БРИТ А.А.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА: МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ

ЧАСТЬ 1

ББК 22.17

Рецензенты:

Кузнецова Александра Сергеевна, к.ф.-м.н., доцент кафедры прикладной математики СибГУ имени академика М. Ф. Решетнева

Сабодах Ирина Валерьевна, к.ф.-м.н., доцент кафедры экономической и финансовой безопасности СФУ.

Брит А.А.
Теория вероятностей и математическая статистика: методы обработки информации [Электронный ресурс]: учебное пособие / А.А. Брит; Краснояр. гос. аграр. ун-т. – Красноярский ГАУ, 2024. – Ч.1 – 103с.

В учебном пособии рассматриваются вопросы обработки информации с помощью методов теории вероятностей, относящихся к разделу Случайные события.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению 09.03.03 «Прикладная информатика», может быть полезно лицам, желающим изучить основы теории вероятностей и математической статистики.

ББК 22.17

ВВЕДЕНИЕ

Теория вероятностей является одним из основных инструментов для специалистов, занимающихся анализом данных, машинным обучением, кибербезопасностью и многими другими направлениями, которые основываются на обработке и интерпретации информации.

Теория вероятностей охватывает широкий спектр областей и включает как решение повседневных задач, так и проведение сложных научных исследований.

Эта наука предоставляет математический фундамент для оценки рисков и возможных исходов, в различных сферах таких, как финансы, страхование, управление рисками, логистика и т.д. с целью формирования стратегий, минимизации возможных убытков и максимизации ожидаемых выгод. Применяется в таких областях, как физика, химия и биология, для анализа экспериментальных данных и моделирования случайных процессов, например, в квантовой механике или генетике, и позволяет делать обоснованные выводы на основании различных данных. Вероятностные модели используются для оценки изменения климата, оценки экстремальных погодных условий и их воздействия на окружающую среду, они важны для планирования и разработки стратегий адаптации и смягчения последствий.

Теория вероятностей оказывает значительное влияние на развитие области информатики и информационных технологий. При анализе больших данных она является основой для алгоритмов машинного обучения, включая наивный байесовский классификатор, марковские модели и алгоритмы случайных лесов, которые основаны на оценке вероятностей различных исходов, что позволяет производить машинное обучение на основе данных, осуществлять предсказания или принимать решения. Вероятностные методы применяются для анализа изображений и звуков, что необходимо в задачах компьютерного зрения и обработки естественного языка. Методы байесовского восстановления изображений помогают улучшить качество изображений, уменьшая шум и улучшая детализацию на основании статистической информации о вероятных значениях пикселей. Также используются вероятностные модели для распознавания объектов на изображениях. Применяется для моделирования и анализа сетевого трафика, обеспечивая качество обслуживания и управления ресурсами в распределенных системах, что является особенно актуальной задачей для стабильной работы и эффективного использования современных телекоммуникационных сетей. В системах IoT помогает управлять и анализировать потоки данных множества устройств, предсказывает сбои и оптимизирует производительность системы. Оценка вероятности кибератак и разработка стратегий их предотвращения зависят от понимания случайных процессов и статистического анализа, что делает теорию вероятностей незаменимым инструментом в области информационной безопасности. В криптографии теория вероятностей используется для оценки стойкости шифров и разработки криптографических систем, которые сложно взломать. Например, анализ вероятности успеха различных атак помогает разработчикам улучшать безопасность криптографических методов. Кроме того, теория вероятностей используется для разработки игр, не только азартных, но и видеоигр. Она применяется при моделирования различных исходов, повышения увлекательности прохождения уровней игры и справедливой оценке перехода персонажа из одного уровня в другой.

Эти примеры указывают на многообразнообразие применения понятий и методов теории вероятностей. Она остается необходимым инструментом при решении научных, учебных и практико-ориентированных задач. Кроме того, теория вероятностей позволяет обеспечивать фундаментальные подходы для решения широкого круга задач в области обработки информации.

Раздел 1. Теория вероятностей
Глава 1. Случайные события

1.1 Пространство элементарных событий

Любая наука имеет свои исходные понятия, через которые определяются другие понятия. Изучение явлений происходит путем наблюдений и опытов, проводимых при определенных условиях. Одним из исходных понятий теории вероятностей является понятие «испытание».

> ***Определение 1.*** *Испытание (опыт)* – это процесс наблюдения за каким-либо явлением при соблюдении определенных условий, которые должны строго выполняться каждый раз при повторении данного испытания.

Если то же самое явление наблюдается при другом комплексе условий, то это уже другое испытание.

О соблюдении комплекса условий данного испытания можно говорить в случае постоянства значений всех факторов, контролируемых в данном испытании. Однако при этом, имеет место большое число неконтролируемых факторов, которые зачастую очень трудно или невозможно учесть.

> ***Определение 2.*** *Элементарным событием* называется каждый неразложимый исход опыта.
>
> ***Определение 3.*** *Пространство* $\mathbf{\Omega}$ представляет все возможные элементарные исходы испытания (опыта).

Отметим, что любое подмножество A множества $\mathbf{\Omega}$ называется событием.

Пространство (множество) всех элементарных событий обозначается заглавной буквой греческого алфавита $\mathbf{\Omega}$ (омега):

$$\mathbf{\Omega} = \{\boldsymbol{\omega_i} \mid \boldsymbol{\omega_i} \in \mathbf{A}, \mathbf{A} \subseteq \mathbf{\Omega} \text{ при } \boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \boldsymbol{n}\},$$

где ω_i – i-ое элементарное событие,
n – количество элементарных событий (исходов опыта),
A – событие.

Чаще всего интерес вызывают целые группы исходов, а не отдельно взятые исходы.

Обратим внимание на то, что термин «произведено наблюдение при осуществлении определенного комплекса условий» заменяется на термин «произведено испытание» в случае, когда предполагается, что данный комплекс условий может быть воспроизведен сколь угодно большое число раз.

> ***Определение 2.*** *Случайным событием* называется событие, которое в условиях данного опыта (действия или эксперимента) может произойти, а может и не произойти.
>
> ***Обозначение:*** *A, B, C, ….*

События обозначаются заглавными буквами латинского алфавита. Событие рассматривается, как возможный исход опыта (действия или эксперимента).

Пример 1.

а) подбрасывание игрального кубика – испытание, выпадение числа два на верхней грани игрального кубика – событие;

б) стрельба по мишени – испытание, попадание по мишени – событие;

в) подбрасывание монеты – испытание, выпадение орла – событие;

г) извлечение одного шара из корзины – испытание, извлечен белый шар из корзины – событие.

> ***Определение 5.*** Событие *A происходит* тогда, когда результатом опыта является одно из элементарных событий, входящих в *A*.

Пространство (множество) всех элементарных событий $\mathbf{\Omega}$ изображается в виде некоторой области на плоскости, элементарные события $\boldsymbol{\omega_i}$ – в виде точек в этой области, событие *A* – *части* области на *плоскости* $\mathbf{\Omega}$. (рис. 1.1)

Изображение представляется с помощью диаграмм Эйлера-Венна, которые служат для наглядного представления всех вариантов расположения нескольких множеств.

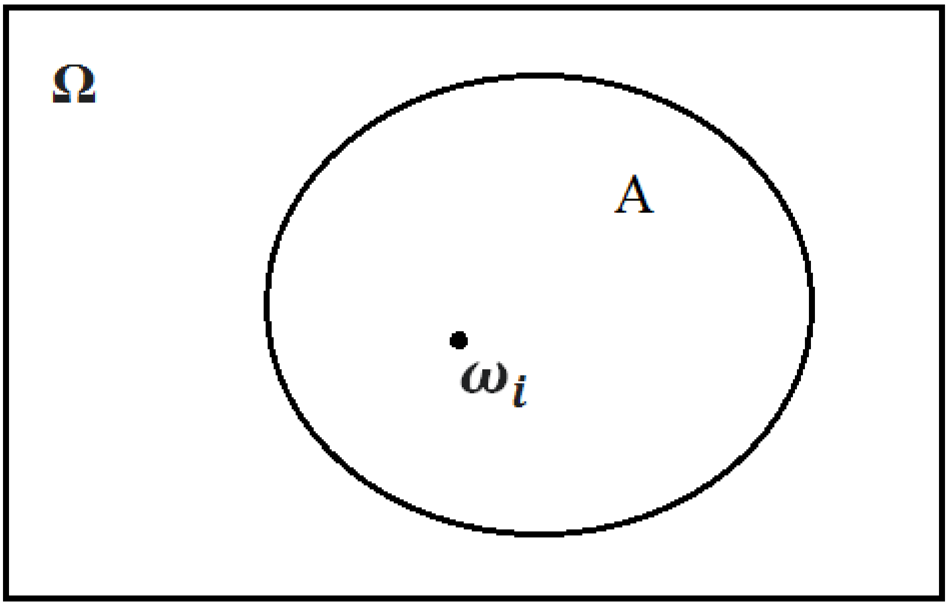


Рисунок 1.1 – Изображение пространства всех элементарных событий

Пространство (множество) всех элементарных событий **Ω** может быть *конечным* или *бесконечным* (счетным или несчетным). Если оно конечное или счетное, то множество исходов является дискретным, если несчетное, то множество исходов - непрерывное.

Пример 2.

При подбрасывании игрального кубика выпало число 2. Выполните задание: а) определите пространство элементарных событий, б) укажите испытание, в) укажите событие.

Решение.

а) опишем *пространство элементарных событий* с помощью простого перечисления элементов множества $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

б) испытание заключается в подбрасывании игрального кубика.

в) случайное событие А – выпадение числа два на верхней грани игрального кубика.

Определение 6. Событие *А влечет* за собой событие *В* (или событие *В включает* событие *А*), если при каждом испытании появление события *А* влечет за собой появление события *В*.

Обозначение: $A \subset B$.

Определение 7. Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то события *А* и *В* являются *равносильными*.

Обозначение: $A = B$.

Случайные события подразделяются на следующие виды: равновозможные, несовместные и совместные.

Определение 8. События называются *равновозможными*, если нет никаких объективных оснований считать, что одно событие является более возможным, чем другие события.

Пример 3.

Равновозможными являются следующие события:

а) выпадение орла или решки при подбрасывании монеты;

б) выпадение 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков при подбрасывании игрального кубика.

Определение 9. События A и B называют *совместными*, если в условиях данного опыта могут произойти одновременно.

Определение 10. События A и B называют *несовместными*, если в условиях данного опыта они не могут произойти одновременно.

Пример 4.

Несовместными являются следующие события:

а) получение студентом по одному предмету нескольких оценок – «отлично», «хорошо», «удовлетворительно»;

б) выигрыш по одному билету двух призов в лотерее.

Совместными являются следующие события:

а) получение студентом по трем предметам нескольких оценок – «отлично», «хорошо», «удовлетворительно»;

б) выигрыш двух призов по двум билетам.

Определение 11. Событие является достоверным, если оно наступает (заведомо произойдет).

Обозначение: Ω.

Определение 12. Событие называется невозможным, если в условиях данного опыта оно не наступает.

Обозначение: $\emptyset$.

Невозможное событие не содержит ни одного элементарного исхода.

Пример 5.

Достоверными являются следующие события:

а) при подбрасывании игрального кубика выпадение очков от 1 до 6;

б) из коробки с белыми шарами вынули белый шар.

Невозможными являются следующие события:
а) выпадение числа 7 при подбрасывании игрального кубика;
б) из коробки с белыми шарами вынули красный шар.

Операции над случайными событиями

С помощью операций над случайными событиями можно сложное событие разложить на более простые и, наоборот, из простых событий составить выражение для описания сложного события.

1. Сумма событий.

Определение 13. *Суммой* случайных событий A и B называется такое событие C, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно событие.

Обозначение: $A + B$.

Свойства операции *сложения*.

1. Коммутативность: $A + B = B + A$;
2. Ассоциативность: $(A + B) + C = A + (B + C)$.

В таблице 1.1 представлена таблица истинности для суммы случайных событий A и B, где знак «+» означает, что событие произошло, знак «-» означает, что событие не произошло.

Таблица 1.1. Таблица истинности события $A + B$

A	***B***	***A+B***
+	+	+
+	-	+
-	+	+
-	-	-

В соответствии с определением операции сложения событие $A + B$ не происходит, если оба события не происходят одновременно.

На рисунке 1.2 изображено графическое представление суммы двух совместных событий.

Если события A и B являются совместными, то их сумма означает наступление или события A, или события B, или событий A и B одновременно.

Если события A и B являются не совместные, то их сумма означает наступление или события A, или события B.

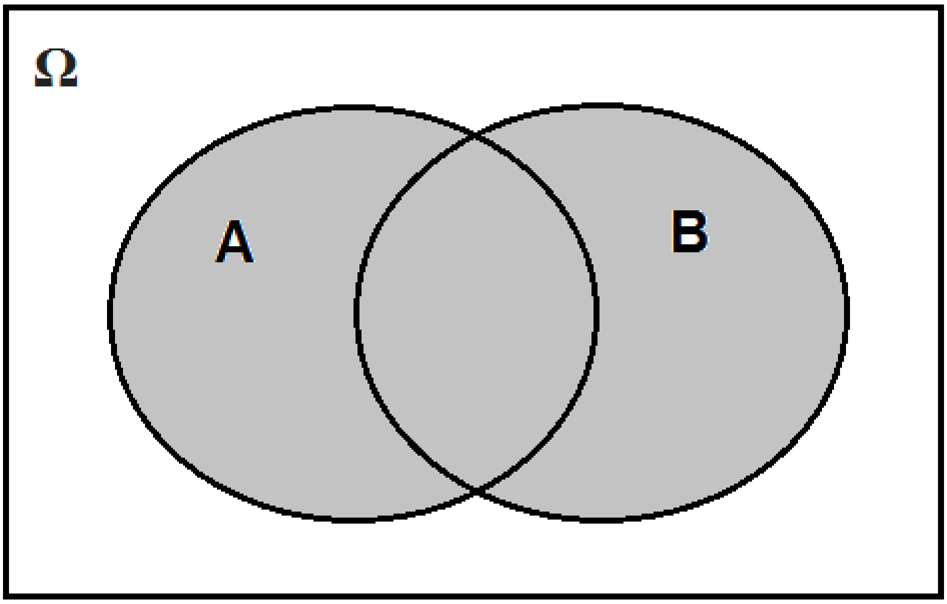


Рисунок 1.2 – Сумма событий A и B

Пример 6.

Пусть даны события А – студент получил оценку отлично за экзамен по математике, B – студент получил оценку хорошо за экзамен по информатике, тогда событие означает:
$A + B$ – студент получил *или* оценку отлично за экзамен по математике, *или* студент получил оценку хорошо за экзамен по информатике, *или* студент получил отлично за экзамен по математике и оценку хорошо за экзамен по информатике.

2. Произведение событий

Определение 14. *Произведением* случайных событий A и B называют такое событие C, которое происходит тогда и только тогда, когда происходят оба события.

Свойства операции *умножения*.
1. *Коммутативность*: $A \cdot B = B \cdot A$;
2. *Ассоциативность*: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

Свойства операций *сложения* и *умножения*.
1. *Дистрибутивность* относительно сложения:

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C.$$

2. Дистрибутивность относительно умножения:

$$A \cdot B + C = (A + C) \cdot (B + C).$$

В таблице 1.2 представлена таблица истинности для произведения случайных событий *A* и *B*.

Таблица 1.2. Таблица истинности события $A \cdot B$

A	***B***	***A·B***
+	+	+
+	-	-
-	+	-
-	-	-

В соответствии с определением операции произведения событие $A \cdot B$ не происходит, если не происходит хотя бы одно событие.

На рисунке 1.3 изображено графическое представление суммы двух совместных событий.

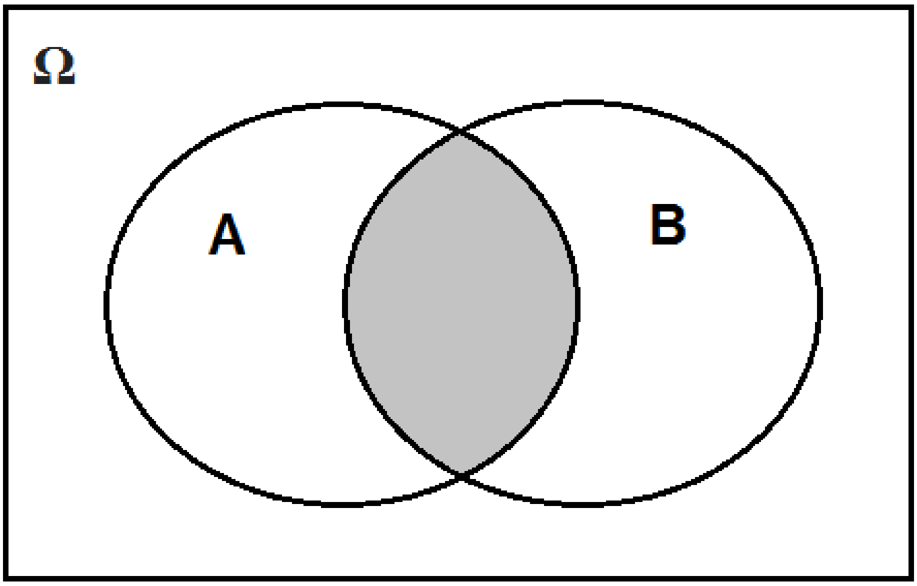


Рисунок 1.3 – Произведение событий *A* и *B*

Если события А и В являются совместными, то их произведение означает наступление события А и события В одновременно.

Если события А и В являются не совместные, это означает, что события не могут произойти одновременно и тогда $A \cdot B$ – невозможное событие, т.е. $A \cdot B = \emptyset$.

Пример 7.

Пусть даны события А – студент получил оценку отлично за экзамен по математике, B – студент получил оценку хорошо за экзамен по информатике, тогда событие означает:

$A \cdot B$ – студент получил отлично за экзамен по математике *и* оценку хорошо за экзамен по информатике.

3. Противоположное событие

Определение 15. *Противоположным* к случайному событию A называется событие $\overline{A}$, которое в условиях данного опыта происходит тогда и только тогда, когда A не происходит.

В таблице 1.3 представлена таблица истинности для события $\overline{A}$.

Таблица 1.3. Таблица истинности события $\overline{A}$

$\boldsymbol{A}$	$\overline{\boldsymbol{A}}$
+	-
-	+

На рисунке 1.4 изображено графическое представление суммы двух событий.

События A и $\overline{A}$ являются несовместными, следовательно, их произведение есть пустое множество: $A \cdot \overline{A} = \emptyset$. События A и $\overline{A}$ составляют пространство элементарных исходов, т.е. $A + \overline{A} = \Omega$.

Пример 8.

Пусть даны события А – студент получил оценку отлично за экзамен по математике, B - студент получил оценку хорошо за экзамен по информатике, тогда событие означает: $\overline{A}$ – студент не получил отлично за экзамен по математике.

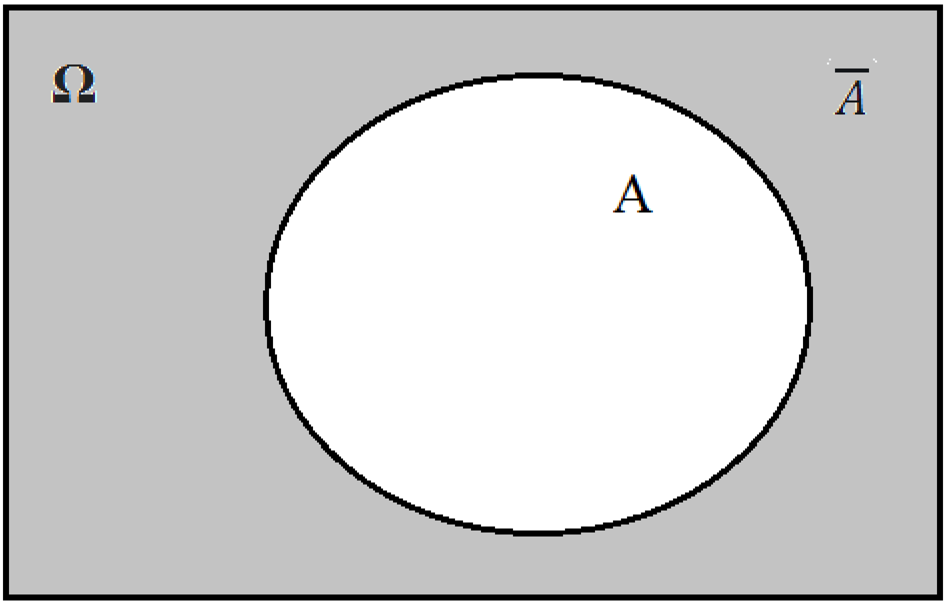


Рисунок 1.4 – Противоположное событие $\overline{A}$

Пример 9.

а) Событие A - студент сдал экзамен на отлично, то событие $\overline{A}$ - студент сдал экзамен на хорошо или удовлетворительно, или студент не сдал экзамен.

б) Событие A – хотя бы одна пуля при четырех выстрелах попадает в цель, то событие $\overline{A}$ – ни одна из пуль не попадает в цель.

