есть характеристическая функция стандартной нормальной величины, значит, теорема доказана.

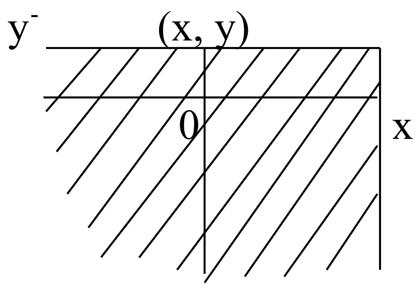
2.13. Системы двух случайных величин

В практических применениях теории вероятностей часто приходится сталкиваться с задачами, в которых результат опыта описывается не одной случайной величиной, а двумя или более случайными величинами. Свойства системы нескольких случайных величин не исчерпываются свойствами отдельных величин, ее составляющих, помимо этого она включает также взаимные связи (зависимости) между случайными величинами. Здесь мы рассмотрим только систему двух случайных величин (ξ, η).

Определение. *Функцией распределения системы двух случайных величин* (ξ, η) *называется вероятность совместного выполнения двух неравенств* $(\xi < x, \eta < y)$:

$$F(x, y) = P(\xi < x, \eta < y).$$

Функция распределения $F(x, y)$ есть вероятность попадания случайной точки (ξ, η)в бесконечный квадрат с вершиной в точке (x, y), лежащей левее и ниже ее. Функция распределения одной случайной величины ξ – обозначим ее $F_\xi(x)$ – представляет собой вероятность попадания случайной точки в полуплоскость, ограниченную справа абсциссой x, а функция распределения η – $F_\eta(y)$– вероятность попадания случайной точки в полуплоскость, ограниченную сверху ординатой y:



Свойства функции распределения $F(x, y)$ аналогичны свойствам функции распределения одной случайной величины:

1. Функция $F(x, y)$ есть неубывающая функция обоих аргументов, т. е. $x_2 > x_1 F(x_2, y)$, при $y_2 > y_1$ $F(x, y_2) \geq F(x, y_1)$.

2. Повсюду на $-\infty$ функция распределения равна 0:

$$F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = F(-\infty, -\infty) = 0.$$

3. При одном из аргументов, равном $+\infty$, функция распределениясистемы есть функция распределения случайной величины, соответствующей другому аргументу:

$$F(x, +\infty) = F_\xi(x), \qquad F(+\infty, y) = F_\eta(y).$$

4. Если оба аргумента равны $+\infty$, функция распределения системы равна 1. $F(+\infty, +\infty) = 1$.

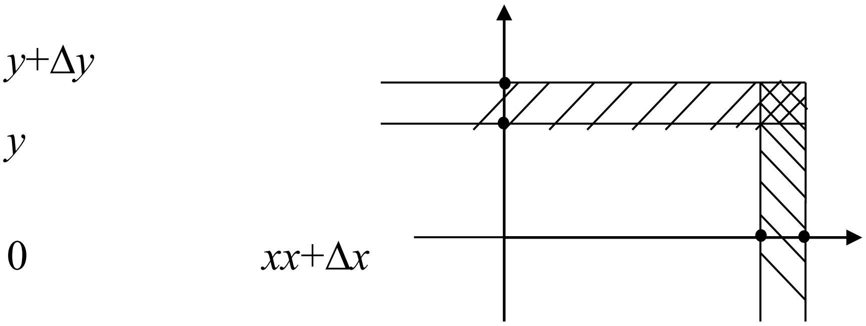
5. $P(a < \xi < b, c < \eta < d) = F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) +$
$+ F(a,c)$.

Введенная функция распределения существует для систем любых случайных величин, как дискретных, так и непрерывных.

Систему дискретных случайных величин можно характеризовать совокупностью вероятностей p_{ij}, которые могут быть сведены в таблицу:

η/ξ	x_1	x_2	…	x_n
y_1	P_{11}	P_{22}	…	P_{1n}
y_1	P_{21}	P_2	…	P_{2n}
…..			…	…
y_n	P_{n1}	P_{n2}	…	P_{nn}

Систему непрерывных случайных величин можно характеризовать плотностью распределения. Рассмотрим вероятность попадания (ξ, η) в малый прямоугольник D со сторонами Δx и $\Delta y P((\xi, \eta) \in D)$:



По пятому свойству функции распределения

$$\lim_{\Delta x \to 0, \Delta y \to 0} \frac{P((\xi,\eta) \in D)}{\Delta x \Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta x \Delta y \to 0} \frac{F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x+\Delta x, y) - F(x, y+\Delta y) + F(x,y)}{\Delta x \Delta y} =$$

$$= \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y).$$

Функция $f(x,y)$называется плотностью распределения системы двух случайных величин. Тогда

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v) du dv,$$

поэтому

$$P(a < \xi < b, c < \eta < d) = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy.$$

Плотность распределения удовлетворяет следующим свойствам:

1) $f(x,y) \geq 0$;
2) $\int_{-\infty}^{\infty} \int f(x,y)dxdy = 1$;
3) одномерные плотности имеют вид

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy,$$
$$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx.$$

Пример 1. Двухмерная случайная величина (ξ, η)распределена равномерно в области D, если

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{S_D}, & \text{если } (x,y) \in D, \\ 0, & \text{если } (x,y) \notin D, \end{cases}$$

где S_D – площадь области D.

Определение. *Случайные величины ξ и ηназываются независимыми, если закон распределения каждой из них не зависит от того, какое значение приняла другая величина. В противном случае ξи η называются зависимыми.*

Таким образом, дискретные случайные величины независимы, если

$$P(\xi = x_i, \eta = y_j) = P(\xi = x_i) \cdot P(\eta = y_j) = p_i p_j.$$

Непрерывные случайные величины независимы, если

$$f(x,y) = f_\xi(x) \cdot f_\eta(y).$$

Пример 2.Плотность распределения системы (ξ, η)имеет вид

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi^2\,(x^2+y^2+x^2y^2+1)}.$$

Определить, зависимы или нет ξ и η.

Решение. Разлагая знаменатель на множители, имеем, что

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}\frac{1}{\pi(1+y^2)}=f_\xi(x)\cdot f_\eta(y)\ .$$

Значит, ξ и η независимы.

2.14. Коэффициенты корреляции

Так как коэффициент корреляции часто используется в различных статистических задачах, то рассмотрим его подробнее.

Определение. Корреляционным моментом случайных величин ξ и η называется следующий момент:

$$K_{\xi,\eta}=M((\xi-M\eta)(\eta-M\eta).$$

Для дискретных случайных величин

$$K_{\xi,\eta}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M\xi)\sum_{j=1}^{m}(y_j-M\eta)p_{ij}.$$

Для непрерывных случайных величин

$$K_{\xi,\eta}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)\big(y-m_y\big)f(x,y)dxdy.$$

Если случайные величины ξ и η независимы, то тогда

$$K_{\xi,\eta}=0,$$

но существуют примеры, которые называют, что хотя

$$K_{\xi,\eta}=0,$$

но случайные величины ξ и η зависимы.

Определение. *Коэффициентом корреляции называется величина*

$$r_{\xi,\eta}=\frac{K_{\xi,\eta}}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}=\frac{K_{\xi,\eta}}{\sigma_\xi\sigma_\eta}\ .$$

Свойства коэффициента корреляции:

1) для независимых случайных величин $r_{\xi,\eta} = 0$;

2) $r_{\xi,\eta} \leq 1$;

3) $r_{\xi,\eta} = 0$ тогда и только тогда, когда существуют такие числа $a \neq 0$ и b, что $\eta = a\xi + b$. Значит, коэффициент корреляции характеризует линейную зависимость случайными величинами.

Пример 3. Двухмерное нормальное распределение имеет вид

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \cdot exp\left\{-\frac{(x-a_1)^2}{2(1-r^2)\sigma_1^2} + \frac{r(x-a_1)(y-a_2)}{(1-r^2)\sigma_1\sigma_2} - \frac{(y-a_2)^2}{2(1-r^2)\sigma_2^2}\right\},$$

где $M\xi = a_1, a_2 = M\eta, \sigma_1 = \sqrt{D\xi},\ \sigma_2 = \sqrt{D\eta}, r = r_{\xi,\eta}$.

Если ξ и ηнезависимы, то двумерное нормальное распределение имеет следующий вид:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \cdot exp\left\{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(y-a_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}.$$

Пример 4. Задана дискретная двухмерная случайная величина (ξ, η).

ξ/η	3	6
10	0,25	0,1
14	0,45	0,2

Найти коэффициент корреляции $r_{\xi,\eta}$.

Решение. Найдем сначала $M\xi$ и $M\eta$.

$M\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij}\right)$ = 3·(0,25+0,45)+ 6· (0,1 – 0,2)=3·0,7+6·0,3=3,9.

$M\eta = \sum_{j=1}^{m} y_j \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij}\right)$ = 10· (0,25+0,1) + 14· (0,45+0,2) =
= 10·0,35 + 14·0,65 = 12,6.

Для вычисления дисперсии воспользуемся формулой

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi^2).$$

Найдем $M\xi^2$ и$M\eta^2$:

$$M\xi^2 = 9 \cdot 0{,}7 - 36 \cdot 0{,}3 = 17{,}1.$$

$$M\eta^2 = 100 \cdot 0{,}35 + 196 \cdot 0{,}65 = 162{,}4.$$

Поэтому

$$D\xi = 17{,}1 - (3.9)^2 = 17{,}1 - 15{,}21 = 1{,}89; \sigma_\xi = \sqrt{D\xi} = 1{,}37,$$

$$D\eta = 162{,}4 - (12{,}6)^2 = 162{,}4 - 158{,}76 = 3{,}64; \quad \sigma_\eta = \sqrt{D\eta} = 1{,}9.$$

Найдем корреляционный момент $K_{\xi,\eta}$:

$$K_{\xi,\eta} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i - M\xi)(y_j - M\eta)p_{ij} =$$

$$= (3 - 3{,}9)(10 - 12{,}6) \cdot 0{,}25 + (6 - 3{,}9)(10 - 12{,}6) \cdot 0{,}1 +$$

$$+ (3 - 3{,}9)(14 - 12{,}6) \cdot 0{,}45 + (6 - 3{,}9)(14 - 12{,}6) \cdot 0{,}2 = 0{,}06.$$

Тогда

$$r_{\xi,\eta} = \frac{0{,}06}{1{,}37 \cdot 1{,}9} \approx 0{,}023.$$

Как было сказано выше, что если случайные величины ξ и η независимы, то коэффициент корреляции $r_{\xi,\eta} = 0$.Обратное заключение неверно: случайные величины ξ и η могут быть зависимые, и тем не менее $r_{\xi,\eta} = 0$.

Пример 5. Пусть ξ имеет равномерное распределение на отрезке $[-a,\ a]$.Пусть дана случайная величина $\eta = \xi^2$. Найти $r_{\xi,\eta}$.

Решение. Найдем $M\xi,\eta$.Так как ξ равномерно распределена, то

$$M\xi = \frac{a+(-a)}{2a}=0,$$

$$M\eta = \int_{-a}^{a} x^2 \frac{1}{2a} dx = \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{3}(a^3 - (-a)^3) = \frac{a^3}{3}.$$

Используя свойства математического ожидания, найдем корреляционный момент $K_{\xi,\eta}$:

$$K_{\xi,\eta} = M((\xi - M\xi)(\eta - M\eta) = M(\xi\left(\eta - \frac{a^3}{3}\right) = M\xi\eta - \frac{a^3}{3} = M\xi^3,$$

$$M\xi^3 = \int_{-a}^{a} x^3 \cdot \frac{1}{2a} dx = \frac{1}{2a} \cdot \frac{a^4-(-a)^4}{4} = 0.$$

Поэтому

$$r_{\xi,\eta} = \frac{K_{\xi,\eta}}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}} = 0.$$

Из указанных свойств и приведенного примера 5 ясно, что коэффициент корреляции однозначно указывает только на наличие линейной связи между случайными величинами ξ и η (когда $| r_{\xi,\eta} |= 1$). Но по нему нельзя судить о независимости случайных величин. Поэтому, если $r_{\xi,\eta} = 0$, то случайные величины ξ и ηназываются-некорреляционными, хотя при этом они могут быть зависимыми. Отметим важное свойство некоррелированных величин: если ξ и η – некоррелированы, то $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$.

