

**Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
«Красноярский государственный аграрный университет»**

**ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ И
МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ**

**Методические указания
для самостоятельного изучения дисциплины**

Красноярск 2025

Рецензент
И.В. Сабодах, канд. физ.-мат. наук, доц.

Брит, А.А. Исследование операций и методы оптимизации: Метод. указания для самостоят. изучения дисциплины / Краснояр. гос. аграр. ун-т. - Красноярск, 2025. - 16 с.

Основной задачей методических указаний является оказание помощи студентам для самостоятельного изучения дисциплины «Исследование операций и методы оптимизации».

Предназначены для студентов очного отделения по направлению 09.03.03 «Прикладная информатика».

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Красноярского государственного аграрного университета

© Брит А.А., 2025
© ФГБОУ ВО «Красноярский государственный аграрный университет», 2025

СОДЕРЖАНИЕ

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ. КОМПЕТЕНЦИИ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ	5
2. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ.....	6
3. КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ ЗНАНИЙ, УМЕНИЙ, НАВЫКОВ И ЗАЯВЛЕННЫХ КОМПЕТЕНЦИЙ	7
4. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ	10
5. БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	11
6. ПРИМЕРЫ ЗАДАНИЙ.....	12
7. ВОПРОСЫ	14

ВВЕДЕНИЕ

Исследование операций и методы оптимизации представляют собой фундаментальный раздел прикладной математики, который занимается разработкой, анализом и применением математических моделей и методов для принятия оптимальных решений в условиях ограниченных ресурсов и сложных систем. Эти методы находят широкое применение в различных областях, таких как экономика, логистика, управление производством, транспорт, энергетика, финансы и даже экология. Основная цель исследования операций — помочь лицам, принимающим решения, выбрать наилучший вариант действий из множества возможных, основываясь на математическом анализе и количественных данных.

Методы оптимизации, которые изучаются в рамках этой дисциплины, позволяют решать задачи, связанные с минимизацией затрат, максимизацией прибыли, эффективным распределением ресурсов, планированием процессов и управлением рисками. Например, линейное программирование используется для оптимизации производственных планов, транспортные задачи помогают минимизировать затраты на перевозку грузов, а теория игр применяется для анализа стратегического взаимодействия в условиях конкуренции.

Исследование операций и методы оптимизации также играют ключевую роль в развитии современных технологий, таких как искусственный интеллект, машинное обучение и анализ больших данных. Эти методы позволяют не только находить оптимальные решения, но и прогнозировать результаты, оценивать риски и адаптироваться к изменяющимся условиям.

Изучение этой дисциплины развивает аналитическое мышление, навыки работы с данными и способность решать сложные задачи, что делает ее незаменимой для студентов, специализирующихся в области прикладной математики, экономики, менеджмента, инженерии и других технических и социально-экономических направлений.

В данном методическом пособии содержится программа, методические указания и примеры заданий по дисциплине.

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ. КОМПЕТЕНЦИИ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ

Дисциплина Исследование операций и методы оптимизации относится к обязательной части Блока 1 «Дисциплины (модули)» подготовки студентов по направлению 09.03.03 «Прикладная информатика». Дисциплина реализуется в институте Экономики и управления АПК кафедрой Информационных технологий и математического обеспечения информационных систем.

Дисциплина нацелена на формирование универсальных компетенций выпускника:

УК–2 - Способен определять круг задач в рамках поставленной цели и выбирать оптимальные способы их решения, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений.

Общепрофессиональных компетенций

ОПК-1 - Способен применять естественнонаучные и общетехнические знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности;

ОПК-6 - Способен анализировать и разрабатывать организационно-технические и экономические процессы с применением методов системного анализа и математического моделирования.

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, связанных с формированием у студентов теоретических знаний и приобретение элементарных практических навыков по формулированию прикладных экономико-математических моделей, их анализу и использованию для принятия управленческих решений; обучение студентов применению экономико-математических методов и моделей в процессе подготовки и принятия управленческих решений в организационно-экономических и производственных системах.

Преподавание дисциплины предусматривает следующие формы организации учебного процесса: лекции, лабораторные работы, самостоятельная работа студента.

Программой дисциплины предусмотрены следующие виды контроля: текущий контроль успеваемости в форме опроса, выполнения заданий лабораторных работ и промежуточная аттестация в форме экзамена. Общая трудоемкость освоения дисциплины составляет 4 зачетные единицы, 144 часа.

2. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Содержание дисциплины представлено в виде тематического плана:

Модуль 1. Линейное программирование

Модульная единица 1.1 Основы линейного программирования

Общая задача линейного программирования. Графический метод решения задач линейного программирования. Симплекс метод решения задач линейного программирования. Двойственные задачи линейного программирования.

Модульная единица 1.2 Специальные задачи линейного программирования

Задача использования сырья. Задача составления рациона. Задача о мощностях. Транспортная задача.

Модуль 2. Нелинейное программирование

Модульная единица 2.1 Основы нелинейного программирования

Общая задача нелинейного программирования. Выпуклые и вогнутые множества. Метод неопределенных множителей Лагранжа. Методы выпуклой оптимизации. Теорема Куна – Таккера. Условия Куна – Таккера для различных видов задач нелинейного программирования. Метод ветвей и границ.

Модульная единица 2.2 Специальные задачи нелинейного программирования

Задача об оптимальном портфеле ценных бумаг. Простейшая модель управления запасами. Модель с ограничениями на площадь складирования.

Модуль 3. Динамическое программирование

Модульная единица 3.1 Основы динамического программирования

Общая постановка задачи динамического программирования. Принцип оптимальности Беллмана.

Модульная единица 3.2 Специальные задачи динамического программирования

Задача о замене оборудования. Задача оптимального распределения ресурсов. Задача о минимизации затрат на строительство и эксплуатацию предприятий. Задача об оптимальной загрузке транспортного средства неделимыми предметами. Выбор оптимального маршрута.

3. КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ ЗНАНИЙ, УМЕНИЙ, НАВЫКОВ И ЗАЯВЛЕННЫХ КОМПЕТЕНЦИЙ

Текущая аттестация студентов производится в дискретные временные интервалы преподавателем, ведущими лекционные и лабораторные занятия по дисциплине в следующих формах:

- тестирование;
- опрос
- выполнение заданий;
- отдельно оцениваются личностные качества студента (аккуратность, исполнительность, инициативность) – работа у доски, своевременная сдача тестов, отчетов к лабораторным работам и письменных домашних заданий.

Рейтинг – план дисциплины

Дисциплинарные модули (ДМ)	Количество академических часов	Рейтинговый балл
M ₁	38	20
M ₂	35	20
M ₃	35	20
Экзамен	36	40
Итого часов	144	100

Распределение баллов по модулям

Модуль	Максимально возможный балл по видам работ				ИТОГО
	Текущая работа			Аттестация	
	Опрос	Выполнение заданий	Тестирование по модулям	Экзамен	
M ₁	5	5	10		20
M ₂	5	5	10		20
M ₃	5	5	10		20
Экзамен				40	40
ИТОГО	15	15	30	40	100

Задания по всем видам текущей работы и промежуточной аттестации, а также критерии оценивания приведены в ФОС по дисциплине «Исследование операций и методы оптимизации».

Промежуточный контроль по результатам 2 семестра по дисциплине – экзамен проходит в форме контрольного итогового тестирования.

Для допуска к промежуточному контролю студент должен набрать необходимое количество баллов по итогам текущей аттестации – 40-60 баллов. Итоговое тестирование включает в себя тестирующие материалы по всему курсу «Дискретная математика» и проводится в ЭИОС «Moodle».

Оценивание итогового тестирования осуществляется по следующим критериям:

Обучающийся, давший правильные ответы 87-100% тестирующих материалов (1-5 ошибок), получает максимальное количество баллов – 40.

Обучающийся, давший правильные ответы в пределах 73-86% тестирующих материалов (6-10 ошибок), получает 20 баллов.

Обучающийся, давший правильные ответы в пределах 60-72% (11-15 ошибок) тестирующих материалов, получает 10 баллов.

Баллы, полученные на итоговом тестировании, суммируются с баллами, полученными в течение семестра на текущей аттестации, и выводится итоговая оценка за экзамен по следующим критериям:

60 – 73 – минимальное количество баллов – оценка «удовлетворительно».

74 – 86 – среднее количество баллов – оценка «хорошо».

87 – 100 – максимальное количество баллов – оценка «отлично».

Обучающийся, не сдавший экзамен, приходит на пересдачу в сроки в соответствии с графиком ликвидации академических задолженностей: http://www.kgau.ru/new/news/news/2017/grafik_lz.pdf.

