Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Красноярский государственный аграрный университет»

Л.П. Скиба, С.В. Александрова

Алгебра. Элементы аналитической геометрии

Часть 2

Практикум

Рекомендовано научно-методическим советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Красноярский государственный аграрный университет» для внутривузовского использования в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по всем направлениям подготовки

Красноярск 2016

ББК 512
С 42

Рецензенты:

О.В. Пашковская, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры ИЭС СибГАУ им. М.Ф. Решетнева
Л.В. Шатохина, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики СибГТУ

С 42 **Скиба, Л.П.**
Алгебра. Элементы аналитической геометрии. **Ч.2**.: практикум / Л.П. Скиба, С.В. Александрова; Краснояр. гос. аграр. ун-т. – Красноярск, 2016. – 88 с.

Издание содержит все необходимые материалы для проведения практических занятий, составления заданий промежуточных контрольных работ и вариантов итоговой зачетной работы.

Предназначено для студентов, обучающихся по всем направлениям подготовки.

ББК 512

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Издание является второй частью учебно-методического комплекса по разделам высшей математики «Алгебра. Аналитическая геометрия».

В начале каждой темы приведены основные формулы и перечень вопросов, необходимых для использования на данном занятии. Для групповой работы рассмотрены иллюстративные примеры, решения которых должен прокомментировать студент с указанием свойств и используемых формул. Это позволяет легче войти в процесс обучения и в дальнейшем более качественно освоить рассматриваемый материал.

Далее предлагаются примеры для самостоятельной работы в аудитории, а также домашние задания с ответами.

По окончании каждого раздела приводятся контрольные работы по приведенному нулевому варианту.

В конце семестра студент представляет преподавателю решение своего варианта зачетной работы. Оценка выставляется по результатам промежуточного и итогового контроля.

Раздел 1. АЛГЕБРА

1.1. Числа

Основные формулы

1. $z = a + bi$ – алгебраическая форма комплексного числа.

а) $kz = k(a + bi) = ka + kbi;$

б) $z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i;$

в) $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i;$

г) $z \cdot \overline{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2.$

2. $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$ – тригонометрическая форма комплексного числа,

где $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos\ \varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\varphi = arctg\,\dfrac{b}{a}$

.

а) $z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$;

б) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$.

3. $z = re^{i\varphi}$ – показательная форма комплексного числа.

а) $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r^n e^{i\varphi n}$

Вопросы по теме

1. Какое множество вещественных чисел является первоначальным? Как оно обозначается?
2. Как вводятся множества Z, Q, R, C?
3. Что называется мнимой единицей?
4. Что называется комплексным числом?
5. Алгебраическая форма комплексных чисел.
6. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.
7. Тригонометрическая форма комплексных чисел.
8. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.
9. Показательная форма комплексного числа.

Групповая работа

Прокомментируйте решения следующих примеров:

Пример 1. Установите соответствие между множествами и их общепринятыми обозначениями.

1) множество натуральных чисел; a) *R*;
2) множество целых чисел; b) *Z*;
3) множество рациональных чисел; c) *N*;
4) множество действительных чисел. d) *Q*.

Пример 2. Какому множеству принадлежит число 2,5?

1) $A=\{a: a\in N, 1\le a<3\}$; 2) $B=\{b: b\in Z, -2\le b<3\}$;

3) $D=\{d: d\in Q, D<2\}$; 4) $E=\{e: e\in R, -3<b\le 2{,}6\}$.

Решение. Число 2,5 – действительное рациональное число, которое может принадлежать либо множеству рациональных чисел *Q* (какой вариант ответа?), либо множеству вещественных чисел *R* (?), либо множеству, заданному специальным образом (?).

В нашем случае это варианты 3 и 4 .

Но множество $D\subset Q$ (3 вариант) ограничено числом $D<2$. Следовательно, остается множество $E\subset R$, где R – множество вещественных чисел.

Ответ: $2{,}5\subset E.$

Пример 3. Вычислите значение и модуль выражения z_1-2z_2, где $z_1=3-2i$, $z_2=-3+5i$.

Решение. Используя формулы (??), вычислим вначале $2z_2=2(-3+5i)=-6+10i$,

затем $z_1-2z_2=3-2i+6-10i=9-12i$

и окончательно

$$|z_1-2z_2|=\sqrt{9^2+(-12)^2}=\sqrt{225}=15.$$

Ответ: $z_1 - 2z_2 = 9 - 12i$, $|z_1 - 2z_2| = 15$.

Самостоятельная работа

Пример 4. Установите соответствие между списками двух множеств, заданных различным образом.

1) $\{x:\ x^2 - 5x + 6 \le 0\}$; a) $[2;3]$;

2) $\{x:\ x^2 - 5x + 6 = 0\}$; b) $(-\infty;2] \cup [3;+\infty)$;

3) $\{x:\ x^2 - 5x + 6 < 0\}$; c) $(-\infty;2) \cup (3;+\infty)$;

4) $\{x:\ x^2 - 5x + 6 > 0\}$. d) $(2;3)$;

e) $\{2;3\}$.

Пример 5. Какому множеству принадлежат решения уравнения $x^2 + 2x + 5 = 0$?

Пример 6. Числа $x_1 = 2 - i$ и $x_2 = 2 + i$ принадлежат множеству…

1) $\{x:\ x^2 + 5x + 4 = 0\}$; 2) $\{x:\ x^2 + 2x + 5 = 0\}$;

3) $\{x:\ x^2 - 4x + 5 = 0\}$; 4) $\{x:\ x^2 - 4x + 5 < 0\}$.

Пример 7. Вычислите значения и модули следующих выражений.

а) $z_1 + 3z_2 - 5,$ если $z_1 = 2 - 3i,$ $z_2 = 1 - i.$

б) $z_1 + 2z_2 - 3z_3,$ если $z_1 = 2 + 3i,$ $z_2 = 3 - i,$ $z_3 = -2 + 3i.$

Пример 8. Найдите частное от деления:

а) $\dfrac{2+3i}{1-7i}$;

б) $\dfrac{5z_1 - 4z_2}{z_1}$, если $z_1 = 2 - 3i,$ $z_2 = 1 - i.$

Пример 9. Найдите значение произведения

$z_1 = (2+3i)^3 \cdot (1-i).$

Пример 10. Запишите комплексное число в тригонометрической и показательной форме.

а) $z = 3 - 4i;$

б) $z = -2 - 4i.$

Пример 11. Запишите комплексное число *z* в алгебраической форме, если $r = 5$, $\cos\varphi = \dfrac{4}{5}$ и $0 \le \varphi \le 90^\circ$

Пример 12. Запишите комплексное число *z* в алгебраической форме, если его модуль равен 5, а аргумент $\varphi = 30^0$.

Пример 13 . Найдите $z_1 \cdot z_2$ $\dfrac{z_1}{z_2}$, если

$$z_1 = 5(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}), \qquad z_2 = 3(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}).$$

Пример 14. Найдите сумму $z_1 + z_2$, если

$$z_1 = 5(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}), \qquad z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Проверочная работа

Пример 1. Число 0,*5* принадлежит множеству…

1) $B = \{ b : b \in Z, -2 \le b < 3 \};$ 2) $D = \{ d : d \in Q, D < 2 \};$

3) $C = \{ c : c \in R, -3 < c \le 2{,}6 \};$ 4) $A = \{ a : a \in N, 1 \le a < 3 \}.$

Пример 2. Решения уравнения $\dfrac{x^2 + 6x + 9}{2x - 1} = 0$ принадлежат множеству …

1) *Z*, 2) *R*, 3) *C*, 4) *Q*, 5) *N*.

Пример 3. Если $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = 4 + 5i$, то сумма $2z_1 + 3\overline{z_2}$ равна…

Пример 4. Числа $x_1 = 2 + 6i$ *и* $x_2 = 2 - 6i$ принадлежат множеству…

1) $\{ x : x^2 - 4x + 41 = 0 \}$; 2) $\{ x : x^2 - 4x + 40 = 0 \}$;
3) $\{ x : x^2 - 29x - 4 = 0 \}$; 4) $\{ x : x^2 + 4x - 21 = 0 \}$.

Пример 5*.* Вычисление $(z_1 - z_2)^2$, если $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 2 + 3i$ приводит к ответу…

1) 289; 2) -12; 3) $-15+8i$; 4) $15-8i$.

Задание на дом

Пример 1. Вычислите значение выражения и его модуль:

а) $z_1 + \frac{5z_2}{z_3}$, если $z_1 = 2+3i$, $z_2 = 3-5i$, $z_3 = 2-3i$.

Ответ: $z_1 + \frac{5z_2}{z_3} = \frac{131+34i}{13}$; $\left|z_1 + \frac{5z_2}{z_3}\right| = \frac{\sqrt{18317}}{13}$;

б) $(z_1 + 2z_2)^2$, если $z_1 = 2+3i$, $z_2 = 1-7i$,

Ответ: $(z_1 + 2z_2)^2 = -105+88i$; $\left|(z_1+2z_2)^2\right| = \sqrt{18769}$

Пример 2*.* Запишите комплексное число $z = 3+4i$ в тригонометрической и показательной форме.

О*твет:*

$z = 5 \cdot \left(cos\left(arctg\frac{4}{3}\right) + i \cdot sin\left(arctg\frac{4}{3}\right)\right) = 5(cos0{,}926 + i \cdot sin0{,}926)$

$z = 5e^{0,926i}$.

Пример 3*.* Найдите $z_1 \cdot z_2$ и $\frac{z_1}{z_2}$ в алгебраической форме, если

$z_1 = 5(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$ и $z_2 = 3(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$.

Ответ: $z_1 \cdot z_2 = -7{,}5\sqrt{3} + 7{,}5i$; $\frac{z_1}{z_2} = \frac{5}{6}\left(\sqrt{3} + i\right)$.

Решите задания 1-2 из своего варианта теста для проверки знаний.

1.2. Матрицы и действия над ними

Основные формулы

1. $kA = k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ak_{23} \end{pmatrix}$

2. $A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}$

3. $AB = (a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$

Вопросы по теме

1. Что называется матрицей? Какая матрица называется квадратной, диагональной, единичной, нулевой?
2. Как определяются *линейные операции* над матрицами?
3. Дайте определение *произведения* матриц. Свойства операции умножения матриц.

Групповая работа

Прокомментируйте решения следующих примеров:

Пример 1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 11 & 20 \\ 30 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

Найдите:

а) 2А +3В;

б) сумму элементов, стоящих на главной диагонали матрицы К = 3А – 5В.

Решение:

а) 2А + 3В = $2 \cdot \begin{pmatrix} 11 & 20 \\ 30 & -1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22+9 & 40-6 \\ 60+12 & -2-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & 34 \\ 72 & -11 \end{pmatrix}$;

б) Найдем матрицу $K = 3\begin{pmatrix} 11 & 20 \\ 30 & -1 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 70 \\ 70 & 12 \end{pmatrix}$.

Тогда сумма элементов, стоящих на главной диагонали, равна 18+ 12 = 30.

Пример 2. Найдите матрицу X из матричного многочлена 2X-3A +2B = 0, если

$$A = \begin{pmatrix} 22 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение. Решим данное уравнение в общем виде:

$$2X = 3A - 2B \Rightarrow X = \frac{3}{2}A - B.$$

Перейдем к матрицам:

$$X = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 22 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33-4 & 0-10 \\ 0+2 & 21-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & -10 \\ 2 & 20 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Вычислите произведение матриц:

à) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5+3\cdot 6 & 1\cdot 7+3\cdot 8 & 1\cdot 9+3\cdot 10 \\ 2\cdot 5+4\cdot 6 & 2\cdot 7+4\cdot 8 & 2\cdot 9+4\cdot 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 31 & 39 \\ 34 & 46 & 58 \end{pmatrix};$

â) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 4 & 1\cdot 5 \\ 2\cdot 4 & 2\cdot 5 \\ 3\cdot 4 & 3\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 10 \\ 12 & 15 \end{pmatrix}.$

Пример 4 . Используя правило произведения матриц, найдите значения *m*, *l*:

$A_{(3\times 2)} \cdot B_{(2\times 4)} = C_{(m\times l)}$.