Задачи

1. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины (ξ, η).

$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}\sin(x)\sin(y)\,, & 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi \\ 0, (x,y) \notin ([0,\pi] \cdot [0,\pi]) \end{cases}.$$

Найти коэффициент корреляции.

2. Задана дискретная двухмерная случайная величина (ξ, η).

ξ/η	2	5
0,1	0,15	0,35
0,8	0,05	0,45

Найти коэффициент корреляции.

3. В кошельке лежат 8 пятирублевых монет и 6 двухрублевых. Наудачу вынимают одну за другой монеты. Пусть ξ– достоинство первой монеты,η– второй. Составить закон распределения(ξ, η).Найти $r_{\xi,\eta}$.

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ

Теория вероятностей

Задача 1

1. Из отрезка [0, 3] наугад выбираем два числа. Найти вероятность того, что из них разность меньше 1.

2. На десяти одинаковых карточках написаны числа от 0 до 9. Найти вероятность того, что наудачу образованное с помощью данных карточек трехзначное число делится на 2.

3. Из отрезка [0, 3] наудачу выбираем два числа. Найти вероятность того, что сумма этих чисел больше трех.

4. На десяти одинаковых карточках написаны числа от 0 до 9. Найти вероятность того, что наудачу образованное с помощью данных карточек двухзначное число делится на 2.

5. Бросаем n игральных костей. Найти вероятность того, что на всех костях выпало одинаковое число очков.

6. Бросаем четыре монеты. Найти вероятность того, что выпало ровно два «герба».

7. Бросаем три монеты. Найти вероятность того, что выпало не больше двух «гербов».

8. Найти вероятность того, что при случайном упорядочивании множества $\{1, 2 \ldots, 2n\}$ каждое четное число имеет четный номер.

9. Из ящика, содержащего три билета с номерами 1, 2, 3, вынимают по одному все билеты. Найти вероятность того, что порядковый номер хотя бы одного билета совпадает с собственным.

10. Бросают две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков делится на 6.

11. Какова вероятность того, что сумма двух наугад взятых положительных чисел, каждая из которых меньше либо равна 1, будет меньше либо равна, а их произведение будет не больше 2/9.

12. Найти вероятность того, что наудачу взятое трехзначное число окажется кратным 2 либо 5, либо и тому и другому одновременно.

13. Из 12 лотерейных билетов, среди которых 4 выигрышных, наудачу берут 6. Какова вероятность того, что хотя бы один из них выигрышный?

14. В ящике 20 шаров с номерами 1, 2, …, 20. Наудачу выбирают шесть шаров. Найти вероятность того, что среди них есть шары с номерами 1 и 2.

15. Бросают 4 игральные кости. Найти вероятность того, что на них выпадет по одинаковому числу очков.

16. Имеется пять отрезков, длины которых равны соответственно 1, 3, 5, 7, 9 единицам. Найти вероятность того, что с помощью взятых наудачу трех отрезков из данных можно построить треугольник.

17. Из колоды карт (52 карты) наудачу извлекают три карты. Найти вероятность того, что это будут тройка, семерка, туз (в указанном порядке).

18. На полке в случайном порядке расставлено 40 книг, среди которых находится трехтомник А.С. Пушкина. Найти вероятность того, что эти тома стоят в порядке возрастания номера слева направо, но не обязательно рядом.

19. При наборе телефонного номера абонент забыл две последние цифры и набрал их наугад, помня только, что эти цифры нечетные и разные. Найти вероятность того, что номер набран правильно.

20. Из отрезка $[a, b]$ наугад выбрали два числа. Найти вероятность того, что их частное больше $\frac{a+b}{a\cdot b}$, еслиa=1, b =4.

21. Случайно выбран трехзначный телефонный номер. Чему равна вероятность того, что все цифры различные?

22. Бросают две игральные кости. Какова вероятность того, что сумма очков не меньше четырех?

23. Найти вероятность того, что у случайно взятого четырехзначного числа каждая следующая цифра меньше предыдущей.

24. На отрезке $[a, b]$ наугад выбрали два числа. Найти вероятность того, что их произведение меньше $\frac{ab}{2}$, еслиa = 1, b= 5.

25. Если повернуть лист бумаги на 180°, то цифры 0, 1, 8 не изменятся, цифры 6 и 9 перейдут друг в друга, а остальные цифры потеряют смысл. Найти вероятность того, что случайно взятое трехзначное число не изменится при повороте листа бумаги на 180°.

26. На восьми одинаковых карточках написаны числа 2, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13. Наудачу берут две карточки. Найти вероятность того, что образованная из двух полученных чисел дробь сократима.

27. Из отрезка $[a, b]$ наугад выбрали два числа. Найти вероятность того, что их разность меньше либо равна $\frac{b}{3}$, еслиa = 0, b= 3.

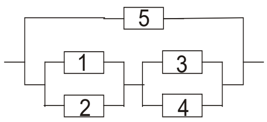
28. Десять книг на одной полке расставляют наугад. Найти вероятность того, что при этом три определенные книги окажутся поставленными рядом.

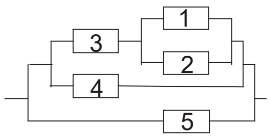
29. Из отрезка $[a, b]$ наугад выбрали два числа. Найти вероятность того, что их сумма больше либо равна $3a$, если $a = 2$, $b = 5$.

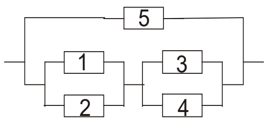
30. Найти вероятность того, что после случайного упорядочивания элементов множества $\{1, 2 \ldots, 2n\}$ числа 1, 2, 3 стоят рядом в порядке возрастания.

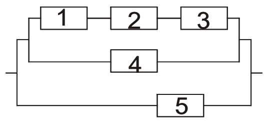
Задача 2

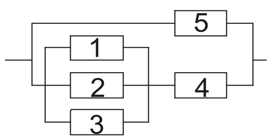
Определить вероятность безотказной работы за время T электрической цепи, состоящей из пяти независимо работающих элементов. Найти вероятности отказов элементов за время T.

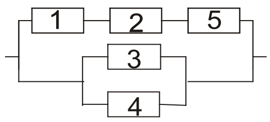
1. 

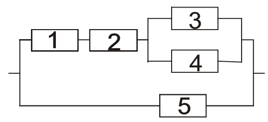
2. 

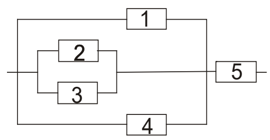
3. 

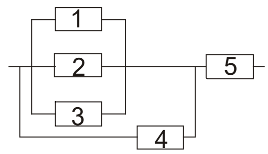
4. 

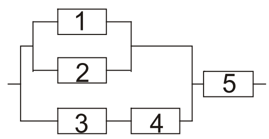
5. 

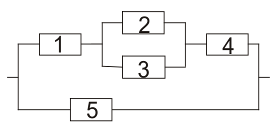
6. 

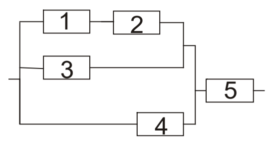
7. 

8. 

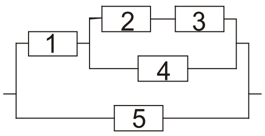
9. 

10. 

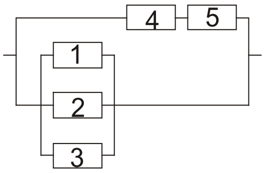
11. 

12. 

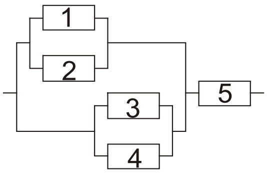
13.



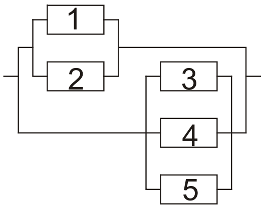
14.



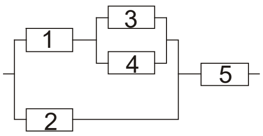
15.



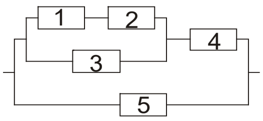
16.



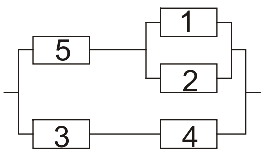
17.



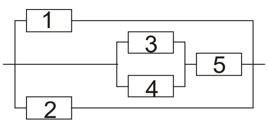
18.



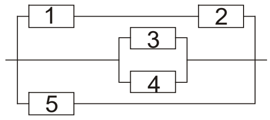
19.



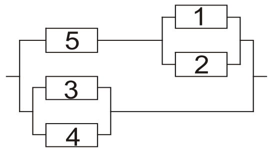
20.



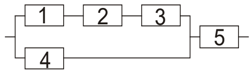
21.



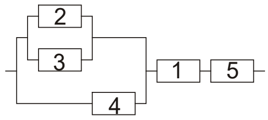
22.



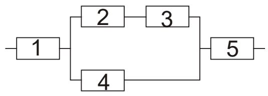
23.



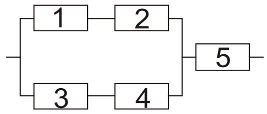
24.



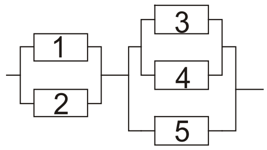
25.



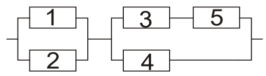
26.



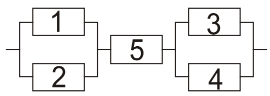
27.



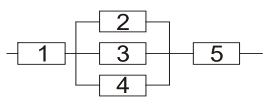
28.



29.



30.



Задача 3

Игра междуA и B ведется на следующих условиях: первый ход всегда делает A, он может выигрывать с вероятностью p_1,если A выигрывает, то ход делает B и может выигрывать с вероятностью q_1. ЕслиB не выигрывает, то A делает второй ход, который может привести к его выигрышу с вероятностью q_2. ЕслиA вторым ходом проигрывает, то победителем считается B. Найти вероятность выигрыша для A и для B.

№ п/п	p_1	q_2	q_1
1	0,4	0,5	0,8
2	0,5	0,4	0,7
3	0,3	0,5	0,9
4	0,9	0,7	0,9
5	0,2	0,5	0,8
6	0,8	0,9	0,6
7	0,7	0,6	0,5
8	0,1	0,3	0,7
9	0,3	0,3	0,1
10	0,8	0,5	0,3
11	0,5	0,7	0,6
12	0,2	0,5	0,7
13	0,7	0,8	0,9
14	0,6	0,5	0,2
15	0,3	0,4	0,8

№ п/п	p_1	q_2	q_1
16	0,1	0,3	0,9
17	0,4	0,3	0,6
18	0,7	0,1	0,9
19	0,2	0,5	0,7
20	0,3	0,5	0,6
21	0,9	0,8	0,7
22	0,4	0,6	0,8
23	0,2	0,3	0,8
24	0,3	0,5	0,1
25	0,9	0,7	0,6
26	0,1	0,4	0,3
27	0,7	0,2	0,5
28	0,5	0,3	0,2
29	0,1	0,6	0,4
30	0,4	0,3	0,6

Задача 4

А. На складе готовой продукции находитсяnизделий, среди которых k – высшего качества. Наудачу выбирают mизделий. Найти вероятность того, что среди них lизделий высшего качества.

1. n=7, k=4, m=2, l=7
2. n=14, k=8, m=4, l=2
3. n=14, k=7, m=5, l=3
4. n=7, k=5, m=3, l=2
5. n=6, k=4, m=5, l=1
6. n=12, k=8, m=6, l=4
7. n=12, k=6, m=4, l=2
8. n=9, k=6, m=3, l=1
9. n=9, k=7, m=5, l=3
10. n=8, k=4, m=3, l=1
11. n=8, k=6, m=3, l=2
12. n=10, k=6, m=4, l=3
13. n=10, k=5, m=3, l=2
14. n=10, k=4, m=5, l=2
15. n=10, k=6, m=4, l=2

Б. Из n аккумуляторов за год хранения k выходят из строя. Наудачу выбирают m аккумуляторов. Определить вероятность того, что среди них l исправных.