Вопросы к экзамену

1. Постановка задачи линейного программирования (ЗЛП). Примеры задач.

2. Различные формы записи ЗЛП. Переход от одной формы к другой.

3. Графический метод решения задачи линейного программирования.

4. Теорема о допустимой области ЗЛП. Теорема о множестве оптимальных планов ЗЛП.

Крайние точки. Формулировка теоремы о представлении.

5. Основная теорема линейного программирования.

6. Понятие опорного плана ЗЛП. Теоремы о крайних точках допустимой области ЗЛП.
7. Геометрический смысл симплекс-метода решения ЗЛП. Построение начального опорного плана в частном случае.
8. Симплекс-метод. Критерий оптимальности опорного плана в ЗЛП.
9. Симплекс-метод. Правило перехода к новому опорному плану.
10. Симплекс-таблица. Пересчет симплекс-таблиц. Алгоритм симплекс-метода решения ЗЛП. Теорема о конечной сходимости симплекс-метода.
11. Метод искусственного базиса.
12. Экономическая интерпретация задачи, двойственной к задаче планирования производства. Двойственная задача для стандартной ЗЛП и алгоритм её формирования.
13. Основное неравенство теории двойственности. Достаточный признак оптимальности для пары взаимно двойственных задач.
14. Формулировка первой теоремы двойственности. Теорема об оптимальном плане двойственной задачи.
15. Вторая теорема двойственности.
16. Третья теорема двойственности.
17. Двойственный симплекс-метод.
18. Постановка транспортной задачи (ТЗ). Особенности ТЗ.
19. Закрытая и открытая модели транспортной задачи. Приведение открытой ТЗ к закрытой.
20. Теоремы о свойствах ТЗ. Вырожденные и невырожденные планы ТЗ.
21. Методы построения начального опорного плана ТЗ. Метод потенциалов решения ТЗ.
22. Алгоритм улучшения плана ТЗ. Понятие цикла. Снятие вырожденности плана.

4. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Самостоятельная работа магистрантов (СРС) организуется с целью развития навыков работы с учебной и научной литературой, выработки способности вести научно-исследовательскую работу, а также для систематического изучения дисциплины.

– Реализуются следующие формы организации самостоятельной работы магистрантов:

- работа над теоретическим материалом, прочитанным на лекциях;
- подготовка к лекционным и практическим занятиям;
- самотестирование по контрольным вопросам (тестам);
- самостоятельная работа с обучающими программами в компьютерных классах и в домашних условиях (система Moodle).

Таблица 4. - Перечень вопросов для самостоятельного изучения

№ п/п	№ модуля и модульной единицы	Перечень рассматриваемых вопросов для самостоятельного изучения	Кол-во часов
1.	самостоятельное изучение разделов дисциплины		3
1.1	Модуль 1 Линейное программирование		
	Модульная единица 1.1 Основы линейного программирования	История развития линейного программирования.	1
1.2	Модуль 2 Нелинейное программирование		
	Модульная единица 2.1 Основы нелинейного программирования	История развития нелинейного программирования.	1
1.3	Модуль 3 Динамическое программирование		
	Модульная единица 3.1 Основы динамического программирования	История развития динамического программирования.	1
2.	подготовка к лекциям и практическим занятиям		16
3.	выполнение заданий		16
4.	подготовка к тестированию		9
Всего часов			44

5. БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

5.1. Карта обеспеченности литературой

1. Заяц, О. А. Исследование операций : учебное пособие / О. А. Заяц, Е. А. Стрижакова. — Волгоград : Волгоградский ГАУ, 2017. — 76 с.

2. Исследование операций в экономике : учебник для вузов / под редакцией Н. Ш. Кремера. — 4-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 414 с.