Решение. Размерность матрицы $C_{m\times l}$ определяется произведением числа строк матрицы (?) на число столбцов матрицы (?). В нашем случае *m* = 3, *l* = 4.

Ответ: *m* = 3, *l* = 4.

Самостоятельная работа

Пример 5. Найдите 2 A + 5 B - 3 E, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & 7 & 3\\ 3 & 0 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 4 & 7\\ 1 & 0 & 8\\ -7 & 6 & 1\end{pmatrix}.$$

Пример 6. Найдите X из матричного многочлена:

а) 4 A + X = B, где матрицы A и B – матрицы размерности 2x5, записанные в общем виде;

б) 3 X – 4 B = 0, где B – матрица-строка B = $\begin{pmatrix}2 & 3 & -9\end{pmatrix}$;

в) 3 A – 2 X = B+ E, где A, B, E – числовые матрицы 3 -го порядка, причем

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 7\\ 12 & 3 & -5\\ 5 & 8 & -2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}3 & 6 & -3\\ 6 & 4 & 0\\ 4 & 5 & 8\end{pmatrix}.$$

Пример 7. Найдите матрицу X из матричного уравнения

2A – 5B +3EX = 0, если

$$A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -1 & 6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 0 & -9\end{pmatrix}.$$

Пример 8 . Используя правило произведения матриц, найдите значения *m*, *l*:

а) $A_{(3\times4)}\cdot B_{(m\times l)} = C_{(3\times5)}$. $m,l=?$

б) $A_{(4\times m)}\cdot B_{(l\times5)} = C_{(4\times5)}$. $m,l=?$

Пример 9. Найдите произведение матриц

$$AB=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 10\\ 1 & 4\end{pmatrix}.$$

Пример 10. Перемножьте матрицы:

1) $\begin{pmatrix}5 & 7 & 9\\ 6 & 8 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 5\\ 6\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 5\\ 3 & 2\end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 5 & 2 & 0\\ 4 & 1 & 9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\ 0 & -4 & -2\\ 5 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Пример 11. Матрица $A=\begin{pmatrix} -1 & -10 \\ -20 & -12 \end{pmatrix}$. Тогда матрица A^T равна…

1) $\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 20 & 12 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 20 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -1 & -20 \\ -10 & -12 \end{pmatrix}$.

Проверочная работа

Пример 1. Если $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то сумма матриц $A+2B$ равна…

1) $\begin{pmatrix} 8 & -20 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 8 & 20 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 5 & -10 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Пример 2. Произведение матриц $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 11 & -20 \\ -30 & 1 \end{pmatrix}$ равно…

1) $\begin{pmatrix} -12 & -20 \\ -30 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 11 & -20 \\ -30 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 12 & -20 \\ -30 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -10 & -20 \\ -30 & 1 \end{pmatrix}$

Пример 3. Заданы матрицы $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Тогда решением матричного уравнения $A+X=B$ является …

1) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Пример 4. Даны матрицы A размерности 3×5 и B размерности 5×3. Произведение $A\cdot B$ существует и имеет размерность…

1) 5×5; 2) 5×3; 3) 3×3; 4) 3×5.

Пример 5. Дана матрица $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 7 & -4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Тогда сумма элементов, расположенных *на ее главной диагонали*, равна …

Задание на дом

Пример 1. Матрица $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. Чему равна матрица A^T?

Пример 2. Какие из нижеприведенных произведений матриц существуют? Какой размерности получится результирующая матрица?

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Ответ: 2), 3), 5).

Пример 3. Чему равно произведение матри $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 11 & -20 \\ -30 & 1 \end{pmatrix}$?

Дополнительное задание

Решите задачу с помощью средств матричного исчисления.

Административное здание имеет три этажа, на которых размещены производственные и бытовые помещения. Каждый этаж имеет своего владельца, который самостоятельно оплачивает затраты на освещение, уборку, охрану и сантехническое обслуживание. Данные о площадях и соответствующих затратах приведены в таблицах 1 и 2. Определите затраты каждого владельца по соответствующим платежам. Результат оформите в виде таблицы.

Таблица 1 – Распределение площадей на каждом этаже, м^2

Этаж	Коридоры	Цеха	Склады	Офисные помещения	Сан комнаты
1	10	250	30	50	10
2	10	200	80	50	10
3	10	220	100	10	10

Таблица 2 – Затраты по платежам, руб./м^2

Помещение	Эл.энергия	Уборка	Вода	Охрана
Коридоры	5	20	2	10
Цеха	100	40	2	10
Офисные помещения	1	1	5	20
Склады	10	10	6	5
Санитарные комнаты	10	15	10	1

Ответ: 1-й этаж – 41010 руб., 2-й этаж – 34960 руб., 3-й этаж – 37540 руб.

Решите задание № 3 своего варианта зачетной работы.

1.3. Определители матриц 2-го и 3-го порядков

Основные формулы

1. $\Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$

2. $\Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{matrix}$

3. $\Delta A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ – формула вычисления определителя любого порядка методом разложения по элементам любой строки или столбца.

Вопросы по теме

1. Для каких матриц определено понятие «определитель матрицы»? Вычисление определителей второго, третьего порядков.

2. Что называется минором и алгебраическим дополнением элемента квадратной матрицы?

3. Что называется определителем *n*-го порядка? Основные свойства определителей.

4. В чем состоит метод приведения определителя к треугольному виду? Что происходит с определителем при транспонировании матрицы?

5. В каких случаях можно не вычисляя, увидеть, что определитель равен нулю?

Групповая работа

Прокомментируйте решения следующих примеров**.**

Пример 1.

а) $\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - (-4) \cdot 5 = 20;$

б) $\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 14 = 11.$

Пример 2. Вычислите определители 3-го порядка по правилу Сарюса.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 4 + 2 \cdot 5 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 5 \cdot 0 = -3.$$

Пример 3 Определитель $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 2.$

Чему равен определитель матрицы $\begin{pmatrix} 3a_{11} & -3a_{12} & 3a_{13} \\ a_{21} & -a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & -a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$?

Пример 4. Вычислите определители 3-го порядка методом разложения по элементам строки (столбца):

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 11 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 11 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 11 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 33 - 33 = 0.$$

Используя какое свойство, можно ли сразу сказать, что определитель равен нулю?

Самостоятельная работа

Пример 5. Вычислите определители 2 -го порядка.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -4 & 7 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 234 & 235 \\ 236 & 237 \end{vmatrix}.$$

Пример 6. Дано 5 определителей. Используя свойства, найдите среди них: 1) равные по величине; 2) равные по величине, но противоположные по знаку; 3) равные нулю:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_5 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Подтвердите ответы простым вычислением.

Пример 7. Определитель $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 2\alpha - 3 \end{vmatrix} = 0$, если α равно …

Пример 8. При каком значении β определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \beta \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$ равен нулю?

Пример 9. Алгебраическое дополнение элемента a_{32} матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ имеет вид:

1) $A_{32} = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$; 2) $A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$; 3) $A_{32} = \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -9 & 0 \end{vmatrix}$.

Пример 10. Объясните решение следующего примера**:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot 2 + 3\cdot 1\cdot(-1) + 2\cdot 1\cdot 2 - 2\cdot 0\cdot(-1) - 1\cdot 1\cdot 1 - 3\cdot 2\cdot 2 = -12$$

Пример 11. Вычислите определители по правилу Сарюса.

1. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \end{vmatrix}$. 2. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & -6 \\ 3 & 5 & 9 \end{vmatrix}$. 3. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ 53 & 5 & 9 \end{vmatrix}$.

Пример 12. Разложение определителя $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ по первой строке имеет вид …

1) $-1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$; 3) $-1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$

Пример 13. Вычислите определители методом разложения по элементам строки (столбца).

1. $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 20 & 6 \\ 3 & -5 & 9 \end{vmatrix}$. 2. $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 7 & 0 & 6 \\ 12 & 1 & 9 \end{vmatrix}$. 3. $\Delta = \begin{vmatrix} -4 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 7 \\ -2 & 4 & 11 \end{vmatrix}$.

Пример 14. Вычислите определители, приведя их к треугольному виду.

1. $\Delta = \begin{vmatrix} 11 & 0 & 3 \\ 22 & 1 & 6 \\ 33 & 1 & 9 \end{vmatrix}$. 2. $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -6 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$. 3. $\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \end{vmatrix}$.

Пример 15. Вычислите определители, используя свойства:

1. $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \end{vmatrix}$. 2. $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. 3. $\Delta = \begin{vmatrix} -5 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

Пример 16. Вычислите определители 4-го порядка.

1. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$. 2. $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 7 & 2 \\ 4 & 0 & 8 & 3 \\ 7 & 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

Пример 17. Найдите матрицы, обратные данным. Сделайте проверку.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ -10 & 1 \end{pmatrix}$. 2. $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. 3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Пример 18. Найдите ранг матрицы $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Ранг матрицы определяется порядком старшего минора, отличного от нуля. В нашем случае он равен трем, так как минор 3-го порядка матрицы A, полученный вычеркиванием первых трех строк и столбцов, не равен нулю:
$\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$.

Ответ: $rang A = 3$

Пример 19. Найдите ранг матрицы $\begin{pmatrix} -3 & 6 & 9 & -6 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ методом элементарных преобразований.

Пример 20. Найдите ранг матрицы $\begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ методом окаймленных миноров.

Проверочная работа

Пример 1. При каких значениях X следующие определители не равны нулю?

1. $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & x \end{vmatrix}$.   2. $\begin{vmatrix} x-1 & 0 \\ 0 & x-21 \end{vmatrix}$.   3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & x \\ 3 & x & 9 \end{vmatrix}$.

Пример 2. При каких значениях X ранг матрицы
$\begin{pmatrix} x-1 & 5 & -1 \\ 0 & x+3 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ равен 2?

Задание на дом

Пример 1. При каком значении параметра α определители равны нулю?

1) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -\alpha & 2 \end{vmatrix}$;   2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & \alpha \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix}$.

Ответ: 1) $\alpha = -\frac{1}{2}$; 2) $\alpha = 6$.

Пример 2. Чему равен определитель матрицы $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$?
Составьте для нее обратную матрицу.

Ответ: $\Delta = 27$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Пример 3. Перемножьте матрицы:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 1 & 9 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Пример 4. Решите уравнение: $k \cdot A + t \cdot B \cdot X = C \cdot D$,

если $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 \\ 4 & 7 & 0 \\ 9 & -10 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 10 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -8 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -5 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, где $\mathrm{K} = 10, \mathrm{t} = -5$.

Пример 5. Найдите ранги матриц *A, B и C,* если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 3 & -5 \\ -3 & -10 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ответы: $rang(A) = 2$, $rang(B) = 2$, $rang(C) = 2$.

Решите задание № 4 своего варианта зачетной работы.

1.4. Решение систем линейных алгебраических уравнений

Формулы Крамера

1. $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2, \end{cases}$ $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}, \mathrm{y} = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$, где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \mathrm{b}_1 & a_{12} \\ \mathrm{b}_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & \mathrm{b}_1 \\ a_{21} & \mathrm{b}_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

2. $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases}$ $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta}$, где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

3. $AX = B$, тогда $X = A^{-1}B$, где A^{-1} – матрица, обратная матрице A.

Вопросы по теме

1. Что называется решением системы *m* линейных уравнений с *n* неизвестными? Какая система называется совместной, несовместной, определенной, неопределенной?

2. Методы решения системы *n* линейных уравнений с *n* неизвестными. Правило Крамера.

3. В чем заключается метод Гаусса? Какие системы можно решать этим методом?

4. В чем заключается матричный метод решения квадратных систем линейных уравнений?

Групповая работа

Пример 1. Какие выражения для решений системы уравнений $\begin{cases} 5x - 2y = 1 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ будут верны?

1) $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}$; 2) $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}$;

3) $x = \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}$ $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}$.

Решение. По формуле (1) в знаменателях всех дробей должны стоять главные определители, составленные из коэффициентов при неизвестных. Поэтому вариант (?) отбрасываем.

В числителях дробей находятся определители, полученные из главного, путем замены сначала (?), потом (?) столбца на столбец свободных членов с сохранением их знаков. Поэтому вариант (?) тоже отбрасываем.

Ответ: решением системы являются выражения (?).