16. n=100, k=9, m=7, l=4
17. n=100, k=8, m=6, l=3
18. n=100, k=7, m=5, l=3
19. n=100, k=6, m=4, l=2
20. n=80, k=5, m=3, l=1
21. n=80, k=10, m=7, l=4
22. n=80, k = 9, m = 6, l = 3
23. n =80, k = 8, m = 5, l = 2
24. n=80, k=7, m=5, l=3
25. n=80, k=6, m=4, l=2
26. n=80, k=5, m=3, l=2
27. n=80, k=4, m=3, l=2
28. n=90, k=10, m=6, l=2
29. n=90, k=20, m=6, l=3
30. n=90, k=10, m=6, l=2

Задача 5

А. На складе находится n_1 изделий, изготовленных на заводе № 1, n_2 изделий – на заводе № 2, n_3 – на заводе № 3. Вероятность того, что деталь, изготовленная на заводе № 1, высшего качества, равна p_1. Для деталей, изготовленных на заводах № 2 и № 3, эти вероятности равны p_2 и p_3. Найти вероятность того, что при проверке наудачу взятая деталь окажется высшего качества. При проверке взятая деталь оказалась высшего качества. Какова вероятность того, что она была изготовлена на заводе № 2?

1	$n_1 = 10$	$n_2 = 12$	$n_3 = 18$	$p_1 = 0{,}7$	$p_2 = 0{,}8$	$p_3 = 0{,}6$
2	$n_1 = 12$	$n_2 = 24$	$n_3 = 14$	$p_1 = 0{,}9$	$p_2 = 0{,}7$	$p_3 = 0{,}9$
3	$n_1 = 8$	$n_2 = 18$	$n_3 = 22$	$p_1 = 0{,}8$	$p_2 = 0{,}9$	$p_3 = 0{,}6$
4	$n_1 = 20$	$n_2 = 22$	$n_3 = 12$	$p_1 = 0{,}5$	$p_2 = 0{,}6$	$p_3 = 0{,}8$
5	$n_1 = 24$	$n_2 = 20$	$n_3 = 16$	$p_1 = 0{,}6$	$p_2 = 0{,}8$	$p_3 = 0{,}5$
6	$n_1 = 14$	$n_2 = 16$	$n_3 = 20$	$p_1 = 0{,}8$	$p_2 = 0{,}9$	$p_3 = 0{,}7$
7	$n_1 = 14$	$n_2 = 17$	$n_3 = 19$	$p_1 = 0{,}6$	$p_2 = 0{,}9$	$p_3 = 0{,}9$
8	$n_1 = 20$	$n_2 = 18$	$n_3 = 12$	$p_1 = 0{,}9$	$p_2 = 0{,}7$	$p_3 = 0{,}8$
9	$n_1 = 16$	$n_2 = 18$	$n_3 = 10$	$p_1 = 0{,}8$	$p_2 = 0{,}7$	$p_3 = 0{,}6$
10	$n_1 = 10$	$n_2 = 12$	$n_3 = 20$	$p_1 = 0{,}7$	$p_2 = 0{,}8$	$p_3 = 0{,}9$
11	$n_1 = 20$	$n_2 = 14$	$n_3 = 18$	$p_1 = 0{,}9$	$p_2 = 0{,}8$	$p_3 = 0{,}8$
12	$n_1 = 18$	$n_2 = 12$	$n_3 = 16$	$p_1 = 0{,}8$	$p_2 = 0{,}8$	$p_3 = 0{,}7$
13	$n_1 = 12$	$n_2 = 20$	$n_3 = 18$	$p_1 = 0{,}9$	$p_2 = 0{,}6$	$p_3 = 0{,}9$
14	$n_1 = 8$	$n_2 = 10$	$n_3 = 10$	$p_1 = 0{,}7$	$p_2 = 0{,}8$	$p_3 = 0{,}6$
15	$n_1 = 10$	$n_2 = 8$	$n_3 = 10$	$p_1 = 0{,}5$	$p_2 = 0{,}6$	$p_3 = 0{,}7$

В. Две перфораторщицы набили на разных перфораторах по одинаковому комплекту перфокарт. Вероятность того, что первая перфораторщица допустила ошибку, равна p_1, что вторая – p_2. Какова вероятность того, что при проверке наудачу взятая перфокарта оказалась с ошибкой? Какова вероятность того, что эта перфокарта была набита первой перфораторщицей?

16	$n_1 = 0{,}05$	$n_2 = 0{,}2$	17	$p_1 = 0{,}25$	$p_2 = 0{,}15$
18	$n_1 = 0{,}15$	$n_2 = 0{,}1$	19	$p_1 = 0{,}1$	$p_2 = 0{,}5$
20	$n_1 = 0{,}8$	$n_2 = 0{,}1$	21	$p_1 = 0{,}9$	$p_2 = 0{,}8$
22	$n_1 = 0{,}9$	$n_2 = 0{,}7$	23	$p_1 = 0{,}9$	$p_2 = 0{,}6$
24	$n_1 = 0{,}6$	$n_2 = 0{,}9$	25	$p_1 = 0{,}7$	$p_2 = 0{,}9$
26	$n_1 = 0{,}8$	$n_2 = 0{,}7$	27	$p_1 = 0{,}9$	$p_2 = 0{,}8$
28	$n_1 = 0{,}3$	$n_2 = 0{,}2$	29	$p_1 = 0{,}1$	$p_2 = 0{,}3$
30	$n_1 = 0{,}6$	$n_2 = 0{,}4$			

Задача 6

А. Прибор состоит из n узлов. Вероятность безотказной работы в течение гарантийного срока для каждого узла одинакова и равна p. Выход из строя узлов независим друг от друга. Найти вероятность того, что в указанный срок откажут два узла, не менее двух узлов.

1	$n = 10$	$p = 0{,}8$	2	$n = 6$	$p = 0{,}9$
3	$n = 10$	$p = 0{,}6$	4	$n = 5$	$p = 0{,}8$
5	$n = 7$	$p = 0{,}8$	6	$n = 7$	$p = 0{,}7$
7	$n = 4$	$p = 0{,}9$	8	$n = 5$	$p = 0{,}9$
9	$n = 8$	$p = 0{,}8$	10	$n = 8$	$p = 0{,}6$
11	$n = 4$	$p = 0{,}7$	12	$n = 6$	$p = 0{,}6$
13	$n = 4$	$p = 0{,}8$	14	$n = 8$	$p = 0{,}7$
15	$n = 8$	$p = 0{,}9$			

Б. Вычислительное устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность отказа каждого элемента на смену равна p. Найти вероятность того, что за смену откажут m элементов.

16	$m = 6$	$p = 0{,}024$	17	$m = 2$	$p = 0{,}005$
18	$m = 2$	$p = 0{,}002$	19	$m = 3$	$p = 0{,}0025$
20	$m = 6$	$p = 0{,}022$	21	$m = 5$	$p = 0{,}0015$
22	$m = 4$	$p = 0{,}002$	23	$m = 4$	$p = 0{,}021$

В. Тираж книги – 5000 экземпляров. Вероятность того, что в книге имеется дефект брошюровки, равна р. Найти вероятность того, что тираж содержит mправильно сброшюрованных книг.

24	$m = 6$	$p = 0{,}002$	25	$m = 8$	$p = 0{,}0006$
26	$m = 5$	$p = 0{,}0001$	27	$m = 10$	$p = 0{,}001$
28	$m = 7$	$p = 0{,}0001$	29	$m = 9$	$p = 0{,}0003$
30	$m = 10$	$p = 0{,}002$			

Задача 7

А. Бригада рабочих за смену изготовляет n деталей. Вероятность того, что каждая изготовленная деталь высшего качества, равна p. Какова вероятность того, что за смену изготовлено m деталей высшего качества?

1	n=725	p=0,75	m=525
2	n=750	p=0,6	m=625
3	n=625	p=0,8	m=570
4	n=150	p=0,6	m=75
5	n=400	p=0,9	m=165
6	n=225	p=0,8	m=165
7	n=192	p=0,75	m=150
8	n=245	p=0,25	m=70
9	n=625	p=0,65	m=370
10	n=600	p=0,6	m=375
11	n=300	p=0,75	m=240
12	n=400	p=0,9	m=372
13	n=400	p=0,8	m=330
14	n=800	p=0,4	m=600
15	n=800	p=0,5	m=650

Б. При установившемся технологическом процессе завод выпускает в среднем p,%, продукции зернового сорта. Какова вероятность того, что в партии из n изделий, прошедших через отдел технического контроля, количество изделий первого сорта будет не менее m_1 и не более m_2?

16	n = 725	p = 65	m_1 = 620	m_2 = 680
17	n = 1000	p = 70	m_1 = 652	m_2 = 760
18	n = 625	p = 64	m_1 = 400	m_2 = 450
19	n = 300	p = 45	m_1 = 75	m_2 = 90
20	n = 225	p = 25	m_1 = 45	m_2 = 60
21	n = 400	p = 30	m_1 = 190	m_2 = 215
22	n = 625	p = 36	m_1 = 225	m_2 = 255
23	n = 300	p = 75	m_1 = 215	m_2 = 225
24	n = 600	p = 40	m_1 = 210	m_2 = 252
25	n = 400	p = 90	m_1 = 345	m_2 = 372
26	n = 100	p = 80	m_1 = 72	m_2 = 84
27	n = 150	p = 60	m_1 = 78	m_2 = 96
28	n = 200	p = 65	m_1 = 0	m_2 = 50
29	n = 400	p = 55	m_1 = 100	m_2 = 300
30	n = 400	p = 60	m_1 = 50	m_2 = 100

Задача 8

А. Вычислительное устройство состоит из n независимо работающих элементов. Вероятность выхода из строя каждого элемента одинакова и равна р. Составить закон распределения случайной величины ξ – числа отказавших элементов. Построить график функции распределения F(x). Найти M (ξ) и D(ξ).

1	n = 2	p = 0,4	2	n = 3	p = 0,12
3	n = 4	p = 0,15	4	n = 2	p = 0,3
5	n = 2	p = 0,25	6	n = 3	p = 0,75
7	n = 3	p = 0,4	8	n = 4	p = 0,2
9	n = 4	p = 0,1	10	n = 3	p = 0,15
11	n = 3	p = 0,2	12	n = 2	p = 0,2
13	n = 2	p = 0,1	14	n = 3	p = 0,1
15	n = 4	p = 0,5			

Б. При обработке деталей на станке-автомате вероятность выхода размеров обработанных деталей за границы «допуска» постоянна и равна р. Для контроля качества отбирают n деталей. Построить график функции распределения F(x) случайной величины ξ – числа нестандартных деталей. Найти M (ξ), D(ξ). Определить наивероятнейшее число нестандартных изделий.