4. Разность событий

Определение 16. *Разностью* случайных событий A и B называют событие C, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит событие A, а событие B не происходит.

В таблице 1.4 представлена таблица истинности для разности случайных событий A и B.

Таблица 1.4. Таблица истинности события $A \setminus B$

A	***B***	***A\B***
+	+	+
+	-	+
-	+	-
-	-	-

В соответствии с определением операции разности событие $A \setminus B$ происходит только в случае, если происходит событие A.

На рисунке 1.5 изображено графическое представление разности двух совместных событий.

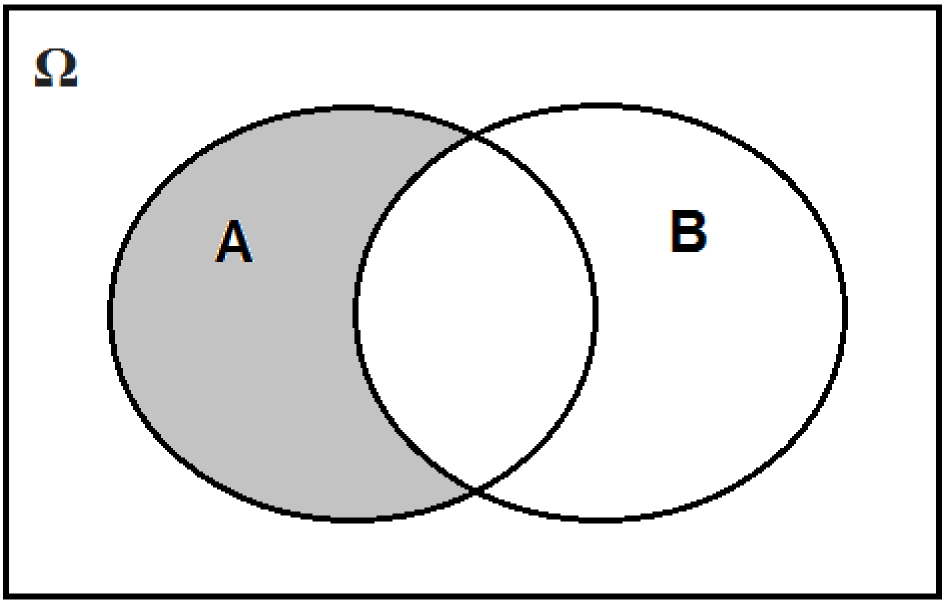


Рисунок 1.5 – Разность событий A и B

Если события A и B являются совместными, то их разность означает наступление события А и не наступление события $A \cdot B$.

Если события A и B являются не совместные, то их разность означает наступление события А полностью.

Пример 10.

Пусть даны события А – студент получил оценку отлично за экзамен по математике, B – студент получил оценку хорошо за экзамен по информатике, тогда событие означает:

$A \setminus B$ – студент получил отлично за экзамен по математике *и не* получил оценку хорошо за экзамен по информатике.

> ***Определение 17.*** События $A_1, A_2, \dots, A_n$ образуют полную группу событий Ω, если $A_1 + A_2 + \dots + A_n = \boldsymbol{\Omega}$ и $A_i A_j = \emptyset$ для $i \neq j$ при $i,\ j = 1, 2, \dots, n$.

Пример 11. Опыт состоит в том, что игральный кубик подбрасывается один раз.

Определены события:

А – при подбрасывании игрального кубика выпало число 2;

B – при подбрасывании игрального кубика выпали числа более 3;

C – при подбрасывании игрального кубика выпали четные числа;

D – при подбрасывании игрального кубика выпало число, кратное 5.

1) Укажите, что означают события: $A + B$, $A \cdot B, B \cdot C$, $\bar{B}$, $A \cdot D$, $A \cdot \bar{D}$, $\bar{A} + C$?

Решение:

$A + B$ – при подбрасывании игрального кубика выпало число 2 или числа более 3, т.е. $\mathrm{A} + \mathrm{B} = \{2, 4, 5, 6\}$;

$A \cdot B$ – невозможное событие, т.к. события A и B являются несовместными;

$B \cdot C -$ при подбрасывании игрального кубика выпали числа 4 или 6, т.е. $\mathrm{B} \cdot \mathrm{C} = \{4, 6\}$;

$\bar{B}$ – при подбрасывании игрального кубика выпали числа не более 3, т.е. $\bar{\mathrm{B}} = \{1, 2, 3\}$;

$A \cdot D -$ невозможное событие, т.к. события A и B являются несовместными;

$A \cdot \bar{D}$ – при подбрасывании игрального кубика выпало число 2, т.е. $\mathrm{A} \cdot \bar{\mathrm{D}} = \{2\}$;

$\bar{A} + C$ – при подбрасывании игрального кубика выпали числа 4 или 6, т.е. $\bar{\mathrm{A}} + \mathrm{C} = \{4, 6\}$.

2) Определите, какими будут события AB, AC по отношению друг к другу?

Ответ:

$A, B -$ несовметные события;

$A, C -$ совместные события.

Пример 12.

Из 25 опрошенных человек 20 человек увлекаются бегом, 9 человек увлекаются – плаванием, 6 человек увлекаются – бегом и плаванием. Постройте диаграмму Эйлера-Венна и опишите, что означают события $A \cdot \bar{B}$, $\bar{A} \cdot B$, $\overline{A + B}$.

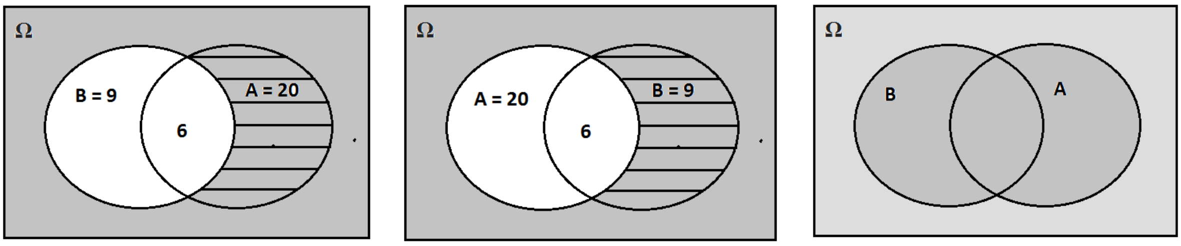
Решение:

Опишем события.

Пусть событие A – люди, которые увлекаются бегом,
событие B – люди, которые увлекаются плаванием.

Тогда событие $A \cdot B$ – люди, которые увлекаются бегом и плаванием.

На рисунке 1.6 построены диаграммы Эйлера-Венна для событий $A \cdot \bar{B}$, $\bar{A} \cdot B$, $\overline{A + B}$.



а) б) в)

Рисунок 1.6 – диаграммы Эйлера-Венна для событий: а)$A \cdot \bar{B}$; б) $\bar{A} \cdot B$, в) $\overline{A + B}$.

Опишем события:

$A \cdot \bar{B}$ – люди, которые увлекаются только бегом,

$\bar{A} \cdot B$ – люди, которые увлекаются только плаванием,

$\overline{A + B}$ – люди, которые не увлекаются ни бегом, ни плаванием.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение понятию «исход»? Приведите примеры.
2. Какие события называют случайными? Приведите примеры.
3. Какие события называют элементарными? Приведите примеры.
4. Дайте определение понятию «пространство элементарных событий».
5. В каком случае говорят, что событие A *влечет* за собой событие B?
6. Какие события называются равносильными?
7. Дайте определение понятию «равновозможные события». Приведите примеры.
8. В чем различие между совместными и несовместными событиями? Приведите примеры.
9. Какие события называются достоверными? Невозможными? Приведите примеры.
10. Какие операции над случайными событиями вы знаете? Опишите их. Приведите примеры.

11. Изобразите с помощью диаграмм Эйлера-Венна операции над случайными событиями.
12. Перечислите свойства операций над случайными событиями.
13. Чему равна сумма событий A и B, если события A и B являются не совместными?
14. Чему равно произведение событий A и B, если события A и B являются не совместными?
15. При каких условиях события $A_1, A_2, \dots, A_n$ образуют полную группу событий Ω?

Задание для самостоятельной работы

1. Укажите пространство элементарных событий Ω для следующих испытаний:

а) производится подбрасывание игрального кубика,

б) производится выстрел по мишени, представляющий собой 10 концентрических кругов,

в) проводится футбольный матч между двумя командами,

г) извлекается одна кость из полной игры домино,

д) из корзины извлекается один шар, при условии, что в корзине находится 5 синих и 3 зеленых шара,

е) из корзины извлекается два шара, при условии, что в корзине находится 5 синих и 3 зеленых шара,

ж) три изделия проверяются на стандартность.

2. На 10 карточках указаны числа от 1 до 50. Выбирается одна карточка. Укажите ответы, в которых указаны всевозможные исходы испытания:

а) $\{x | x \in [1; 50], x - \text{четные числа}, x - \text{нечетные числа}\}$;

б) $\{\text{простые числа}, 14, 28, 39, 50\}$;

в) $\{x | x \in [1; 50],\ x - \text{простые числа}, x \vdots 2,\ x \vdots 3, x \vdots 5, x \vdots 7\}$;

г) $\{x | x \in (1; 50), \text{числа, не более } 30;\ \text{числа, не менее } 31\}$.

3. Укажите все возможные исходы испытания, состоящего в двукратном броске игрального кубика:

а) все элементы являются упорядоченными парами $\{m, n\}$;

б) все элементы являются неупорядоченными парами $\{m, n\}$;

в) все элементы являются суммами m и n.

4. Определите примеры, в которых указаны все возможные исходы испытания:

а) выигрыш-проигрыш в шахматную партию,

б) Выпадение герба или решки при двукратном подбрасывании монеты в указанном порядке: герб-герб, герб-решка, решка-решка,

в) промах при одном выстреле,

г) появление числа от 1 до 6 при однократном подбрасывании кубика.

5. Найдите количество элементарных событий:

а) число очков, выпавшее на верхней грани игрального кубика – четное;

б) появление пары однозначных чисел $(m;\,n)$, сумма выбранных однозначных чисел равна 15;

в) появление игральной кости из игры в домино такой, что для пары чисел $(m;\,n)$ на кости выполняются условия: m и n принимают значения $0,..,6$ и $m < n$;

г) появление игральной кости из игры в домино такой, что для пары чисел $(m;\,n)$ на кости выполняются условия: m делится на цело на n;

д) выбранные слова из множества $A\ = \{\text{опыт}, \text{испытание}, \text{множество}, \text{событие}, \text{диаграмма}, \text{операции}\}$ содержит не менее четырех гласных.

6. Найдите:

а) сумму и произведение событий А и В, если событие В является частным случаем события А.

б) событие $\mathrm{A} + \mathrm{A}$,

в) событие $\mathrm{A} \cdot \mathrm{A}$,

г) при каких условиях события $A \cdot \mathrm{C}$ и A равносильны?

д) при каких условиях выполняются равенства: $A \cdot B \cdot \mathrm{C} =\ A$ и $A + B + \mathrm{C} =\ A$?

7. Пусть даны три произвольные события A, B и C. Составьте выражения для следующих событий:

а) все три события произошли;

б) произошли события A и C, событие B – не произошло;

в) произошло только одно событие;

г) произошло только событие A, события B и C не произошли;

д) произошли только два события;

е) произошло, по крайней мере, одно из этих событий;
ж) произошло, по крайней мере, два события;
з) ни одно событие не произошло;
и) произошло не более двух событий.

8. Постройте множество элементарных исходов Ω при условии, что кубик подбрасывается один раз. Выразите через исходы Ω следующие события: A = {на верхней грани выпало нечетное число очков}, B = {на верхней грани выпало число очков, кратное 5}.

9. Постройте множество элементарных исходов Ω при условии, что одновременно подбрасывается две монеты. Выразите через исходы Ω следующие события: A = {герб выпадает на одной монете}, B = {герб выпадает на двух монетах}, C = {герб выпадает не менее, чем на одной монете}.

10. Постройте множество элементарных исходов Ω при условии, что монета подбрасывается три раза. Выразите через исходы Ω следующие события: A = {герб выпадает на одной монете}, B = {герб выпадает на двух монетах}, C = {ни разу не выпадает решка}, D = {выпадает больше гербов, чем решек}, E = {герб выпадает не менее, чем два раза подряд}. Определите события $A + D$, $A \cdot \mathrm{C}$, $\bar{A} \cdot B$, $D \setminus E$, $\bar{D}$, $\bar{E}$.

11. Постройте множество элементарных исходов Ω при условии, что три изделия проверяются на стандартность. Выразите через исходы Ω следующие события: A = {все изделия нестандартны}, B = {хотя бы одно изделие стандартно}. Определите события $A + B$, $A \cdot B$, $\bar{A} \cdot B$, $A \setminus B$.

12. Из корзины, в которой находятся зеленые и синие шары, производится последовательное извлечение шаров. Пусть событие A_k означает, что при k-ом извлечении шара из корзины появится зеленый шар при k=1,2,3, ... Опишите события $A_1 \cdot A_2$, $\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} \cdot A_4$, $\overline{A_1} \cdot A_2 + \overline{A_3} \cdot A_4$, $\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} \cdot A_4 + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 \cdot \overline{A_4}$.

13. Двухмоторный самолет терпит аварию, если одновременно отказывают оба двигателя или выходит из строя система управления. Событие A_k означает, что выходит из строя -ый двигатель при $k = 1, 2$, событие B означает, что выходит из строя система управления. Опишите через события A_k и B событие C, при котором самолет терпит аварию, и обратное ему событие $\bar{C}$.

14. Постройте множество элементарных исходов Ω при условии, что по одному карандашу, вытаскивают из двух коробок. В коробках находятся черные и синие карандаши. Обозначим через событие A_k – вытащен черный карандаш из k-ой коробки, при $k = 1, 2$. Представить в алгебре событий A_1 и A_2 следующие события: A = {вытащено два синих карандаша}, B = {вытащено два черных карандаша}, C = {вытащены карандаши одного цвета}, D = {вытащены карандаши разных цветов}. Определите события $A + B$, $A \cdot B$, $A \cdot C$, $A + D$, $D \cdot B$, $C \setminus A$.

15. Пусть на плоскость наудачу бросается точка. Событие А – точка попадает в квадрат, событие В – точка попадает в трапецию. Опишите следующие события: $\bar{A}$, $\bar{B}$, $A + B$, $\overline{A + B}$, $A \cdot B$, $\overline{A \cdot B}$.

16. Имеется 10 концентрических окружностей с радиусами r_i, такие, что $r_1 < r_2 < r_3 < \cdots < r_{10}$. Событие A_i заключается в попадании при стрельбе в круг радиуса r_i. Определите следующие события:

а) I = $\bar{A}_1 \cdot A_2$;

б) J = $A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_{3;}$

в) Q = $\sum_{i=5}^{7} \bar{A}_i$;

г) P = $\sum_{i=1}^{3} A_i$;

д) S = $\prod_{i=4}^{9} A_i$;

е) T = $\prod_{i=2}^{5} \bar{A}_i$.

17. Укажите, какие из событий являются: 1) случайными: 2) достоверными; 3) невозможными:

a) выигрыш по одному билету лотереи;

b) извлечение из урны цветного шара, если там два зеленых, четыре желтых;

c) получение абитуриентом 400 балов на вступительном экзамене в университете при сдаче 3 экзаменов со стобальная системой оценивания;

d) выпадение не более 6 очков на верхней грани игрального кубика.

18. Являются ли события A и $\overline{A + B}$ совместными?

19. Являются ли события A и $\overline{A \cdot B}$ совместными?

20. Докажите:

а) $A \cdot \bar{B} + B = A + \bar{A} \cdot B$,

б) $\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$,

в) $(A + B) \cdot C = A \cdot B + A \cdot C$,

г) что события A, $\bar{A} \cdot B$, $\overline{A + B}$ образуют полную группу.

1.2 Понятие вероятности

Понятие вероятности события в теории вероятностей является основным, не определяемым через другие понятия. Существует несколько подходов, поясняющих понятие вероятности.

1.2.1 Классическое определение вероятности

Вероятность события характеризует степень объективной возможности появления этого события.

В процессе практической деятельности важным умением становится – сравнение событий по степени возможности их наступления. Для возможности сравнения необходима некоторая мера, коей и является вероятность события. Т.е. вероятность события есть некоторая количественная характеристика события, определяющая степень возможности его появления в результате проведения некоторого опыта.

Определение 1. *Вероятностью события A* называется отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу.

Обозначение: $P(A)$.

Формула *классической вероятности*:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m – число благоприятствующих событию А исходов,

n – число всех равновозможных несовместных элементарных исходов.

Случай, когда события являются равновозможными, называется классическим, поэтому и вероятность называют «классической».

Благоприятными (благоприятствующими) исходами являются элементарные события, входящие в событие A. Все равновозможные несовместные элементарные исходы представляют собой пространство всех элементарных исходов $\boldsymbol{\Omega}$.

Пример 1.

Абонент забыл одну цифру номера телефона и набрал её, надеясь на удачу. Найдите вероятность того, что абонент набрал нужную цифру.

Решение:

Событие А – абонент набрал нужную цифру.

Набрать нужную цифру (благоприятное событие) у абонента одна возможность, т.е. $m = 1$.

Всего цифр, которые возможно подставить в номер, – 10. $\Omega = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, т.е. $n = 10$.

Тогда

$$P(A) = \frac{1}{10}.$$

Ответ: вероятность того, что абонент набрал нужную цифру, равна 0,1.

Пример 2.

На четырех карточках написаны числа 1, 2, 3, 4. Найдите вероятность того, что сумма чисел на трех выбранных карточках делится на два?

Решение:

Событие В – сумма чисел на трех выбранных карточках делится на два.

Далее опишем все возможные комбинации карточек:

1) 1+2+3; 2) 1+2+4; 3) 1+3+4; 4) 2+3+4.

Таким образом, m = 2, n = 4.

Тогда

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: вероятность того, что сумма чисел на трех выбранных карточках делится на два, равна 0,5.

Свойства вероятности событий:

1. Вероятность достоверного события равна единице.

Доказательство:

Так как событие является достоверным, то количество исходов благоприятствующего события равно количеству всех возможных исходов опыта, т.е. $m = n$.

Значит

$$P(A) = \frac{n}{n} = 1.$$

2. Вероятность невозможного события равна нулю.

Доказательство:

Так как событие является невозможным, то количество исходов благоприятствующего события равно нулю, т.е. $m = 0$.

Значит

$$P(A) = \frac{0}{n} = 0.$$

3. Вероятность случайного события есть число, принадлежащее интервалу от нуля до единицы, т.е. $0 < P(A) < 1$.

Доказательство:

Так как событие является случайным, то количество исходов благоприятствующего события удовлетворяет неравенству:

$$0 < m << 1.$$

Значит $0 < P(A) < 1$.

4. Вероятность произвольного события есть число, принадлежащее отрезку от нуля до единицы, т.е. $0 \leq P(A) \leq 1$.

Доказательство:

Произвольное событие – любое событие, которое может быть ка случайным, так достоверным или невозможным, учитывая свойства 1-3, получим, что $0 \leq P(A) \leq 1$.

Классическое определение вероятности имеет ряд достоинств, это, прежде всего, простота применения и интуитивная наглядность. Кроме того, имеет и существенный недостаток - применяется только для конечного или счетного множества элементарных событий. Т.е. классическое определение не распространяется на случай бесконечного множества элементарных событий.

В настоящее время получило распространение аксиоматическое построение теории вероятностей.

Аксиоматическое построение теории вероятностей

В математике аксиомами называются утверждения (правила), которые принимаются за истинные и в пределах данной теории не требуют доказательства. Все остальные положения этой теории доказываются с помощью принятых аксиом.

Формулировка аксиом не является первичной стадией развития математической науки. Она представляет собой результат длительного накопления фактов и анализ полученных результатов с целью выявления основных первичных фактов. Аксиоматическое построение основ теории вероятностей произошло в недавнем прошлом.

Попытки решения задачи об аксиоматическом построении теории вероятностей предпринимали Г. Больман в 1908 году, С.Н. Бернштейн в 1917 году, Р. Мизес в 1919 и 1928 годах, а также А. Ломницкий в 1923 году.

В настоящее время общепринятой считается *аксиоматика* советского математика, основоположника современной теории вероятностей, *А.Н. Колмогорова*, которую он предложил в 1933 году в монографии «Основные понятия теории вероятностей», которая была опубликована на немецком и русском языках. В этой работе завершается построение теории вероятностей, как целостной системы математической теории, основанной на теории меры и связывающей теорию вероятностей с теорией множеств (таблица 2.1).

Таблица 2.1. Таблица соответствия терминов теории множеств и теории вероятностей

Термины теории вероятностей	**Термины теории множеств**
Основные понятия	
Пространство элементарных событий	Множество
Элементарное событие	Элемент множества
Событие	Подмножество
Невозможное событие	Пустое множество
Несовместные события	Не пересекающиеся множества
Равносильные события	Равные множества
Событие А влечет за собой событие В	Множество А есть подмножество множества В
Операции	
Сумма событий	Объединение множеств
Произведение событий	Пересечение множеств
Противоположное событие	Дополнение множества

При аксиоматическом построении теории вероятностей термин «вероятность» вводится как числовая функция *P(A)*, заданная на множестве событий *A*, определенных данным опытом.