Самостоятельная работа

Пример 2. Решите системы уравнений $\left.\begin{aligned} 2x-5y&=-3 \\ 3x+y&=4 \end{aligned}\right\}$, $\left.\begin{aligned} 2x+5y&=8 \\ 3x+y&=12 \end{aligned}\right\}$, $\left.\begin{aligned} x-5y&=-4 \\ 2x+y&=3 \end{aligned}\right\}$ любым способом.

В ответе запишите сумму x + y.

Пример 3. Какие выражения для решений системы уравнений $\begin{cases} 5x-2y=1 \\ 2x+y=4 \end{cases}$ будут верны?

а) $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}$; б) $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}$;

в) $x = \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}$ $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}$.

Пример 4. При каком значении λ система $\left.\begin{aligned} 3x-y&=1 \\ 5x+\lambda y&=2 \end{aligned}\right\}$ не имеет решения?

Пример 5. Будут ли совместны системы уравнений

$$\left.\begin{array}{l} x+2y-3z=3 \\ 2x+y-4z=4 \\ x-y-z=1 \end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{l} x+2y-3z=3 \\ 2x+4y-6z=4 \\ x-y-z=1 \end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{l} x+2y-3z=3 \\ 2x+y-4z=4 \\ 3x+3y-7z=1 \end{array}\right\}?$$

Если да – найдите их решения.

Пример 6. Найдите значение параметра М, при котором система уравнений будет несовместной.

$$\left.\begin{array}{l} -x+2y-3z=3 \\ 2x-My+6z=4 \\ x-y-z=1 \end{array}\right\}.$$

Пример 7. Определите, будет ли система линейных уравнений совместна. Найти ее решение.

$$\left.\begin{array}{c} 2\tilde{o}-3y-5z=0 \\ x-y-z=0 \\ 3x+2y-z=0 \end{array}\right\}.$$

Пример 8. Решите систему матричным способом:

$$\left.\begin{array}{c} 2\tilde{o}-3y-5z=-6 \\ x-y-z=-1 \\ 3x+2y-z=4 \end{array}\right\}.$$

Прокомментируйте решение следующего примера.

Пример 9. При каких значениях λ система $\left.\begin{array}{l} 6x+\lambda y=0 \\ 3x-2y=0 \end{array}\right\}$ имеет **единственное** решение?

Решение. Система будет иметь единственное решение, если ее главный определитель (?)…,

т. е $\begin{vmatrix} 6 & \lambda \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -12-3\lambda \neq 0$, откуда $\lambda \neq -4$.

Действительно, пусть $\lambda = -4$. Тогда система примет вид $\begin{cases} 6x-4y=0 \\ 3x-2y=0 \end{cases}$. Она имеет ***множество*** решений, определяемых формулой общего решения $X_o(x, \frac{3}{2}x)$, где x – свободная переменная, а y – зависимая от нее переменная. Давая переменной x различные значения и вычисляя y, будем получать частные решения. Например, если $x = 2$, то $y = 3$ $X_r(2,3)$.

Поскольку нас интересует единственное решение, мы должны взять любое $\lambda \neq -4$. Пусть $\lambda = 4$. Тогда система примет вид

$\left.\begin{array}{l} 6x+4y=0 \\ 3x-2y=0 \end{array}\right\}$. Здесь $\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -12-12=-24$, $\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$, откуда $x = \frac{0}{-24} = 0$, $y = \frac{0}{-24} = 0$, т. е. X(0,0) – единственное тривиальное решение.

Ответ: система имеет единственное нулевое решение для всех $\lambda \neq -4$.

Пример 10. Решите системы уравнений методом Гаусса.

1. $\begin{cases} x+3y-z=1, \\ 2x-y+z=5, \\ 3x-2y+z=7. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x+2y+3z=0, \\ 2x-y+z=0, \\ 3x+2y-z=0, \\ x-y-z=0. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=0, \\ x_1+x_2-x_3=0, \\ x_1+2x_2=0. \end{cases}$

Рассмотрим применение теории систем линейных уравнений на практике.

Пример 11. Транспортное предприятие специализируется на перевозке продукции трех типов A,B,C с установленной таксой T = 2 тыс. руб. за 100 кг (1 ц) веса. К нему обратились три поставщика, причем первому надо перевезти 1 ц груза A, 3 ц груза B и 4 ц груза C, за что он готов заплатить 19 тыс. руб.; для второго эти цифры были 2, 1, 1 ц и предлагаемая сумма 7 тыс. руб.; для третьего – 3; 1; 1 и соответствующая сумма – 8 тыс. руб. Можно ли составить такой план перевозок, чтобы удовлетворить потребности и возможности всех поставщиков сразу, а также получить максимальную прибыль?

Решение. Составим таблицу потребностей и возможностей всех поставщиков:

Поставщик	Груз А	Груз В	Груз С	Необходимая сумма	Имеемая сумма
1-й	1	3	4	16 (+3)	19
2-й	2	1	1	8 (-1)	7
3-й	3	1	1	10 (-2)	8

Анализ таблицы показывает, что возможная прибыль до оптимизации цен будет равна 16+7+8 = 31 тыс. руб., а после нее 19+7+8 = 34 тыс. руб. То есть разница может составить 3 тыс. руб.

Найдем оптимальное решение.

Пусть x, y, z – искомые цены на перевозки продукции типа А, В и С соответственно.

Тогда первый поставщик должен заплатить

$x+3y+4z=19$ тыс. руб.,

второй – $2x+y+z=7$ тыс. руб.,

третий – $3x+y+z=8$ тыс. руб.

Получили систему из трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} x+3y+4z=19 \\ 2x+y+z=7 \\ 3x+y+z=8 \end{cases}$$

Решим ее методом Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 1\end{vmatrix}=1+9+8-12-6-1=-1;$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}19 & 3 & 4\\ 7 & 1 & 1\\ 8 & 1 & 1\end{vmatrix}=19+24+28-32-19-21=-1;$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}1 & 19 & 4\\ 2 & 7 & 1\\ 3 & 8 & 1\end{vmatrix}=7+57+64-84-8-38=-2;$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}1 & 3 & 19\\ 2 & 1 & 7\\ 3 & 1 & 8\end{vmatrix}=8+63+38-57-48-7=-3,$$

откуда $x = \dfrac{-1}{-1} = 1$, $y = \dfrac{-2}{-1} = 2$, $z = \dfrac{-3}{-1} = 3$.

Ответ: Оптимальный план перевозок составляет 1, 2 и 3 (тыс. руб.) за 100 кг веса продукции типа A, B и C соответственно. Получившаяся чистая прибыль составляет 3 (тыс. руб.).

Проверочная работа

1. Определите, будет ли система линейных уравнений совместна. Найдите ее решение.

$$\left.\begin{aligned} 2\tilde{o} - 3y - 5z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 3x + 2y - z = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Задание на дом

Пример 1. Решите задачу оптимизации плана перевозок, если A – матрица потребностей поставщиков, B – матрица возможностей, T – установленная такса перевозок в тыс. руб. за 1 ц веса.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$, T= 1.

2. A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$, T= 0,5.

3. A = $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 18 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix}$, T = 2.

Ответы:

1. Улучшающий план оплаты совпадает с реальным положением дел.

2. При ценах на перевозки X = Y = Z = 1 тыс. руб. за 1 ц веса продукции A, B, C прибыль перевозчика составит 9,5 тыс. руб.

3. Оптимального плана составить нельзя.

Вопрос: в каком случае можно говорить о возможности составления оптимального плана?

Пример 2. Решите системы уравнений любым способом.

1. $\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 = -34, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = -9, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 25. \end{cases}$

2. $\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 29, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ -4x_1 - 2x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 18, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 6, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -6. \end{cases}$

Ответы:

1. $x_1 = 1$; $x_2 = -5$; $x_3 = 1$.
2. $x_1 = -1$; $x_2=4$; $x_3 = 2$.
3. $x_1 = 2$; $x_2=0$; $x_3 = 2$.

Решите задание № 5 своего варианта зачетной работы.

Индивидуальная контрольная работа по темам «Матрицы. Определители. Системы линейных уравнений»

Вариант 0

1. Дана матрица А = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & 7 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$. Чему равен элемент a_{32}?

2. Найти значение матричного многочлена, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}; \quad A - 2B = ?$$

3. Определите, обладают ли матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ коммутативным свойством в произведении?

4. Будет ли матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \\ 2 & 7 & 14 \end{pmatrix}$ вырожденной?

5. Найдите решение системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} y + 3z = -1, \\ 2x + 3y + 5z = 3, \\ 3x + 5y + 7z = 6. \end{cases}$$

6. При каком значении параметра α определитель равен нулю $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -\alpha & 2 \end{vmatrix}$?

7. При каком значении параметра β система уравнений имеет единственное решение:

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y = 0 \\ 3x + 2\beta y = 0 \end{aligned}\right\}?$$

1.5. Векторная алгебра. Векторы на плоскости и в пространстве

Основные формулы

1. $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ – разложение вектора *a* в базисе (*I*, *j* , *k*).

2. $|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ – формула для определения модуля вектора.

2. а. $\overrightarrow{AB} = (x_b - x_a)\vec{i} + (y_b - y_a)\vec{j} + (z_b - z_a)\vec{k}$.

3. $\eth\vec{a} = \eth\grave{a}_{\tilde{o}}\vec{i} + \eth a_y\vec{j} + \eth a_z\vec{k}.$

4. *а±в* = ($a_x \pm b_x$) *i* + ($a_y \pm b_y$)*j* + ($a_z \pm b_Z$)*k.*

5. $(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$ – скалярное произведение двух векторов.

6. $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ – скалярное произведение в координатной форме.

7. $\cos(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}$.

8. $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$ – условие перпендикулярности двух векторов.

9. $\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z}$ – условие параллельности двух векторов.

10. $[a,b] = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} k$ – векторное произведение в координатной форме.

11. $(a,b,c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ – смешанное произведение трех векторов в координатной форме.

Вопросы по теме

1. Что называется геометрическим вектором, модулем вектора? Как обозначается вектор?

2. Какие векторы называются равными, противоположными, коллинеарными, компланарными?

3. Как определяются линейные операции над векторами: сложение, умножение на число? Запишите свойства этих операций.

4 . Что называется ортом вектора?

5. Дайте определение понятия прямоугольной декартовой системы координат. Разложение вектора по единичным векторам *i, j, k*.

6. Дайте определение скалярного произведения. Свойства скалярного произведения векторов.

7. Нахождение угла между двумя векторами.

8. Запишите необходимое и достаточное условие ортогональности и параллельности двух векторов в координатной форме.

Групповая работа

Прокомментируйте решение следующих примеров

Пример 1. Даны координаты точек А и В. Найдите координаты вектора $\overleftrightarrow{AB}$ и его модуль. Сделайте чертеж.

1. A(0,1,3) , B(6,3,5).

Решение. Найдем координаты вектора АВ и его модуль:

$\overleftrightarrow{AB} = (6-0, 3-1, 5-3) = (6, 2, 2)$ $\left|\overleftrightarrow{AB}\right| = \sqrt{6^2+2^2+2^2} = \sqrt{44} = 6,63$.

2. А (-1, 2, 6), В (-4, 6, 0).
3. А(3, 6, 9), В (3, -3, -9).

Пример 2. Найдите значение выражения $(2\vec{a}+\vec{b})\cdot 3\vec{c}$, по заданным координатам векторов $\vec{a}$ (1, 5, 3), $\vec{b}$ (3, 0, -1), $\vec{c}$ (3, 1, 0) и косинус угла между векторами-сомножителями.

Решение. Найдем координаты вектора $2\vec{a}+\vec{b}$ в координатной форме. Используя формулы (?), получаем: $2\vec{a}+\vec{b}$ = $= (2\cdot 1, \quad 2\cdot 5, \quad 2\cdot 3) + (3, \quad 0, \quad -1) = (2+3, \quad 10+0, \quad 6-1) = (5, \quad 10, \quad 5)$.

Координаты вектора 3$\vec{c}$ будут (9, 3, 0). По формуле (?) найдем скалярное произведение:

$(2\vec{a}+\vec{b})\cdot 3\vec{c} = 5\cdot 9 + 10\cdot 3 + 5\cdot 0 = 75$.