16	$n = 5$	$p = 0{,}1$	17	$n = 5$	$p = 0{,}15$
18	$n = 2$	$p = 0{,}2$	19	$n = 3$	$p = 0{,}25$
20	$n = 4$	$p = 0{,}15$	21	$n = 4$	$p = 0{,}1$
22	$n = 3$	$p = 0{,}2$	23	$n = 4$	$p = 0{,}2$
24	$n = 3$	$p = 0{,}15$	25	$n = 3$	$p = 0{,}1$
26	$n = 2$	$p = 0{,}1$	27	$n = 2$	$p = 0{,}15$
28	$n = 4$	$p = 0{,}2$	29	$n = 6$	$p = 0{,}1$
30	$n = 5$	$p = 0{,}2$			

Задача 9

Задана плотность распределения вероятностей $f(x)$. Определить коэффициент a, функцию распределения $F(x)$, M (ξ), D(ξ), вероятность попадания случайной величины ξ в интервал $\{\text{a}, \beta\}$. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

1. $\alpha=0,\ \beta=\frac{1}{2}, f(x) = \begin{cases} (a-x)^2, x \in [-1{,}1] \\ 0, \quad x \notin [-1{,}1] \end{cases}$

2. $\alpha=\frac{\pi}{2},\ \beta=\frac{3\pi}{4}, f(x) = \begin{cases} a\sin 2x\,, x \in [\frac{\pi}{2}, 1] \\ 0, \quad x \notin \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}.$

3. $\alpha=1,\ \beta=2, f(x) = \begin{cases} a(x+1), x \in [0{,}3] \\ 0, \quad x \notin [0{,}3] \end{cases}$

4. $\alpha=2,\ \beta=3, f(x) = \begin{cases} a, \quad x \in [1{,}4] \\ 0, \quad x \notin [1{,}4] \end{cases}$

5. $\alpha=0,\ \beta=\frac{\pi}{4}, f(x) = \begin{cases} a\cos x\,, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ 0, \quad x \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$

6. $\alpha=\frac{1}{4},\ \beta=\frac{1}{2}, f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1, \ x \in [0.1] \\ 0, \quad x \notin [0{,}1] \end{cases}.$

7. $\alpha=0,\ \beta=\frac{1}{6}, f(x) = \begin{cases} ax + 2, x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0, \quad x \notin [0, \frac{1}{3}] \end{cases}$

8. α=2, β=2.5, $f(x) = \begin{cases} ax^2, & x \in [2,3] \\ 0, & x \notin [2,3] \end{cases}$

9. α=2, β=3, $f(x) = \begin{cases} a, & x \in [2,6] \\ 0, & x \notin [2,6] \end{cases}$

10. α=2, β=−2.5, $f(x) = \begin{cases} a(x-2), & x \in [2,3] \\ 0, & x \notin [2,3] \end{cases}$

11. α=4, β=4,5, $f(x) = \begin{cases} a(x-4), & x \in [4,5] \\ 0, & x \notin [4,5] \end{cases}$

12. α=0, β=$\frac{\pi}{2}$, $f(x) = \begin{cases} a\, cosx, & x \in [0, \frac{\pi}{6}] \\ 0, & x \notin [0, \frac{\pi}{6}] \end{cases}$

13. α=2, β=2,5, $f(x) = \begin{cases} a, & x \in [2,3] \\ 0, & x \notin [2,3] \end{cases}$

14. α=0, β=$\frac{1}{2}$, $f(x) = \begin{cases} ax^2, & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases}$

15. α=0, β=$\frac{\pi}{2}$, $f(x) = \begin{cases} a\, sinx\, \frac{2}{3}, & x \in [0, \frac{3\pi}{2}] \\ 0, & x \notin [0, \frac{3\pi}{2}] \end{cases}$

16. α=0, β=$\frac{\pi}{6}$, $f(x) = \begin{cases} ax+2, & x \in [0, \frac{1}{3}] \\ 0, & x \notin [0, \frac{1}{3}] \end{cases}$

17. α=0, β=$\frac{\pi}{4}$, $f(x) = \begin{cases} a\, sinx, & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 0, & x \notin [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$

18. α=$-\frac{\pi}{2}$, β=$-\frac{a}{2}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{n^2 r^2}}, & |x| < a \\ 0, & |x| \geq a \end{cases}$

19. α=2, β=2,5, $f(x) = \begin{cases} a(x-2), & x \in [2,3] \\ 0, & x \notin [2,3] \end{cases}$

20. α=0, β=$\frac{1}{2}$, $f(x) = \begin{cases} ax, & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases}$

21. α=0, β=2, $f(x) = \begin{cases} a(3x-x^2), & x \in [0,3] \\ 0, & x \notin [0,3] \end{cases}$

22. α=0, β=1,5, $f(x) = \begin{cases} a(x-1), & x \in [1,2] \\ 0, & x \notin [1,2] \end{cases}$

23. α=0, β=$\frac{\pi}{4}$, $f(x) = \begin{cases} a\, cosx, & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 0, & x \notin [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$

24. α=0, β=$\frac{\pi}{6}, f(x) = \begin{cases} a\, sin3x, x \in [0, \frac{\pi}{3}] \\ 0, \quad\quad x \notin [0, \frac{\pi}{3}] \end{cases}$

25. α=0, β=$\frac{\pi}{6}, f(x) = \begin{cases} a\, sin2x, x \in [0, \frac{\pi}{4}] \\ 0, \quad\quad x \notin [0, \frac{\pi}{4}] \end{cases}$

26. α=0, β=$1, f(x) = \begin{cases} ax, \ x \in [0,2] \\ 0, \quad x \notin [0,2] \end{cases}$

27. α=1, β=$2, f(x) = \begin{cases} ax^2, \ x \in [-2,2] \\ 0, \quad x \notin [-2,2] \end{cases}$

28. α=-1, β=$-1, f(x) = \begin{cases} ax^4, \ x \in [-3,3] \\ 0, \quad x \notin [-3,3] \end{cases}$

29. α=1, β=$3, f(x) = \begin{cases} a(x+4), \ x \in [-3,3] \\ 0, \quad\quad x \notin [-3,3] \end{cases}$

30. α=0, β=$1, f(x) = \begin{cases} a(x+3), \ x \in [-2,2] \\ 0, \quad\quad x \notin [-2,2] \end{cases}$

Задача 10

Завод выпускает детали, стандартная длина которыхa мм. Рассмотрим длину со средним квадратическим отклонением σ и математическим ожиданием a. Определить:

1) вероятность того, что длина наудачу выбранной детали будет больше α и меньше β;

2) вероятность отклонения длины детали от стандартного размера, а больше, чем b мм.

1	a = 2,5	σ = 1	α = 0	β = 2	δ = 3
2	a = 6	σ = 3	α = 0	β = 5	δ = 2
3	a = 2,5	σ = 2	α = 0,5	β = 1,5	δ = 2
4	a = 15	σ = 2	α = 7	β = 9	δ = 3
5	a = 2	σ = 1	α = 0,5	β = 1	δ = 2
6	a = 18	σ = 3	α = 10	β = 24	δ = 2
7	a = 36	σ = 6	α = 28	β = 42	δ = 3
8	a = 64	σ = 8	α = 60	β = 70	δ = 5
9	a = 18	σ = 8	α = 12	β = 27	δ = 1,5
10	a = 26	σ = 6	α = 20	β = 30	δ = 2
11	a = 40	σ = 4	α = 32	β = 42	δ = 4

Окончание таблицы

12	$a = 27$	$\sigma = 3$	$\alpha = 20$	$\beta = 25$	$\delta = 2{,}5$
13	$a = 65$	$\sigma = 8$	$\alpha = 50$	$\beta = 70$	$\delta = 4$
14	$a = 28$	$\sigma = 9$	$\alpha = 20$	$\beta = 32$	$\delta = 3$
15	$a = 46$	$\sigma = 9$	$\alpha = 35$	$\beta = 55$	$\delta = 3$
16	$a = 55$	$\sigma = 8$	$\alpha = 40$	$\beta = 60$	$\delta = 3{,}6$
17	$a = 12$	$\sigma = 6$	$\alpha = 4$	$\beta = 15$	$\delta = 1{,}2$
18	$a = 14$	$\sigma = 8$	$\alpha = 6$	$\beta = 17$	$\delta = 2$
19	$a = 10$	$\sigma = 4$	$\alpha = 2$	$\beta = 15$	$\delta = 1{,}5$
20	$a = 25$	$\sigma = 6$	$\alpha = 20$	$\beta = 27$	$\delta = 1$
21	$a = 40$	$\sigma = 6$	$\alpha = 34$	$\beta = 43$	$\delta = 1{,}5$
22	$a = 45$	$\sigma = 5$	$\alpha = 40$	$\beta = 48$	$\delta = 3$
23	$a = 35$	$\sigma = 4$	$\alpha = 27$	$\beta = 37$	$\delta = 2$
24	$a = 10$	$\sigma = 8$	$\alpha = 8$	$\beta = 16$	$\delta = 0{,}5$
25	$a = 30$	$\sigma = 3$	$\alpha = 24$	$\beta = 33$	$\delta = 1{,}5$
26	$a = 48$	$\sigma = 4$	$\alpha = 45$	$\beta = 56$	$\delta = 3$
27	$a = 60$	$\sigma = 6$	$\alpha = 54$	$\beta = 70$	$\delta = 2$
28	$a = 36$	$\sigma = 8$	$\alpha = 30$	$\beta = 40$	$\delta = 2$
29	$a = 20$	$\sigma = 3$	$\alpha = 17$	$\beta = 26$	$\delta = 1{,}5$
30	$a = 50$	$\sigma = 5$	$\alpha = 45$	$\beta = 52$	$\delta = 3$

Задача 11

Задана дискретная двухмерная случайная величина$\delta = (\xi,\eta)$. Найти коэффициент корреляции r.

1)

η	ξ		
	0,2	0,6	0,9
2	0,1	0,3	0,12
4	0,07	0,28	0,13

2)

η	ξ		
	2	4	5
1	0,25	0,08	0,21
1,5	0,16	0,08	0,21

3)

η	ξ		
	1	2	5
0,3	0,22	0,1	0,17
0,6	0,06	0,27	0,18

4)

η	ξ		
	3	5	6
2	0,18	0,12	0,33
6	0,2	0,08	0,09

5)

η	ξ		
	2	3	5
5	0,1	0,15	0,25
7	0,25	0,1	0,15

6)

η	ξ		
	6	9	10
0,1	0,15	0,1	0,25
0,3	0,1	0,25	0,15

7)

η	ξ		
	0,5	0,9	1,1
2	0,1	0,13	0,26
5	0,12	0,07	0,32

8)

η	ξ		
	1	3	6
0,8	0,1	0,09	0,2
1,1	0,16	0,2	0,25

9)

η	ξ		
	1	2	4
0,5	0,09	0,06	0,22
0,7	0,33	0,12	0,18

10)

η	ξ		
	2	3	6
0,2	0,13	0,21	0,07
0,7	0,32	0,1	0,17

11)

η	ξ		
	0,2	0,4	0,7
2	0,1	0,15	0,25
5	0,25	0,1	0,15

12)

η	ξ		
	1	3	5
0,2	0,13	0,21	0,07
0,9	0,32	0,1	0,17

13)

η	ξ		
	0,1	0,3	0,6
2	0,16	0,2	0,09
4	0,25	0,2	0,1

14)

η	ξ		
	6	9	11
0,1	0,32	0,12	0,13
0,3	0,07	0,26	0,1

15)

η	ξ		
	0,5	0,9	1,1
2	0,18	0,12	0,35
6	0,22	0,06	0,07

16)

η	ξ		
	3	5	6
1	0,1	0,15	0,25
2	0,25	0,1	0,35

17)

η	ξ		
	2	4	5
0,5	0,1	0,17	0,06
0,7	0,27	0,18	0,22

18)

η	ξ		
	2	3	6
2	0,06	0,27	0,18
5	0,22	0,1	0,17

19)

η	ξ		
	1	3	4
0,4	0,13	0,21	0,7
0,8	0,32	0,1	0,17

20)

η	ξ		
	3	5	6
3	0,16	0,2	0,09
5	0,25	0,2	0,1

21)

η	ξ		
	0,5	0,9	1,1
1	0,21	0,16	0,08
3	0,25	0,17	0,13

22)

η	ξ		
	1	3	5
0,2	0,18	0,12	0,35
0,9	0,2	0,06	0,09

23)

η	ξ		
	6	9	21
2	0,1	0,15	0,25
5	0,25	0,1	0,25

24)

η	ξ		
	0,1	0,3	0,6
2	0,06	0,27	0,18
6	0,22	0,1	0,17

25)

η	ξ		
	0,2	0,4	0,7
2	0,18	0,12	0,33
4	0,2	0,08	0,09

26)

η	ξ		
	3	5	6
0,1	0,32	0,12	0,13
0,3	0,07	0,26	0,1

27)

η	ξ		
	2	3	6
0,5	0,06	0,27	0,18
0,7	0,22	0,1	0,17

28)

η	ξ		
	1	3	4
2	0,21	0,16	0,08
5	0,25	0,17	0,13

29)

η	ξ		
	0,2	0,6	1
3	0,13	0,21	0,07
5	0,32	0,1	0,17

30)

η	ξ		
	2	4	5
0,4	0,1	0,15	0,25
0,8	0,25	0,1	0,15

Глава 3
ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

Математическая статистика – это прикладная статистическая дисциплина, которая базируется на понятиях и методах теории вероятностей. Любая математическая теория рассматривает некоторые модели,с помощью которых описывает реальные явления. Статистические модели используют факты и теории из теории вероятностей, основы которой изложены в предыдущей главе.