Аксиомы, определяющие вероятность:

Аксиома 1 (Аксиома неотрицательности).

Каждому событию A, определенному на множестве **Ω**, *поставлено в соответствие неотрицательное действительное число P(A), которая называется вероятностью события A, т.е.*

$$P(A) \geq 0.$$

Аксиома 2 (Аксиома нормировки).

Вероятность достоверного события равна единице.

$$P(\boldsymbol{\Omega}) = 1.$$

Аксиома 3 (Аксиома сложения).

Вероятность наступления хотя бы одного из попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n),$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – попарно несовместные события.

Исходя из этих аксиом, свойства вероятностей и зависимости между ними выводят в качестве теорем.

Контрольные вопросы

1. Дайте определения понятию «вероятность», как качественной характеристике, количественной характеристике.
2. Укажите формулу классической вероятности? В каких случаях она применяется?
3. Какие события называют благоприятными? Приведите примеры.
4. Перечислите свойства вероятности событий. Докажите их.
5. Укажите достоинства и недостатки классической вероятности.

6. Опишите, в чем заключается сущность аксиоматического построения теории.
7. Кто является автором общепринятой аксиоматической теории?
8. Какие понятия легли в основу построенной аксиоматической теории?
9. Сопоставьте термины теории множеств с соответствующими терминами теории вероятностей.
10. Перечислите основные аксиомы, определяющие вероятность события.

Задание для самостоятельной работы

1. Монета подбрасывается однократно. Найдите вероятность выпадения герба.

2. Монета подбрасывается дважды. Найдите вероятности:

а) выпадения двух гербов,

б) выпадения хотя бы одного герба,

в) выпадение герба, а следом решки.

3. Три изделия проверяются на стандартность. Найдите вероятности того, что:

а) все изделия нестандартны,

б) хотя бы одно изделие стандартно,

в) не менее двух изделий стандартно.

4. Игральный кубик подбрасывается единожды. Найдите вероятности того, что на верхней грани выпало:

а) четное число очков,

б) число, кратное 2,

в) число, большее 4,

г) число, не менее 3,

д) число, не более 5.

5. Игральный кубик подбрасывается дважды. Найдите вероятности того, что:

а) сумма очков при двух бросках игрального кубика будет равна 6,

б) что сумма очков на выпавших гранях – четная, в) сумма очков на выпавших гранях – нечетная, причем на грани хотя бы одной из костей появляется пятерка,

г) сумма выпавших очков равна восьми,

д) сумма выпавших очков равна пяти, а разность равна трем,

е) сумма выпавших очков равна пяти, если известно, что разность равна трем.

6. В корзине находится 5 красных, 8 синих и 7 зеленых шаров. Какова вероятность извлечения зеленого шара?

7. В мешке 50 мячей, пронумерованных от 1 до 50. Какова вероятность вытянуть мяч с нечетным номером?

8. Найдите вероятность того, что из 25 человек два человека в группе родились в один и тот же день.

9. В лотерее 100 билетов, из которых 5 выигрышных билетов. Найдите вероятность выигрыша при покупке одного билета.

10. Студент знает 20 из 25 вопросов. Экзаменатор задает один вопрос. Найдите вероятность того, что студент знает ответ на вопрос?

11. На рейс в 200 мест все билеты проданы. Какова вероятность того, что пассажиру достанется место у окна, если таких мест в самолете 40?

12. В лоте 100 электронных чипов, из них 5 бракованных. Какова вероятность выбрать исправный чип?

13. В кинотеатре 12 рядов по 10 мест в каждом. Какова вероятность купить билет на случайное место в последнем ряду?

14. Датчик случайных чисел генерирует двузначное случайное число. Найдите вероятность того, что сгенерированное число делится на 5?

15. Куб, у которого все грани окрашены: две противоположные грани – в желтый, две другие противоположные грани – в зеленый, оставшиеся – в оранжевый, распилен на тысячу кубиков одинакового размера, которые затем перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу извлеченный кубик имеет:

а) только одну окрашенную грань в один из цветов,

б) только две окрашенные грани,

в) только три окрашенные грани,

г) неокрашенные грани.

1.2.2 Геометрическое определение вероятности

Основным недостатком классического определения вероятности считается тот факт, что оно предполагает конечное число возможных исходов испытания. Его можно преодолеть, используя геометрическое определение вероятности, т.е. определять вероятность попадания точки в некоторую область.

Геометрическое определение является обобщением понятия вероятности на случай бесконечного числа равновозможных исходов.

Пусть плоская фигура g составляет часть плоскости G. Пусть событие А - попадание случайно брошенной точки на фигуру g. (Рис. 2.1) Предположим, что вероятность события А пропорциональна площади S этой фигуры и не зависит ни от её размера относительно G, ни от формы g, тогда $P(A) = \frac{S_g}{S_G}$, где S_g и S_{G} – площади фигур g и G соответственно.

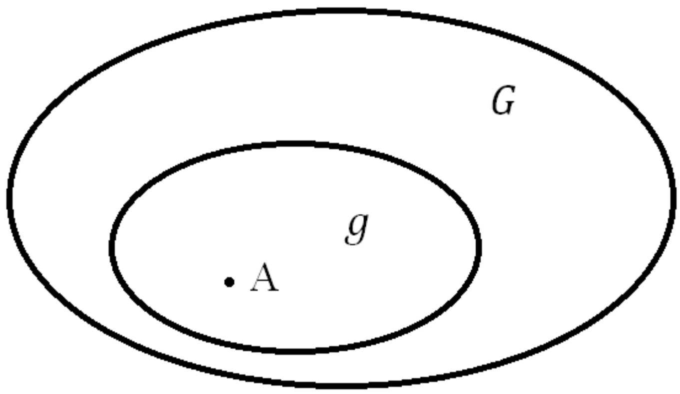


Рисунок 2.1 – Фигуры g и G

Фигура g – благоприятствующая событию А.

Понятие геометрической вероятности распространяется на *области*:

- *одномерная* область (отрезок, прямая);
- *двухмерная* область (плоские фигуры, координатная плоскость);
- *трехмерная* область (объемные фигуры и трехмерные).

Обозначим длину, площадь и объём области через ***mes***.

Определение 2. *Геометрической вероятностью* события *A* называется отношение меры области благоприятствующей появлению события *A* к мере всей области, т.е.

$$P(A) = \frac{mes\ g}{mes\ G}$$

или

$$P(A) = \frac{mes\ A}{mes\ \Omega}.$$

Для одномерной области получим

$$P(A) = \frac{l_g}{l_G},$$

где l_g и l_G – длины отрезков g и G соответственно.

Для двумерной области получим

$$P(A) = \frac{S_g}{S_G},$$

где S_g и S_G – площади фигур g и G на плоскости соответственно.

Для трехмерной области получим

$$P(A) = \frac{V_g}{V_G},$$

где V_g и V_G – объем фигур g и G в пространстве соответственно.

Пример 3.

На отрезке OA длины ℓ числовой оси OX нанесена точка $B(x)$. Найдите вероятность того, что отрезки OB и BA имеют длину больше, чем $\frac{\ell}{4}$.

Решение:

Событие A – длины отрезков OB и BA имеют длину, больше чем $\frac{\ell}{4}$.

Изобразим условия задачи на рисунке 2.2. Построим отрезок OA длины ℓ, далее точками B, M и N разделим отрезок OA на 4 части. При попадании точки B на отрезок MN выполняется событие A. Длина отрезка составляет $\frac{\ell}{2}$.

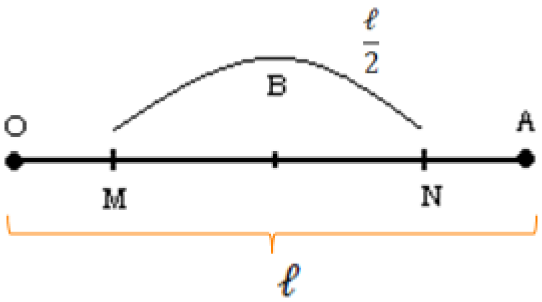


Рисунок 2.2 – Геометрическое изображение условий задачи 3

Тогда по формуле геометрической вероятности найдем вероятность события *A:*

$$P(A) = \frac{\ell_{MN}}{\ell_{OA}} = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: вероятность того, что отрезки *OB* и *BA* имеют длину больше, чем *l/4*, равна 0,5.

Пример 4. (Задача о встрече)

Два студента *A* и *B* договорились в определнном месте во время перерыва между 13:00 - 13:50. Пришедщий первым ждет в течении 10 минут и уходит. Определите, чему равна вероятность их встречи, если приход каждого из них в течении указанных 50 минут может произойти на удачу и моменты прихода независимы.

Решение:

Событие C – два студента встретились в определнном месте во время перерыва между 13:00 - 13:50.

Обозначим моменты прихода студентов в назначенное место, как x и y, соответственно. В прямоугольной системе координат на рисунке 2.3 началом отсчета будем считать 13:00, единицей измерения 10 минут.

Студенты встретятся, если разность между x и y не превзойдет 10 минут, т.е.должно выполниться неравенство $x - 10 \leq y \leq x + 10$, решение которого графически представляет собой заштрихованная полоса на рисунке 2.3.

Тогда по формуле геометрической вероятности, получим

$$P(C) = \frac{50^2 - 40^2}{50^2} = \frac{9}{25} = 0{,}36.$$

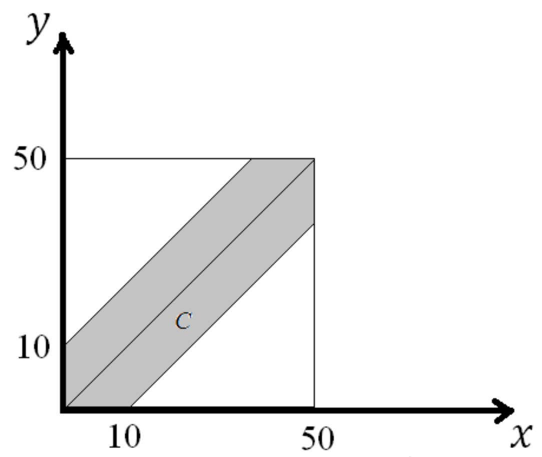


Рисунок 2.3 – Геометрическое изображение условий задачи 4

Ответ: вероятность того, что два студента встретились в определнном месте во время перерыва между 13:00 – 13:50, равна 0,36.

Контрольные вопросы

1. В чем отличие геометрической вероятности от классической вероятности?
2. Дайте определения понятию «геометрическая вероятность».
3. Укажите формулу для расчета геометрической вероятности.
4. Приведите примеры задач для нахождения вероятности с помощью геометрической вероятности.
5. Перечислите измерения областей, на которые распространяется понятие геометрической вероятности.

Задание для самостоятельной работы

1. На отрезке длиной 10 см случайным образом выбирается точка. Какова вероятность того, что она будет находиться на расстоянии менее 3 см от одного из концов отрезка? Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.

2. На отрезке длинной 28 см помещен отрезок длины 12 см. Найдите вероятность того, что точка, на удачу, поставленная на больший отрезок, попадет на меньший отрезок. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.

3. Стрелок попадает в круглую мишень радиусом 100 см. Найдите вероятность того, что стрела попадет в круг радиусом 20 см, центр которого совпадает с центром мишени? Предполагается, что вероятность попадания точки в круг пропорциональна площади круга и не зависит от его расположения.

4. Точка выбирается наугад внутри квадрата, сторона которого составляет 2 м. Найдите вероятность того, что она окажется внутри вписанного в квадрат круга? Предполагается, что вероятность попадания точки в часть круга пропорциональна площади этой части и не зависит от ее расположения относительно круга.

5. Внутрь круга радиуса 20 см наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг:

а) квадрата;

б) правильного треугольника.

Предполагается, что вероятность попадания точки в часть круга пропорциональна площади этой части и не зависит от ее расположения относительно круга.

6. На сторонах квадрата со стороной 1,5 м случайным образом выбираются три точки. Какова вероятность того, что треугольник, образованный этими тремя точками, будет иметь площадь меньше 0,75 кв. м?

7. Два автомобиля случайным образом размещаются на участке дороги длиной 50 км. Найдите вероятность того, что они окажутся на расстоянии менее 8 км друг от друга?

8. Наугад выбирается угол между 0 и 180 градусами. Какова вероятность того, что синус этого угла не более 0,5?

9. На автовокзал в период времени 15.50–16.20 прибывают два автобуса. Найдите вероятности того, что два автобуса окажутся на автовокзале одновременно, если первый стоит 15 минут, а второй – 20 минут.

10. Два устройства отправляют сигналы в сигнализатор в течение часа. Найдите вероятность того, что сигнализатор срабатывает в течение часа, если оба устройства пошлют по одному сигналу, если только одно из устройств отправило сигнал.

1.2.3 Статистическое определение вероятности

Вероятности событий с неравновозможными исходами не могут быть вычислены ни с помощью классического определения, ни с помощью геометрического определения. В таких случаях для определения вероятности используют статистический подход.

Определение 3. *Статистической вероятностью* события A называется относительная частота появления этого события в n испытаниях.

Обозначение: $\tilde{P}(A)$.

Определение 4. *Относительной частотой* $W(A)$ наступления события A в n испытаниях называется отношение числа m, в которых появилось событие A к общему числу испытаний n.

Обозначение: $W(A)$.

То есть

$$\tilde{P}(A) = W(A) = \frac{m}{n}.$$

Отметим, что определение классической вероятности не ставит условие о том, чтобы испытания действительно проводились, а определение относительной частоты, наоборот, предполагает, что испытания были фактически проведены.

Классическая вероятность является априорной, определяется до проведения опыта. Статистическая вероятность – апостериорной, и определяется по результатам проведения опыта.

Статистическое определение вероятности применяется к событиям, которые обладают следующим свойствами:

1. События должны быть исходами только тех испытаний, которые могут быть воспроизведены неограниченное число раз при одних и тех же условиях.
2. События должны быть статистически устойчивыми, т.е. в различных сериях испытаний при достаточном количестве испытаний относительная частота изменяется не значительно, приблизительно около постоянного числа.
3. Число испытаний, в результате которых появляется событие A, должно быть достаточно велико

Можно показать, что при статистическом определении вероятности события сохраняются свойства вероятности события, справедливые в условиях классической схемы.

Пример 5.

Отдел технического контроля обнаружил пять бракованных книг в партии из случайно отобранных 100 книг. Найти относительную частоту появления бракованных книг.

Решение:

Событие А – отдел технического контроля обнаружил пять бракованных книг.

Найдем относительную частоту появления бракованных книг: $m = 5$, $n = 100$, тогда

$$\tilde{P}(A) = \frac{5}{100} = 0{,}05.$$

Ответ: относительная частота появления бракованных книг составляет 0,05.

К *недостаткам* статистического определения вероятности относятся:

- неоднозначность;
- неприменимость к испытаниям с бесконечным числом исходов;
- невозможность нахождения относительной частоты без проведения большого количества экспериментов.

Контрольные вопросы

1. В чем отличие статистической вероятности от классической вероятности? Геометрической?
2. Дайте определения понятию «статистическая вероятность».
3. Дайте определения понятию «относительна частота». Приведите примеры.
4. Перечислите свойства событий, вероятность которых можно найти с помощью формулы статистической вероятности.

5. Укажите недостатки статистической вероятности.

Задание для самостоятельной работы

1. По цели произведено 30 выстрелов, причем зарегистрировано 12 попаданий. Найдите относительную частоту попаданий в цель.
2. При испытании партии микроскопов относительная частота годных приборов оказалась равной 0,96. Найдите относительную частоту годных микроскопов при условии, что была проверена партия из 1000 приборов.
3. Для выяснения качества семян было посеяно в лабораторных условиях 120 штук, из них дали нормальный всход – 96 штук. Какова относительная частота нормального всхода семян?
4. Компьютерный вирус атакует сеть, состоящую из 10 компьютеров, причем заражению подвергается 3 устройства. Найдите относительную частоту заражения устройств.
5. На соревнованиях по программированию команда решает 8 задач. Какова относительная частота решения задачи, при условии что будет решено 4 задачи?
6. В среднем на 1000 полученных кредитов происходит 835 погашений в срок. Найдите относительную частоту того, что кредит будет погашен в срок.
7. Найдите частоту появления шестерки при 40 подбрасываниях монеты.
8. С помощью опроса всех студентов Вашей группы определите частоту дней рождения, попадающих на каждый месяц года.
9. Найдите частоту пятибуквенных слов в любом абзаце какой-нибудь книги.
10. В течение летнего периода на Черноморском побережье было 58 солнечных дней. Найдите частоту солнечных дней на побережье за этот период? Частоту пасмурных дней?

1.3 Элементы комбинаторики

В данном подразделе мы рассмотрим правила и формулы комбинаторики, которые понадобятся нам для решения вероятностных задач для расчета числа различных возможных комбинаций данного события.

> ***Определение 1.*** *Комбинаторика* – это раздел математики, изучающий методы решения комбинаторных задач, т.е. задач на подсчет числа различных комбинаций.

Исследования по комбинаторике впервые начали проводить итальянские ученые Дж. Кардано, Н. Тарталья, Г. Галилей и французские ученые Б. Паскаль и П. Ферма. Г. В 1666 году немецкий ученый Г. Лейбниц в своей работе «Об искусстве комбинаторики» стал рассматривать комбинаторику как самостоятельный раздел математики. Он же и ввел термин «комбинаторика». В восемнадцатом веке комбинаторика стала развиваться как наука вместе с возникновением теории вероятностей.

1.3.1 Правила суммы и произведения

Многие комбинаторные задачи могут быть решены с помощью следующих двух важных правил - правила сложения и умножения.

Пусть события A_i для $i = \overline{1, n}$ элементы конечного множества.

Правило суммы. Если элемент A_1 может быть n_1 способами, элемент A_2 *другими* n_2 способами, а элемент A_3 *отличными от первых двух* n_3 способами и т.д., элемент $A_k - n_k$ способами, *отличными от первых* n_{k-1} способов, то выбор одного из элементов (или A_1, или A_2, …, или A_k) может осуществляться $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ способами.

Пример 1.

В ящике 400 деталей. Известно, что 120 деталей – 1 сорта, 90 деталей – 2 сорта, все остальные детали – 3 сорта. Сколько существует способов извлечения из ящика одной детали первого или третьего сорта?

Решение:

Детали первого сорта могут быть выбраны $n_1 = 120$ способами. Детали второго сорта могут быть выбраны $n_2 = 90$ способами, тогда детали третьего сорта могут быть выбраны $n_3 = 400 - 120 - 90 = 190$ способами.

Тогда по правилу суммы получим:

$$n_1 + n_3 = 120 + 190 = 310.$$

Ответ: 310 способов извлечения деталей первого или третьего сорта.

Пример 2.

Студенту для написания реферата по дисциплине «дискретная математика» предложили выбрать или одну из 7 тем по теории множеств, или одну из 8 тем по алгебре логики, или одну из 10 тем по теории графов. Сколько существует способов выбора темы доклада?

Решение:

Реферата по теории множеств может быть выбрана $n_1 = 7$ способами, по алгебре логики – $n_2 = 8$ способами и по теории графов – $n_3 = 10$ способами.

Тогда по правилу суммы получим:

$$n_1 + n_2 + n_3 = 7 + 8 + 10 = 25.$$

Ответ: существует 25 способов выбора темы реферата.

Правило произведения. Если элемент A_1 может быть выбран n_1 способом, *после каждого выбора элемента* A_1, $A_2 - n_2$ способами и т.д. *После каждого такого выбора элемент* A_k может быть выбран n_k, то выбор всех элементов A_1, $A_2, \dots$, A_k в указанном порядке может быть осуществлен $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ способами.

Пример 3.

В группе 25 человек. Необходимо выбрать старосту, его заместителя и профорга. Сколько существует способов это сделать?

Решение:

Старостой может быть выбран один из $n_1 = 25$ человек, его заместителем, после выбора старосты, может быть выбран из $n_2 = 24$

человек, а профорг, после выбора старосты и его заместителя, может быть выбран из $n_3 = 23$ человек.

Тогда по правилу произведения получим:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 25 \cdot 24 \cdot 23 = 13\,800.$$

Ответ: 13 800 способов выбора старосты, его заместителя и профорга в группе из 25 человек.

Пример 4.

Сколько существует трехразрядных шестеричных чисел? В шестеричной системе счисления используются цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Решение:

Первую цифру можно выбрать пятью способами, так как ноль не используем, потому что число, начинающееся с нуля, не является трехразрядным.

Вторая цифра может быть любой, в том числе и нулем, следовательно, ее можно выбрать шестью способами.

То же самое относится и к цифре младшего разряда.

Искомое число равно $5 \cdot 6 \cdot 6 = 180$.