Ответ: $(2\vec{a}+\vec{b})\cdot 3\vec{c}$ = 72

Пример 3. При каком значении параметра α векторы $\vec{a}$ (-2, 1, -4) и $\vec{b}(5,2,\alpha)$ перпендикулярны?

Решение. Используем условие перпендикулярности двух векторов. По формуле (?)

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \to \quad -2\cdot 5+1\cdot 2+(-4)\cdot\alpha=0$; $\quad -4\alpha=8$, $\alpha=-2.$

Ответ: $\vec{a}\perp\vec{b}$, если $\alpha=-2$.

Самостоятельная работа

Пример 4. Найдите линейную комбинацию векторов:

1) $2\vec{a}+3\vec{b}$, если $\vec{a}(1,3,5)$, $\vec{b}(2,5,-6)$;

2) $3\vec{a}-5\vec{b}$, если $\vec{a}(-4,0,6)$, $\vec{b}(3,9,-2)$.

Пример 5. Даны координаты векторов. Найдите скалярное произведение по заданной формуле. Найдите угол между векторами-сомножителями.

Варианты 1-3. Вычислите $(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot\vec{c}$, если

1. а (1, -3, 4), в (3, 0, 4), с (5, -7, 1).
2. а (6, 0, 4), в (-1, 0, 4), с (3, 2, -1).
3. $\vec{a}$ (1, 5, 3), $\vec{b}$ (3, 0, -1), $\vec{c}$ (3, 1, 0).

Варианты 4-6 . Вычислите $\vec{a}\cdot(2\vec{b}-3\vec{c})$, если

4. а (6, 0, -1), в (3, 1, 0), с (-2, 4, 1).
5. а (5, -1, 3), в (3, -2, 1), с (-3, 6, 2).
6. а (1, -1, 3), в (0, 0, 1), с (-3, -6, 0).

Варианты 7-9. Вычислите $\vec{a}(3\vec{c}+5\vec{b})$, если

7. а (-1, 0, 3), в (8, -2, 0), с (4, 0, -5).
8. а (3, -5, 0), в (0, -6, 1), с (3, -3, 4).
9. а (-1, 0, 6), в (0, -5, 7), с (4, 4, -1).

Пример 6. Определите, будут ли векторы коллинеарными:

1) $\vec{a}(2,4,7)$ и $\vec{b}(4,8,14)$;

2) $\vec{a}(1,-3,4)$ и $\vec{b}(-2,6,-8)$;

3) $\vec{a}(2,0,5)$ и $\vec{b}(4,0,-10)$.

Пример 7. Определите, будут ли векторы ортогональны:

1) $\vec{a}(1,3,4)$ и $\vec{b}(-1,3,-2)$;

2) $\vec{a}(0,1,9)$ и $\vec{b}(3,0,-1)$;

3) $\vec{a}(3,-4,0)$ и $\vec{b}(0,0,4)$.

Пример 8. Найдите координаты вектора $(2\vec{a}+3\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})$, если координаты векторов равны:

1) $\vec{a}$ (2, 2, 1), $\vec{b}$ (0, 6, 2);

2) $\vec{a}$ (-1, 0, 3), $\vec{b}$ (2, 1, 0);

3) $\vec{a}$ (1, 5, 3), $\vec{b}$ (3, 0, -1).

Пример 9. При каком значении параметра α векторы $\vec{a}$ (-2, 1, -4) и $\vec{b}(5,2,\alpha)$ перпендикулярны?

Пример 10. При каких значениях параметра t векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно нулю:

1 $\vec{a}(2,3,t)$, $\vec{b}(4,6,1)$

2. $\vec{a}(1,3,t-1)$, $\vec{b}(2,6,2)$

Прокомментируйте решение следующих примеров

Пример 11. Могут ли векторы $\vec{a}(1,2)$, и $\vec{c}(2,4)$ составить базис 2-мерного пространства?

Решение. Согласно определению (8.10) лекционного курса, два вектора могут составить базис 2-мерного пространства, если они не параллельны. Используем условие (?)

$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$ – верное равенство, следовательно, векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ не могут составить базис 2-мерного пространства.

Пример 12. Могут ли векторы $\vec{a}(1,2)$, и $\vec{b}(4,5)$ составить базис 2-мерного пространства? Если да – разложите вектор $\vec{c}(6,9)$ в базисе векторов $\vec{a},\vec{b}$.

Решение. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не параллельны, то они могут составить базис 2-мерного пространства. Так как $\frac{1}{4} \neq \frac{2}{5}$, то базис они составить могут. Разложим вектор $\vec{c}$ в базисе векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то есть представим вектор $\vec{c}$ в виде *их линейной комбинации:*

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}. \quad (***)$$

Это выражение называется разложением вектора $\vec{c}$ в новом базисе, а числа *x* и *y* – его координатами.

Так как $\vec{c} = 6\vec{i} + 9\vec{j}$, $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j}$, то расписывая равенство(***) в координатной форме, приходим к уравнению

$$6\vec{i} + 9\vec{j} = x(\vec{i} + 2\vec{j}) + y(4\vec{i} + 5\vec{j}).$$

Приравнивая координаты при одинаковых ортах, приходим к системе уравнений $\begin{cases} x + 4y = 6 \\ 2x + 5y = 9 \end{cases}$, решая которую, получим $x = 2$, $y = 1$.

Ответ: $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$.

Пример 13. Определите, могут ли векторы $\vec{a}(3,4,5)$, $\vec{b}(1,-2,3)$, $\vec{c}(6,8,10)$ составить базис 3-мерного пространства.

Пример 14. Найдите векторное произведение векторов $\vec{a} \times \vec{b}$, если $\vec{a}(1,2,0)$ и $\vec{b}(3,6,1)$.

Пример 15. Векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$ имеет координаты $(-2,0,3)$. Какие координаты будет иметь вектор $\vec{c} = -3\vec{b} \times 2\vec{a}$?

Пример 16. Определите площадь параллелограмма, если его сторонами служат векторы $\vec{a}(1,2,0)$ и $\vec{b}(3,6,1)$.

Пример 17. Модули векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно равны 5 и 2 , а угол между ними равен $\frac{2\pi}{3}$. Чему равен модуль векторного произведения этих векторов?

Пример 18. Определите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}(1,2,4)$, $\vec{b}(3,0,1)$, $\vec{c}(-2,4,2)$ как на сторонах.

Пример 19. Будут ли векторы $\vec{a}(3,4,5)$, $\vec{b}(1,-2,3)$, $\vec{c}(6,8,10)$ компланарны?

Пример 20. Даны точки A (2, 3, -5), B (0, 4, -8), C (2, 3, 7), D (-10, 0, 6). Найдите:

1) угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$;
2) длину вектора, равного $2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AC}$;
3) $\text{ПР}_{\overrightarrow{AD}}\overrightarrow{BD}$.

Задание на дом

Пример 1. Могут ли векторы $\vec{a}(2,-1,1)$, $\vec{b}(-1,2,1)$, $\vec{c}(1,3,1)$ составить базис 3-мерного пространства? Если да – разложите вектор $\vec{d}(-1,-2,3)$ в базисе векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

Ответ: $\vec{d}=2\vec{a}+3\vec{b}-2\vec{c}$

Пример 2. Даны координаты вершин тетраэдра: A (1, 2, 9), B (0, -3, 4), C (2, 8, -1), D(6, -5, 0). Найти:

1) координаты и длины векторов $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$;
2) угол $B\hat{A}C$;
3) проекцию вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{AC}$;
4) площадь грани ABC;
5) объем данного тетраэдра;
6) длину высоты тетраэдра, опущенной из вершины D.

Ответ: 1)$\overrightarrow{AB}=\{-1;\ -5;\ -5\}$; $|\overrightarrow{AB}|=7{,}14$; $\overrightarrow{AC}=\{1;\ 6;\ -10\}$; $|\overrightarrow{AC}|=11{,}7$; $\overrightarrow{AD}=\{5;\ -7;\ -9\}$; $|\overrightarrow{AD}|=12{,}45$;

2) $76{,}9^{\circ}$; 3) 1,62; 4) 40,7; 5) 85,67; 6) 6,31.

Пример 3. Даны точки A (2; 3; -5), B (0; 4; -8), C (2; 3; 7), D (-10; 0; 6). Найдите:

1) угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$;

2) длину вектора, равного $2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AC}$;

3) $\text{ПР}_{\overrightarrow{AD}}\overrightarrow{BD}$;

4) скалярное произведение $\left(2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{DC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{DA}\right)$;

5) площадь треугольника, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$;

6) координаты векторного произведения $\vec{p}\times\vec{q}$, если $\vec{p}=3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ и $\vec{q}=2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}$.

$\vec{p}=3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ и $\vec{q}=2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}$.

Ответ: 1) $143{,}3^{\circ}$; 2) 59,67; 3) 17,28; 4) -530; 5) 30,38; 6) $\{-126; 882; 162\}$.

Пример 4. Вершины треугольника находятся в точках *A (2; 0), B(-3; 1), C(4; 9).* Найдите периметр и площадь треугольника.

Ответ: P = 24,95; *S = 24*.

Решите пример № 6 из своего варианта контрольного задания.

Тест по теме «Векторы»

Вариант 0

Задание	Вариант ответа	Ключ
1	2	3
1. Найдите $\vec{n}=5\left[\vec{a}\vec{b}\right]$, если $\vec{a}(1,-1,0)$ $\vec{b}(0,1,1)$	1) (5,0,5); 2) (-5,-5,5); 3) (-5,10,5); 4) (5,-10,-5)	2
2. Если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – векторы, $\lvert a\rvert=\lvert b\rvert=\sqrt{3}$, и $\bar{a}\perp\bar{b}$, то скалярное произведение $(3\bar{a}-4\bar{b})\cdot(\bar{a}+\bar{b})$ равно…	1) -1; 2) $-\frac{1}{2}$ 3) -3; 4) 1;	3

Окончание табл.

1	2	3
3. Какие из векторов параллельны: $\bar{a}\{1,2,3\}$, $\bar{b}\{2,4,6\}$, $\bar{c}\{1,2,-3\}$, $\bar{d}\{2,-4,6\}$ $\bar{a}\{1,2,3\}$, $\bar{b}\{2,4,6\}$, $\bar{c}\{1,2,-3\}$, $\bar{d}\{2,-4,6\}$	1) $\bar{a}$ и $\bar{b}$; 2) $\bar{a}$ и $\bar{c}$; 3) $\bar{a}$ и $\bar{d}$; 4) $\bar{d}$ è $\bar{b}$	1
4. Если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ - векторы, причем $\lvert\bar{a}\rvert = \lvert\bar{b}\rvert = \sqrt{3}$ и $\bar{a} \perp \bar{b}$, то модуль векторного произведения $(3\bar{a} - 4\bar{b}) \cdot (\bar{a} + \bar{b})$ равен	1) -1; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) -3; 4) 21	4
5. Какие из двух векторов перпендикулярны: $\vec{a}(1,3,5)$, $\vec{b}(-2,0,-5)$; $\vec{c}(0,7,3)$, $\vec{d}(2,-3,7)$;	1. $\vec{a}$ и $\vec{b}$; 2. $\vec{a}$ и $\vec{c}$; 3. $\vec{a}$ и $\vec{d}$; 4. $\vec{b}$ и $\vec{d}$; 5. $\vec{c}$ и $\vec{d}$	2

2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

2.1. Прямая на плоскости

Основные формулы

1. $\dfrac{x-x_a}{m}=\dfrac{y-y_a}{n}$ – уравнение прямой, проходящей через точку A (x_a, y_a), параллельно вектору S (m, n).

2. $\dfrac{x-x_a}{x_b-x_a}=\dfrac{y-y_a}{y_b-y_a}$ – уравнение прямой, проходящей через две точки A и B.

3. $A\left(x-x_a\right)+B\left(y-y_a\right)=0$ – уравнение прямой, проходящей через точку (*x_a, y_a*), перпендикулярно нормальному вектору *N (A, B).*

4. $y-y_a=k(x-x_a)$– уравнение прямой, проходящей через т. A (x_a, y_a), с угловым коэффициентом, равным k.

5. $Ax+By+C=0$ – общее уравнение прямой на плоскости.

6. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ – уравнение прямой в отрезках *а* и *в* , отсекаемых от осей координат Ох и Оу соответственно.