Математические модели случайных явлений, изучаемых в теории вероятностей, основаны на понятии пространства элементарных событий Ω,случайных событиях, вероятностях P, случайных величинах ξ.Но на практике при изучении конкретного эксперимента перечисленные объекты не бывают известны полностью. Исследователь располагает только какой-то частью информации, полученной во время наблюдений или проведения некоторых измерений. Поэтому задача математической статистики состоит в том, чтобы по определенному объему информации восстановить те закономерности, которыми обладает случайное явление.

3.1. Основные понятия и определения

Определение.*Статистической гипотезой называется любое утверждение о свойствах, параметрах, виде распределения наблюдаемых в эксперименте случайных величин.*

Такие утверждения делаются на основании статистических исследований, теоретических соображений, эмпирических наблюдений.

Если для исследуемой случайной величины сформулирована определенная гипотеза, то ее называют основной, или нулевой, и обозначают H_0. Гипотеза, которая противоречит нулевой гипотезе, называется конкурирующей, или альтернативной, и обозначается H_1.

Если нулевая гипотеза сформулирована, то, очевидно, нужно построить, определить такое правило, которое позволяло бы по результатам статистических данных принять или отклонить гипотезу H_0.

Определение.*Правило, согласно которому проверяемая гипотеза* H_0 *принимается или отвергается, называется статистическим критерием проверки гипотезы* H_0.

Разработка таких критериев (правил) из математического обоснования является предметом теории проверки статистических гипотез. Статистические критерии проверки гипотез называют еще критериями согласия, так как они всегда основаны на том условии, что выдвинутая гипотеза должна согласоваться с имеющимися статистическими данными.

3.2. Критерии согласия и их основные характеристики

Рассмотрим общий метод построения критерия согласия.Пусть изучается некоторая случайная величина ξ. В результате статистических исследований получена выборка $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ относительно свойств случайной величины выдвинутой гипотезы H_0.

Определение.*Статистической называют функцию, зависящую только от выборки X.*

Ясно, что любая статистика есть случайная величина.Дляпостроения критерия проверки H_0 действуют по следующему алгоритму:

1. Ищут статистику $T = T(X)$, которая характеризует отклонение эмпирических данных от соответствующих гипотетических значений. То есть это статистикаT является мерой близости данных, что получены при измерении, и значений, которые могут быть вычислены из теоретических предположений.

2. Если такую статистику $T = T(X)$нашли, то ищут ее распределение (точно или приближенно) в случае справедливости H_0.

3. Пусть такое распределение в статистике при гипотезе H_0 найдено.Обозначим$\tau = \{t \mid t = T(X)\}$ – множество всех возможных значений T. Множество τ разбивают на два непересекающихся подмножества: $\tau = \tau_\alpha \cup \tau_{1-\alpha}, \tau_\alpha \cap \tau_{1-\alpha} = \emptyset$.Выбор τ_αосуществляется по правилу $P(T(X) \in \tau_\alpha) \leq \alpha$.

4. Правило проверки H_0 (критерий согласия): пусть X – наблюдавшаяся реализация случайной величины $\xi, t = T(X)$ – соответствующее значение статистики T. Если $t \in \tau_{\mathcal{L}}$, то в предположении спра-

ведливости H_0 произошло маловероятное событие, и эта гипотеза должна быть отвергнута как противоречащая статистическим данным.Если$t \notin \tau_\alpha$, то нет оснований отвергать гипотезу, и можно считать, что наблюдение не противоречит гипотезе. Отметим, что факт $t \in \tau_{1-\alpha}$ не является доказательством истинности гипотезы H_0, только свидетельствует о том, что опытные данные и теоретические предположения достаточно хорошо согласованы на уровнеα.

Определение.*Будем называть αуровнем значимости критерия, если α– вероятность ложного отклонения гипотезы H_0, то есть вероятность ошибочного решения в ситуации, когда H_0истина.*

Обычно αвыбирают равной 0,1; 0,05; 0,01 и т. д., т. е. в зависимости от того, какого рода решается задача и какого рода риски возникают в случае ошибочного решения. Для проверки одной и той же гипотезы H_0 можно строить различные критерии согласия.

3.3. Проверка гипотезы однородности распределения

Пусть изучается некоторый процесс или явление, которое описывается некоторой характеристикой. Но измерение могут проводиться или в разное время, или в различных условиях. Нужно установить, влияют ли эти различия на процесс или явления в целом. Например, если выпускается некоторая продукция на завод, то влияет ли на ее качество то, в какую смену она произведена. Но с точки зрения статистики это означает, что качество продукции–это разные случайные величины в зависимости от смены. И если смены работают одинаково качественно, то, очевидно, законы распределения этих случайных величин должны совпадать. Такие случайные величины называют однородными.

Постановка задач. Пусть изучаются две случайные величины ξ_1и ξ_2. Для каждой из них получены выборки X_1и X_2. Требуется проверить гипотезу однородности

$$H_0: F_{\xi_1}(X) = F_{\xi_2}(X).$$

Замечание. Функции распределения не известны, и в данной задаче их конкретный вид неважен.

Рассмотрим универсальный критерий однородности χ^2-квадрат, который используется и для дискретных, и для непрерывных случайных величин.

Итак, пусть имеется две выборки:X_1– объемом n_1, X_2 – объемом n_2. В каждой выборке наблюдается фиксированный признак (какая-то характеристика процесса), поэтому некоторые значения в выборке могут совпадать. Пусть s – число различных значений. Обозначим n_{ij} – число реализаций i-го значения в j-й выборке. Понятно, что $\sum_{i=1}^{s} n_{ij} = n_j,\ j = 1,2$.Строим статистику критерия в следующем виде:

$$\chi_H^2(n) = n\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{2}\frac{n_{ij}^2}{n_j m_i} - 1\right),$$

где$n = n_1 + n_2$,$n_{i1} + n_{i2} = m_i$–общее число -го значения в двух выборках.

Точное распределение статистики $\chi_H^2(n)$ вычислить сложно, но при больших объемах n_1и n_2это распределение относится к распределениюχ^2, т. е.справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть $n \to \infty$ и s – ограничено, тогда распределение случайной величины$\chi_H^2(n)$сходится к распределению $\chi^2(s-1)$, где $(s-1)$– число степени свободыχ^2.

Доказательство теоремы можно найти в [4].

Выберем теперь уровеньзначимостиα и определим квантиль порядка $1-\alpha$ распределения $\chi^2(s-1)$, который обозначимχ^2 критерия,χ^2критерий задает критическую область для гипотезы H_0..

Тогда, согласно критерию однородности χ^2,еслистатистика$\chi_{H_0}^2(n) > \chi^2$критерия, то гипотезу H_0отвергают, в противном случаеH_0не противоречит статистическим наблюдениям.

3.4. Проверка гипотезы в виде распределения

Постановка задачи. Пусть изучается случайнаявеличина ξ, функция распределения которой не известна. В результате статистического эксперимента получена выборка $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Выдвигается простая гипотеза H_0: $F_\xi(x) = F(x)$, т. е. мы предполагаем, что случайная величина ξ имеет однозначно определенное распределение$F(x)$. Требуется проверить эту гипотезу.

Наиболее известным критерием проверки таких гипотез является критерий Пирсона, или его называют еще критериемχ^2- квадрат(записывают критерий x^2). Этим критерием можно пользоваться как для дискретных случайных величин, так и для непрерывных.

Пусть выборка *X*представлена:

а) для дискретной случайной величины ξточечным вариационным рядом:

ξ	x_1	x_2	…..	x_k
n_i	n_1	n_2	…..	n_k

б) для непрерывной случайной величины ξинтервальным вариационным рядом:

ξ	$[x_0, x_1)$	$[x_1, x_2)$	…..	$[x_{k\cdot 1}, x_k)$
n_i	n_1	n_2	…..	n_k

В обоих случаях объем выборки$n = \sum_{i=1}^{k} n_i$.

Обозначим черезp_iтеоретические вероятности, которые вычисляются соответственно тому закону распределения, который указан в гипотезе H_0. Если ξ дискретна, то $p_i = P(\xi = x_i)$. Еслиξнепрерывна, то $p_i = P(\xi \in [x_{i-1}, x_i))$.

Зададим меру близости между имеющимися измерениями и теоретическим распределением, т. е. построим статистику в следующем виде:

$$\chi^2_{H_0}(n) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}.$$

Точное распределение статистики $X^2_{H_0}(n)$ вычислить сложно, но при больших объемах выборки n это распределение сходится к распределению $X^2\,(k-1)$, где $k-1$ – число степенной свободы, независимо от гипотезы H_0, т. е. справедлива следующая теорема.

Теорема.Если для любого $i = 1, 2, \dots, k, 0 < \mathrm{p_i} < 1$, то для любой H_0при$n \to \infty$ распределение случайной величины $\chi^2_{H_0}(n)$ сходится краспределению $\chi^2\,(k-1)$, где $(k-1)$– число степенной свободы.

Доказательство теоремы можно найти в[4].

Так как распределение $X^2\,(k)$ часто применяется, то для него составлены таблицы по 2 параметрам: числу степенной свободы к уровнюзначимостиα.

На практике предельное распределение $\chi^2\,(k)$ можно использовать с хорошим приближением уже при $n > 50$ и $n_{\mathrm{i}} \geq 5$ для $i = 1, 2, \dots, k$.

Если гипотетическая функция распределения $F(x)$ содержит mнеизвестных параметров, то вместо них используют их оценки, поэтому число степенной свободы предельного распределения χ^2-квадрат будет равно $k - m - 1$.

Выберем теперь уровень значимости $\mathcal{L}$и определим квантиль порядка $(1 - \mathcal{L})$ распределения $X^2\,(k - m - 1)$, который обозначим X^2 критерий.X^2 критерий задает критическую область для гипотезыH_0.Сформулируем критерий проверки гипотезы о виде распределения случайной величины ξ.

Пусть $n > 50$ и $n_{\mathrm{i}} \geq 5$ для $i = 1,2, \dots, k$,если статистика

$$\chi^2_{H_0}(n) \geq X^2\,(k - m - 1),$$

то гипотезу H_0 отвергают, в противном случае H_0 не противоречит статистическим наблюдениям.

Пример 1. В таблице приведены данные испытаний на отказ аппаратуры за 10000 часов работы.

Число отказов	0	1	2	3	4	5
Частота	427	235	72	21	1	1

Проверить гипотезу о том, что случайная величинаξ – число отказов имеет распределение Пуассона при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

Решение.Найдем объем выборки $n =$ 427+235+72+21+1+1 = 757.Выдвигаем гипотезу

$$H_0 \ : \ P\ (\xi \ = \ k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

где k = 0, 1, 2, … , при альтернативе $H_1 =$\{ H_0 неверна \}.Найдем оценку параметра λ. Известно, что λ = $M\xi$, поэтому

$$\lambda \approx \frac{1}{n}\sum_{\mathrm{k}=0}^{5} k\, n_k = \frac{1}{757}(0\ \cdot 427 + 1 + 235 + 2\ \cdot 72 + \\ +3\ \cdot 21 + 4\ \cdot 1 + 5\ \cdot 1)\ \approx\ 0{,}6.$$

Используя найденное приближенное λ, найдем теоретические вероятности по формуле $p_k = P(\xi = k) = \frac{(0{,}6)^k}{k!} e^{-0-\lambda}$,где $k =$ 0,1,2,3,4,5. Имеем $p_0 =$ 0,54981; $p_1 =$ 0,32929; $p_2 =$ 0,09872; $p_3 =$ 0,01976;$p_4 =$ = 0,00236; p_5 = 0,00036.Так как в пятом и шестом измерении частоты равны по 1, а нам нужно, чтобы они были не меньше 5, то объединим четвертое, пятое и шестое измерения, т. е. имеем следующую таблицу:

Число отказов	0	1	2	≥ 3
Частота	427	235	72	23

Теперь вычисляем статистику:

$$x^2_{H_0}(757) = \frac{(427-757\ \cdot 0{,}548)^2}{757\ \cdot 0{,}548} + + \frac{(235-757\ \cdot 0{,}329)^2}{757\ \cdot 0{,}329} + \frac{(72-757\ \cdot 0{,}98)^2}{757\ \cdot 0{,}98} + \\ + \frac{(23-757\ \cdot 0{,}023)^2}{757\ \cdot 0{,}023} \approx 3{,}316.$$

Зададим уровень значимости $\alpha = 0{,}05$. Здесь число степеней свободы будет равно $4 - 1 - 1 = 2$. Находим квантиль уровень $(1 -$

α) распределения $\chi^2(2)$ из таблиц, он равен 5,99. Значит, $x^2_{\text{крит.}} =$ 5,99. Так как $x^2_{H_0}(757) < x^2_{\text{крит.}}$, то гипотеза о распределении числа отказов по закону Пуассона принимается.