5.2. Информационно-телекоммуникационные ресурсы сети ИНТЕРНЕТ

Электронные библиотечные системы:

1. Электронная библиотечная система «Лань» e.lanbook.com

2. Электронная библиотечная система «Юрайт» <https://urait.ru/>

Электронные библиотеки

3. Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU elibrary.ru

4. Научная библиотека Красноярского ГАУ
www.kgau.ru/new/biblioteka

Информационные справочные системы

5. Справочная правовая система «КонсультантПлюс»
<http://www.consultant.ru>

6. Информационно-правовой портал «Гарант»:
<http://www.garant.ru>

Научные базы данных и профессиональные сайты

7. Русскоязычный сайт международного издательства Elsevier
www.elsevier.com (Списки журналов Scopus, Списки журналов ScienceDirect)

6. ПРИМЕРЫ ЗАДАНИЙ

1. **Общая задача линейного программирования:** Фирма производит два вида продукции: А и В. Прибыль от единицы продукции А — 3 у.е., от В — 5 у.е. На производство единицы А требуется 2 часа, В — 4 часа. Общее время работы — 80 часов. Найдите оптимальный план производства, максимизирующий прибыль.

2. **Графический метод:** Максимизировать $Z=4x_1+3x_2$

При ограничениях:

- $2x_1+x_2 \leq 10$
- $x_1+2x_2 \leq 8$
- $x_1, x_2 \geq 0$.

3. **Симплекс-метод:**

Решите задачу симплекс-методом:

Максимизировать $Z=3x_1+5x_2$

При ограничениях:

- $x_1 \leq 4$
- $2x_2 \leq 12$
- $3x_1+2x_2 \leq 18$
- $x_1, x_2 \geq 0$.

4. **Двойственные задачи:**

Максимизировать $2x_1+3x_2$

При ограничениях:

- $x_1+x_2 \leq 5$
- $2x_1+x_2 \leq 8$
- $x_1, x_2 \geq 0$,

составьте двойственную задачу.

5. **Задача использования сырья:** На заводе есть два вида сырья: S1 (100 кг) и S2 (80 кг). Для производства единицы продукции А требуется 2 кг S1 и 1 кг S2, для В — 1 кг S1 и 2 кг S2. Прибыль от А — 3 у.е., от В — 4 у.е. Найдите оптимальный план производства.

6. **Задача составления рациона:** Составьте рацион минимальной стоимости из двух продуктов: P1 (стоимость 2 у.е., содержит 3 ед. витамина А и 1 ед. витамина В) и P2 (стоимость 3 у.е., содержит 1 ед. витамина А и 2 ед. витамина В). Требуется не менее 9 ед. витамина А и 8 ед. витамина В.

7. **Транспортная задача:** Найдите оптимальный план перевозок для минимизации затрат:

- Поставщики: А (40 ед.), В (60 ед.).

- Потребители: X (30 ед.), Y (50 ед.), Z (20 ед.).
- Стоимости перевозок:
 - $A \rightarrow X$: 2 у.е., $A \rightarrow Y$: 3 у.е., $A \rightarrow Z$: 4 у.е.
 - $B \rightarrow X$: 5 у.е., $B \rightarrow Y$: 2 у.е., $B \rightarrow Z$: 1 у.е.

8. **Метод Лагранжа:** Минимизировать $f(x,y)=x^2+y^2$ при ограничении $x+y=1$.

9. **Теорема Куна-Таккера:** Минимизировать $f(x,y)=x^2+y^2$ При ограничениях:

- $x+y \geq 1$
- $x, y \geq 0$.

10. **Метод ветвей и границ:** Решите задачу целочисленного программирования:

Максимизировать $Z=3x_1+5x_2$

При ограничениях:

- $2x_1+x_2 \leq 6$
- $x_1+2x_2 \leq 8$
- $x_1, x_2 \geq 0$ и целые.

11. **Задача об оптимальном портфеле:** Инвестор выбирает портфель из двух активов с доходностями 10% и 15%. Дисперсии доходностей: 4% и 9%, ковариация: 2%. Найдите долю каждого актива, минимизирующую риск при ожидаемой доходности 12%.

12. **Модель управления запасами:** Спрос на товар — 100 ед. в месяц. Стоимость хранения — 2 у.е. за единицу в месяц, стоимость заказа — 50 у.е. Найдите оптимальный размер заказа.

13. **Принцип Беллмана:**

Найдите минимальную стоимость пути из A в D в графе:

- $A \rightarrow B$: 3 у.е., $A \rightarrow C$: 2 у.е.
- $B \rightarrow D$: 4 у.е., $C \rightarrow D$: 5 у.е.

14. **Задача о замене оборудования:** Оборудование стоит 100 у.е., его производительность снижается на 10% каждый год. Стоимость обслуживания: 10 у.е. в первый год, увеличивается на 5 у.е. каждый год. Найдите оптимальную стратегию замены на 5 лет.