7. $L_1 \parallel L_2 \Rightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}$ – условие параллельности двух прямых.

8. $L_1\perp L_2 \Rightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$ – условие перпендикулярности двух прямых.

9. $\cos\left(\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{N}_2\right)=\dfrac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{\left(A_1^2+B_1^2\right)\left(A_2^2+B_2^2\right)}}$ – косинус угла между прямыми.

10. Если $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$, то $L_1\parallel L_2\Leftrightarrow k_1=k_2$, $L_1\perp L_2\Leftrightarrow k_1=-\dfrac{1}{k_2}$, $\operatorname{tg}\left(L_1,L_2\right)=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$.

Вопросы по теме

1. Общее уравнение прямой на плоскости.
2. Выведите каноническое уравнение прямой на плоскости; уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.

3. Какие виды уравнений прямой на плоскости существуют? Укажите геометрический смысл коэффициентов, входящих в эти уравнения.

4. Как найти точку пересечения двух прямых на плоскости?

5. Как определить взаимное расположение двух прямых на плоскости?

Групповая работа

Прокомментируйте решение следующих примеров

Пример 1. Составьте уравнение общее прямой, проходящей через точку *A* (1, –3), параллельно вектору *a* (4, –7).

Решение. Воспользуемся уравнением (?). Получим:

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-(-3)}{-7},$$

что после приведения к общему знаменателю дает:

$$-7(x-1)=4(y+3).$$

Раскрываем скобки, приводим подобные, получаем уравнение в общем виде:

$$7x+4y+5=0.$$

Ответ: уравнение прямой в общем виде имеет вид $7x+4y+5=0$.

Пример 2. Найдите точку пересечения прямых L_1: $2x+5y=3$ и L_2: $5x-2y=4$ и угол между ними.

Решение. Найдем точку пересечения прямых, решив систему уравнений методом (?):

$$\begin{cases}2x+5y=3,\\5x-2y=4,\end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 5\\5 & -2\end{vmatrix}=-4-25=-29,\qquad \Delta_x=\begin{vmatrix}3 & 5\\4 & -2\end{vmatrix}=-26,\qquad \Delta_y=\begin{vmatrix}2 & 3\\5 & 4\end{vmatrix}=-7,$$

$$X_a=\frac{26}{29},\qquad Y_a=\frac{7}{29}.$$

Угол между заданными прямыми численно равен углу между их нормальными векторами $\overrightarrow{N_1}$ (2, 5) и $\overrightarrow{N_2}$ (5, –2).

По формуле (?) имеем:

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot 5 - 5\cdot 2}{\sqrt{4+25}\cdot\sqrt{25+4}} = 0 .$$

Ответ: Прямые перпендикулярны, так как $\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

Самостоятельная работа

Пример 3. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку А (x_0, y_0) перпендикулярно вектору $\vec{N}$ (*а, в*). Сделайте чертеж.

1. *А* (1, 3) и $\vec{N}\,(2, 4)$. 2. $A(-2, 5)$ и $\vec{N}\,(1, -5)$.

3. $A(0, 4), \vec{N}\,(-3, -4)$. 4. $A(-1, 0), \vec{N}\,(0, 3)$.

Пример 4. Составьте уравнения прямых, проходящих через точку А (x_0, y_0) параллельно вектору $\vec{s}\,(l, m)$. Приведите уравнение к общему виду. Сделайте чертеж.

1. А (5, -5) и $\vec{s}(1, 0)$.

2. А(1,0) и $\vec{s}(1, -3)$.

3. А(- 4,1) и $\vec{s}(0, -10)$.

Какие координаты будут иметь нормальные векторы этих прямых?

Пример 5. Составьте уравнение прямой, проходящей через две точки А и В, в общем виде:

1) А (8, -5), В (5, -4); 2) А (4, 0), В (-3, -1); 3) А(0, -9), В(-8, -5).

Какие направляющие векторы будут иметь эти прямые?

Пример 6. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку А (-1, 8) под углом:

1) 90° к оси ОХ;

2) 60° к положительному направления оси ОХ.

Пример 7. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку В (-5, 8), параллельно прямой *2х +3у =5*.

Пример 8. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку С (0, -2), параллельно оси ОУ.

Пример 9. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку К (4, 8) перпендикулярно прямой 4x - 6y = 1.

Пример 10. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку Е (5, 7) и точку пересечения прямых 3x - y = 0 и 2 x + 5y = 17.

Пример 11. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых 2x - y = 2 и 5x + 2y = 5, параллельно:

1) оси ОХ; 2) оси ОУ;

3) прямой, заданной уравнением x + y = 3.

Пример 12. Под каким углом пересекаются прямые 2x - 3y = 0 и 3x + 2y = 4?

Пример 13. Определите, при каких значениях а и в две прямые: а) пересекаются; б) параллельны; в) совпадают.

1. *3x + (a-4) - 6 = 0 и 6x - 4y + в = 0.*

2. *(a+2)x + 3y +4 = 0 и -2x + 9y + в = 0.*

Пример 14. Дана точка А и прямая L. Напишите уравнения прямых L_1 и L_2, проходящих через точку А, при условии, что $L_1 \parallel L$ и $L_2 \perp L$. Сделайте чертеж.

1. *A (1, 3), y = 3x - 5.*

2. *A (-3, 4), 2x +3y - 2 = 0.*

Пример 15. Даны 3 вершины треугольника: А (1, 9), В (-1, 7), С (-3, -5). Найдите:

- длины всех сторон;
- площадь треугольника;
- длину высоты АН к стороне ВС;
- углы треугольника.

Пример 16. Определите, при каких значениях а и в две прямые: а) пересекаются; б) параллельны; в) совпадают.

1. *(2a+1)x - 3y +1= 0 и 6x - 5y - в = 0.*
2. *(a + 3)x + 2y - 4 = 0 и -2x + 6y - в = 0.*
3. *(a - 3)x + 2y +4 = 0 и -4x +6y -в =0.*

Пример 17. Дана точка А и прямая L. Напишите уравнения прямых L_1 и L_2, проходящих через точку А, при условии, что $L_1 \| L$ и $L_2 \perp L$. Сделайте чертеж.

- *A (3, 0), -4x +5y - 3 = 0;*
- *A (-2, -3), x + 2y - 6 = 0;*
- *A (1, 2), 3x - 7y -1 = 0;*
- *A (-3,4) , y = 2x +5.*

Задание на дом

Пример 1. Чему равен угловой коэффициент прямой $5x-4y+2=0$?

Ответ: 5/4.

Пример 2. Составьте уравнение прямой, проходящей через т. А(3,0) параллельно вектору *a* (0, 3) в общем виде.

Ответ: x = 3.

Пример 3. Составьте уравнение прямой в отрезках, если известны координаты точки *A*, лежащей на прямой, и вектора, перпендикулярного ей.

1. *A* (1, 3) и $\overrightarrow{N}(2,4)$. 2. $A(-2,5)$ и $\overrightarrow{N}(1,-5)$.

Ответ: 1. *x/7 + 2y/ 7 = 1.* 2. *x/-27 +5y/27 = 1.*

Пример 4. Определите, при каких значениях *a* и *в* две прямые *(2a+1)x - 3y +1= 0 и 6x - 5y - в = 0*:

а) пересекаются; б) параллельны; в) совпадают.

Ответ: а) $a \neq 1{,}3$, $b \in R$, б) $a = 1{,}3$, $b \in R$, в) $a = 1{,}3$, *b = -5/3*.

Пример 5. Дана точка *A* и прямая *L*. Напишите уравнения прямых L_1 и L_2, проходящих через точку А, при условии, что $L_1 \| L$ и $L_2 \perp L$. Сделайте чертеж.

1. *A (3, 0), L: - 4x + 5y - 3 = 0.*
2. *A (-1, 2), L: 2x – 3y + 5 = 0.*

Ответы: 1. $L_1 : -4x+5y+12=0$, $L_2 : 5x+4y=15$.

2. $L_1 : 2x-3y-8=0$, $L_2 : 3x+2y-1=0$.

Решите пример № 6 из своего варианта контрольного задания.

2.2. Линии 2-го порядка

Основные формулы

1. $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ – уравнение окружности с центром в т. M$_0$ (x_0, y_0) и радиусом, равным *R.*

2. $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ – уравнение эллипса с центром в точке O$_1$ (x_0, y_0), большей полуосью *a* и малой полуосью *b* .

3. $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ – уравнение гиперболы, с центром в точке O$_1$ (x_0, y_0), действительной полуосью *a* и мнимой полуосью *b.*

3 а. $y-y_0=\pm\frac{b}{a}(x-x_0)$ – уравнения асимптот гиперболы.

4. $(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$ – уравнение параболы с центром в точке O$_1$ (x_0, y_0), симметричной относительно оси OX.

4 а. $x-x_0=-p/2$ – уравнение директрисы параболы симметричной относительно оси OX.

5. $(x-x_0)^2=2p(y-y_0)$ – уравнение параболы с центром в точке O$_1$ (x_0, y_0), симметричной относительно оси OУ.

5 а $y-y_0=-p/2$ – уравнение директрисы параболы симметричной относительно оси OУ.

Вопросы по теме

1. Сформулируйте алгоритм исследования геометрического образа уравнения вида $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$.

2. Как записываются канонические уравнения окружности, параболы, гиперболы с центром в начале координат?

3. Как записываются канонические уравнения окружности, параболы, гиперболы с центром в точке с координатами O_1 (x_0, y_0)?

4. Как приводятся уравнения 2-й степени относительно текущих координат к каноническому виду?

Групповая работа

Прокомментируйте решение следующих примеров.

Пример 1. Приведите уравнение к каноническому виду, указажите вид кривой.

$$x^2+2x+y^2+6y-7=0.$$

Решение. Представим левую часть в виде суммы квадратов:

$(x^2 + 2x + 1) - 1 + (y^2 + 6y + 9) - 9 - 7 = 0$,

или

$$(x+1)^2+(y+3)^2=17.$$

Это уравнение представляет (?) с центром в точке (?,?) и радиусом, равным (?).

Пример 2. Покажите, что уравнение

$9x^2 - 16y^2 + 18x + 64y - 199 = 0$

определяет гиперболу, приведя его к каноническому виду. Найдите центр гиперболы, ее полуоси, фокусы и уравнения асимптот. Сделайте чертеж.

Решение. Выделим полные квадраты по переменным x и y:

$9(x^2 + 2x) - 16(y^2 - 4y) - 199 = 0$,

или

$9(x + 1)^2 - 9 - 16(y - 2)^2 + 64 - 199 = 0$.

Отсюда получаем каноническое уравнение (?):

$$\frac{(x+1)^2}{16}-\frac{(y-2)^2}{9}=1.$$

Следовательно, центр полученной кривой (?) находится в точке *C* (?; ?), действительная полуось *a* = ?, мнимая *b* = ?, фокальное расстояние по формуле (?) $c=\sqrt{a^2+b^2}=5$.

Уравнения асимптот получим по формуле (?)

$$y+1=\pm\frac{3}{4}(x-2),$$

или $3x–4y–10 = 0$ и $3x + 4y – 2 = 0$.

Вычерчивание гиперболы лучше начинать с построения асимптот, а затем уже отмечать вершины, фокусы и другие точки.

Самостоятельная работа

Пример 3. Составьте уравнение окружности с центром в точке А (5, -7) и радиусом, равным 4. Сделайте чертеж.

Пример 4. Составьте уравнение параболы, симметричной относительно оси ОХ, если уравнение ее директрисы x = -2. Сделайте чертеж.

Пример 5. Составьте уравнение параболы, симметричной относительно оси ОУ, если уравнение ее директрисы y = -2. Сделайте чертеж.

Пример 6. Составьте уравнение параболы, симметричной относительно оси ОХ, если ее центр смещен в точку О* (1, 2), а уравнение директрисы x = -20. Сделайте чертеж.

Пример 7. Составьте уравнение гиперболы с центром в начале координат, и осями, равными соответственно 3 и 6. Сделайте чертеж.

Пример 8. Составьте уравнение гиперболы с центром в точке О*(-3, 7), и осями, равными соответственно 3 и 6. Сделайте чертеж.