Пример 2. Произведена выборка 200 деталей из текущей продукции токарного автомата. Проверяемый размер деталей изменен с точностью до 1 мк. Ниже в таблице приведены отклонения от номинального размера, разбитые на интервалы, и частоты, соответствующие интервалам.

Интервал	(-20, -15)	(-15, -10)	(-10, -5)	(-5,0)	(0,5)	(5,10)	(10,15)	(15,20)	(20,25)	(25,30)
Частота	7	11	15	24	49	41	26	17	7	3

Оценить с помощью критерия χ^2гипотезу о согласии данных с законом нормального распределения при уровне значимости α = 0,05.Сформулируем проверяемую гипотезу

$$H_0: F(x) \in N(a, \sigma^2)$$

при альтернативе $H_1 = \{H_0 - \text{неверна}\}$. На основании эмпирических данных находим оценки параметров распределения a и σ^2:

$$a \approx \overline{X} = \frac{\left(\sum_{j=1}^{10} x_j^* \cdot n_j\right)}{n},$$

$$\sigma^2 \approx S^2 = \frac{\left(\sum_{j=0}^{10} (x_j^* - \overline{X})^2\right)}{n},$$

где x_j^*–середина -гоинтервала, j= 1, …, 10; n_j – частота j-гоинтервала; $\overline{\mathrm{X} =} 4{,}3; S^2 = 94{,}2;\ \ S = 9{,}71.$

Здесь объем выборки $n =$ 7+11+15+24+49+41+26+17+7+3= 200.Теоретические вероятностиp_j, попадания отклонения в интервалы (x_j, x_{j+1})вычислим по таблице значений функции Лапласа по формуле

$$p_{\mathrm{j}} = \Phi\left(\frac{x_j + 1 - \overline{\mathrm{X}}}{S}\right) - \Phi\left(\frac{x_j - \overline{\mathrm{X}}}{S}\right).$$

Вычисления удобно вести в таблице, указанной ниже, в которой также вычисляем np_jи $\chi^2_{H_0}(n)$.

j	x_j^*	z_j	$\Phi(z_j)$	p_j	np_j	$\frac{(n_j - np_\text{j})^2}{np_\text{j}}$
1	-17,5	-∞	-0,5	0,0239	4,78	1,04
2	-12,5	-1,99	-0,4761	0,0469	9,38	0,28
3	-7,5	-1,47	-0,4292	0,0977	19,54	1,05
4	-2,5	-0,96	-0,3315	0,1615	32,30	2,13
5	2,5	-0,44	-0,1700	0,1979	39,58	2,24
6	7,5	0,07	0,0279	0,1945	38,90	0,11
7	12,5	0,59	0,2224	0,1419	28,38	0,20
8	17,5	1,10	0,3643	0,0831	16,38	0,01
9	22,5	1,62	0,4474	0,0526	10,52	0,03
10	27,5	2,13	0,4843		200	
11	-	∞	0,5	-		

Здесь$z_j = (\frac{x_j - \overline{\text{X}}}{S})$, наименьшее значение $z_1 = -2{,}5$ заменяем на $-\infty$, наибольшее значение $z_{11} = 2{,}65$ заменяем на $+\infty$. Вычисляем наблюдаемое значение статистики:

$$x^2_{H_0}(200) = 7{,}09.$$

По числу интервалов kи числу параметров l определяем число степеней свободы: $k - l - 1 = 9 - 2\ - 1 = 6$, так как 9-й и 10-й интервалы мы объединили в один из-за малости$n_{10} = 3$.

По таблице критических точек распределения χ^2 находим$\chi^2_{\text{крит.}}$ $=$12,592.Так как$\chi^2_{H_0}(200)$ $<$12,592$=$ $\chi^2_{\text{крит.}}$, то гипотезаH_0о нормальном распределении не отвергается.

Замечание. Кроме критерияχ^2 существуют и другие критерии проверки гипотезы о виде распределения (например, см. [4]).

Задачи

1. Из таблицы случайных чисел выбраны 150 двухзначных чисел (включается и 00). Результаты выборки приведены в таблице:

Интервал	(0-9)	(-15, -10)	(-10, -5)	(-5,0)	(0,5)	(5,10)	(10,15)	(15,20)	(20,25)	(25,30)
Частота	16	15	19	13	14	19	14	11	13	16

Проверить, используя критерий x^2, гипотезу о согласии наблюдений с законом равномерного распределения при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

2. Результаты наблюдения за среднесуточной температурой в течение 320 суток приведены в таблице:

Интервал	(-40, -30)	(-30, -20)	(-30, -10)	(-10,0)	(0,10)	(10,20)	(20,30)	(30,40)	(40,50)	(50,60)
Частота	5	11	25	42	88	81	36	20	8	4

Проверить с помощью критерияχ^2, с каким из двух законов распределения – нормальным или Симпсона лучше согласуются данные наблюдения при уровне значимости $\alpha = 0{,}03$.

3.5. Проверка гипотезы о независимости распределений

Пусть изучаемые – две случайные величины. В некоторых задачах требуется определить, являются ли эти случайные величины зависимыми или нет.

Постановка задачи. Пусть имеется двумерная выборка (x,y) объема n из двумерного распределения случайного вектора (ξ, η), функция распределения которого $F_{\xi,\eta}(x,y)$ неизвестна. Требуется проверить гипотезу

$$H_0\colon F_{\xi,\eta}(x, y) = F_\xi(x)\cdot F_\eta(y),$$

где$F_\xi(x)$ – распределение случайной величины ξ;$F\eta(y)$ – распределение случайной величины η.

Пусть в выборке ξ принимает конечное число k различных значений, которые обозначим символами $a_1, a_2, ..., a_k$. А η принимает конечное число m различных значений, которые обозначим $b_1, b_2, ...,b_m$. То есть двумерную выборку в итоге представляем в виде множества пар (a_i, b_j), где $1\leq i \leq k$, $1\leq j \leq m$.

Для построения статистики результаты наблюдений запишем в виде таблицы, которая называется таблицей сопряженности двух признаков, где n_{ij} – частота, с которой встречается пара (a_i, b_j) в двумерной выборке (x,y).

ξ/η	b_1	b_2	…	b_m	Сумма частот
a_1	n_{11}	n_{12}	…	n_{1m}	r_1
a_2	n_{21}	n_{22}	…	n_{2m}	r_2
…	…	…	…	…	…
a_k	n_{k1}	n_{k2}	…	n_{km}	r_k
Сумма частот	l_1	l_2	…	l_m	n

Понятно, что $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$ и $\sum_{j=1}^{m} l_j = n$, где n– объем исходной выборки.

Рассмотрим критерий независимости χ^2.Статистику $\chi^2_{H_0}(n)$ определим следующим образом:

$$x^2_{H_0}(n) = n\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{n_{ij}^2}{r_i l_j} - 1\right).$$

Распределение случайной величины $\chi^2_{H_0}(n)$ найти можно, но при $n \to \infty$ справедлива следующая теорема.

Теорема.Пусть $n \to \infty$, тогда распределение случайной величины $\chi^2_{H_0}$ (n) сходится к распределению $\chi^2\big((k-1)(l-1)\big)$, где $(k-1)(l-1)$– число степеней свободы.

Доказательство теоремы можно найти, например,в [4].

Выберем теперь уровень значимости α. Тогда правило проверки гипотезы независимости распределений (критерий независимости χ^2-квадрат) формируют следующим образом.

Найдем из таблиц квантиль порядка $1-\alpha$ распределения $\chi^2\big((k-1)(l-1)\big)$ и обозначим его $\chi^2_{\text{крит.}}$. Если $\chi^2_{H_0}(\mathrm{n}) \geq \chi^2_{\text{крит.}}$, то гипотеза H_0 о независимости отвергается, в противном случае гипотеза H_0 принимается.

Пример.В таблице ниже приведено 8/8 случаев, классифицированных по двум признакам: начислено прививки против холеры – признакA и заболевшие – признак B.

ξ_1 / ξ_2	B	$\bar{B}$	$\bar{\Sigma}$
A	276	3	279
$\bar{A}$	473	66	539
Σ	749	69	818

Проверить гипотезу H_0 о независимости признаковA и B при уровне значимости $\alpha = 0{,}001$.

Решение. Вычислим статистику:

$$x^2_{H_0}(818)=818\left(\frac{276^2}{279\cdot749}+\frac{3^2}{279\cdot69}+\frac{473^2}{749\cdot539}+\frac{66^2}{539\cdot69}-1\right)=30{,}266.$$

Замечание.Кроме критерия χ^2 проверки гипотезы независимости существует ряд других критериев (см. пример выше).

Задача

Из 300 абитуриентов, поступивших в институт, 97 человек имели балл 5 в школе и 48 получили 5 на вступительных экзаменах по тому же пределу, причем только 48 человек имели 5 и в школе и на экзамене. С уровнем значимости α =0,1 проверить гипотезу о независимости оценок 5 в школе и на экзамене.

Глава 4
ОЦЕНИВАНИЕ НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

4.1. Постановка задачи

Пусть изучается некоторая случайная величина ξ, распределение которой известно. Но это распределение зависит от неизвестного параметра θ, и требуется найти приближенное значение этого параметра,которое называется его оценкой θ*.

Пример 1. Если ξ имеет распределение Пуассона, то примером этого параметра являетсяλ.

Пример 2. Если ξ имеет нормальное распределение, то у этого распределения два параметра: α иσ.

Пример 3. Если ξ имеет распределение Лапласа, то у этого распределения два параметра: α иλ.

Построение оценок параметров можно осуществлять различными способами. Но, желательно, чтобы оценки были хорошими. Поэтому рассматривают определенные условия, которые могут удовлетворять оценки. Сформулируем теперь строгие математические определения.

Статистическая оценка θ– это некоторая функция от результатов наблюдений (от выборочных значений), предназначенная для исследований неизвестных параметров функции распределения.

Имеем

$$\theta^* = T(X_1, X_2, \dots, X_n,$$

гдеθ^* оценка величиныθ, $T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ – функция от элементов выборки, ее называют статистикой.

При фиксированной функцииT (статистике) оценка θ^* зависит от случайных выборочных значений, в связи с этим является случайной величиной. Ее функцию распределения называют выборочным распределением оценки. Оценкаθ^* зависит от выборочных значений и от вида функцииT(статистики).

Качество оценок характеризуется тремя основными свойствами:

1.***Состоятельность оценки***

Определение. *Оценка* $\theta^* = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ *называется состоятельной для* θ, *если она сходится по вероятности к* θ *при неограниченном увеличении объема выборки n:*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|\theta^* - \theta| < \varepsilon\right) = 1 \text{ для любого } \varepsilon > 0.$$

2. ***Несмешенность оценки***

Определение. *Оценка* $\theta^* = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ *называется несмещенной для величины*θ, *если*

$$M(\theta^*) = \theta,$$

т.е. математическое ожидание θ^* равняется истинному значению θ. В противном случае оценка называется смещенной.

При выполнении этого свойства оценки не дают систематических ошибок (в одну сторону) при изменении выборочных значений.

3. ***Эффективность оценки***

Пусть ν– среднеквадратическая ошибка оценки:

$$\nu = M(\theta^* - \theta)^2.$$

Если ошибка смещенная, то

$$\nu = M(\theta^* - \theta)^2 = M(\theta^* - M(\theta^*\,))^2 = D(\theta^*),$$

т.е. в этом случае ошибка оценки совпадает с ее дисперсией. Понятно, что в этом случае оценка с наименьшей дисперсией являлась бы наилучшей в смысле точности, лучшей была бы оценка с$\nu = 0$.Но оказывается, для несмещенных оценок существует нижняя граница для дисперсии ошибок, не равная нулю.