Ответ: 180 способов составления трехразрядных шестеричных чисел.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение понятию «комбинаторика»?
2. Какова роль комбинаторики при изучении теории вероятностей?
3. В связи с чем комбинаторика стала развиваться как отдельная наука?
4. Сформулируйте правило суммы. Приведите примеры.
5. Сформулируйте правило произведения. Приведите примеры.

Задание для самостоятельной работы

1. Сколько телефонных номеров было передано друг другу после совместного отдыха 10 человек, если все решили обменяться телефонными номерами?
2. Студенту для написания доклада на конференцию предложили выбрать или одну из 5 вариантов тем по философии, или одну из 7 тем по истории. Сколько существует способов выбора темы доклада?
3. Комплексный обед в столовой состоит из трех блюд. Первое блюдо в меню может быть выбрано 2 способами, второе блюдо – 5 способами, а третье блюдо – 3 способами. Сколько вариантов комплексных обедов возможно, при условии, что обеды отличаются хотя бы одним блюдом, обеды состоят из неповторяющихся блюд?
4. В группе 15 юношей и 6 девушек. Сколькими способами можно выбрать, для выполнения различных заданий, двух студентов одного пола, различного пола?
5. Имеется 25 изделий 1-го сорта и 28 изделий 2-го сорта. Необходимо выбрать 2 изделия одного сорта, различных сортов. Сколькими способами можно это сделать?
6. На одной полке 30 книг, а на другой 18 книг. Все книги разные. Сколькими способами можно выбрать книгу с одной полки?
7. При формировании экипажа самолета имеется 5 претендентов на пост пилота, 10 - на пост второго пилота и 25 - на пост стюарта. Петр Петров годен на любую должность. Сколько у него вариантов получить один из постов?
8. В чемпионате мира по мини-футболу в 2023 году среди мужчин участвовали 32 команды с 4 континентов. Сколькими способами могли быть распределены первые 3 места?
9. Сколько существует трехзначных чисел, делящихся на 12, в записи которых отсутствуют цифры 0 и 3?
10. Для тестирования качества сотовой связи 225 абонентов сотового оператора Теле2 последовательно пытаются установить связь с 205 абонентами сотового оператора Мегафон. Сколько возможно различных вариантов связи при которых для пары абонентов связь есть либо связь не установлена?
11. Необходимо составить варианты контрольной работы, каждый из которых должен содержать три задачи. Первая задача выбирается из любого параграфа I главы сборника, вторая - из

любого параграфа II главы, а третья - из любого параграфа III главы. Сколько видов контрольной работы можно составить, если I и III глава содержат два параграфа, а II глава - три параграфа?

12. Каждая из 20 различных организаций намеревается принять на работу одного из 105 выпускников отделения института экономики и управления АПК. В каждой из этих организаций выпускнику предлагается на выбор одна из 3 должностей. Сколько существует вариантов распределения этих выпускников на работу?

1.3.2 Формулы комбинаторики

Методы решения задач на подсчет комбинаций включают комбинаторные объекты более сложной структуры. Рассмотрим их далее.

Но вначале дадим определение понятию «факториал», которое нам будет необходимо в дальнейшем для расчетов по формулам комбинаторики.

Название функции факториал произошло от английского слова *factor*, которое переводится *«сомножитель»*.

Определение 2. *Факториал* - это функция, определенная на множестве целых положительных чисел, которая представляет собой произведение всех натуральных чисел от 1 до n, где каждое число встречается точно один раз.

Обозначение: $n!$

Формула для нахождения факториала имеет следующий вид:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n - 1) \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k.$$

Пример 5.

Найдите значение функции $n!$, при $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Решение:

$n = 1, \quad 1! = 1.$

$n = 2, \quad 2! = 1 \cdot 2 = 2.$

$n = 3, \quad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$

$n = 4, \qquad 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$

$n = 5, \qquad 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$

$n = 6, \qquad 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$

$n = 7, \qquad 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040.$

Функцию $n!$ можно записать в *рекуррентной форме:*

$$n! = (n-1)!\,n.$$

Отметим, что $0! = 1$.

Теперь перейдем к описанию самих формул комбинаторики. Пусть дано множество из n различных элементов. Из этого множества могут быть образованы подмножества из m элементов.

Пример 6.

Дано множество $A = \{1, 2, 3\}$. Составьте все возможные подмножества из двух неповторяющихся элементов: а) если важен состав, б) важен состав и порядок.

Решение:

а) $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$.

б) $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 1\}, \{3, 1\}, \{3, 2\}$.

Определение 3. Если комбинация из n элементов по m отличается либо составом элементов, либо порядком их расположения, либо и тем, и другим, то такие комбинации называются ***размещениями*** *из n элементов по* m.

Обозначение: A_n^m

Число размещений из n элементов по m элементов находится *по формуле*:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Пример 7.

Определите число вариантов расписания при выборе из 8 дисциплин, при условии, что в день проходит не более 4 дисциплин.

Решение:

Всего 8 дисциплин, значит $n = 8$. Нужно выбрать 4 дисциплины, значит $m = 4$.

Так как при составлении расписания важен не только состав дисциплин, но и их порядок следования друг за другом, то число вариантов составления расписания определим по формуле размещения.

$$A_8^4 = \frac{8!}{4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1} = 1\,680.$$

Ответ: 1680 вариантов расписания.

Определение 4. Если комбинация из n элементов отличается только <u>составом</u> элементов, то их называют ***сочетаниями*** *из* n *по* m.

Обозначение: C_n^m

Число сочетаний из n элементов по m элементов находится *по формуле*:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}.$$

Пример 8.

В футбольном турнире участвует 14 команд. Сколько матчей должно быть сыграно?

Решение:

Всего в турнире участвует 14 команд, значит $n = 14$. Матч проходит между двумя командами, значит $m = 2$.

$$C_{14}^2 = \frac{14!}{2!\,12!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14}{1 \cdot 2\ \cdot\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}$$

$$= \frac{13 \cdot 14}{2} = 91.$$

Ответ: 91 матч.

Свойства числа сочетаний:

1) $C_n^m = C_n^{n-m}$.

Доказательство:

Рассмотрим левую и правую части равенства. Используем формулу сочетания и проведем преобразования.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!},$$

$$C_n^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!\,\big(n-(n-m)\big)!} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}.$$

После преобразований получим равные выражения, значит равенство выполняется.

2) $C_n^{\,m} + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$.

Доказательство:

Доказательство проведем аналогично доказательству свойства 1.

$$C_{n+1}^{m+1} = \frac{(n+1)!}{(m+1)!\,\big(n+1-(m+1)\big)!} = \frac{(n+1)!}{(m+1)!\,(n-m)!},$$

$$C_n^{m+1} + C_n^m = \frac{n!}{(m+1)!\,(n-m-1)!} + \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$
$$= \frac{n!\,(n-m) + n!\,(m+1)}{(m+1)!\,(n-m)!} = \frac{n!\,(n+1)}{(m+1)!)n-m)!}$$
$$= \frac{(n+1)!}{(m+1)!\,(n-m)!}.$$

Пусть дано множество из n различных элементов. Рассмотрим различные комбинации расположения n элементов.

Пример 9.

Дано множество *A = {1, 2, 3}*. Составьте все возможные комбинации расстановки элементов этого множества.

Решение:

{1, 2, 3}, {1, 3, 2}, {2, 1, 3}, {2, 3, 1}, {3, 1, 2}, {3, 2, 1}.

Определение 5. Если комбинация из n элементов отличается только порядком расположения элементов, то их называют ***перестановками*** *из n элементов*.

Обозначение: P_n

Число перестановок из n элементов находится *по формуле*:

$$P_n = n!$$

Пример 10.

Порядок выступлений 6 участников конференции определяется произвольно. Сколько вариантов распределения последовательностей выступлений участников возможно?

Решение:

Каждая комбинация отличается только порядком участников, значит используем формулу перестановки для $n = 6$.

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 840.$$

Ответ: 840 вариантов возможно.

Пусть дано множество из n различных элементов. Из этого множества могут быть образованы подмножества из m повторяющихся элементов.

Пример 11.

Дано множество *A = {1, 2, 3}*. Составьте все возможные подмножества из двух элементов, которые могут повторяться: а) если важен состав, б) важен состав и порядок.

Решение:

а) $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 1\}, \{2, 2\}, \{3, 3\}$.

б) $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 1\}, \{3, 1\}, \{3, 2\}, \{1, 1\}, \{2, 2\}, \{3, 3\}$.

Определение 6. Если в размещениях из n элементов по m элементов некоторые из элементов или все могут оказаться одинаковыми, то такие размещения называются ***размещениями с повторениями*** *из* n *элементов по* m.

Обозначение: $\tilde{A}_n^m$

Число размещений с повторениями из n элементов по m элементов находится *по формуле*:

$$\tilde{A}_n^m = n^m.$$

Определение 7. Если в сочетаниях из n элементов по m элементов некоторые из элементов или все могут оказаться одинаковыми, то такие сочетания называются ***сочетаниями с повторениями*** *из* n *элементов по* m.

Обозначение: $\tilde{C}_n^m$

Число сочетаний с повторениями из n элементов по m элементов находится *по формуле*:

$$\tilde{C}_n^m = C_{n+(m-1)}^m.$$

Пример 12. В одной из секций конференции по пяти номинациям: 1, 2 и 3 места, два благодарственных письма, участвует 12 докладчиков. Сколько существует вариантов распределения призов, если по каждой номинации установлены: а) различные призы; б) одинаковые призы.

а) $\tilde{A}_{12}^5 = 12^5 = 248\,832$;

б) $C_{12+(5-1)}^5 = \frac{16!}{5!\cdot 11!} = \frac{12\cdot 13\cdot 14\cdot 15\cdot 16}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 4\,368.$

Ответ: $248\,832$ способов распределить различные призы, 4 368 способа распределить одинаковые призы.

Определение 8. Если в перестановках из общего числа n элементов есть k различных элементов, при этом первый элемент повторяется n_1 раз, второй элемент - n_2 раз и т.д., kый элемент - n_k раз и выполняется равенство $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$, то такие перестановки называются ***перестановками с повторениями*** *из n элементов.*

Обозначение: $P_n(n_1, n_2, \dots, n_k)$

Число перестановок с повторениями из n элементов находится *по формуле*:

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}.$$

Пример 13.

Сколько существует восьмизначных чисел состоящих из цифр: 1, 2, 3, в которых цифра 1 повторяется 4 раза, цифры 2 и 3 повторяются по два раза.

Решение:

Так как число является восьмизначным, то $n = 8$. Число 1 повторяется $n_1 = 4$ раза, число 2 повторяется $n_2 = 2$ раза, число 3 повторяется $n_3 = 2$ раза. Выполняется равенство $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. То можем использовать формулу перестановки с повторениями:

$$P_8(4,2,2) = \frac{8!}{4!\cdot 2!\cdot 2!} = \frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{2!\cdot 2!} = \frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 2}{1} = 420.$$

Ответ: 420 восьмизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если цифра 1 повторяется 4 раза, цифры 2 и 3 повторяются по два раза.

Для непосредственного вычисления вероятности события используется ее классическое определение, формулы комбинаторики применяются при нахождении благоприятного и общего числа испытаний.

Пример 14.

В партии из 10 деталей 7 стандартных. Найти вероятность того, что из 6 взятых деталей 4 являются стандартными.

Решение:

Событие А – взяли 6 деталей, из них 4 являются стандартными.

Вероятность события вычислим с помощью классического определения вероятности:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Для нахождения всех возможных исходов используем формулу сочетания без повторения: C_{10}^{6}, так как нам важен только состав элементов.

Для нахождения благоприятных исходов используем правило произведения и сочетания без повторения, получим, что $m = C_7^4 C_3^2$.

$$P(A) = \frac{C_7^4\cdot C_3^2}{C_{10}^6} = \frac{\frac{7!}{4!\cdot 3!}\cdot\frac{3!}{2!\cdot 1!}}{\frac{10!}{6!\cdot 4!}} = \frac{\frac{7!}{1}\cdot\frac{1}{2!\cdot 1!}}{\frac{10!}{6!\cdot 1}} = \frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: вероятность того, что из 6 взятых деталей 4 стандартные, равна 0,5.

Пример 15.

В лифт на 1 этаже 9-го дома вошли 4 человека, каждый из которых может выйти независимо на любом этаже со 2 по 9. Какова вероятность того, что все пассажиры выйдут:

а) на 6 этаже;

б) на одном этаже.

Решение:

а) Событие А – все пассажиры захотят выйти на 6 этаже.

Для нахождения вероятности используем классическую вероятность. Благоприятный исход один. Все возможные исходы можно найти по формуле размещения с повторениями, так как состав и порядок вышедших пассажиров важен.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{8^4} = \frac{1}{4096}.$$

б) Событие А – все пассажиры захотят выйти на одном этаже

Для нахождения вероятности используем классическую вероятность. Благоприятных исходов восемь, так как пассажиры должны выйти на одном этаже со 2 по 8 этаж.

$$P(A) = \frac{8}{8^4} = \frac{1}{8^3} = 0{,}0625..$$

Ответ: вероятность того, что все пассажиры выйдут на шестом этаже, равна $\frac{1}{4096}$; вероятность того, что все пассажиры выйдут на одном этаже, равна $\frac{1}{4096}$.

Контрольные вопросы

1. Дайте определения понятию «факториал». Приведите примеры нахождения факториала.
2. Опишите факториал в виде рекуррентной форме. Приведите числовые примеры.
3. Перечислите формулы комбинаторики. Приведите примеры применения при решении задач на нахождения различных комбинаций.
4. Докажите свойства сочетания.
5. Приведите примеры задач для нахождения вероятности с помощью формул комбинаторики.

Задание для самостоятельной работы

1. Запишите выражения с помощью знака факториал.

1) $.1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9$;

2) $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots\cdot\ p$;

3) $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots\cdot\ (k\ -\ 5)(k\ -\ 4)$;

4) $1\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot \ldots\cdot\ k$;

5) $1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8$;

6) $1\cdot 2\cdot 3\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10$;

7) $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots\cdot 23\cdot 24$;

8) $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots\cdot 14\cdot 15$.

2. Упростите выражения и результат запишите с помощью знака факториал.

1) $\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots\cdot n(n+1).}{(n\ +1)}$;

2) $\dfrac{1\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 4\cdot 5\cdot \ldots\cdot (n-1)n^2}{8n}$;

3). $\dfrac{[1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots\cdot k]^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots\cdot k\cdot k^2}$;

4) $\dfrac{(k\ -3)!-3(k-2)!}{7-3k}$;

5) $\dfrac{(1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots\cdot n)^2}{[1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots\cdot (n-2)]\cdot n^2}$;

6) $\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots\cdot (k-3)(k+3)}{k+3}$.

3. Упростите выражения.

1) $\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots\cdot (k-1)(k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots\cdot k(k+1)}$;

2) $\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots\cdot (k-2)(k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots\cdot\ (k-1)}$;

3) $\dfrac{(n-2)!+(n-1)!+n!}{(n-1)!}$.

4. Вычислите при $n\ =\ 27$:

1) $\dfrac{2(n-2)!+7(n-1)!}{5(7n-5)(n-3)!}$;

2) $\dfrac{n!\,(n-2)!\,(n+1)!\,(n+2)!}{n!^4}$.

6. Сколько различных чисел можно получить при перестановке цифр 2, 4, 7, 8?

7. Для пароля используется четырехзначное число. Определите сколько существует вариантов составления пароля? Найдите вероятность того, что введенный пароль является верным.

8. Операция арифметического сложения коммутативна. Пусть имеется пять различных слагаемых. Определите сколько существует способов записи операции арифметического сложения?

9. При составлении автомобильного номера происходит запись в виде комбинации трех букв латинского алфавита и трех цифр. Определите сколько существует вариантов составления таких номеров?

10. При составлении шифра происходит запись двух букв «с» и «р» в произвольном порядке, затем – запись трех произвольных цифр в произвольном порядке, затем – трех оставшихся букв латинского алфавита в некоторой последовательности. Определите сколько существует записей таких шифров?

11. Телефонный номер состоит из 11 цифр. Найдите вероятность того, что а) все цифры различные, б) три цифры одинаковые, в) три цифры подряд одинаковые, г) в телефонном номере встречаются две цифры 5 и две цифры 3.

12. В очереди стоят 10 человек. Сколько вариантов расположения людей в очереди?

13. Премии на конкурсе распределяются среди 15 человек. Определите количество вариантов распределения 3 премий.

14. Пусть n человек могут разместиться в очереди 479 001 600 способами. Найдите n.

15. Одиннадцать человек стоят в очереди, определите вероятность того, что два человека из них отделены друг от друга четырьмя лицами.

16. В лифт на первом этаже вошли 5 человек. Найдите вероятность того, что все пассажиры выйдут на втором этаже, все пассажиры выйдут на одном и том же этаже, все пассажиры выйдут на разных этажах, при условии, что в доме восемь этажей, и что каждый может выйти на любом из этажей, начиная со второго, с равной вероятностью.

17. Поезд состоит из 20 вагонов. При остановке на ближайшей станции в поезд заходят 10 пассажиров. Сколькими способами можно разместить пассажиров при условии, что в каждом вагоне имеется не менее 3 свободных мест и пассажирам не важно в каком вагоне они будут ехать?

18. Определите сколько различных слов можно образовать путем перестановки букв в слове а) «событие», б) «композиция», в) «вероятность»?

19. Дано множество {а, б, в, г, д, е}. Определите сколько слов а) длины 2, б) длины 6, г) длины 9 можно составить из букв этого множества?

20. Дано множество {а}. Определите сколько слов длины 7 можно составить из букв этого множества?

21. Определите сколько последовательностей из четырех букв можно образовать из всех букв русского алфавита, если а) в каждой последовательности повторяющихся букв нет, б) в каждой последовательности есть две повторяющиеся буквы, в) в каждой последовательности есть три повторяющиеся буквы?

22. Определите сколько существует пятизначных чисел в пятеричной системе счисления, если а) каждая цифра этой системы счисления входит в число только один раз, б) две цифры входят в число два раза, в) две разные цифры входят в это число по два раза? Отметим, что числа, начинающиеся с нуля, не являются шестизначными.

23. Определите сколько девятизначных чисел можно составить из девятизначных цифр, если каждая цифра входит в число один раз и каждое число начинается с последовательности 564 и оканчивается последовательностью 08?

24. Определите сколько существует семизначных десятичных чисел, в каждом из которых две цифры 4 и три цифры 6? Найдите вероятность того, что из всех семизначных десятичных чисел выбрано число, которое содержит две цифры 4 и три цифры 6.

25. Сколько существует трехразрядных чисел пятиричной системы счисления, в каждом из которых отсутствуют повторяющиеся цифры?

26. Определите сколько существует перестановок цифр 1, 3, 5, 7, 9, в которых цифра 5 следует за цифрой 3.

27. Определите сколько существует шестиразрядных десятичных чисел, в каждом из которых нет цифр 0, 3, 4 и отсутствуют повторяющиеся цифры?

28. Из 15 кандидатов нужно выбрать команду из 5 человек. Сколькими способами это можно сделать?

29. Автомат распределяет 100 деталей по трем ящикам. Сколькими способами это можно сделать при условии, что все детали а) одинаковые, б) разные?

30. В командировку нужно отправить 7 человек – 3 инженера и 4 геодезиста. Всего на предприятии работает 7 инженеров и 8 геодезистов. Сколькими способами это можно сделать? Найдите вероятность того, что в командировку отправлены 3 инженера и 4 геодезиста, при условии, что на предприятии работает на предприятии работает а) 7 инженеров и 8 геодезистов, б) 9 инженеров и 10 геодезистов.

31. Имеется 25 деталей, из которых 15 окрашенных. Наудачу извлечены пять деталей. Определите сколько способов извлечь пять окрашенных деталей. Какова вероятность того, что все извлеченные детали окрашены?

32. Найдите n и m, при условии, что $m \neq 1$, если известно, что число размещений без повторений из n элементов по m элементов равно 60.

33. Найдите n и m, при условии, что $m \neq 1$, если известно, что число сочетаний без повторений из n элементов по m элементов равно 58.

34. Найдите n и m, при условии, что $m \neq 1$, если известно, что число размещений без повторений из n элементов по m элементов равно 360360.

35. Найдите n и m, при условии, что $m \neq 1$, если известно, что число сочетаний без повторений из n элементов по m элементов равно 15504.

1.4 Теоремы сложения и произведения

1.4.1 Вероятность суммы совместных и несовместных событий

Напомним, что суммой несовместных событий A и B являются либо событие A, либо событие B.

Теорема 1. *Вероятность появления одного из двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий,* то есть выполняется равенство:

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Доказательство.

Изобразим несовместные события A и B на рисунке 4.1.