Пример 9. В какой точке находится центр кривой $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$? Какую линию она определяет?

Пример 10. Какое уравнение имеет одна из асимптот гиперболы $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$?

Пример 11. Какие линии определяют уравнения

$1) x^2 + y^2 = 0$; $2) x^2 + y^2 = -1$; $3) x^2 - y^2 = -1$;

$4) 4x^2 - y^2 = 0$; $5) x^2 + 2y^2 = 1$?

.

Пример 12. Составьте уравнение параболы, симметричной относительно оси ОХ, если уравнение ее директрисы x = 2. Сделайте чертеж.

Пример 13. Составьте уравнение гиперболы с центром в начале координат, и осями, равными: а = 12 и в = 6. Сделайте чертеж.

Пример 14. Составьте уравнение гиперболы с центром в начале координат, и осями, равными соответственно 3 и 6 при условии, что ее фокусы лежат на оси ОУ. Сделайте чертеж.

Проверочная работа

Приведите уравнения к каноническому виду, сделайте чертеж:

1) $5x^2 - 6y^2 - 10x - 36y - 49 = 0$;
2) $3x^2 + 2y^2 + 12x - 12y + 12 = 0$;
3) $5x^2 + 10x + 48y - 103 = 0$.

Задания на дом

Пример 1. Составьте уравнение параболы, симметричной относительно оси ОХ, если уравнение ее директрисы x = 5. Сделайте чертеж.

Ответ: $y^2 = -20x$.

Пример 2. Составьте уравнение гиперболы с центром в начале координат, действительной полуосью равной *в* = *5*, и мнимой *а* = 3. Сделайте чертеж.

Ответ: $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{9} = 1$.

Пример 3. Составьте уравнение гиперболы с центром в начале координат, и полуосями, равными соответственно 3 и 6 при условии, что ее фокусы лежат на оси ОУ. Сделайте чертеж.

Ответ: $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{36}=1.$

Пример 4. Приведите уравнения второго порядка к каноническому виду. Определите их тип, сделайте чертеж:

1) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0;$

2) $5x^2 + 9y^2 + 20x + 72y + 119 = 0;$

3) $y^2 - 2y - 6x + 7 = 0.$

Ответы: 1) $\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y+3)^2}{16}=1$ – гипербола с центром в точке (2; -3);

2) $\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y+4)^2}{5}=1$ – эллипс с центром в точке (-2; -4);

3) $(y-1)^2=6(x-1)$ – парабола с вершиной в точке (1; 1).

Решите пример № 7 из своего варианта контрольного задания.

2.3. Плоскость в пространстве

Основные формулы

1. $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ – уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$,перпендикулярно нормальному вектору N с координатами (*A, B, C*).

2. $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}=0$ – уравнение плоскости, проходящей через три точки с координатами $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

3. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ – уравнение плоскости в отрезках *a, b, c*, отсекаемых от осей координат *ОХ, ОУ, OZ* соответственно

4. $Ax+By+Cz+D=0$ – общее уравнение плоскости.

5. $P_1 \perp P_2, \quad \Rightarrow \quad \vec{N}_1 \perp \overrightarrow{N_2}$ *и* $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0$.

6. $P_1 \| P_2, \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{N_1} \| \vec{N}_2$ *и* $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

7. $\angle P_1, P_2 = \varphi, \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = \dfrac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$.

Вопросы по теме

1. Как запишется общее уравнение плоскости?
2. Как запишется уравнение плоскости, проходящей через заданную точку, перпендикулярно заданному вектору?
3. Как запишется уравнение плоскости, проходящей через три заданных точки?
4. Как расположена плоскость относительно системы координат, если в ее общем уравнении отсутствует:

   а) свободный член;

   б) одна из переменных;

   в) две переменных;

   г) одна из переменных и свободный член;

   д) две переменные и свободный член?
5. Запишите уравнение плоскости в отрезках. Каков геометрический смысл параметров этого уравнения? Для всякой ли плоскости можно записать уравнение в отрезках?
6. Запишите уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки.
7. Сформулируйте условия параллельности, перпендикулярности, совпадения двух плоскостей, заданных общими уравнениями.

Прокомментируйте решение следующих примеров

Пример 1. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку А (3, 5, 0), перпендикулярно вектору $\vec{N}(3, 0, -2)$. Что вы можете сказать о ее положении в пространстве?

Решение. Воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через данную точку, перпендикулярно данному вектору (ф.?).

Получаем: $3(x-3)+0(y-5)-2(z-0)=0$ или $3x-2z-9=0$.

Ответ: Уравнение плоскости имеет вид $3x-2z-9=0$. Она параллельна оси (?) и перпендикулярна оси (?)

Пример 2. Составьте уравнение плоскости, проходящей через 3 точки $A(7,0,1)$, $B(0,3,-1)$, $C(0,2,-3)$. Какими координатами обладает ее нормальный вектор?

Решение. Воспользуемся соответствующим уравнением плоскости (?).

Ответ: уравнение плоскости имеет вид $-8x-14y+7z+49=0$, координаты нормального вектора (?, ?, ?)

Самостоятельная работа

Пример 3. Определите отрезки, отсекаемые плоскостью $2x-3y-4z=12$ от осей координат. Сделайте чертеж.

Пример 4. Даны точка M(1,-1,2) и плоскость P: $2x+3y-5z=0$. Какое из утверждений верно:

1. т. M принадлежит плоскости P.
2. т. M совпадает с нормальным вектором.
3. т.M не принадлежит плоскости.

Пример 5. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку A (-2 ,0 ,3) параллельно плоскости x - 2y + 4z - 8 = 0 в общем виде.

Пример 6. Общее уравнение плоскости в пространстве имеет вид $2x-y-3z-6=0$. Как запишется ее уравнение «в отрезках»?

Пример 7. Будет ли плоскость 2 x + 3y - 5 = 0 параллельна координатным плоскостям?

Пример 8. В каких точках плоскость $x-3y+3z-1=0$ пересекает оси координат?

Пример 9. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку А (1, 0, 2), перпендикулярно вектору $\vec{N}(1,3,0)$.

Пример 10. Будут ли плоскости $2x-3y-5z=0$ и $4x-6y-10z=4$:

1) параллельны;
2) перпендикулярны;
3) располагаются под другим (каким?) углом?

Пример 11. Какой вид имеет уравнение плоскости, проходящей через точку А (1, 0, 2), параллельно плоскости $3x+4y-z=0$?

Пример 12. Найдите точку пересечения 3 плоскостей, заданных уравнениями:

2x + 3y - 5z = 0, *x - y - z = -1* *2x - 5y - 2z = -5.*

Задание на дом

Пример 1. При каком значении С плоскости Р$_1$: $2x-3y-5z=16$ и Р$_2$: $4x-Cy-10z=32$ параллельны?

Ответ: С = 6.

Пример 2. Могут ли плоскости Р$_1$: $2x-3y-5z=6$ и Р$_2$: $3x+2y=9$ пересечься в пространстве?

2.4. Прямая и плоскость в пространстве

Основные формулы

1. $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ – прямая как пересечение двух плоскостей.

2. $\dfrac{x-x_a}{x_b-x_a}=\dfrac{y-y_a}{y_b-y_a}=\dfrac{z-z_a}{z_b-z_a}$ – уравнение прямой, проходящей через две точки А и В.

3. $\frac{x-x_a}{l}=\frac{y-y_a}{m}=\frac{z-z_a}{n}$ – уравнение прямой, проходящей через данную точку *А* (x_a, y_a, z_a), параллельно направляющему вектору $\vec{s}(l,m,n)$.

4. Если $l \parallel P \Leftrightarrow \vec{s} \perp \vec{N}$, то $Al+Bm+Cn=0$ – условие параллельности прямой и плоскости.

5. Если $l \perp P \Leftrightarrow \vec{s} \parallel \vec{N}$, то $\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$ – условие перпендикулярности прямой и плоскости.

6. $\sin\varphi=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$ – синус угла между прямой и плоскостью.

Вопросы по теме

1. Какие виды уравнений прямой в пространстве вы знаете? Запишите эти уравнения, укажите смысл входящих в них параметров.
2. Сформулируйте условия параллельности, перпендикулярности, совпадения, пересечения двух прямых в пространстве, заданных каноническими уравнениями.
3. Сформулируйте условия параллельности, перпендикулярности прямой и плоскости, если прямая задана каноническими уравнениями, а плоскость – общим уравнением.
4. Как найти точку пересечения прямой и плоскости?

Прокомментируйте решение следующих примеров

Пример 1. Составьте уравнение прямой, проходящей через 2 заданные точки А (1, 0, 2) и В (3, 6 , -9).

Решение. Воспользуемся уравнением прямой (?). Получим $\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-0}{6-0}=\frac{z-2}{-9-2}$ или $\frac{x-1}{2}=\frac{y-0}{6}=\frac{z-2}{-11}$.

Пример 2. Составьте уравнение прямой, проходящей через заданную точку А (-3, 0, 4) параллельно вектору $\vec{s}(3,0,5)$.

Решение. Воспользуемся уравнением прямой (?) Получим $\frac{x+3}{3}=\frac{y-0}{0}=\frac{z-4}{5}$.

Пример 3. Составьте уравнение прямой, проходящей через 2 заданные точки: А (3, -4, 7) и В (3, 4, -4). Будет ли эта прямая проходить через начало координат?

Решение. Уравнение прямой составим, используя формулу (?):

$$\frac{x-3}{0}=\frac{y+4}{8}=\frac{z-7}{-11}.$$

Подставив в него координаты точки О (0, 0, 0), получим очевидное неравенство

$$\frac{0-3}{0}\neq\frac{0+4}{8}\neq\frac{0-7}{-11}.$$

Ответ: прямая не проходит через начало координат.

Самостоятельная работа

Пример 4. Две прямые в пространстве заданы уравнениями $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{2}$ и $\frac{x+1}{2}=\frac{y-11}{4}=\frac{z-3}{4}$. Найдите угол между ними.

Пример 5. Две прямые в пространстве заданы уравнениями $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-1}{-4}$ и $\frac{x-2}{-2}=\frac{y-1}{6}=\frac{z-5}{8}$. Найдите угол между ними.

Пример 6. Даны прямая L: $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{2}$ и плоскость P: $x+2y+2z-3=0$. Какое из утверждений верно:

1) $L\perp P$; 2) $L \parallel P$; 3) $\angle L,P=60^\circ$; 4) $\angle L,P=\frac{\pi}{4}$?

Пример 7. Найдите угол между прямой $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-1}{-4}$ и плоскостью $2x-3y-5z=6$.

Пример 8. Найдите точку пересечения прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{2}$ и плоскости $3x+4y-z=0$.

Пример 9. Уравнения плоскостей P_1 и P_2 имеют вид $4x-3y+2z-1=0$, $8x+ay+bz-5=0$ соответственно. При каких значениях параметров a и b они параллельны?

Пример 10. Уравнения прямой и плоскости имеют вид: $\frac{x-2}{-2}=\frac{y-1}{6}=\frac{z-5}{8}$, $x-ty-4z=7$. При каком значении параметра t они будут перпендикулярны?

Пример 11. Найдите точку пересечения трех плоскостей, заданных уравнениями

$$2x-y-z=10;$$

$$x-y+3z=5;$$

$$3x-y-z=15.$$

Проверочная работа

Пример 1. Уравнение плоскости, проходящей через т. А (-1, 3, 5), перпендикулярно вектору $\vec{N}(-3,4,5)$ в отрезках запишется в виде…

Пример 2 Уравнение плоскости, проходящей через т.А (-1, -3, 9), параллельно плоскости $-2x-3y+5z+2=0$,

Пример 3. Угол между плоскостями $2x-3y+z=9$ и $3x+2y=8$ равен…

Пример 4. Уравнение прямой, проходящей через 2 заданные точки А (-5,8,-4) и В (2, 0, 8), имеет вид…

Пример 5. Угол между прямой $\frac{x-4}{4}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+4}{1}$ и плоскостью $x+5y-4z=9$ равен…

Задание на дом

Примеры

1. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку А (9; 1; 0) с вектором $\vec{N} = \{3;\ -7; 1\}$.

2. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки М (5; 0; -7), K (3; -3; 1), L (4; 0; -2).