Определение. *Несмещенная оценка θ^* называется эффективной, если она имеет наименьшую дисперсию среди других несмещенных оценок.*

Пусть $\theta_1^* = T_1(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $\theta_2^* = T_2(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ – две различные несмещенные оценки для θ.Если $D(\theta_1^*) > D(\theta_2^*)$, то оценка θ_2^* более эффективна, чемθ_1^*.

Замечание.Значения рассмотренных оценок θ^* зависят от выборки и являются случайными величинами (числами).В связи с этим их называют точечными величинами.

4.2. Выборочные (эмпирические) числовые характеристики

Исходя из эмпирической функции распределения, приходим к следующему:

– выборочное среднее:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

– выборочная дисперсия:

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2,$$

– выборочный начальный момент *k*-го порядка:

$$\overline{\mu_k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k ,$$

которые являются точечными оценками соответственно для $M(X)$, $D(X)$, μ_k (μ_k – теоретический начальный момент k-го порядка).

Исследуем эти оценки. Учитывая, что i– независимые случайные величины и имеют такую же функцию распределения, что и случайная величина ξ,$M(\xi) = M(X_i) = a, D(\xi) = \sigma^2$,получаем

$$M(\overline{X}) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}M\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a = $$
$$= \frac{na}{n} = a = M(\xi).$$

Таким образом, выборочное среднее является несмещенной оценкой для математического ожидания.

Учитывая, что $D(X_i)$ равномерно ограничены $D(X_i) = a^2$, запишем закон больших чисел:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right) = 1\,.$$

И в нашем случае

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{X} - M(X)\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Значит, выборочная средняя $\overline{X}$ является состоятельной оценкой для математического ожидания.

Исследуем выборочную дисперсию S^2. Вначале вычислим $D(\overline{X})$:

$$D(\overline{X}) = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = $$
$$= \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{D(\xi)}{n}.$$

Далее,

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i-1}^{n}\left((X_i - a) - \left(\overline{X} - a\right)\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2 - \frac{2}{n}\left(\overline{X -}\right.$$

$$\left. - a\right)\sum_{i=1}^{n}(X_i - a) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X - a) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2 -$$

$$- \frac{2}{n}\left(\overline{X} - a\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - na\right) + \frac{1}{n}n(X - a)^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\,X_i - a\,)^2 - \frac{2}{n}\left(\overline{X} - a\right)n(X - a) + (X - a)^2 -$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2 - (\overline{X} - a)^2\,.$$

Теперь

$$M(S^2) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2 - \left(\overline{X} - a\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i - a)^2 - M(\overline{X} - a)^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M\left(X_i - M(X_i)\right)^2 - M\left(\overline{X} - M(X)\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D(X_i) -$$

$$- D\left(\overline{X}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D(X) - \frac{D(X)}{n} = \frac{1}{n}nD(X) - \frac{D(X)}{n} =$$

$$= D(X) - \frac{D(X)}{n} = \frac{n-1}{n}D(X).$$

Получили, что

$$M(S^2) = \frac{n-1}{n} D(X) \neq D(X).$$

и поэтому выборочная дисперсия является смешенной оценкой для дисперсии.Так как$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$, то получаем

$$\lim_{n\to\infty} M(S^2) = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} D(X) = D(X) \ ,$$

и отсюда следует, что оценка является асимптотически несмещенной для дисперсии.

Возьмем вместоS^2

$$S'^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{n=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 = \frac{n}{n-1} S^2$$

(S'^2-«исправленная» выборочная дисперсия).Имеем

$$M\left(S'^2\right) = \frac{n}{n-1} M(S^2) = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} D(X) = D(X).$$

Так что оценкаS'^2является уже несмещенной для $D(X)$. Можно показать, что она состоятельна для$D(X)$.

Упражнение. Доказать, что

$$S^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{n=1}^{n} X_i^2 - nX^2\right), S^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - nX^2\right).$$

Замечание.На практике при большихn (n>100) вместо S'^2 используют S^2.

Пример. Вычислить выборочную «исправленную» дисперсию для выборки объема $n = 10$: 1,2,3,7,7,0,2,3,5,4.

Предварительно находим

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 34, \sum_{i=1}^{10} X_i^2 = 166, \ \overline{X} = \frac{10}{34} = 3{,}4.$$

Тогда

$$S'^2 = \frac{1}{10-1}(166 - 10 \cdot 3{,}4^2) = 5{,}6.$$

Глава 5

РЕГРЕССИОННЫЕ МОДЕЛИ

5.1. Линейная регрессия

Пусть изучаются две случайные величины ξ и η. если после проверки гипотезы их независимости было установлено, что эти величины зависимы, то прикладное значение имеет задача представления одной из этих величин как функции от другой. Конечно, точное представление$\eta = f(x)$невозможно. Но можно рассматривать приближенное представление$\eta = f(x)$, где f – некоторая фиксированная функция. Ясно, что функция fдолжна удовлетворять некоторым условиям. Функция f называетсянаилучшим приближением величины η в смысле метода наменьших квадратов, если$M(\eta - f(\xi))$прини-мает наименьшее возможное значение. Функция $f(x)$называется среднеквадратической регрессией η на ξ.

Сначала рассмотрим линейную функцию $f(x) = a\xi + b$.Тогда параметры a и bнужно определить так чтобы функция f наилучшим образом приближала величину η в смысле метода наименьших квадратов. Для этого рассмотрим функцию $g(a,b) = M(\eta - (a\xi + b)^2)$. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial b} = 0 \end{cases},$$

получим, что

$$\begin{cases} a = \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi} \\ b = M\eta - rM(\xi \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}) \end{cases},$$

где r – коэффициент корреляции. Так как точные значения $M\xi, M\eta, \sigma_\xi, \sigma_\eta, r$ неизвестны, то используют их приближения. Тогда уравнение линейной регрессии имеет вид

$$\eta = \overline{y} + r_b \frac{S(y)}{S(x)} (\xi - \overline{x}),$$

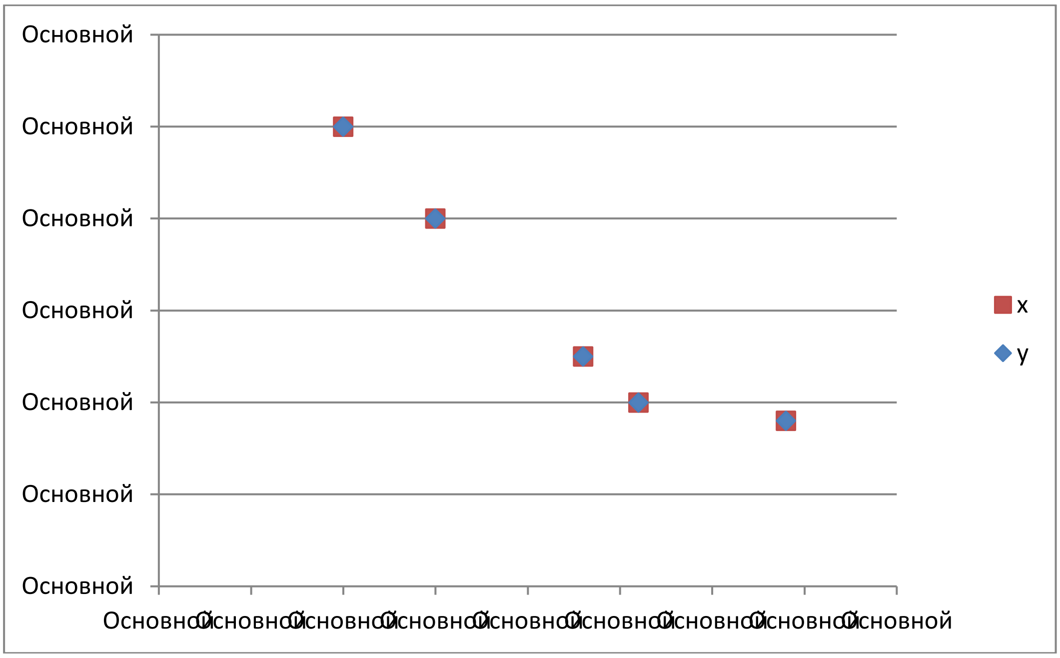
где $\overline{x}, \overline{y}$ – средние выборочные значения, $S^2(x), S^2(y)$ – выборочные дисперсии, $S(x) = \sqrt{S^2(x)}, S(y) = \sqrt{S^2(y)}$ –выборочные среднеквадратичные отклонения, r_b – выборочный коэффициент корреляции.

В практических приложениях линейные регрессионные модели применяются не всегда, это понятно, так как функциональные зависимости очень разнообразны.

Рассмотрим наиболее используемые нелинейные регрессионные модели. Часто, чтобы провести подбор формы модели, сначала строят диаграмму рассеивания. Диаграмма рассеивания – это изображение на плоскости двумерной выборки. Например, для двумерной выборки

$\xi = x$	1,5	2,3	1	3,4	2,6
$\eta = y$	4	2,5	5	1,8	2

диаграмма рассеивания имеет следующий вид:



Глядя на приведенную диаграмму, естественно, можно предположить, что η и ξ связаны нелинейно, а имеют обратно пропорциональную зависимость, и поэтому можно использовать гиперболическую регрессию.

Пусть имеется двумерная случайная величина (ξ, η). Получена двумерная выборка:

$\xi = x$	x_1	x_2	…	x_n
$\eta = y$	y_1	y_2	…	y_n

Проверили гипотезу о независимости ξ и η. Она была отвергнута. После построения диаграммы рассеивания выбирается подходящая регрессионная модель.

5.2. Гиперболическая регрессия

Предполагаем, что $\eta = a + \frac{b}{\xi}$. Считается, что $p(\xi = 0) = 0$.Эту зависимость можно представить в линейном виде путем замены$\delta = \frac{1}{\xi}$. Этот процесс называют процессом мнеаризации.Тогда $y = = a + b \cdot \delta$. Далее, используя метод наименьших квадратов, изложенный в предыдущем параграфе, можно найти коэффициенты aи b.Эти оценки имеют следующий вид:

$$a \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} z_i \sum_{i=1}^{n} y_i z_i}{n \sum_{i=1}^{n} z_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right)^2},$$

$$b \approx \frac{n \sum_{i=1}^{n} y_i z_i - \sum_{i=1}^{n} z_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n(\sum_{i=1}^{n} {z_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right)^2)},$$

где $z_i = \frac{1}{x_i}$.