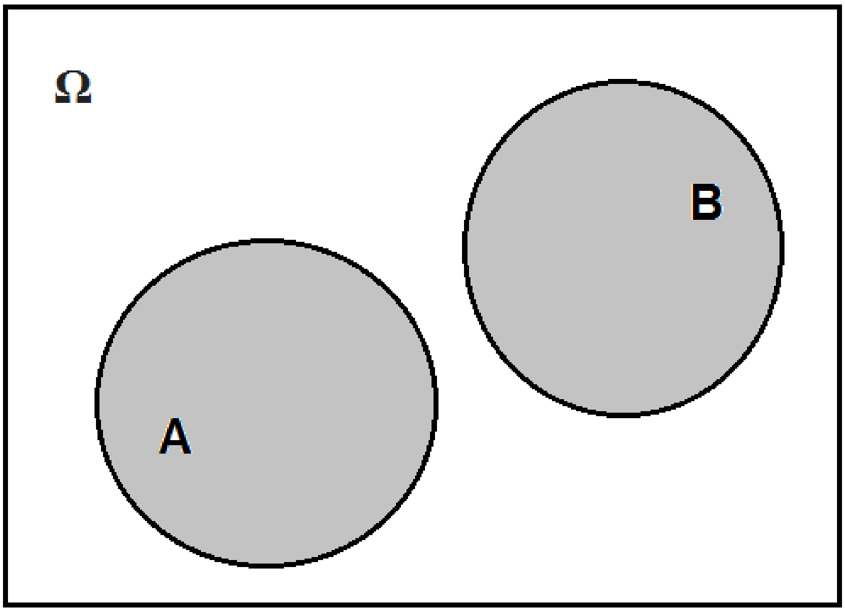


Рисунок 4.1 – Несовместные события A и B

Пусть имеется n - равновозможных исходов.

Данное множество Ω - множество всех равновозможных исходов.

Пусть для A – благоприятны K_A исходов, для B - K_B исходов. Тогда событию $A+B$ будет благоприятствовать $K_A + K_B$ исходов.

Найдем вероятность события $A+B$ по формуле классической вероятности, получим

$$P(A+B)=\frac{K_A+K_B}{n}=\frac{K_A}{n}+\frac{K_B}{n}=P(A)+P(B).$$

Что и требовалось доказать.

Определение 3. События $A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_n$ называются попарно несовместными, если все события попарно несовместны.

Теорема 2. *Вероятность суммы попарно несовместных событий* $A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_n$ *есть сумма вероятностей этих событий*, то есть выполняется равенство:

$$P(A_1+\ A_2+\dots+\ A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\dots+P(A_n).$$

Доказательство проводится аналогично теореме 1.

Пример 1.

Вероятность выхода первого двигателя самолета из строя равна 0,015, вероятность выхода из строя второго двигателя самолета равна 0,025. Найдите вероятность того, что хотя бы один двигатель вышел из строя.

Решение:

Пусть событие C – хотя бы один двигатель самолета вышел из строя.

Событие A – первый двигатель самолета вышел из строя, B – второй двигатель самолета вышел из строя.

Тогда по условию $\mathrm{P(A)} = 0{,}015$, $\mathrm{P(B)} = 0{,}025$.

Вероятность события С найдем по теореме о сумме двух несовместных событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=0{,}015+0{,}025=0{,}04.$$

Ответ: $0{,}04$ – вероятность того, что хотя бы одно изделие вышло из строя.

Следствие 1. *Сумма вероятностей событий, составляющих полную группу, равна единице*, то есть выполняется равенство:

$$P(A)+P(B)+\dots+P(K)=1,$$

где события A, B, …, K - образуют полную группу.

Следствие 2. *Сумма вероятностей противоположных событий* *равна единице*, то есть выполняется равенство:

$$\mathrm{P(A)} + \mathrm{P}(\bar{A}) = 1.$$

Пример 2.

Вероятность того, что будет дождь, равна 0,4. Чему равна вероятность того, что день будет ясным?

Решение:

Пусть событие А означает, что будет дождь, тогда противоположное к событию А событие $\bar{A}$ означает, что день будет ясным.

Так как $\mathrm{P(A)} = 0{,}4$, то $\mathrm{P}(\bar{A}) = 1 - \mathrm{P(A)} = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$.

Если при решении некоторых задач нужно найти вероятность суммы совместных событий, то в этом случае применяют следующую теорему.

Ответ: 0,6 – вероятность того, что день будет ясным.

Теорема 3. *Вероятность появления одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их одновременного появления,* то есть выполняется равенство:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

Доказательство.

Пусть даны совместные события A и B. Тогда событие $A + B$ по определению суммы событий состоит в наступлении хотя бы одного из двух событий A и B. И может быть представлено следующим образом:

$$P(A + B) = P(A \cdot \bar{B}) + P(\bar{A} \cdot B) + P(A \cdot B),$$

Так как $A = A \cdot \bar{B} + A \cdot B$, то по теореме 1 получим $P(A) = P(A \cdot \bar{B}) + P(A \cdot B)$. Выразим $P(A \cdot \bar{B}) = P(A) - P(A \cdot B)$.

Аналогично, для $B = \bar{A} \cdot B + A \cdot B$, то по теореме 1 получим $P(B) = P(\bar{A} \cdot B) + P(A \cdot B)$. Выразим $P(\bar{A} \cdot B) = P(B) - P(A \cdot B)$.

Далее подставим в последнее равенство для $P(A + B)$ полученные выражения для $P(A \cdot \bar{B})$ и $P(A \cdot \bar{B})$, получим

$$P(A + B) = P(A) - P(A \cdot B) + P(B) - P(A \cdot B) + P(A \cdot B) =$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

Что и требовалось доказать.

Обратим внимание, что теорема 1 для несовместных событий является частным случаем теоремы 3 для совместных событий, потому что если события A и B – несовместные, то их произведение $A \cdot B$ – невозможное событие, а вероятность невозможного события равна нулю, и мы получаем из равенства теоремы 3 равенство из теоремы 1.

В случае, если имеем три попарно совместные события (рисунок 4.2), получаем следующую формулу для нахождения вероятности появления одного из трех событий:

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cdot B) - P(A \cdot C) -$$

$$-P(C \cdot B) + P(A \cdot B \cdot C).$$

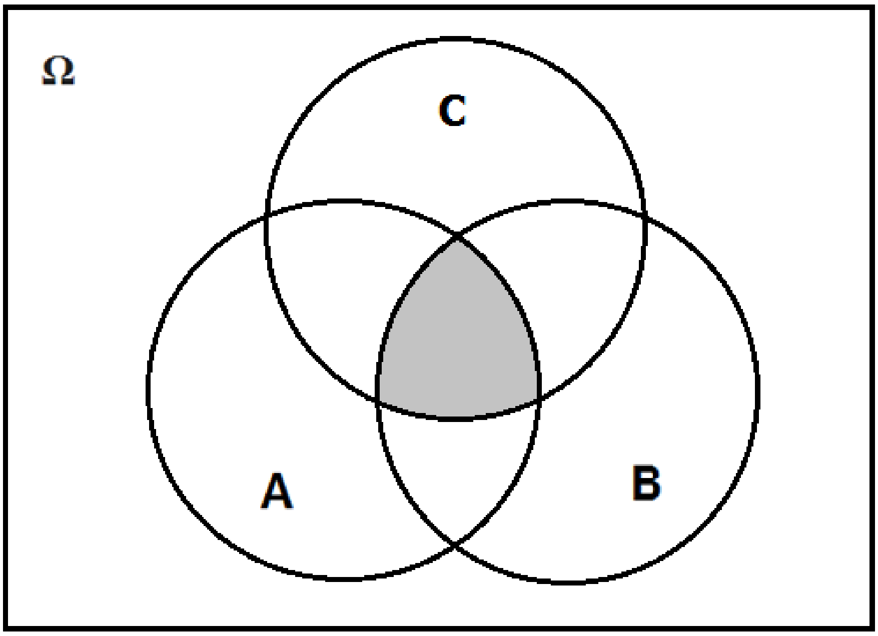


Рисунок 4.2 – Три попарно совместных события

Пример 3.

Всего 20 студентов участвовали в спартакиаде, из нах 8 студентов играли в волейбол, 4 – в хоккей, и 12 – в дартс, 5 – в волейбол и дартс, 3 – в дартс и хоккей, 2 – в волейбол и хоккей, 1 человек принимал участие во всех видах спорта. Сколько студентов участвовало в других спортивных мероприятиях?

Решение:

Изобразим условия задачи в виде диаграмм Эйлера-Вена на рисунке 4.3.

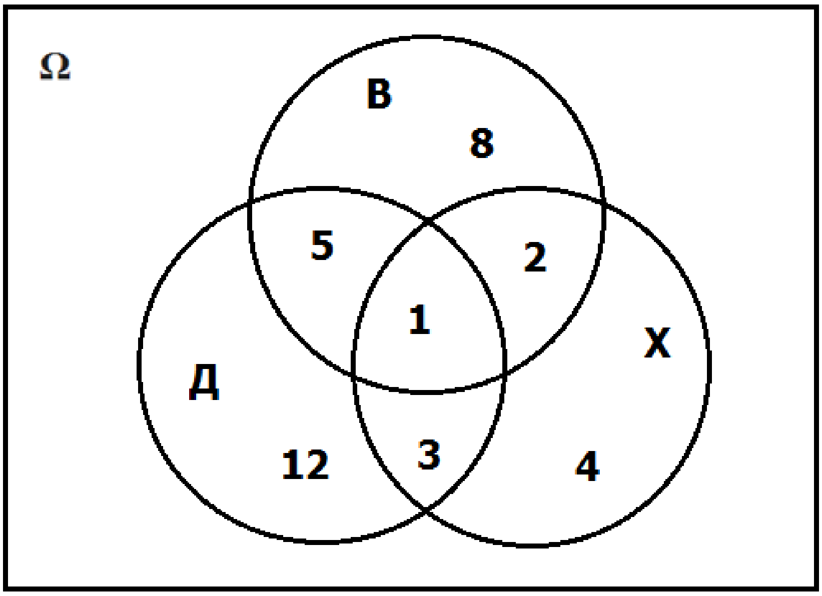


Рисунок 4.3 – Условия задачи

Обозначим события:

Д – студенты, игравшие в дартс,

В – студенты, игравшие в волейбол,

Х – студенты, игравшие в хоккей.

Используем соотношение для трех попарно совместных событий:

$$Д + B + Х = Д + B + Х - Д \cdot B - Д \cdot Х - Х \cdot B + Д \cdot B \cdot Х.$$

Получим, что $Д + B + Х = 12 + 8 + 4 - 3 - 5 - 2 + 1 = 15$ студентов, принимало участие в соревнованиях по дартсу, волейболу и хоккею.

Тогда $20 - 15 = 5$ студентов принимали участие в других спортивных мероприятиях.

Ответ: 5 студентов принимали участие в других спортивных мероприятиях.

Пример 4.

Группа студентов состоит из 20 человек. Они написали контрольную работу по комбинаторике и теории графов. По комбинаторике положительные оценки получило 17 человек, по теории графов - 12. Какова вероятность того, что случайно выбранный студент группы, хотя бы одну контрольную работу написал на положительную оценку. Если в этой группе 10 человек написали обе контрольные работы на положительные оценки.

Решение.

Пусть А – случайно выбранный студент, получивший положительную оценку по комбинаторике, а В - случайно выбранный студент, получивший положительную оценку по теории графов.

Тогда на рисунке 4.4 событие A имеет 17 исходов, событие B – 12 исходов, а событие $A + B - 10$ исходов.

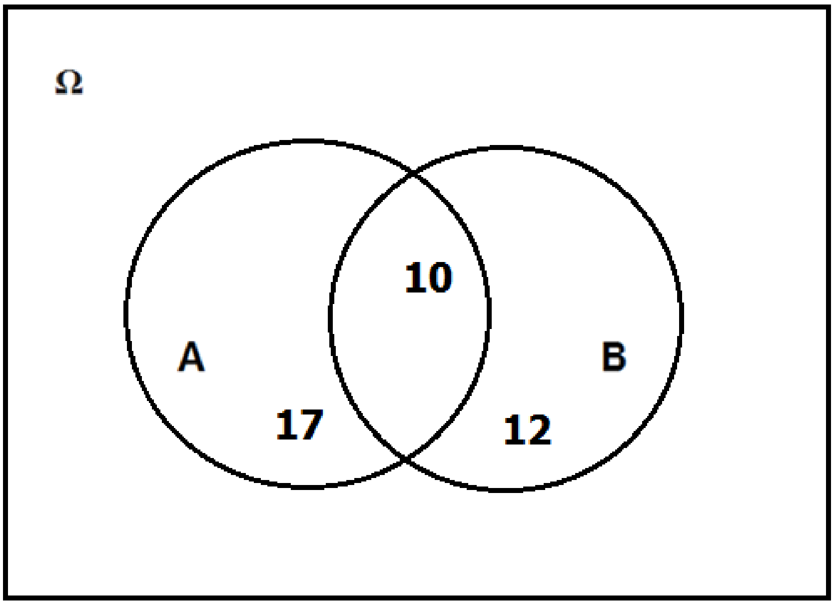


Рисунок 4.4 – Условия задачи

Так события A и B являются совместными, то по теореме 3, получим:

$$P(A + B) = \frac{17}{20} + \frac{12}{20} - \frac{10}{20} = \frac{19}{20} = 0{,}95.$$

Ответ: 0,95 – вероятность того, что случайно выбранный студент группы, хотя бы одну контрольную работу написал на положительную оценку.

Контрольные вопросы

1. Дайте определения понятиям «сумма событий», «совместные события», «несовместные события». Приведите примеры.
2. Сформулируйте теорему о сумме двух несовместных событий. Приведите примеры.
3. Определите события $A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_n$, которые являются попарно несовместными.
4. Сформулируйте теорему о сумме попарно несовместных событий $A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_n$.
5. Чему равна сумма вероятностей событий, составляющих полную группу?
6. Чему равна сумма вероятностей противоположных событий?
7. Сформулируйте теорему о сумме двух совместных событий. Приведите примеры.
8. Является ли частным случаем теорема о сумме несовместных событий для теоремы о сумме совместных событий? Ответ обоснуйте.
9. Укажите формулу нахождения суммы трех попарно совместных событий.

Задание для самостоятельной работы

1. Из чисел от 1 до 100 случайным образом выбирается одно число. Найдите вероятность того, что это число будет либо нечетным, либо кратным 6?

2. Единожды подбрасывается игральный кубик. Найдите вероятность того, что на верхней грани кубика выпадет либо 2, либо 3?

3. В коробке 12 шаров, из которых семь – зеленые. Выбраны три шара. Найдите вероятность того, что хотя бы один из взятых шаров зеленый.

4. На полке в магазине расставлено 22 различных книги, причем 10 из них в переплете. При перестановке книг выбирается три книги. Найдите вероятность того, что хотя бы одна из взятых книг окажется в переплете.

5. Найдите вероятность извлечения домино, на которой есть 1 или 5?

6. Из партии деталей в 250 штук, произведенных на трех станках, извлекается одна деталь, при чем на первом станке произведено 70 деталей, на втором – 100 и на третьем – оставшееся количество. Найдите вероятность того, что будет выбрана деталь произведенная на первом или третьем станке.

7. В вазе стоит 15 роз, из них 6 красного цвета, 7 белого и 5 розового. Из вазы убирают три цветка. Какова вероятность, что они одного цвета?

8. Вероятность дождя в субботу составляет 30%, а в воскресенье – 40%. Найдите вероятность того, что дождь будет хотя бы в один из этих дней?

9. В автомастерской имеется три бочки с различными видами масла: моторное масло 0-W20, моторное масло 0-W30, трансмиссионное масло 75-W90. Автомеханику для замены масла в бензиновом двигателе необходимо залить моторное масло. С какой вероятностью механик выберет бочку с маслом 0-W20 или 0-W30.

10. Среди студентов университета 1 курса 30% всех студентов занимаются в научных кружках, 70% занимаются в различных музыкально-театральных кружках и 15% занимаются и научных кружках, и в музыкально-театральных кружках. Найдите вероятность того, что случайно выбранный студент занимается двумя видами деятельности.

1.4.2 Вероятность зависимых и независимых событий

> ***Определение 4.*** Событие B *не зависит* от события A, если вероятность наступления события B остается постоянной в независимости от того, наступит событие A или нет.

Отношение независимых событий обладает свойством симметричности. Если событие B не зависит от события A, то и A не зависит от B.

Теорема 4. *Вероятность двух независимых событий, есть произведение вероятностей этих событий,* то есть выполняется равенство:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Пример 5.

Опыт состоит в подбрасывании монеты и кубика. Определите вероятность того, что одновременно выпал орел при подбрасывании монеты и выпало число 6 при подбрасывании кубика.

Решение:

Событие A – в результате подбрасывания монеты выпал орел, событие B – в результате подбрасывания кубика выпало 6 очков. События A и B не являются зависимыми.

Очевидно, что вероятности каждого из них составляют:

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{6}.$$

Тогда

$$P(A \cdot B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

Обратим внимание, что при решении этой задачи можно было использовать классическое определение вероятности.

Благоприятствующий событию $A \cdot B$ исход всего один.

Общее число исходов равно 12 ($\mathrm{n} = 2 \cdot 6 = 12$), так как $\Omega = \{(a; b) \mid a \in \{"0", "P"\}, b \in \{1, 2, \dots, 6\}$.

Значит, $P(A \cdot B) = \frac{1}{12}$.

Ответ: $\frac{1}{12}$ – вероятность того, что одновременно выпал орел при подбрасывании монеты и выпало число 6 при подбрасывании кубика.

Определение 5. События $A_1, A_2, \dots, A_n$ называются *попарно независимыми*, если каждые два из них не зависимы.

Определение 6. События $A_1, A_2, \dots, A_n$ называются *независимыми в совокупности*, если вероятности каждого из этих событий не меняются от того произошли или нет произвольные события из произвольного подмножества первого множества.

Отметим, что независимость в совокупности влечёт попарную независимость. Если события независимы попарно, то отсюда не следует их независимость в совокупности.

Требование независимости событий в совокупности сильнее требования их попарной независимости.

Теорема 5. *Вероятность совместного появления нескольких независимых событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий,* то есть выполняется равенство:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_1 \cdot \mathrm{A}_2 \cdot \mathrm{A}_3 \cdot \ldots \cdot \mathrm{A}_n) = \\ = \mathrm{P}(\mathrm{A}_1) \cdot \mathrm{P}_{\mathrm{A}1}(\mathrm{A}_2) \cdot \mathrm{P}_{\mathrm{A}1\mathrm{A}2}(\mathrm{A}_3) \cdot \ldots \cdot \mathrm{P}_{\mathrm{A}1\mathrm{A}n\ldots\mathrm{A}n-1}(\mathrm{A}_n).$$

Определение 7. Событие B *зависит* от события A, если вероятность наступления события B изменится при наступлении события A.

Определение 8. Пусть известно, что A и B – зависимые события и событие A произошло. Вероятность события B, в этом предположении, называется *условной вероятностью* (при условии, что событие A произошло).

Обозначение: $P_{\mathrm{A}}(B)$

Читается выражение $P_{\mathrm{A}}(B)$ следующим образом вероятность события B при условии, что событие произошло A.

Условная вероятность события В при условии, что событие А уже наступило равна

$$\mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A} \cdot \mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})}.$$

Пример 6.

В лотке находятся 5 желтых и 7 синих шаров. Дважды вынимают по одному шару и не возвращают их обратно. Найдите вероятность появления желтого шара при втором испытании, если при первом испытании был извлечен синий шар.

Решение:

Пусть событие А – при первом испытании был извлечен синий шар, В – при втором испытании был извлечен желтый шар.

1 СПОСОБ. При условии, что первое событие произошло, в урне осталось 11 шаров, причем из них 5 желтых шаров. Тогда условная

вероятность второго события равна:

$$P_A(B) = \frac{5}{11}.$$

2 СПОСОБ. По формуле

$$P_A(B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)}.$$

Вероятность *P(A·B)* – вероятность того, что в первом испытании появится синий шар, а во втором – желтый.

Общее число исходов n – совместное появление двух шаров любого цвета соответствует числу размещений $A_{12}^2 = 11 \cdot 12 = 132$. Из этого числа исходов событию *AB* благоприятствуют $7 \cdot 5 = 35$ исходов. Тогда *P(AB) = 35/132*.

Вероятность появления синего шара при первом испытании

P (A) = 7/12.

Условная вероятность наступления события *B* при условии, что событие *A* произошло, равна:

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{35}{132}}{\frac{7}{12}} = \frac{5}{11}.$$

Ответ: $\frac{5}{11}$ – вероятность появления желтого шара при втором испытании, если при первом испытании был извлечен синий шар

Теорема 6. *Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило*, то есть выполняется равенство:

$$P(A \cdot B) = P(A)P_A(B).$$

Доказательство.

Пусть из общего числа n равновозможных и несовместных исходов испытания событию *A* благоприятствует m случаев, событию

B – k случаев, а событию $A{\cdot}B$ – t случаев.

По определению классической вероятности, получим, что

$$\mathrm{P(A)} = \frac{m}{n}, \mathrm{P(AB)} = \frac{t}{n}.$$

Тогда

$$\frac{\mathrm{P(A \cdot B)}}{\mathrm{P(A)}} = \frac{\frac{t}{n}}{\frac{m}{n}} = \frac{t}{m} = \mathrm{P_A(B)}.$$

Умножим обе части равенства на P(A), получим

$$\mathrm{P(A \cdot B)} = \mathrm{P(A)P_A(B)}.$$

Что и требовалось доказать.