3. Найдите угол между плоскостями, найденными в пунктах 1 и 2.

4. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку В (4; -8; 0) параллельно плоскости, найденной в п. 1.

5. Напишите уравнения линии, проходящей через точку А (9; 1; 0) с вектором $\vec{a} = \{6;\ -7; 4\}$.

6. Напишите уравнения линии, проходящей через точки В (4; -8; 0) и С (6; 4; 1).

7. Напишите параметрические уравнения прямой п. 5.

8. Найдите точку пересечения прямой п. 5 и плоскости п. 2.

Ответы: 1) *3x-7y+z-20=0*; 2) *15x-2y+3z-54=0*; 3) $58{,}45^{\circ}$;
4) *3x-7y+z-68=0*; 5) $\frac{x-9}{6} = \frac{y-1}{-7} = \frac{z}{4}$; 6) $\frac{x-4}{2} = \frac{y+8}{12} = \frac{z}{1}$;
7) $\begin{cases} x = 9 + 6t \\ y = 1 - 7t; \\ z = 4t \end{cases}$ 8) $(\frac{1518}{116}; \frac{437}{116}; \frac{316}{116})$.

Решите пример № 9 из своего варианта контрольного задания.

2.5. Поверхности 2-го порядка

Основные формулы

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ – эллипсоид.

2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ – однополостный гиперболоид.

3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ – двуполостный гиперболоид.

4. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$ – эллиптический параболоид**.**

5. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ – гиперболический **п**араболоид.

6. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ – конус.

7. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ – эллиптический цилиндр.

8. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ – гиперболический цилиндр.

9. $y^2=2px$ – параболический цилиндр.

Групповая работа

Прокомментируйте решения следующих примеров

Пример 1. Определите тип поверхности, определяемой уравнением

$1. \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1$.

Решение. Согласно формуле (?) данное уравнение определяет (?) с центром в начале координат и полуосями *а, в, с = ?*

Пример 2. Определите тип поверхности, определяемой уравнением $z=x^2-y^2$.

Решение. Это уравнение представляет равносторонний гиперболический параболоид (ф.?), у которого соответствующие полуоси *а = b =?*

Самостоятельная работа

Пример 3. Определите тип поверхности. Сделайте чертеж.

1. $z=x^2+y^2$.
2. $z=x^4+y^4$.
3. $z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$
4. $x^2+2x-y^2-6y+5z^2-20z-2=0$.

Домашнее задание

Пример 1. Определите тип поверхности, сделайте чертеж.

1. $Z= y^2 -10 y - 4 x^2 + 8x +21$.

2. $3 x^2 + 5 y^2 -18 x +10 y+ Z^2 + 31 = 0$.

3. $4 x^2 + 5 y^2 - 8 x +20 y – 4z +24 = 0$.

4. $x^2 - 4 x - 6 y – 10 = 0$.

Ответы:

1) гиперболический параболоид с центром в точке O^1 (2, 5, 0) и полуосями а = $\sqrt{0,5}$, в = $\sqrt{1/8}$;

2) эллипсоид с центром в точке O^1(3,-1, 0) и полуосями а= $\sqrt{1/3}$, $b=\sqrt{1/5}$, $c=1$;

3) эллиптический параболоид с центром в точке O^1 (1,-2, 0) и полуосями $a=\sqrt{0,5}$, $b=\sqrt{0,4}$;

4) параболический цилиндр с вершиной в точке O^1 (2, 0, 0).

Решите пример № 10 из своего варианта контрольного задания.

Индивидуальная контрольная работа по теме «Аналитическая геометрия в пространстве»

Вариант 0

Пример 1. Даны координаты четырех точек: $A_1(1,-2,3)$, $A_2(3, 0,-2)$, $A_3(-4,0,0)$, $A_4(-1,2,4)$. Найдите:

1) угол между ребром A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$;
2) уравнение высоты A_4H к плоскости $A_1A_2A_3$;
3) длину высоты A_4H;
4) объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$;
5) площадь грани $A_1A_2A_3$.

Пример 2. Определите тип поверхности. Сделайте чертеж. $\dfrac{(x-4)^2}{4}-\dfrac{(y+3)^2}{9}=1$

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ЗАЧЕТНОЙ РАБОТЫ

Вариант 1

Номер задания	Тестовое задание
1	Число 2 принадлежит множеству… 1) $B=\{b: b\in Z, -2\le b<3\}$ 2) $D=\{d: d\in Q, D<2\}$ 3) $C=\{c: c\in R, -3<b\le 2{,}6\}$ 4) $A=\{a: a\in N, 1\le a<3\}$
2	Вычисление произведения $z_1\cdot z_2$, где $z_1=2-3i$ и $z_2=2+3i$ приводит к ответу… 1) 5 2) 13 3) 4 4) 6
3	Произведение матриц $\begin{pmatrix}1&-5&2\\-1&2&4\\2&3&7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&1\\1&2\\1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&-1\\1&3\end{pmatrix}$ равно… 1) $\begin{pmatrix}3&-9\\24&42\\79&71\end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix}-3&-9\\24&42\\77&71\end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix}3&-9\\25&42\\75&71\end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix}-3&9\\-24&42\\79&71\end{pmatrix}$
4	Определитель матрицы $\begin{vmatrix}-1&2&0\\2&5&0\\3&3&3\end{vmatrix}$ равен… 1) 0 2) -27 3) 27 4) 34
5	Сумма решений системы $\begin{cases}2x_1+6x_2-3x_3+2x_4=-38\\-x_1+2x_2+x_3-3x_4=-3\\3x_1-2x_2+6x_3+x_4=23\\2x_1+x_2+7x_3+3x_4=5\end{cases}$ равна…
6	Даны векторы $\bar{a}=(1;2;-2)$, $\bar{b}=(-1;0;\sqrt{3})$, $\bar{c}=(-3;4;0)$. Упорядочить их по возрастанию модулей
7	Общее уравнение прямой, проходящей через точки *A(1;2)* и *B(3;4)* имеет вид… 1) $x=y$ 2) $x-y=2$ 3) $x-y+1=0$ 4) $x+y=1$
8	Центр какой кривой $x^2+y^2+2x-4y=0$ находится в точке с координатами … 1) (-1; 2) 2) (1; -1) 3) (0; -2) 4) (2; -2)
9	Уравнение плоскости, проходящей через точку *A (3; -2; 0)* А *(3, -2, 0)*, перпендикулярно вектору $\vec{n}=(6;-1;-1)$, запишется в виде… 1) $6x-y-z+20=0$ 2) $6x-y-z=0$ 3) $-x-y+z+6=0$ 4) $6x-y-z-20=0$
10	Определите тип поверхности, определяемой уравнением $x^2-2x+2y^2-12y+z^2-4z-100=0$, и координаты центра симметрии

Вариант 2

Номер задания	Тестовое задание
1	Установите соответствие между списками двух множеств, заданных различным образом 1. $\{x:\ x^2-5x+6\le 0\}$ A) $[2;3]$ 2. $\{x:\ x^2-5x+6=0\}$ B) $(-\infty;2]\cup[3;+\infty)$ 3. $\{x:\ x^2-5x+6<0\}$ C) $(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$ 4. $\{x:\ x^2-5x+6>0\}$ D) $(2;3)$ E) $\{2;3\}$
2	Если $z_1=3-2i$, $z_2=4+5i$, то сумма $2z_1+3\overline{z_2}$ равна… 1) 5 2) $18-19i$ 3) $18+11i$ 4) $6-23i$
3.	Произведение матриц $\begin{pmatrix}3&5&-6\\2&4&3\\-3&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&8&-5\\-3&-1&0\\4&5&-3\end{pmatrix}$ равно… 1) $\begin{pmatrix}-33&-11&3\\4&27&-19\\-5&-20&12\end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix}-33&11&3\\4&27&-19\\5&-20&12\end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix}-33&-11&3\\-4&27&-19\\5&-20&12\end{pmatrix}$
4	Вычисление определителя $\begin{vmatrix}-1&1&0\\-2&7&6\\1&0&0\end{vmatrix}$ приводит к ответу… 1) *0* 2) *-6* 3) *6* 4) *36*
5	Сумма решений системы $\begin{cases}-x_1+5x_2+4x_3+2x_4=31\\2x_1-x_2+3x_3-3x_4=-3\\-4x_1-2x_2+x_3+x_4=-1\\2x_1+4x_2+3x_3-x_4=19\end{cases}$ равна…
6	Из четырех векторов $\vec{a}=(1;2;3)$, $\vec{b}=(2;4;6)$, $\vec{c}=(1;2;-3)$, $\vec{d}=(2;-4;6)$ параллельны друг другу… 1) $\vec{a}$ и $\vec{b}$ 2) $\vec{a}$ и $\vec{c}$ 3) $\vec{a}$ и $\vec{d}$ 4) $\vec{d}$ и $\vec{b}$
7	Уравнение прямой, проходящей через точку *A(3;0)* параллельно вектору $\vec{a}=(0;3)$, имеет вид … 1) $x=3$ 2) $y=0$ 3) $y=3$ 4) $x+y=3$
8	Центр какой кривой $x^2+y^2+8x-4y=0$ находится в точке… 1) *(-8; 4)* 2) *(-4;-1)* 3) *(-4;2)* 4) *(-4;-2)*

9	Плоскость $x-3y+3z-1=0$ пересекает оси в точках с координатами… 1) *(1; 0; 0),* *(0; 3; 0),* *(0; 0; 3)* 2) *(0; -1/3; 0),* *(3; 0; 0),* *(4; 1; 1)* 3) *(1; 0; 0) ,* *(0; -1/3; 0),* *(0; 0; 1/3)* 4) *(1; -3; 4) ,* *(2; 3; 4),* *(-1; -3; 3)*
10	Определите тип поверхности, определяемой уравнением $x^2-4x+2y^2-4y+z^2-6z-10=0$, и координаты центра симметрии

Вариант 3

Номер задания	Тестовое задание
1	Решения уравнения $x^2+2x+7=0$ принадлежит множествам… *1) натуральных чисел* *2) целых чисел* *3) рациональных чисел* *4) комплексных чисел*
2	Вычисление $(z_1-z_2)^2$, если $z_1=1-i$, $z_2=2+3i$ приводит к ответу… 1) *289* 2) *-12* 3) $-15+8i$ 4) $15-8i$
3	Произведение матриц $\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 5\\ -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1 & 4\\ -2 & 1 & -1\end{pmatrix}$ равно… 1) $\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & 4\end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix}2 & 3 & -3\\ 3 & 4 & 2\\ 1 & 1 & 6\end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix}-2 & -9 & -11\\ -15 & 20 & 5\\ -20 & 10 & -10\end{pmatrix}$
4	Определитель $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & \alpha\\ 2 & -4 & 0\end{vmatrix}$ равен нулю при α равном … 1) *2* 2) *3* 3) *-2* 4) *6*
5	Сумма решений системы $\begin{cases}3x_1-2x_2+6x_3+2x_4=16\\ 2x_1-4x_2+x_3+x_4=5\\ -x_1+3x_2-2x_3-x_4=-5\\ 3x_1+x_2-2x_4=8\end{cases}$ равна…
6	Векторы $\bar{a}=-2\bar{i}+3\bar{j}+\alpha\bar{k}$ и $\bar{b}=\beta\bar{i}-6\bar{j}+2\bar{k}$ коллинеарны при α и β равных … 1) $\alpha=-4, \beta=4$ 2) $\alpha=3, \beta=-6$ 3) $\alpha=-1, \beta=4$ 4) $\alpha=3, \beta=-1$

7	Прямые $y=2x-1$ и $y=5x-4$ пересекаются в точке с координатами… 1) *(1;0)* 2) *(1;1)* 3) *(-1;4)* 4) *(-1;2)*
8	Центр какой кривой $x^2+y^2-12x+4y=0$ находится в точке… 1) *(-12; 4)* 2) *(-6;-1)* 3) *(6;1)* 4) *(6;-2)*
9	Плоскости $2x-3y-5z=0$ и $4x-6y-10z=4$ … 1) *параллельны* 2) *перпендикулярны* 3) *совпадают* 4) *пересекаются*
10	Определите тип поверхности, определяемой уравнением $x^2-6x+2y^2-8y+z^2-10=0$, и координаты центра симметрии