5.3. Показательная регрессия

Предположим, что$\eta = a \cdot b^{\xi}$.Проведем процесс мнеаризации путем замены δ. Тогда имеем линейную модель

$$\ln \eta = \ln a + \xi \ln b \text{ или } \delta = a_1 + b_1 \cdot \xi, \text{где } a_1 = \ln a\,, b_1 = \ln b.$$

Действуя аналогичным методом, указанном в предыдущемпараграфе, получаем оценки для параметров a и b:

$$a \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i - \frac{1}{n} b \sum_{i=1}^{n} \ln x_i,$$

где

$$b \approx \frac{n\sum_{i=1}^{n} \ln x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} \ln x_i \ln y_i}{n\sum_{i=1}^{n} (\ln x_i)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \ln x_i\right)^2}.$$

5.4. Степенная регрессия

Предположим, что $\eta = a\xi^b$, где$a > 0$.Проведем процесс мнеаризации путем замены:

$$\beta = \ln \eta,\ \alpha = \ln \xi\,, a_1 = \ln a.$$

Тогда

$$\beta = a_1 + b \cdot \alpha,$$

т. е. получили линейную модель.Действуя аналогичным методом, указанным выше, получаем оценки для параметров aиb:

$$a \approx \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln y_i - \frac{1}{n} b \sum_{i=1}^{n} \ln x_i\right],$$

где

$$b \approx n\sum_{i=1}^{n} \ln x_i \ln b - \sum_{i=1}^{n} \ln x_i * \sum_{i=1}^{n} \ln y_i.$$

5.5.Экспоненциальная регрессия

Предположим, что

$$\eta = e^{a+b\xi}.$$

Проведем процесс мнеаризации путем замены $\delta = \ln \eta$.Тогда имеем модель $\delta = a + b\xi$.Действуя аналогично методу, указанному выше, получаем оценки для параметровa иb:

$$a \approx \frac{1}{n}\sum_{c=1}^{n} \ln y_i - \frac{1}{n} b \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

где

$$b \approx \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i \ln y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} \ln y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}.$$

5.6.Параболическая модель

Предположим, что $\eta = a\xi^2 + b\xi + c$.В данномслучаеможно применить метод наименьших квадратов последовательно. Приводить преобразование не будем. Напишем только систему уравнений, решив которую относительно параметров $a,\ b,\ c,$ найдем их оценки. Система уравнений имеет следующий вид:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i{}^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i{}^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 y_i,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i{}^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + c_n = \sum_{i=1}^{n} y_i\ .$$

Замечание. Таким образом, при решении практических задач функциональную зависимость η отξищут в виде

$$\eta = \sum_{k=1}^{n} a_k f_k(\xi),$$

где $f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)$–известные функции; $a_1, a_2, \dots, a_m$ – неизвестные параметры.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теория вероятностей изучает случайные явления, используя методы математического анализа, алгебры, геометрии, дифференциальных уравнений. Выявляя объективные закономерности в случайном эта наука позволяет предвидеть возожное развитие событий в дальнейшем. В частности, предельные теоремы в схеме последовательных независимых испытаний, теоремы эргодичности в цепях Маркова, различные виды закона больших чисел, центральная предельная теорема дают возможность не только охарактеризовать возможные будущие явления, но и произвести их количественную оценку с помощью вероятностей или усредненных величин. Методы математической статистики расширяют возможности научного прогнозирования и принятия решений. Эти методы универсальны, так как ими можно пользоваться в точных, естественных, экономических, социальных науках. Для применения математической статистики необходимо иметь статистический материал. Условия сбора, обработки статистического материала четко определены. В дальнейшем строятся различные модели, в частности, выдвигаются и проверяются гипотезы о параметрах, виде распределений, независимости, однородности, регрессионные зависимости. Таким образом, современное образование невозможно без знания методов теории вероятностей и математической статистики. Авторы надеются, что настоящее учебное пособие будет полезно студентам в изучении указанных тем, а также преподавателям при подготовке к занятиям, и с благодарностью примут отзывы и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боровков, А.А.* Теория вероятностей / *А.А. Боровков*.–М.: Наука, 1976. –250 с.

2. *Гнеденко, Б.В.* Курс теории вероятностей / *Б.В. Гнеденко*.–М.: Наука, 1969. –340 с.

3. *Ширяев, А.А.* Вероятность / *А.А. Ширяев*. –М.: Наука, 1980. – 574 с.

4. *Крамер, Г.* Математические методы статистики / *Г. Крамер*. – М.: Мир, 1975. –648 с.

5. *Гмурман, В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика / *В.Е. Гмурман*. –М.:Высш. шк., 2003. –479 с.

6. *Коваленко, И.И.* Теория вероятностей и математическая статистика / *И.И. Коваленко, В.А.Филиппова*. –М.: Высш. шк., 1982. –256 с.

7. *Емельянов, Г.В.* Задачник по теории вероятностей и математической статистике: учеб.пособие / *Г.В. Емельянов, В.П. Скитович*. – СПб.: Лань, 2007. – 336 с.

8. Математическая обработка экспериментальных данных: метод.указания к лабораторной работе / сост. *О.А. Шушерина, Н.Т. Карелина, Е.Д. Нестерова*. –Красноярск: Изд-во СТИ, 1982. –36 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица П.1–Значения функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1026	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0523	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0223	0198	0194	0169	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблица П.2–Распределение Пуассона

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \lambda = 0,6$$

k	P		k	P
0	0,54881		4	0,00296
1	0,32929		5	0,00036
2	0,09879		6	0,00004
3	0,01976			

Таблица П.3– Значения функции Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \mathrm{e}^{-z^2/2}\, dz, \Phi(-x) = -\Phi(x)$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01094	02392	02790	03188	03086
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	12276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39215	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41300	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	42822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46486	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49088	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49634	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
3,0	0,49865	3,1	0,49903	3,2	0,49931	3,3	0,49952	3,4	0,49966
3,5	0,49977	3,6	0,49984	3,7	0,49989	3,8	0,49993	3,9	0,49995
4,0	0,499968	4,5	0,499997	5,0	0,49999997				

ТаблицаП.4–Значения функции распределения Колмогорова $K(t)$

t	$K(t)$
1.36	0.9505
1.40	0.9603
1.45	0.9702
1.52	0.9803
1.63	0.9902

ТаблицаП.5–Квантили стандартного нормального распределения τ_ε

ε	τ_ε	ε	τ_ε
0.010	2.3263	0.250	0.6745
0.025	1.9600	0.300	0.5244
0.050	1.6449	0.350	0.3853
0.100	1.2816	0.400	0.2533
0.150	1.0364	0.450	0.1257
0.200	0.8416	0.500	0.0000

ТаблицаП.6–Квантили распределения Стьюдента t_p,k

k	p = 0.750	p = 0.900	p = 0.990	p = 0.999
1	1.000	3.078	31.821	318
2	0.816	1.886	6.965	22.3
3	0.765	1.638	4.541	102
4	0.741	1.533	3.747	7.173
5	0.727	1.476	3.365	5.893
6	0.718	1.440	3.143	5.208
7	0.711	1.415	2.998	4.785
8	0.706	1.397	2.896	4.501
9	0.703	1.383	2.821	4.297
10	0.700	1.372	2.764	4.144
11	0.697	1.363	2.718	4.025
12	0.695	1.356	2.681	3.930
13	0.694	1.350	2.650	3.852
14	0.692	1.345	2.624	3.787
15	0.691	1.341	2.602	3.733
20	0.687	1.325	2.528	3.552
30	0.683	1.310	2.457	3.385
40	0.681	1.303	2.423	3.307
60	0.679	1.296	2.390	3.232
80	0.677	1.289	2.358	3.160
∞	0.674	1.282	2.326	3.090

ТаблицаП.7–Квантили распределения $\chi^2{}_{\alpha,k}$

k	$\alpha = 0.010$	$\alpha = 0.025$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.10$
1	0.00016	0.00098	0.00393	0.01580
2	0.0201	0.05060	0.1030	0.2110
3	0.1150	0.2160	0.3520	0.5840
4	0.297	0.484	0.711	1.106
5	0.554	0.831	1.150	1.161
6	0.872	1.240	1.640	2.200
7	1.240	1.690	2.170	2.830
8	1.650	2.180	2.730	3.490
9	2.090	2.700	3.330	4.170
10	2.560	3.250	3.940	4.870
11	3.050	3.820	4.570	5.580
12	3.570	4.400	5.230	6.300
13	4.110	5.010	5.890	7.040
14	4.660	5.630	6.570	7.790
15	5.230	6.260	7.260	8.550
16	5.81	6.91	7.96	9.31
17	6.41	7.56	8.67	10.1
18	7.01	8.23	9.39	10.9
19	7.63	8.91	10.1	11.7
20	8.26	9.59	10.9	12.4
21	8.90	10.3	11.6	13.2
22	9.54	11.0	12.3	14.0
23	10.2	11.7	13.1	14.8
24	10.9	12.4	13.8	15.7
25	11.5	13.1	14.6	16.5
30	15.0	16.8	16.5	20.6
35	18.5	20.6	22.5	24.8
40	22.2	24.4	26.5	29.1
45	25.9	28.4	30.6	33.4
50	29.7	32.4	34.8	37.7
75	49.5	52.9	56.1	59.8
100	70.1	74.2	77.9	82.4

Таблица П.8–Квантили распределения Фишера F_{p,k_1,k_2}

k_2	$p = 0.95$		$p = 0.99$		$p = 0.999$	
	$k_1 = 1$	$k_1 = 2$	$k_1 = 1$	$k_1 = 2$	$k_1 = 1$	$k_1 = 2$
1	161.4	199.5	4052	4999.5	405300	500000
2	18.51	19.00	98.50	99.00	998.5	999
3	10.13	9.55	34.12	30.82	167.0	148.5
4	7.71	6.94	21.20	18.00	74.14	61.25
5	6.61	5.79	16.26	13.27	47.18	37.12
6	5.99	5.14	13.75	10.92	35.51	27.00
7	5.59	4.74	12.25	9.55	29.25	21.69
8	5.32	4.46	11.26	8.65	25.42	18.49
9	5.12	4.26	10.56	8.02	22.86	16.39
10	4.96	4.10	10.04	7.56	21.04	14.91
11	4.84	3.98	9.65	7.21	19.69	13.81
12	4.75	3.89	9.33	6.93	18.64	12.97
13	4.67	3.81	9.07	6.70	17.81	12.31
14	4.60	3.74	8.86	6.54	17.14	11.78
15	4.54	3.68	8.68	6.36	16.59	11.34
16	4.49	3.63	8.53	6.23	16.12	10.97
17	4.45	3.59	8.40	6.11	15.72	10.66
18	4.41	3.55	8.29	6.01	15.38	10.39
19	4.38	3.52	8.18	5.93	15.08	10.16
20	4.35	3.49	8.10	5.85	14.82	9.95
25	4.24	3.39	7.77	5.57	13.88	9.22
30	4.17	3.32	7.56	5.39	13.29	8.77
40	4.08	3.23	7.31	5.18	12.61	8.25
60	4.00	3.15	7.089	4.98	11.97	7.76
120	3.92	3.07	6.85	4.79	11.38	7.32
∞	3.84	3.00	6.63	4.61	10.83	6.91

Таблица П.9 – Численный элемент на компьютере по определению вероятности выпадения герба и решки в зависимости от числа *n* – подбрасывания монеты

n	Версия орла	Версия решки	Время,*ms*
10	0,699999881	0,300000012	0
20	0,600000024	0,400000006	0
30	0,566666662	0,433333337	0
40	0,550000012	0,449999988	0
50	0,479999989	0,519999981	0
60	0,366666675	0,633333325	0
70	0,528571427	0,471428573	0
80	0,4375	0,5625	0
90	0,622222245	0,377777785	0
100	0,449999988	0,550000012	0
200	0,435000002	0,564999998	1
300	0,483333319	0,51666665	0
400	0,5	0,5	0
500	0,477999985	0,522000015	0
600	0,508333325	0,491666675	0
700	0,504285693	0,495714277	0
800	0,497500002	0,502499998	1
900	0,531111121	0,468888878	0
1000	0,512000024	0,488000006	0
10000	0,50029999	0,49970001	1
20000	0,497649995	0,502349973	1
30000	0,499366671	0,500633359	2
40000	0,500050008	0,499949991	3
50000	0,501420021	0,498580009	4
60000	0,49634999	0,50365001	4
70000	0,502257168	0,497742862	5
80000	0,497712493	0,502287507	5
90000	0,498966664	0,501033306	6
100000	0,501060009	0,498939991	7
200000	0,498724998	0,501275003	14
300000	0,499520004	0,500479996	23
400000	0,499395013	0,500604987	28
500000	0,500771999	0,499228001	33
600000	0,500559986	0,499440014	40
700000	0,49899143	0,50100857	49
800000	0,499145001	0,500855029	53
900000	0,499683321	0,50031668	61
1000000	0,501057029	0,498943001	73
10000000	0,499896288	0,500103712	687
20000000	0,49994697	0,500052273	1650
40000000	0,500107288	0,499892712	2784
60000000	0,500018954	0,499981046	4421
80000000	0,500011146	0,499988824	5505
1000000000	0,500032306	0,499967694	70745
2000000000	0,500030696	0,499969333	141352
3000000000	0,500030458	0,499969542	208857
4000000000	0,499971688	0,500028312	285760

Учебное пособие

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Ширяева Тамара Алексеевна

Шлёпкин Алексей Анатольевич

Редактор
О.Ю. Потапова

Санитарно-эпидемиологическое заключение № 24.49.04.953.П. 000381.09.03 от 25.09.2003 г.
Подписано в печать 26.04.2018. Формат 60 × 90/16. Бумага тип. № 1.
Печать – ризограф. Усл. печ. л.   Тираж 100 экз. Заказ №
Редакционно-издательский центр Красноярского государственного аграрного университета
660017, Красноярск, ул. Ленина, 117