Замечание 1. Применив формулу теоремы 5 к событию $B{\cdot}A$, получим

$$P(B{\cdot}A)=P(B)\ P_B(A),$$

так как событие B·A не отличается от события A·B, то

$$P(AB)=P(B)\ P_B(A).$$

Сравнив две предыдущие формулы, заключаем о справедливости равенства:

$$P(A)\ P_A(B)=P(B)\ P_B(A).$$

Следствие 3. *Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже появились*:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_1 \cdot \mathrm{A}_2 \cdot \mathrm{A}_3 \cdot \ldots \cdot \mathrm{A}_n) = \\ = \mathrm{P}(\mathrm{A}_1) \cdot \mathrm{P}_{\mathrm{A}1} \cdot (\mathrm{A}_2) \cdot \mathrm{P}_{\mathrm{A}1\mathrm{A}2}(\mathrm{A}_3) \cdot \ldots \cdot \mathrm{P}_{\mathrm{A}1\mathrm{A}n\ldots\mathrm{A}n-1}(\mathrm{A}_n),$$

где $P_{A1An\ldots An-1}(A_n)$ – вероятность события An, вычисленная в предположении, что события A_1, A_2, …, A_{n-1} наступили.

В частности, для трех событий

$$P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C).$$

Заметим, что порядок, в котором расположены события, может быть выбран любым, т.е. безразлично какое событие считать первым, вторым и т.д.

Пример 7.

В корзине 3 желтых, 7 красных и 2 синих шара. На удачу извлекается один шар и не возвращается обратно. Найдите вероятность того, что при первом испытании появится желтый шар; при втором – красный шар; при третьем – синий шар.

Решение:

Пусть событие A – при первом испытании появится желтый шар, событие B – при втором испытании появится красный шар, C – при третьем испытании появится синий шар.

Найдем вероятность появления желтого шара в первом испытании

$$P(A) = \frac{3}{12}.$$

И условную вероятность появления красного шара во втором испытании, вычисленную в предположении, что в первом испытании появился желтый шар:

$$P_A(B) = \frac{7}{11}.$$

А также условную вероятность появления синего шара в третьем испытании, вычисленную в предположении, что в первом испытании появился желтый шар, а во втором – красный:

$$P_{AB}(C) = \frac{2}{10}.$$

Применим теорему о произведении зависимых событий:

$$P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C).$$

Получим

$$P(ABC) = \frac{3}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{2}{10} = \frac{7}{660}. .$$

Ответ: $\frac{7}{660}$ – вероятность того, что при первом испытании появится желтый шар; при втором – красный шар; при третьем – синий.

Пример 8.

У сборщика имеется 5 деталей первого вида и 6 деталей второго вида. Сборщик взял деталь первого вида, а затем – второго вида. Найдите вероятность того, что первая взятая деталь – первого вида, а вторая – второго вида.

Решение.

Событие A – первая деталь окажется деталью первого вида, событие B – вторая деталь окажется деталью второго вида.

Тогда

$$P\ (A) = 5/11.$$

А вероятность того, что вторая деталь окажется деталью второго вида, после выбора первой – первого вида, т. е. условная вероятность

$$P_A\ (B) = 6/10 = 3/5.$$

По теореме умножения, искомая вероятность

$$P\ (AB) = P\ (A)\ P_A\ (B) = (5/11) \cdot (3/5) = 3/11.$$

Ответ: 3/11 – первая взятая деталь – первого вида, а вторая – второго вида.

Пример 9.

Вероятность успеха в первом, втором, третьем или четвертом испытании равна 0,6; 0,7; 0,8; 0,9 соответственно. Найти вероятность того, что: а) событие будет успешным не больше, чем трижды; б) не менее, чем дважды.

Решение:

а) Пусть событие A – событие пройдет успешно не более, чем три раза, тогда:

$$B_1 \cdot B_2 \cdot B_3 \cdot \overline{B_4} + B_1 \cdot B_2 \cdot \overline{B_3} \cdot B_4 + B_1 \cdot \overline{B_2} \cdot B_3 \cdot B_4 + \overline{B_1} \cdot B_2 \cdot B_3 \cdot B_4 = 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}9 + 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 + 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}442;$$

$B_1 \cdot B_2 \cdot \overline{B_3} \cdot \overline{B_4} + B_1 \cdot \overline{B_2} \cdot \overline{B_3} \cdot B_4 + \overline{B_1} \cdot \overline{B_2} \cdot B_3 \cdot B_4 + \overline{B_1} \cdot B_2 \cdot B_3 \cdot \overline{B_4} + B_1 \cdot \overline{B_2} \cdot B_3 \cdot \overline{B_4} + \overline{B_1} \cdot B_2 \cdot \overline{B_3} \cdot B_4 = 0{,}0084 + 0{,}032 + 0{,}086 + 0{,}014 + 0{,}02 + 0{,}05 = 0{,}21.$

$B_1\overline{B_2B_3B_4} + \overline{B_1B_2B_3}B_4 + \overline{B_1B_2}B_3\overline{B_4} + \overline{B_1}B_2\overline{B_3B_4} = 0{,}0036 + 0{,}0056 + 0{,}0096 + 0{,}022 = 0{,}041.$

$$P(A) = 0{,}693.$$

б) Пусть событие A – успех происходит не меньше, чем в двух испытаниях.

$$P(A) = 0{,}21 + 0{,}442 + B_1B_2B_3B_4 = 0{,}652 + 0{,}3024 = 0{,}9544.$$

Ответ: а) $0{,}693$, б) $0{,}9544$.

Пример 10.

В соревновании между двумя организациями принимают участие три команды. Первая команда организации A будет играть с первой командой организации B, вторая – со второй и третья – с третьей. Тогда вероятности выигрыша организации A будут соответственно равны 0,6; 0,4; 0,2. Для победы надо выиграть не менее, чем две игры. Определите победа, какой организации более вероятна?

Решение:

$B_1B_2B_3 + \overline{B_1}B_2B_3 + B_1\overline{B_2}B_3 + B_1B_2\overline{B_3} = 0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}2 + 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}2 + 0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}048 + 0{,}032 + 0{,}072 + 0{,}192 = 0{,}344$ – вероятность выигрыша организации A.

$\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2\mathrm{C}_3 + \overline{\mathrm{C}_1}\mathrm{C}_2\mathrm{C}_3 + \mathrm{C}_1\overline{\mathrm{C}_2}\mathrm{C}_3 + \mathrm{C}_1\mathrm{C}_2\overline{\mathrm{C}_3} = 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}8 + 0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}8 + 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}8 + 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}656$ – вероятность выигрыша организации B.

Ответ: вероятнее победа организации B.

Пример 11.

Пусть 20 экзаменационных билетов содержат по два вопроса. Экзаменующийся, знает ответы только на 37 вопросов. Определите вероятность того, что экзамен будет сдан на оценку «отлично» или «хорошо», если для этого достаточно ответить на два вопроса одного билета или на один вопрос одного билета и на указанный дополнительный вопрос другого билета.

Решение:

Пусть событие A – экзамен сдан на оценку «отлично» или «хорошо»; событие B – студент сдал экзамен на «отлично», т.е. ответил на два вопроса одного билета; событие C – студент сдал экзамен на «хорошо», т.е. ответил на один вопрос своего билета, на второй вопрос не ответил; ответил на третий дополнительный вопрос; событие D – студент сдал экзамен на «хорошо», т.е. на первый вопрос не ответил, а на второй вопрос ответил и на третий дополнительный вопрос также ответил, т.е.

$$A = B + C + D.$$

Тогда

$P(\mathrm{A}) = P(B) + P(C) + P(D) = \frac{37}{40} \cdot \frac{36}{39} + \frac{37}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{36}{38} + \frac{3}{40} \cdot \frac{37}{39} \cdot \frac{36}{38} \approx 0{,}85 + 0{,}067 + 0{,}067 = 0{,}984.$

Ответ: $0{,}984$ – вероятность того, что экзамен будет сдан на оценку «отлично» или «хорошо».

Пусть события $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \mathrm{A}_3, \dots,\ \mathrm{A}_n$ независимы в совокупности. Вероятности этих событий равны $P(\mathrm{A}_1) = p_1,\ P(\mathrm{A}_2) = p_2,\ P(\mathrm{A}_3) = p_3,\ \dots,\ P(\mathrm{A}_n) = p_n$. А вероятности противоположных событий равны $P(\overline{\mathrm{A}}_1) = q_1, P(\overline{\mathrm{A}}_2) = q_2, P(\overline{\mathrm{A}}_3) = q_3, \dots, P(\overline{\mathrm{A}}_n) = q_n$.

***Теорема** 7. Вероятность наступления события, состоящего в появлении хотя бы одного из событий* $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \mathrm{A}_3, \dots,\ \mathrm{A}_n$ *независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий*, то есть

$$P(\mathrm{A}) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \dots \cdot q_n.$$

Замечание 2. *Если все n событий имеют одинаковую вероятность, то вероятность появления хотя бы одного из событий находится по формуле:*

$$P(\mathrm{A}) = 1 - q^n.$$

Пример 12.

Устройство содержит два элемента, которые работают независимо друг от друга. Вероятности отказа элементов составляют 0,001 и 0,075. При неисправности хотя бы одного элемента происходит отказ работы всего устройства. Найдите вероятность отказа работы устройства.

Решение:

Событие А – произошел отказ устройства.

Событие $\overline{\mathrm{A}}_1$– произошел отказ первого элемента устройства.

Событие $\overline{\mathrm{A}}_2$– произошел отказ второго элемента устройства.

Вероятности событий по условию равны:

$$q_1 = P(\overline{\mathrm{A}}_1) = 0{,}001,\ q_2 = P(\overline{\mathrm{A}}_2) = 0{,}075.$$

Тогда вероятности безотказной работы элементов устройств равны:

$$p_1 = P(\mathrm{A}_1) = 0{,}999,\ p_2 = P(\mathrm{A}_2) = 0{,}925.$$

Тогда вероятность отказа устройства найдем по формуле:

$$P(\mathrm{A}) = 1 - p_1 \cdot p_2 = 1 - 0{,}999 \cdot 0{,}925 = 0{,}075925.$$

Ответ: 0,075925 – вероятность отказа работы устройства.

Контрольные вопросы

1. Какие события называют независимыми. Приведите примеры.
2. Сформулируйте теорему о нахождении произведения независимых событий. Приведите примеры применения.

3. Какие события называют зависимыми. Приведите примеры.
4. Дайте определение термину «условная вероятность». Приведите примеры.
5. Какие события называют попарно независимыми?
6. Какие события являются независимыми в совокупности?
7. Следует ли из попарной независимости событий независимость событий в совокупности? И наоборот?
8. Сформулируйте теорему о нахождении произведения зависимых событий. Приведите примеры применения.
9. Укажите, верно ли равенство $P(A)\ P_A(B)=P(B)\ P_B(A)$.
10. Сформулируйте теорему о вероятности появления хотя бы одного события.

Задание для самостоятельной работы

1. Бросаются две игральные кости. Какова вероятность того, что а) на обеих костях выпадет 6? б) на одной выпадет 3, на другой – 5?

2. Бросается игральный кубик и монета. Какова вероятность того, что на кубике выпадет четное число, а на монете – орел?

3. Бросаются три монеты. Какова вероятность того, что орлы выпадут ровно на двух монетах?

4. В лотерее имеется 10 билетов, один из которых выигрышный. Вероятность купить один билет равна 1/3. Если купить два билета, какова вероятность выиграть?

5. Для доступа в систему необходимо ввести правильную последовательность из трех цифр. Какова вероятность того, что случайно выбранная последовательность будет правильной?

6. В ящике имеется 17 деталей, среди которых 7 окрашенных. Упаковщик наудачу извлекает три детали. Найдите вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.

7. В урне 5 белых, 9 черных и 5 красных шаров. Вынимаются два шара без возвращения. Какова вероятность того, что оба шара будут одного цвета?

8. В коробке 4 романа, 3 учебника и 2 справочника. Книги выбираются наугад. Какова вероятность того, что первая выбранная книга будет романом, а вторая – учебником?

9. Вероятности появления двух независимых событий A_1 и A_2 соответственно равны p_1 и p_2. Найти вероятность появления а) только одного из этих событий, б) обоих событий, в) ни одного события, г) хотя бы одного из этих событий, д) ни более одного события.

10. Бросается две монеты. Какова вероятность того, что хотя бы на одной из них выпадет орел?

11. Вероятность выигрыша команды А в первой игре составляет 0,6, а во второй – 0,7. Какова вероятность того, что команда выиграет хотя бы одну игру?

12. Вероятность того, что первый спортсмен выиграет соревнование, равна 0,6, а второй – 0,5. Какова вероятность того, что хотя бы один из них выиграет?

13. Два пути ведут к дому, и вероятность того, что на первом пути возникнет пробка, составляет 0,4, на втором – 0,3. Какова вероятность того, что пробка будет хотя бы на одном из путей?

14. Вероятность обнаружения ошибки первым тестом 0,8, вторым – 0,9. Тесты независимы. Какова вероятность не обнаружить ошибки ни в одном из тестов?

15. В магазине 70% фруктов и 80% овощей – свежие. Найдите вероятность того, что случайно выбранный продукт будет не свежим.

16. Для передатчика установлены два сигнализатора. Вероятность того, что первый сигнализатор сработает, равна 0,95, и, второй – 0,9. Найдите вероятность того, что сработают оба сигнализатора.

17. Вероятность того, что сработает один из сигнализаторов, равна 0,4. Найдите вероятность того, что сработал второй сигнализатор, если известно, что первый сигнализатор сработал с вероятностью 0,7.

18. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,8, а второй – 0,7. Какова вероятность того, что он сдаст а) оба экзамена? б) только один экзамен? в) ни одного?

19. Вероятность того, что оба студента сдали экзамен, равна 0,76. Найдите вероятность того, что первый студент сдаст экзамен, если известно, что второй студент сдаст экзамен с вероятностью 0,3.

20. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,9, а для

второго – 0,85. Найдите вероятность того, что при одном выстреле в мишень попадает только один из стрелков.

21. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность того, что при одном выстреле в мишень не попадает ни один из стрелков, равна 0,15. Найдите вероятность того, что второй стрелок попадает в мишень, при условии, что первый стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,62.

22. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при трех выстрелах равна 0,94. Найдите вероятность попадания в цель при одном выстреле.

23. Произведено 5 выстрелов. Вероятность попадания в цель при первом выстреле равна 0,9 и уменьшается на 0,05 при каждом последующем выстреле. Поражение мишени производится до первого попадания. Найдите вероятность попадания в цель при а) трех выстрелах, б) четырех, в) пяти выстрелах.

24. Компьютерный вирус атакует сеть, состоящую из 10 компьютеров. Вероятность заражения каждого компьютера равна 0,3. Найдите вероятность того, что будет заражен хотя бы один компьютер?

25. Имеется две версии программного обеспечения с вероятностями ошибки 0,1 и 0,2. Если версия выбирается наугад, а затем тестируется, какова вероятность обнаружения ошибки?

26. Студент сдает три экзамена. Вероятности успешной сдачи каждого экзамена равны 0,6, 0,5 и 0,4 соответственно. Какова вероятность того, что студент успешно сдаст все экзамены? Хотя бы один экзамен?

27. Вероятность того, что студент опоздает на утреннюю лекцию, составляет 0,25. Вероятность того, что он опоздает на вторую лекцию, если опоздал на первую, составляет 0,8. Какова вероятность того, что студент опоздает хотя бы на одну лекцию?

28. Система состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятности их безотказной работы за время t составляют 0,91, 0,95 и 0,88 соответственно. Найдите вероятность безотказной работы всей системы за время t?

29. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0,95. Найдите вероятность того, что только одно изделие является стандартным а) из двух проверенных изделий, б) из трех проверенных изделий, в) из четырех проверенных изделий.

30. Вероятность того, что при одном замере некоторого физического объекта будет допущена ошибка, превышающая заданную точность, равна 0,28. Произведены три независимых измерения. Найти вероятность того, что только а) в одном, б) в двух, в) в трех из них допущенная ошибка превысит заданную точность.

31. Из партии изделий менеджер отбирает изделия только высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0,79. Найти вероятность того, что из трех проверенных изделий только а) два изделия, б) три изделия, в) не менее одного, г) не более двух высшего сорта.

32. В отделе работают три мужчины и четыре женщины. Отобраны три человека. Найдите вероятность того, что все отобранные лица окажутся а) мужчинами, б) женщинами, в) окажется хотя бы одна женщина среди отобранных лиц.

33. Найдите вероятность $P(A)$ по данным вероятностям:

$P(AB) = 0{,}22$, $P(A\bar{B}) = 0{,}78$.

34. Найти вероятность $P(AB)$ по данным вероятностям:

$P(A) = 0{,}1$, $P(B) = 0{,}6$, $P(A + B) = 0{,}58$.

1.5 Теоремы о полной вероятности и Байеса

1.5.1 Формула полной вероятности

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий B_1, B_2, ... , B_n, которые образуют полную группу. Пусть известны вероятности этих событий и условные вероятности $P_{B1}(A)$, $P_{B2}(A)$,..., $P_{Bn}(A)$ события A. Поскольку заранее не известно, какое из этих событий наступит, их называют *гипотезами*. Вероятность события A можно найти с помощью теоремы 1.

Теорема 1. *Вероятность события A, которая может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий B_1 B_2, ..., B_n, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A*:

$$P(A) = P(B_1)P_{B1}(A) + P(B_2)P_{B2}(A) + \cdots + P(B_\mathrm{n})P_{B\mathrm{n}}(A).$$

Эту формулу называют «*формулой полной вероятности*».

Доказательство.

По условию, событие A может наступить, если наступит одно из несовместных событий B_1, B_2, ..., B_n. Другими словами, появление события A означает осуществление одного, безразлично какого, из несовместных событий B_1, B_2, ..., B_n. Пользуясь для вычисления вероятности события A теоремой сложения, получим

$$P(A) = P(B_1A) + P(B_2A) + \cdots + P(B_\mathrm{n}A).$$

Остается вычислить каждое из слагаемых. По теореме умножения вероятностей зависимых событий имеем

$$P(B_1A) = P(B_1)P_{B1}(A), \quad P(B_2A) = P(B_2)P_{B2}(A), \quad \ldots ,$$
$$P(B_\mathrm{n}A) = P(B_\mathrm{n})P_{B\mathrm{n}}(A).$$

Подставив правые части этих равенств в первое соотношение, получим формулу полной вероятности

$$P(A) = P(B_1)P_{B1}(A) + P(B_2)P_{B2}(A) + \cdots + P(B_\mathrm{n})P_{B\mathrm{n}}(A).$$

Что и требовалось доказать.

Пример 1.

Имеется два набора механизмов. Вероятность того, что механизм из первого набора является рабочим, равна 0,8, а вероятность того, что механизм из второго набора – 0,9. Найдите вероятность того, что наудачу взятый механизм является рабочим.

Решение.

Пусть событие A – наудачу взятый механизм является рабочим.

Событие B_1 – механизм может быть извлечен из первого набора, событие B_2 – механизм может быть извлечен из второго набора.

Вероятность того, что механизм взят из первого набора, равна

$$P(B_1) = \frac{1}{2}.$$

Вероятность того, что механизм взят из второго набора, равна

$$P(B_2) = \frac{1}{2}.$$

Условная вероятность того, что из первого набора будет выбран рабочий механизм, составляет

$$P_{B_1}(A) = 0{,}8.$$

Условная вероятность того, что из второго набора будет выбран рабочий механизм, составляет

$$P_{B_2}(A) = 0{,}9.$$

По формуле полной вероятности получим

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B_1)\mathrm{P}_{B1}(A) + P(B_2)\mathrm{P}_{B2}(A) = 0{,}5 \cdot 0{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}9 = 0{,}85.$$

Ответ: 0,85 – вероятность того, что наудачу взятый механизм является рабочим.

Пример 2.

В первый магазин поступает 30 изделий, из них 2 бракованных во второй магазин поступает 20 изделий того же производителя, из них 1 бракованная. Из второго магазина в первый перевезли одно из изделий. Найдите вероятность того, что изделие из первого магазина не является бракованным.

Решение.

Пусть событие A – изделие из первого магазина не является бракованным.

Событие B_1 – из второго магазина привезено стандартное изделие, событие B_2 – из второго магазина привезено не стандартное изделие.

Вероятность того, что из второго магазина привезено не бракованное изделие, равна

$$P(B_1) = \frac{19}{20}.$$

Вероятность того, что из второго магазина привезено бракованное изделие, равна

$$P(B_2) = \frac{1}{20}.$$

Условная вероятность того, что в первом магазине выбрано не бракованное изделие, при условии, что из второго магазина в первый было привезено не бракованное изделие, равна

$$P_{B_1}(A) = \frac{29}{31}.$$

Условная вероятность того, что в первом магазине выбрано не бракованное изделие, при условии, что из второго магазина в первый было привезено бракованное изделие, равна

$$P_{B_2}(A) = \frac{28}{31}.$$

Тогда по формуле полной вероятности найдем вероятность того, что изделие из первого магазина не является бракованным.