15. **Задача о загрузке транспортного средства:** В транспортное средство можно загрузить предметы весом 3, 4 и 5 кг с ценностью 10, 15 и 20 у.е. соответственно. Максимальная грузоподъемность — 10 кг. Найдите набор предметов с максимальной ценностью.

7. ВОПРОСЫ

Вопросы к модулю 1.

1. Постановка задачи линейного программирования (ЗЛП). Примеры задач.
2. Различные формы записи ЗЛП. Переход от одной формы к другой.
3. Графический метод решения задачи линейного программирования.
4. Теорема о допустимой области ЗЛП. Теорема о множестве оптимальных планов ЗЛП.
Крайние точки. Формулировка теоремы о представлении.
5. Основная теорема линейного программирования.
6. Понятие опорного плана ЗЛП. Теоремы о крайних точках допустимой области ЗЛП.
7. Геометрический смысл симплекс-метода решения ЗЛП. Построение начального
опорного плана в частном случае.
8. Симплекс-метод. Критерий оптимальности опорного плана в ЗЛП.
9. Симплекс-метод. Правило перехода к новому опорному плану.
10. Симплекс-таблица. Пересчет симплекс-таблиц. Алгоритм симплекс-метода решения ЗЛП. Теорема о конечной сходимости симплекс-метода.
11. Метод искусственного базиса.
12. Экономическая интерпретация задачи, двойственной к задаче планирования
производства. Двойственная задача для стандартной ЗЛП и алгоритм её формирования.
13. Основное неравенство теории двойственности. Достаточный признак оптимальности
для пары взаимно двойственных задач.
14. Формулировка первой теоремы двойственности. Теорема об оптимальном плане
двойственной задачи.
15. Вторая теорема двойственности.
16. Третья теорема двойственности.
17. Двойственный симплекс-метод.

18. Постановка транспортной задачи (ТЗ). Особенности ТЗ.
19. Закрытая и открытая модели транспортной задачи. Приведение открытой ТЗ к закрытой.
20. Теоремы о свойствах ТЗ. Вырожденные и невырожденные планы ТЗ.
21. Методы построения начального опорного плана ТЗ. Метод потенциалов решения ТЗ.
22. Алгоритм улучшения плана ТЗ. Понятие цикла. Снятие вырожденности плана.

Вопросы к модулю 2.

1. Сформулируйте определение задачи нелинейного программирования.
2. Какие существуют типы задачи НП, чем они различаются?
3. Сформулируйте необходимые условия оптимальности в задаче безусловной оптимизации.
4. В чем заключается метод множителей Лагранжа?
5. Сформулируйте теорему Куна-Таккера.
6. В каких случаях необходимые условия оптимальности в задаче НП также являются и достаточными?
7. Какое множество называется выпуклым?
8. Дайте определение выпуклой и вогнутой функции.
9. Что представляет собой задача квадратичного программирования?
- 27
10. Что математически представляет собой портфель ценных бумаг?
11. Какие существуют характеристики у портфеля ценных бумаг?
12. Какая характеристика измеряет риск портфеля ЦБ?
13. В чем отличие модели Марковица от модели Блэка?
14. Как может ставиться задача нахождения оптимального двухбумажного портфеля ЦБ?
15. Как ставится простейшая задача управления запасами?
16. Что такое экономичный размер заказа?
17. Что такое точка заказа?
18. Является ли задача управления запасами с ограничением на

емкость склада задачей нелинейного программирования? Если «да», то какого типа?

Вопросы к модулю 3.

1 Что такое динамическое программирование (ДП)? Дать определение и изложить теоретическую основу метода ДП.

2 Общая схема многошаговых процессов принятия решений. Управляемые системы.

3 Сформулировать принцип оптимальности Беллмана и рекуррентные соотношения Беллмана.

4 Основные требования к структуре решаемой задачи, необходимые для применения метода динамического программирования (ДП).

5 Условная и безусловная оптимизация в задачах ДП.

6 Рекуррентные соотношения задачи об оптимальной стратегии обновления оборудования.

7 Рекуррентные соотношения задачи оптимального распределения ресурсов.

8 Рекуррентные соотношения задачи минимизации затрат на строительство и эксплуатацию предприятий.

9 Рекуррентные соотношения задачи о загрузке транспортного средства. Рекуррентные соотношения задачи выбора оптимального маршрута.