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) = \left(\frac{19}{20}\right) \cdot \left(\frac{29}{31}\right) + \left(\frac{1}{20}\right) \cdot \left(\frac{28}{31}\right) \approx 0{,}93.$$

Контрольные вопросы

1. Дайте определения понятию «гипотеза».
2. Приведите примеры гипотез.
3. Сформулируйте теорему о полной вероятности.
4. Приведите примеры задач для нахождения вероятности с помощью формулы полной вероятности.

Задание для самостоятельной работы

1. Два стрелка произвели по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень первым стрелком равна 0,7, а вторым – 0,6. Найдите вероятность того, что стрелок попал в мишень.
2. В первом ящике содержится 25 деталей, из них 22 стандартных, во втором – 35 деталей, из них 30 стандартных. Из первого ящика переложили во второй одну деталь. Найдите вероятность того, что наудачу извлеченная деталь из наудачу взятого ящика – стандартная.
3. Имеется три ящика с шариками: первый содержит 2 красных и 3 синих шара, второй – 4 красных и 1 синий, третий – 1 красный и 4 синих. Из произвольного ящика берут один шар. Какова вероятность того, что он будет а) красным? б) синим?
4. Пациенту может быть назначено лечение А или Б. Вероятность выздоровления при лечении А равна 0,8, при лечении Б – 0,6. Известно, что 70% пациентов лечатся методом А. Какова общая вероятность выздоровления пациента?
5. Для определения наличия заболевания используются два теста. Если заболевание присутствует, то первый тест положителен в 95% случаев, второй – в 90% случаев. Вероятность наличия заболевания у обследуемого – 0,02. Какова вероятность того, что у пациента есть заболевание?
6. Вероятность наличия заболевания у пациента составляет 0,015. Тест на заболевание имеет чувствительность 95% и

специфичность 96%. Какова вероятность положительного теста на заболевание?

7. В компании 60% сотрудников используют Windows, остальные – MacOS. Среди пользователей Windows 70% используют специальное ПО, среди пользователей MacOS – только 40%. Найдите вероятность того, что случайно выбранный сотрудник использует специальное ПО?

8. Вероятность того, что пройдет дождь, составляет 30%. Если пойдет дождь, то вероятность того, что Катя возьмет зонт, равна 90%. Какова вероятность того, что Катя возьмет зонт?

9. На первой производственной линии производится 30% продукции, на второй – 45%, на третьей – 25%. Доля брака на первой линии составляет 1%, на второй – 2%, на третьей – 1.5%. Какова общая вероятность того, что случайно выбранный продукт будет бракованным?

10. Три системы безопасности срабатывают с вероятностями 0,9, 0,8 и 0,7 соответственно. Нарушитель выбирает систему для атаки с вероятностями 0,3, 0,4 и 0,3. Какова вероятность обнаружения нарушителя?

11. В городе 70% автомобилей, 20% велосипедов и 10% мотоциклов. Вероятность попасть в ДТП на автомобиле составляет 0,05, на велосипеде – 0,1, на мотоцикле – 0,15. Найдите общую вероятность ДТП?

12. Пользователи мобильного приложения делятся на новых – 50%, активных – 30% и потерянных – 20%. Вероятность покупки у новых пользователей – 5%, у активных – 15%, у потерянных – 1%. Найдите вероятность покупки через приложение?

13. Известно, что 60% покупателей – мужчины, 40% – женщины. Вероятность возврата товара мужчинами составляет 5%, женщинами – 10%. Какова общая вероятность возврата товара?

14. Инвестор рассматривает два проекта. Вероятность успеха первого проекта составляет 75%, второго – 65%. Найдите вероятность того, что проект оказался убыточным.

15. Имеется три группы покупателей с вероятностями покупки товара 10%, 20% и 30%. Найдите вероятность того, что товар был куплен.

1.5.2 Вероятность гипотез. Формула Байеса

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \dots, B_n$, образующих полную группу.

Вероятность появления события A определяется по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(B_1)P_{B1}(A) + P(B_2)P_{B2}(A) + \dots + P(B_\mathrm{n})P_{B\mathrm{n}}(A).$$

Произошло испытание, в результате которого появилось событие A. Определим, как изменились вероятности гипотез, в связи с тем, что событие A уже наступило. Найдем условные вероятности

$$P_\mathrm{A}(B_1),\ P_\mathrm{A}(B_2), \dots, P_\mathrm{A}(B_\mathrm{n}).$$

Найдем сначала условную вероятность $P_\mathrm{A}(B_1)$. По теореме умножения имеем

$$P(AB_1) = P(A)P_A(B_1) = P(B_1)P_{B1}(A).$$

Отсюда

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B1}(A)}{P(A)}.$$

Заменим $P(A)$ по формуле полной вероятности, получим

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B1}(A)}{P(B_1)P_{B1}(A) + P(B_2)P_{B2}(A) + \dots + P(B_\mathrm{n})P_{B\mathrm{n}}(A)}.$$

Аналогично можно получить формулы, определяющие условные вероятности остальных гипотез. Таким образом условная вероятность любой гипотезы B_i ($i = 1, 2, \dots, n$) может быть вычислена по формуле

$$P_A(\mathrm{B}_i) = \frac{P(B_i)P_{\mathrm{B}i}(A)}{P(B_1)P_{B1}(A) + P(B_2)P_{B2}(A) + \dots + P(B_\mathrm{n})P_{B\mathrm{n}}(A)}.$$

Данные формулы называют *формулами Байеса*. Эти формулы получил английский математик в 1764 г.

Формулы Байеса позволяют переоценить вероятности гипотез после того, как становятся известными итоги испытания, в результате которого появилось событие А.

Пример 3.

Имеется два набора механизмов. Вероятность того, что механизм из первого набора является рабочим, равна 0,8, а вероятность того, что механизм из второго набора – 0,9. Найдите вероятность того, что наудачу взятый механизм из первого набора является рабочим.

Решение.

Пусть событие A – наудачу взятый механизм является рабочим.

Событие B_1 – механизм может быть извлечен из первого набора, событие B_2 – механизм может быть извлечен из второго набора.

Вероятность того, что механизм взят из первого набора, равна

$$P(B_1) = \frac{1}{2}.$$

Вероятность того, что механизм взят из второго набора, равна

$$P(B_2) = \frac{1}{2}.$$

Условная вероятность того, что из первого набора будет выбран рабочий механизм, составляет

$$P_{B_1}(A) = 0{,}8.$$

Условная вероятность того, что из второго набора будет выбран рабочий механизм, составляет

$$P_{B_2}(A) = 0{,}9.$$

По формуле полной вероятности получим

$$P(A) = P(B_1)P_{B1}(A) + P(B_2)P_{B2}(A) = 0{,}5 \cdot 0{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}9 = 0{,}85.$$

Далее подставим значения в формулу Байеса:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B1}(A)}{P(B_1)P_{B1}(A) + P(B_2)P_{B2}(A)} = \frac{0,5 \cdot 0,8}{0,5 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 0,9} = 0,47.$$

Ответ: 0,47 – вероятность того, что наудачу взятый механизм из первого набора является рабочим.

Пример 4.

Пациенту могут быть диагностированы одно из трех заболеваний с равной вероятностью. Тесты на заболевания имеют разную чувствительность: 90%, 85% и 80%. Если тест положителен, какова вероятность того, что это первое заболевание?

Решение.

Событие A – событие, состоящее в том, что тест положителен. Можно сделать три предположения:

гипотеза B_1 – диагностировано первое заболевание;

гипотеза B_2 – диагностировано второе заболевание.

гипотеза B_3 – диагностировано третье заболевание.

Так как гипотезы равновероятны, то

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}.$$

Вероятность того, что тест положителен при первом заболевании, равна

$$P_{B_1}(A) = 0,9.$$

Вероятность того, что тест положителен при втором заболевании, равна

$$P_{B_2}(A) = 0,85.$$

Вероятность того, что тест положителен при третьем заболевании, равна

$$P_{B_3}(A) = 0,8.$$

Искомую вероятность того, что тест положителен при первом заболевании, найдем по формуле Байеса:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B1}(A)}{P(B_1)P_{B1}(A) + P(B_2)P_{B2}(A) + P(B_3)P_{B3}(A)}.$$

$$P_A(B_1) = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0{,}9}{\frac{1}{3} \cdot 0{,}9 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}85 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}8} \approx 0{,}35.$$

Как видно, до испытания вероятность гипотезы B_1 равнялась 0,33, а после того, как стал известен результат испытания, условная вероятность этой гипотезы изменилась и стала равной 0,35. Таким образом, использование формулы Байеса позволило переоценить вероятность рассматриваемой гипотезы.

Контрольные вопросы

1. Дайте определения понятию «гипотеза».
2. Приведите примеры гипотез.
3. Опишите формулу Байеса.
4. Приведите примеры задач для нахождения вероятности с помощью формулы Байеса.
5. Каково практическое применение формулы Байеса?

Задание для самостоятельной работы

1. Вероятность наличия заболевания у пациента составляет 0,01. Тест на заболевание имеет чувствительность 95% и специфичность 90%. Найдите вероятность того, что пациент действительно болен, если известно, что тест на заболевание положителен.

2. На первой производственной линии производится 30% продукции, на второй – 45%, на третьей – 25%. Доля брака на первой линии составляет 1%, на второй – 2%, на третьей – 1.5%. Найдите

вероятность того, что продукт был произведен на второй линии, если он оказался бракованным.

3. Три системы безопасности срабатывают с вероятностями 0,9, 0,8 и 0,7 соответственно. Нарушитель выбирает систему для атаки с вероятностями 0,3, 0,4 и 0,3. Какова вероятность обнаружения нарушителя, если была выбрана вторая система?

4. В городе 70% автомобилей, 20% велосипедов и 10% мотоциклов. Вероятность попасть в ДТП на автомобиле составляет 0,05, на велосипеде – 0,1, на мотоцикле – 0,15. Найдите вероятность ДТП при условии, что нарушитель был на мотоцикле? Велосипеде? Автомобиле?

5. Система распознавания образов работает с вероятностью успеха 0,9 против стандартных объектов и 0,6 против нестандартных объектов, причем 80% объектов стандартные. Если система не распознала объект, какова вероятность того, что объект был нестандартным?

6. Можно выбрать два маршрута, чтобы доехать до работы. Первым маршрутом ездит 70% сотрудников, вторым – 30% сотрудников. Пробки на первом маршруте бывают с вероятностью 30%, на втором – 60%. Сотрудник опоздал на работу из-за пробки. Найдите вероятность того, что он ехал первым маршрутом?

7. В группе А заболеваемость гриппом составляет 10%, в группе В – 20%. Найдите вероятность того, что случайно выбранный человек из группы А заболеет гриппом.

8. Абитуриенты выбирают специальность в приемной комиссии при поступлении. Прикладную информатику выбирает 70% абитуриентов, экономику – 30% абитуриентов. Вероятность успешной карьеры после выбора прикладной информатике составляет 80%, экономики – 70%. Студент достиг успеха в карьере. Какова вероятность того, что он учился по направлению прикладная информатика?

9. Компания провела три рекламные кампании с равными бюджетами. Вероятности привлечения клиента через эти кампании составляют 0,3, 0,4 и 0,5 соответственно. Клиент пришел через одну из кампаний. Какова вероятность того, что это была третья кампания?

10. Геологическая разведка ведется на трех участках с вероятностями нахождения месторождений 20%, 30% и 50%. Если месторождение было найдено, какова вероятность того, что это произошло на втором участке?

11. Вероятность поломки первой машины в течение года составляет 10%, второй — 20%. Если оборудование сломалось, какова вероятность того, что это была вторая машина?

12. Существуют два маршрута поезда с вероятностью опоздания 30% и 20%. Если поезд опоздал, какова вероятность того, что это был первый маршрут?

13. Алгоритм с вероятностью 90% распознает фейковую новость и с вероятностью 80% — реальную. Если новость была распознана как фейковая, какова вероятность того, что она действительно фейковая?

14. Компания распределяет ресурсы между проектами проектами с вероятностями успеха 70%, 60%, 65% и 50%. Если проект оказался успешным, какова вероятность того, что это был третий проект?

15. В каждой из трех урн содержится 7 черных и 8 фиолетовых шаров. Из первой урны наудачу извлечен один шар и переложен во вторую урну, после чего из второй урны наудачу извлечен один шар и переложен в третью урну. Найдите вероятность того, что шар, наудачу извлеченный из третьей урны, окажется фиолетовым.

1.6 Повторные независимые испытания

1.6.1 Формула Бернулли

На практике очень часто возникают задачи, которые можно представить в виде многократно повторяющихся испытаний при одних и тех же условиях.

Напомним, что если производится несколько испытаний, причем вероятность события А в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют *независимыми относительно события А*.

Далее будем рассматривать лишь те независимые испытания, в которых событие А имеет одну и ту же вероятность.

Пусть проводится n независимых испытаний, в каждом из которых событие А может появиться или не появиться. Вероятность события А во всех испытаниях одинаковая и равна p. Тогда вероятность того, что событие А не наступило равна $q = 1 - p$.

Вычислим вероятность того, что при n испытаниях событие А осуществится ровно k раз и, следовательно, не осуществится $n - k$ раз. Важно подчеркнуть, что не требуется, чтобы событие А повторилось ровно k раз в определенной последовательности. Например, если речь идет о появлении события А три раза в четырех испытаниях, то возможны следующие сложные события: $AAA\overline{A}$, $AA\overline{A}A$, $A\overline{A}AA$, $\overline{A}AAA$. Запись $AAA\overline{A}$ означает, что в первом, втором и третьем испытаниях событие А наступило, а в четвертом испытании оно не появилось, т. е. наступило противоположное событие $\overline{A}$; соответственный смысл имеют и другие записи. Искомую вероятность обозначим $P_n(k)$.

Пример 1.

В шести испытаниях событие появится два раза. Это означает, что событие произойдет два раза и не произойдет четыре раза.

Символ $P_6(2)$ означает вероятность того, что событие произойдет два раза и не произойдет четыре раза.

Поставленную задачу можно решить с помощью формулы Бернулли.

Вероятность одного сложного события, состоящего в том, что в n испытаниях событие А наступит k раз и не наступит $n - k$ раз, по теореме умножения вероятностей независимых событий равна $p^k\, q^{n-k}$. Таких «сложных» событий может быть столько, сколько можно составить сочетаний из n элементов по k элементов – C^k_n. Эти сложные события несовместны, то по теореме сложения вероятностей несовместных событий искомая вероятность равна сумме вероятностей всех возможных сложных событий. Вероятности всех этих событий одинаковы, то искомая вероятность появления k раз события A в n испытаниях равна вероятности одного сложного события, умноженной на их число:

$$\mathrm{P}_n(k) = C_n^k\, p^k q^{n-k}$$

или

$$\mathrm{P_n(k)} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k q^{n-k}.$$

Эта формула называется *формулой Бернулли*.

Пример 2. Вероятность того, что станок производит бракованное изделие равна $p = 0{,}05$. Найдите вероятность того, что из 6 произведенных изделий будет 4 бракованных.

Решение. Вероятность производства бракованного изделия станком постоянна и равна $p = 0{,}05$. Тогда вероятность получить не бракованное изделие также постоянна и равна $q = 1 - p = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$.

Вероятность того, что из 6 произведенных изделий будет 4 бракованных, найдем по формуле Бернулли.

$$\mathrm{P}_6(4) = C_6^4\, p^4 q^2 = \frac{6!}{4! \cdot 2!} (0{,}05)^4 \cdot (0{,}95)^2 \approx 0{,}000056.$$

Ответ: $0{,}000056$ – вероятность того, что из 6 произведенных изделий будет 4 бракованных.

Определение 1. *Наивероятнейшим числом появления* события А в n независимых испытаниях называется такое число m_0, для которого вероятность, соответствующая этому числу, превышает или, по крайней мере, не меньше вероятности каждого из остальных возможных чисел появления события *A*.

Обозначение: . m_0

Для определения наивероятнейшего числа используют двойное неравенство:

$$np - q \le m_0 \le np + p.$$

Пример 3.

Известно, что 18% продукции, поставляемой в торговую точку, не удовлетворяет всем требованиям стандарта. В торговую точку была завезена партия продукции объемом 300 штук. Найдите наивероятнейшее число продукции, удовлетворяющей требованиям стандарта.

Решение.

По условию

$$n = 300, q = 0{,}18, p = 1 - 0{,}18 = 0{,}82.$$

Получим неравенство:

$$300 \cdot 0{,}82 - 0{,}18 \le m_0 \le 300 \cdot 0{,}82 + 0{,}82,$$

$$245{,}82 \le m_0 \le 246{,}82.$$

Ответ: наивероятнейшее число продукции, удовлетворяющих требованиям стандарта, в партии из 300 штук равно 246.

Контрольные вопросы

1. Дайте определения понятию «независимые события». Приведите примеры.
2. Как находится вероятность того, что событие не наступит?
3. .Что означает запись $P_{10}(7)$?
4. При каких условиях применяется формула Бернулли?
5. Назовите формулу Бернулли.
6. Приведите примеры задач, решаемых с помощью формулы Бернулли.
7. Какое число называют наивероятнейшим?
8. Как найти наивероятнейшее число? Приведите примеры.

Задание для самостоятельной работы

1. Два равносильных противника играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть три партии из четырех или четыре партии из шести, ничьи во внимание не принимаются?
2. Монету бросают 10 раз. Найти вероятность того, что решка выпадет: а) три раза, б) менее двух раз, в) не менее восьми раз.
3. Вероятность выигрыша в лотерею составляет 0,1. Найдите вероятность того, что при покупке 10 билетов, вы выиграете хотя бы один раз.
4. Студент знает 80% билетов по каждой дисциплине. Какова вероятность того, что из 5 экзаменов он а) не сдаст только один? б) сдаст три экзамена?
5. Вероятность того, что на определенный почтовый ящик придет спам-письмо, равна 0,16. Найдите вероятность получить ровно 3 спам-письма из 5.
6. Вероятность того, что человек вспомнит пароль от первой попытки, составляет 0,8. Какова вероятность того, что из 4 попыток пароль будет введен правильно ровно дважды?
7. Компьютер заражается вирусом при посещении сайта с вероятностью 0,12. Найдите вероятность того, что при посещении 15 сайтов компьютер ни разу не заразится.
8. Программа автоматически генерирует пароли, каждый из которых с вероятностью 0,95 удовлетворяет требованиям безопасности. Сгенерировано 14 паролей. Найдите вероятность, что все пароли будут безопасными.
9. Спортсмен одерживает победу в одном забеге с вероятностью 0,75. Какова вероятность того, что он выиграет 6 из 10 забегов?
10. Вероятность успешного восхождения на гору для альпиниста составляет 0,9. Какова вероятность того, что из 10 попыток восхождения альпинист не достигнет вершины только один раз?
11. Спортсмен стреляет по мишеням с вероятностью попадания в одну мишень 0,53. Если спортсмен делает 10 выстрелов, какова вероятность того, что он поразит мишень хотя бы 8 раз?

12. Вероятность, что опрошенный поддерживает благоустройство объекта, равна 0,44. Найдите вероятность того, что из 25 опрошенных 10 человек поддержат инициативу.

13. Приживаемость саженца яблони зависит от некоторых условий и составляет 93%. Найдите вероятность того, что из 8 посаженных саженцев приживутся все.

14. Вероятность всхожесть семени пшеницы в лабораторных условиях составляет 0,78. Найдите вероятность того, что из 6 семян взойдут не менее 4.

15. Известно, что 5% партии товара дефектны. Найдите вероятность того, что в случайной выборке из 20 товаров а) не будет ни одного дефектного? б) будет 5 дефектных?

16. В семье семь детей. Найдите вероятность того, что среди этих детей: а) две девочки; б) не более четырех мальчиков; в) более пяти мальчиков; г) не менее двух и не более трех девочек. Вероятность рождения мальчика принять равной 0,55.

17. Испытывается каждый из 10 элементов электроплаты. Вероятность того, что элемент выдержит испытание, равна 0,99. Найдите наивероятнейшее число элементов, которые выдержат испытание.

18. Отдел технического контроля проверяет партию деталей в количестве 100 штук. Вероятность того, что деталь стандартна, равна 0,86. Найдите наивероятнейшее число деталей, которые будут признаны стандартными.

19. Торговый представитель осматривает 24 образца товаров на витрине. Вероятность того, что каждый из образцов будет признан годным к продаже, равна 0,69. Найдите наивероятнейшее число образцов, которые торговый представитель признает годными к продаже.

20. Прибор состоит из шести независимо работающих элементов. Вероятность отказа элемента в момент включения прибора равна 0,01. Найдите: а) наивероятнейшее число отказавших элементов; б) вероятность наивероятнейшего числа отказавших элементов; в) вероятность отказа прибора, если для этого достаточно, чтобы отказали хотя бы три элемента.

21. Найдите вероятность p наступления события в каждом из 60 независимых испытаний, если наивероятнейшее число наступлений события в этих испытаниях равно 20?

1.6.2 Формулы приближенных вычислений

Формула Бернулли, позволяет вычислить вероятность того, что событие появится в n испытаниях ровно k раз. Использовать формулу Бернулли при больших значениях n затруднительно, так как в формуле нужно будет выполнить действий над достаточно большими числами.

Пример 1.

Если n = 1000, k = 700, p = 0,02, то для нахождения вероятности $P_{1000}(700)$ нужно вычислить выражение:

$$\mathrm{P}_{1000}(30) = \frac{50!}{30!\,20!} \cdot (0{,}1)^{30} \cdot (0{,}9)^{20}.$$

С помощью таблиц логарифмов факториалов можно немного упростить вычисления, но и при подобном подходе вычисления достаточно громоздкие. Кроме того, таблицы содержат приближенные значения логарифмов, поэтому в процессе вычислений накапливаются погрешности.

Вычисление вероятности $P_n(k)$ при достаточно больших n возможно с помощью *приближенных формул*, называемых *асимптотическими*.

Теорема Пуассона. *Если вероятность p наступления события A в каждом испытании стремится к нулю при неограниченном увеличении числа* n *испытаний, при чем произведение* np *стремится к постоянному числу* λ, *то вероятность* $P_n(k)$ *того, что событие A появится* k *раз в* n *независимых испытаниях, удовлетворяет предельному равенству*:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}_n(k) = \mathrm{P}_n(\lambda) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}.$$

Если вероятность p – постоянна и мала, число испытаний n велико, число $\lambda = np$ – незначительно, $\lambda < 10$, то из предельного равенства следует *приближенная формула Пуассона*:

$$\mathrm{P}_n(k) \approx \mathrm{P}_n(\lambda) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}.$$

В приложении 2 приедены значения функции Пуассона.

Локальная теорема Лапласа дает асимптотическую формулу, которая позволяет приближенно найти вероятность появления события ровно k раз в n испытаниях, если число испытаний достаточно велико.

Заметим, что для частного случая, а именно для *p = 1/2*, асимптотическая формула была найдена в 1730 г. Муавром; в 1783 г. Лаплас обобщил формулу Муавра для произвольного *p*, отличного от 0 и 1. Поэтому теорему, о которой здесь идет речь, иногда называют *теоремой Муавра–Лапласа*.

Локальная теорема Лапласа. *Если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k)$ того, что событие A появится в n испытаниях ровно k раз, приближенно равна (тем точнее, чем больше n) значению функции*

$$y = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$$

при $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$.

В приложении 3 указаны значения функции $\varphi\ (\mathrm{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x3}{2}}$, соответствующие положительным значениям аргумента *x*. Для отрицательных значений аргумента пользуются теми же таблицами, так как функция *φ(x)* – четная, т.е. выполняется равенство:

$$\varphi(-x)\ =\ \varphi(x).$$

Итак, вероятность того, что событие *A* появится в n независимых испытаниях ровно k раз, приближенно равна

$$\mathrm{P}_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$

где $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$.

Пример 2. Найти вероятность того, что событие А наступит ровно 100 раз в 900 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,1.

Решение.

По условию, n = 900; k = 40; p = 0,1; q = 0,9. Воспользуемся асимптотической формулой Лапласа:

$$\mathrm{P}_{900}(100) \approx \frac{1}{\sqrt{900 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}} \cdot \varphi(x) = \frac{1}{9} \cdot \varphi(\mathrm{x}).$$

Вычислим определяемое данными задачи значение x:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 900 \cdot 0{,}1}{9} \approx 1{,}11.$$

По таблице приложения 3 находим φ(1,11) = 0,2155.

Искомая вероятность

$$\mathrm{P}_{900}(100) = \frac{1}{9} \cdot 0{,}2155 \approx 0{,}0239.$$

Ответ: 0,0239 – вероятность того, что событие А наступит ровно 100 раз в 900 испытаниях.

Производится *n* испытаний, в каждом из которых вероятность появления события А постоянна и равна p (0 < p < 1).

Интегральная теорема Лапласа. Если вероятность *p* наступления события *A* в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что событие *A* появится в п испытаниях от k_1 до k_2 раз, приближенно равна

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi\,(x_2) - \Phi\,(x_1),$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

где $x_1 = \frac{\mathrm{k}_1 - np}{\sqrt{npq}}$ и $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

При решении задач, требующих применения интегральной теоремы Лапласа, используют специальные таблицы, так как неопределенный интеграл *Ф(х)* не выражается через элементарные функции. Таблица для интеграла *Ф(х)* приведена в приложении 4. В таблице даны значения функции *Ф(х)* для положительных значений х и для $x = 0$; для $x < 0$ пользуются той же таблицей, учитывая, что функция *Ф(х)* – нечетная, т.е. $Ф(-x) = - Ф(x)$. В таблице приведены значения интеграла лишь до $x = 5$, так как для $x > 5$ можно принять $Ф(x) = 0,5$.

Пример 3.

Маркетологи компании запускают рекламную акцию в интернете, где каждый показ рекламы с вероятностью 0,1 приводит к клику. Если реклама будет показана 400 раз, какова вероятность того, что будет получено от 70 до 100 кликов?

Решение.

По условию, $p = 0,2;\ q = 0,8;\ n = 400;\ k_1 = 70;\ k_2=100$. Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа:

$$P_{400}(70{,}100) \approx \Phi\,(x_2) - \Phi\,(x_1).$$

Вычислим нижний и верхний пределы интегрирования:

$$x_1 = \frac{\mathrm{k}_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = -1{,}25;$$

$$x_2 = \frac{\mathrm{k}_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = 2{,}5.$$

Таким образом, имеем

$$\mathrm{P}_{400}(70{,}100) = \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) = \Phi(2{,}5) + \Phi(1{,}25).$$

По таблице приложения 4 находим:

$$Ф(2,5)=0,4938;\ Ф(1,25) = 0,3944.$$

Искомая вероятность

$$P_{400}(70,100) = 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882.$$

Ответ: 0,8882 – вероятность того, что будет получено от 70 до 100 кликов при запуске рекламной акции.

Контрольные вопросы

1. Для чего нужны формулы приближения?
2. Как называют формулы приближения?
3. Опишите теорему Пуассона. Приведите примеры задач, решаемых с помощью формулы Пуассона. Укажите условия применения.
4. Опишите локальную теорему Муавра-Лапласа. Приведите примеры задач, решаемых с помощью локальной формулы. Укажите условия применения.
5. Опишите интегральную теорему Муавра-Лапласа. Приведите примеры задач, решаемых с помощью интегральной формулы. Укажите условия применения.

Задание для самостоятельной работы

1. Вероятность рождения мальчика равна 0,55. Найдите вероятность того, что среди 500 новорожденных окажется 250 мальчиков.

2. В лотерее вероятность выигрыша для одного билета составляет 0,001. Если человек покупает 1000 билетов, какова вероятность, что он выиграет один раз?

3. Вероятность сбоя при работе оборудования на производстве в течение дня составляет 0,001. Какова вероятность того, что за 365 дней произойдет а) 3 сбоя, б) не более 5 сбоев?

4. Вероятность успешной оплаты покупки банковской картой равна 0,989. Какова вероятность того, что из 50 операций оплата не пройдет два раза?

5. Компания по разработке программного обеспечения выпускает новую версию своего продукта и проводит тестирование на наличие ошибок. Вероятность обнаружения ошибки при одном

тестировании составляет 0,005. Тестирование проводится 2000 раз независимо друг от друга. Найдите вероятность того, что будет найдено а) 20 ошибок, б) 200 ошибок.

6. Устройство связи успешно отправляет сообщение с вероятностью 0,99. Какова вероятность того, что 100 сообщение не будет доставлено, если необходимо отправить 400 сообщений?

7. Радар, контролирующий скорость автомобиля, правильно определяет ее превышение с вероятностью 0,99. Если за день радар проверит 5000 автомобилей, какова вероятность, что радар правильно определит превышение скорости у а) 4500 автомобилей, б) более 4500 автомобилей, в) от 4500 до 4800 автомобилей?

8. На заводе производится электронное оборудование. Каждое изделие выходит из строя в течение гарантийного срока с вероятностью 0,028. Завод производит 1000 устройств в месяц. Какова вероятность того, что а) 30 изделий, б) от 30 до 50 изделий, в) более 30 изделий выйдут из строя в течение гарантийного срока?

9. На фабрике производятся лампочки. 5% продукции имеет дефект. Если в день проверяют 500 лампочек, какова вероятность обнаружить 10 дефектных лампочек?

10. Вероятность того, что участник марафона достигнет финиша, составляет 0,9. В марафоне участвует 300 бегунов. Какова вероятность, что более 270 бегунов финишируют?

11. В результате проведенных опытов установлено, что выживаемость нового вида растения в теплице составляет 0,95. Какова вероятность того, что из 200 посаженных растений выживут 180?

12. В рамках медицинского исследования пациенты проходят тест на редкое заболевание, которое в среднем обнаруживается у 1 из 10 000 человек. Наблюдаются 3 000 пациентов. Найдите вероятность того, что хотя а) один тест, б) 10 тестов, в) хотя бы один тест окажется положительным.

13. Вероятность заразиться вирусом при контакте с инфицированным человеком составляет 20%. Если человек контактировал с 50 инфицированными, какова вероятность, что он заразится?

14. В лаборатории выращивают культуры клеток, каждая из которых с вероятностью 30% может быть успешно клонирована. Учёные пытаются клонировать 50 клеток. Найдите вероятность того, что получено 20 успешно клонированных клеток.

15. Противоаллергенный препарат испытают на 2000 пациентах. Средство эффективно в 75% случаев. Найдите вероятность, что средство окажется не эффективным для менее, чем 50 пациентов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Это учебное пособие предназначено для тех из вас, кто изучает прикладную информатику и стремится понять, как математические принципы и методы применяются к различным объектам и системам на основе базовых знаний. В данном пособии описываются основы теории вероятностей: определяется понятие «событие» и действий с ним, доказываются теоремы и приводятся методы для нахождения вероятности события. Приобретенные умения и навыки являются базой для дальнейшего изучения теории вероятностей. Мы начинаем с основ и далее, в следующей части, перейдем к более сложным понятиям таким, как случайные величины, распределения вероятностей, закон больших чисел.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Агапов Г.И. Задачник по теории вероятностей: учеб. пособие для студентов втузов. – М.: Высш. Шк., 1986. – 80с.
2. Барышева В.К., Галанов Ю.И., Ивлев Е.Т., Пахомова Е.Г. Теория вероятностей. Учебное пособие. – Томск: Изд–во ТПУ, 2004. – 136 с.
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие для вузов. – 11-е изд., перераб. и доп. – Москва: Издательство Юрайт, 2023. – 406 с.
4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для вузов / В.Е. Гмурман. – 12-е изд. – Москва : Издательство Юрайт, 2023. – 479 с.
5. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник и практикум для вузов. – 5-е изд., перераб. и доп. – Москва : Издательство Юрайт, 2023. – 538 с.
6. Маценко П. К., Селиванов В. В. Руководство к решению задач по теории вероятностей. Учебное пособие. - Ульяновск: УлГТУ, 2000.- 99 с.
7. Трофимова Е.А. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие / Е. А. Трофимова, Н. В. Кисляк, Д. В. Гилёв ; [под общ. ред. Е. А. Трофимовой] ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Урал. федер. ун-т. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2018 – 160 с.
8. Халафян А.А., Боровиков В.П., Калайдина Г.В. Теория вероятностей, математическая статистика и анализ данных. Основы теории и практика на компьютере STATISTICA. Excel. Более 150 примеров решения задач: Учебное пособие. – М.: ЛЕНАНД, 2017. – 320 с.
9. Шевелев Ю.П. Дискретная математика. Учебное пособие – СПб.: Издательство «Лань», 2008. – 592с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Буквы греческого алфавита

Буква	Название		Буква	Название	
	греческое	русское		греческое	русское
Α α	άλφα	альфа	Ν ν	νυ νι	ню (ни)
Β β ϐ	βήτα	бета (вита)	Ξ ξ	ξι	кси
Γ γ	γάμμα γάμα	гамма	Ο ο	όμικρον	омикрон
Δ δ	δέλτα	дельта	Π π ϖ	πι	пи
Ε ε ϵ	έψιλον	эпсилон	Ρ ϱ ϱ	ρω	ро
Ζ ζ	ζήτα	дзета (зита)	Σ σ ς	σίγμα	сигма
Η η	ήτα	эта (ита)	Τ τ	ταυ	тау (тав)
Θ θ ϴ ϑ	θήτα	тета (фита)	ϒ ϒ υ	ύψιλον	эпсилон
Ι ι	ιώτα γιώτα	йота	Φ ϕ φ	φι	фи
Κ κ ϰ	κάππα κάπα	каппа	Χ χ	χι	хи
Λ λ	λάμβδα λάμδα	лямбда (лямда)	Ψ ψ	ψι	пси
Μ μ	μυ μι	мю (ми)	Ω ω	ωμέγα	омега

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Значения функции Пуассона:. $P_n(X = m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$

m \ λ	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001
1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011
2	0,1839	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050
3	0,0613	0,1805	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150
4	0,0153	0,0902	0,1680	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337
5	0,0031	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607
6	0,0005	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911
7	0,0001	0,0034	0,0216	0,0595	0,1045	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171
8	-	0,0009	0,0081	0,0298	0,0655	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318
9	-	0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0689	0,1014	0,1241	0,1318
10	-	-	0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186
11	-	-	0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970
12	-	-	0,0001	0,0006	0,0034	0,0113	0,0264	0,0481	0,0728
13	-	-	-	0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504
14	-	-	-	0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324
15	-	-	-	-	0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194
16	-	-	-	-	-	0,0003	0,0015	0,0045	0,0109
17	-	-	-	-	-	0,0001	0,0006	0,0021	0,0058
18	-	-	-	-	-	-	0,0002	0,0009	0,0029
19	-	-	-	-	-	-	0,0001	0,0004	0,0014
20	-	-	-	-	-	-	-	0,0002	0,0006
21	-	-	-	-	-	-	-	0,0001	0,0003
22	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0001

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Значение функции $\varphi\ (\mathrm{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x3}{2}}$

Целые и десятые доли числа	Сотые доли числа									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3698
0,4	0,3683	0,3668	0,3652	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0395	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0353	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Значение функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	**Φ(x)**	**x**	**Φ(x)**	**x**	**Φ(x)**	**x**	**Φ(x)**	**x**	**Φ(x)**	**x**	**Φ(x)**
0,00	0,0000	**0,43**	0,1664	**0,86**	0,3051	**1,29**	0,4015	**1,72**	0,4573	**2,30**	0,4893
0,01	0,0040	**0,44**	0,1700	**0,87**	0,3078	**1,30**	0,4032	**1,73**	0,4582	**2,32**	0,4898
0,02	0,0080	**0,45**	0,1736	**0,88**	0,3106	**1,31**	0,4049	**1,74**	0,4591	**2,34**	0,4904
0,03	0,0120	**0,46**	0,1772	**0,89**	0,3133	**1,32**	0,4066	**1,75**	0,4599	**2,36**	0,4909
0,04	0,0160	**0,47**	0,1808	**0,90**	0,3159	**1,33**	0,4082	**1,76**	0,4608	**2,38**	0,4913
0,05	0,0199	**0,48**	0,1844	**0,91**	0,3186	**1,34**	0,4099	**1,77**	0,4616	**2,40**	0,4918
0,06	0,0239	**0,49**	0,1879	**0,92**	0,3212	**1,35**	0,4115	**1,78**	0,4625	**2,42**	0,4922
0,07	0,0279	**0,50**	0,1915	**0,93**	0,3238	**1,36**	0,4131	**1,79**	0,4633	**2,44**	0,4927
0,08	0,0319	**0,51**	0,1950	**0,94**	0,3264	**1,37**	0,4147	**1,80**	0,4641	**2,46**	0,4931
0,09	0,0359	**0,52**	0,1985	**0,95**	0,3289	**1,38**	0,4162	**1,81**	0,4649	**2,48**	0,4934
0,10	0,0398	**0,53**	0,2019	**0,96**	0,3315	**1,39**	0,4177	**1,82**	0,4656	**2,50**	0,4938
0,11	0,0438	**0,54**	0,2054	**0,97**	0,3340	**1,40**	0,4192	**1,83**	0,4664	**2,52**	0,4941
0,12	0,0478	**0,55**	0,2088	**0,98**	0,3365	**1,41**	0,4207	**1,84**	0,4671	**2,54**	0,4945
0,13	0,0517	**0,56**	0,2123	**0,99**	0,3389	**1,42**	0,4222	**1,85**	0,4678	**2,56**	0,4948
0,14	0,0557	**0,57**	0,2157	**1,00**	0,3413	**1,43**	0,4236	**1,86**	0,4686	**2,58**	0,4951
0,15	0,0596	**0,58**	0,2190	**1,01**	0,3438	**1,44**	0,4251	**1,87**	0,4693	**2,60**	0,4953
0,16	0,0636	**0,59**	0,2224	**1,02**	0,3461	**1,45**	0,4265	**1,88**	0,4699	**2,62**	0,4956
0,17	0,0675	**0,60**	0,2257	**1,03**	0,3485	**1,46**	0,4279	**1,89**	0,4706	**2,64**	0,4959
0,18	0,0714	**0,61**	0,2291	**1,04**	0,3508	**1,47**	0,4292	**1,90**	0,4713	**2,66**	0,4961
0,19	0,0753	**0,62**	0,2324	**1,05**	0,3531	**1,48**	0,4306	**1,91**	0,4719	**2,68**	0,4963
0,20	0,0793	**0,63**	0,2357	**1,06**	0,3554	**1,49**	0,4319	**1,92**	0,4726	**2,70**	0,4965
0,21	0,0832	**0,64**	0,2389	**1,07**	0,3577	**1,50**	0,4332	**1,93**	0,4732	**2,72**	0,4967
0,22	0,0871	**0,65**	0,2422	**1,08**	0,3599	**1,51**	0,4345	**1,94**	0,4738	**2,74**	0,4969
0,23	0,0910	**0,66**	0,2454	**1,09**	0,3621	**1,52**	0,4357	**1,95**	0,4744	**2,76**	0,4971
0,24	0,0948	**0,67**	0,2486	**1,10**	0,3643	**1,53**	0,4370	**1,96**	0,4750	**2,78**	0,4973
0,25	0,0987	**0,68**	0,2517	**1,11**	0,3665	**1,54**	0,4382	**1,97**	0,4756	**2,80**	0,4974
0,26	0,1026	**0,69**	0,2549	**1,12**	0,3686	**1,55**	0,4394	**1,98**	0,4761	**2,82**	0,4976
0,27	0,1064	**0,70**	0,2580	**1,13**	0,3708	**1,56**	0,4406	**1,99**	0,4767	**2,84**	0,4977
0,28	0,1103	**0,71**	0,2611	**1,14**	0,3729	**1,57**	0,4418	**2,00**	0,4772	**2,86**	0,4979
0,29	0,1141	**0,72**	0,2642	**1,15**	0,3749	**1,58**	0,4429	**2,02**	0,4783	**2,88**	0,4980
0,30	0,1179	**0,73**	0,2673	**1,16**	0,3770	**1,59**	0,4441	**2,04**	0,4793	**2,90**	0,4981
0,31	0,1217	**0,74**	0,2703	**1,17**	0,3790	**1,60**	0,4452	**2,06**	0,4803	**2,92**	0,4982
0,32	0,1255	**0,75**	0,2734	**1,18**	0,3810	**1,61**	0,4463	**2,08**	0,4812	**2,94**	0,4984
0,33	0,1293	**0,76**	0,2764	**1,19**	0,3830	**1,62**	0,4474	**2,10**	0,4821	**2,96**	0,4985
0,34	0,1331	**0,77**	0,2794	**1,20**	0,3849	**1,63**	0,4484	**2,12**	0,4830	**2,98**	0,4986
0,35	0,1368	**0,78**	0,2823	**1,21**	0,3869	**1,64**	0,4495	**2,14**	0,4838	**3,00**	0,49865
0,36	0,1406	**0,79**	0,2852	**1,22**	0,3883	**1,65**	0,4505	**2,16**	0,4846	**3,20**	0,49931
0,37	0,1443	**0,80**	0,2881	**1,23**	0,3907	**1,66**	0,4515	**2,18**	0,4854	**3,40**	0,49966
0,38	0,1480	**0,81**	0,2910	**1,24**	0,3925	**1,67**	0,4525	**2,20**	0,4861	**3,60**	0,499841
0,39	0,1517	**0,82**	0,2939	**1,25**	0,3944	**1,68**	0,4535	**2,22**	0,4868	**3,80**	0,499928
0,40	0,1554	**0,83**	0,2967	**1,26**	0,3962	**1,69**	0,4545	**2,24**	0,4875	**4,00**	0,499968
0,41	0,1591	**0,84**	0,2995	**1,27**	0,3980	**1,70**	0,4554	**2,26**	0,4881	**4,50**	0,499997
0,42	0,1628	**0,85**	0,3023	**1,28**	0,3997	**1,71**	0,4564	**2,28**	0,4887	**5,00**	0,499997