Вариант 4

Номер задания	Тестовое задание
1	Числа $x_1=2-i$ и $x_2=2+i$ принадлежат множеству 1) $\{x:\ x^2+5x+4=0\}$ 2) $\{x:\ x^2+2x+5=0\}$ 3) $\{x:\ x^2-4x+5=0\}$ 4) $\{x:\ x^2-4x+5<0\}$
2	Произведение $z_1\cdot z_2$, где $z_1=2-3i$ и $z_2=4+5i$ равно… 1) 23 2) $6+2i$ 3) $8-15i$ 4) $23-2i$
3	Произведение матриц $\begin{pmatrix}2&3&2\\1&3&-1\\4&1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&2&-1\\3&1&2\\5&3&0\end{pmatrix}$ равно… 1) $\begin{pmatrix}25&13&4\\7&2&5\\30&18&-2\end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix}25&13&4\\3&2&5\\13&18&2\end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix}25&13&4\\7&22&5\\12&18&-2\end{pmatrix}$
4	Вычисление определителя $\begin{vmatrix}1&-3&5\\0&3&6\\1&0&11\end{vmatrix}$ приводит к ответу… 1) *3* 2) *-3* 3) *0* 4) *5*
5	Сумма решений системы $\begin{cases}-2x_1+3x_2-4x_3+2x_4=-7\\-x_1+3x_2+4x_3-x_4=-9\\3x_1+2x_2+x_3+3x_4=16\\-x_1+2x_2+4x_3+x_4=-4\end{cases}$ равна…
6	Даны два вектора $\vec{a}=(1;2;0)$ и $\vec{b}=(0;3;6)$. Тогда вектор $\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}$ имеет координаты… 1) *(2;7;6)* 2) *(1;4;6)* 3) *(1;5;6)* 4) *(0;4;1)*

7	Даны точки $M=(2;-1)$, $N=(-2;0)$, $K=(-2;1)$ и $L=(1;1)$. Тогда на линии $2x+y+3=0$ лежит точка … 1) $M=(2;-1)$ 2). $N=(-2;0)$ 3) $K=(-2;1)$ 4) $L=(1;1)$
8	Центр окружности $x^2+y^2-4x+8y-16=0$ находится в точке 1) $(8;4)$ 2) $(-4;4)$ 3) $(2;-4)$ 4) $(-4;8)$
9	Уравнение плоскости, проходящей через точку *A(5;-3;2)* с нормальным вектором $\vec{n}=(-4;-2;3)$, имеет вид… 1) $-4x-2y+3z=0$ 2) $6x+y+z=0$ 3) $-4x-2y+3z+8=0$ 4) $4x+2y+3z+8=0$
10	Определите тип поверхности, определяемой уравнением $x^2-10x+2y^2-4y+z^2-16z-1=0$, и координаты центра симметрии

Вариант 5

Номер задания	Тестовое задание
1	Числа $x_1=3-i$ и $x_2=3+i$ принадлежат множеству … 1) $\{x: x^2-6x+10=0\}$ 2) $\{x: x^2-6x+10>0\}$ 3) $\{x: x^2-6x-10=0\}$ 4) $\{x: x^2-6x+10<0\}$
2	Вычисление z_1/z_2, где $z_1=2-3i$ и $z_2=2+3i$ приводит к ответу … 1) $1-\frac{12}{13}i$ 2) $-\frac{5}{13}-\frac{12}{13}i$ 3) $2-\frac{12}{13}i$ 4) $1+\frac{12}{13}i$
3	Произведение матриц $\begin{pmatrix}1\\-3\\5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & -3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\2 & 3 & -3\\-2 & -3 & 2\end{pmatrix}$ равно… 1) $\begin{pmatrix}-10 & -13 & 21\\30 & 39 & -63\\-50 & 65 & 105\end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix}-10 & -13 & 21\\30 & 39 & -63\\-50 & -65 & 105\end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix}-10 & -13 & 21\\30 & 39 & -63\\-50 & -65 & 106\end{pmatrix}$
4	Вычисление определителя $\begin{vmatrix}1 & 0 & 3\\2 & 0 & 6\\3 & 5 & 9\end{vmatrix}$ приводит к ответу… 1) *3* 2) *0* 3) *10* 4) *5*
5	Сумма решений системы $\begin{cases}x_1+4x_2+7x_3+2x_4=12\\2x_1-x_2+3x_3-x_4=-2\\-3x_1+4x_2-x_3+3x_4=11\\x_1-2x_2+2x_3+3x_4=10\end{cases}$ равна…

6	Даны три вектора $\vec{a}=(1;\,2;0)$, $\vec{b}=(0;3;6)$ $\vec{c}=(5;0;-5)$. Тогда их суммарный вектор имеет координаты… 1) *(-4; 5; 9)* 2) *(6; 5; 1)* 3) *(6; 7; -1)* 4) *(2; 0; 9)*
7	Общее уравнение прямой, проходящей через точку $A=(-3;1)$ параллельно прямой $x-2y+7=0$, имеет вид… 1) $x+2y+5=0$ 2) $x-2y+5=0$ 3) $x-2y-5=0$ 4) $x+2y-5=0$
8	Фокусы эллипса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ имеют координаты … 1) $F_1=(0;-\sqrt{7})$, $F_2=(0;\sqrt{7})$ 2) $F_1=(0;-5)$, $F_2=(0;5)$ 3) $F_1=(-5;0)$, $F_2=(5;0)$ 4) $F_1=(-\sqrt{7};0)$, $F_2=(\sqrt{7};0)$
9	Уравнение плоскости, проходящей через точку *A(6;2;-4)* с нормальным вектором $\vec{n}=(1;-1;3)$ имеет вид… 1) $x-y+3z-8=0$; 2) $x-y+3z=0$; 3) $x+y+3z+8=0$; 4) $x-y+3z=0$
10	Определите тип поверхности, определяемой уравнением $x^2-4x+y^2-4y+z-10=0$, и координаты центра симметрии

Вариант 6

Номер задания	Тестовое задание
1	Числа $x_1=3i$ и $x_2=-3i$ принадлежат множеству … 1) $\{x : x^2-9=0\}$ 2) $\{x : x^2+9=0\}$ 3) $\{x : x^2-9x=0\}$ 4) $\{x : 9x^2-1=0\}$
2	Комплексное число z, у которого $\lvert z\rvert=5$, $\cos\varphi=\frac{4}{5}$ и $\sin\varphi=\frac{3}{5}$, в алгебраической форме имеет вид … 1) $4+3i$ 2) $3+4i$ 3) $3-4i$ 4) $4-3i$
3	Произведение матриц $\begin{pmatrix}2&3&2\\1&3&-1\\4&1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&2&-1\\3&1&2\\5&3&0\end{pmatrix}$ равно… 1) $\begin{pmatrix}25&13&-4\\7&2&5\\30&18&-2\end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix}25&13&4\\7&-20&5\\30&18&-2\end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix}25&13&4\\7&2&5\\30&18&-2\end{pmatrix}$
4	Вычисление определителя $\begin{vmatrix}1&5&3\\-2&0&-6\\3&5&9\end{vmatrix}$ приводит к ответу… 1) *0* 2) *4* 3) *5* 4) *8*

5	Сумма решений системы $\begin{cases} 8x_1+3x_2+x_3+2x_4=-13 \\ -x_1+2x_2+x_3-3x_4=6 \\ 2x_1-3x_2-2x_3+x_4=-14 \\ 2x_1+x_2+5x_3+x_4=-2 \end{cases}$ равна…
6	Даны три вектора $\vec{a}=(1;\,2;0)$, $\vec{b}=(0;3;6)$ $\vec{c}=(5;0;-5)$. Тогда вектор $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$ имеет координаты… 1) *(3; 7; 9)* 2) *(6; 1; 11)* 3) *(6; -1; -11)* 4) *(6; 2; -5)*
7	Расстояние от точки $M=(2;-1)$ до прямой $3x+4y-22=0$ равно… 1) *1* 2) *2* 3) *-3* 4) *4*
8	Одна из асимптот гиперболы $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ имеет уравнение... 1) $y=2x$ 2) $y=-\frac{2}{3}x$ 3) $y=-\frac{4}{9}x$ 4) $y=\frac{3}{2}x$
9	Уравнение плоскости, проходящей через точку *A(1; 0; 2)*, параллельно плоскости $3x+4y-z=0$, имеет вид… 1) $3x+4y-z+1=0$ 2) $3x+4y+z-1=0$ 3) $x-2z-6=0$ 4) $x-2z+1=0$
10	Определите тип поверхности, определяемой уравнением $4x^2-4x+2y^2-4y-6z-1=0$, и координаты центра симметрии

Вариант 7

Номер задания	Тестовое задание
1	Числа $x_1 = 2+3i$ и $x_2 = 2-3i$ принадлежат множеству 1) $\{x : x^2-4x+13=0\}$ 2) $\{x : x^2-4x+9=0\}$ 3) $\{x : x^2-9x-8=0\}$ 4) $\{x : x^2+3x-1=0\}$
2	Комплексное число z, у которого $\lvert z\rvert=2$ и $arg\,z=\frac{\pi}{6}$, в алгебраической форме имеет вид… 1) $\sqrt{3}+i$ 2) $\sqrt{2}+2i$ 3) $1+\sqrt{3}i$ 4) $\sqrt{3}-i$
3	Произведение матриц $\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ 4 & 0 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 4 & 3\\ -2 & 0 & 1\\ 3 & -2 & 2\end{pmatrix}$ равно… 1) $\begin{pmatrix}-1 & -14 & 4\\ 49 & 36 & 49\end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix}1 & 4\\ 45 & 5\end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\ 3 & 3 & 6\end{pmatrix}$

4	Определитель $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & x \end{vmatrix}$ не равен нулю при x равном ... 1) *-2* 2) *2* 3) *4* 4) *-1* *Укажите не менее 2 правильных ответов*
5	Сумма решений системы $\begin{cases} -6x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -11 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = -4 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -8 \end{cases}$ равна …
7	Уравнение прямой, проходящей через точку А (*1*,*-1*), параллельно прямой $2x - 3y - 5 = 0$, имеет вид… *1) 2x - 3y - 5 = 0 2) 2x – 3y + 7= 0 3) x = y 4) x + y = 1*
8	Уравнение второго порядка $4x^2 - 3y^2 + 16x + 6y - 5 = 0$ определяет … 1) *параболу* *2) пару пересекающихся прямых* *3) эллипс* *4) гиперболу* с центром в точке…
9	Плоскости $2x - 3y - 5z = 6$ и $4x - Cy - 10z = 3$ параллельны, если значение *C* равно… 1) *1* 2) *3* 3) *6* 4) *0*
10	Определите тип поверхности, определяемой уравнением $x^2 - 4x + 2y^2 - 4y - 5 = 0$, и координаты центра симметрии

Вариант 8

Номер задания	Тестовое задание
1	Числа $x_1 = 2 + 5i$ и $x_2 = 2 - 5i$ принадлежат множеству 1) $\{ x : x^2 - 4x + 11 = 0 \}$ 2) $\{ x : x^2 - 4x + 29 = 0 \}$ 3) $\{ x : x^2 - 29x - 4 = 0 \}$ 4) $\{ x : x^2 + 4x - 21 = 0 \}$
2	Комплексное число $z = \sqrt{3} + i$ в показательной форме имеет вид… 1) $2e^{i\frac{\pi}{6}}$ 2) $2e^{i\frac{\pi}{3}}$ 3) $5e^{i\frac{\pi}{6}}$ 4) $5e^{i\frac{\pi}{4}}$

3	Произведение матриц $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \end{pmatrix}$ равно… 1) $\begin{pmatrix} -2 & 48 & 12 \\ 5 & -33 & -7 \\ -1 & 27 & 7 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 2 & 48 & 12 \\ 5 & -33 & -7 \\ -1 & 27 & 77 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} -2 & 48 & 12 \\ 5 & 33 & -7 \\ 1 & 27 & 7 \end{pmatrix}$
4	Вычисление определителя $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 2 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \end{vmatrix}$ приводит к ответу… 1) *3* 2) *0* 3) *10* 4) *5*
5	Сумма решений системы $\begin{cases} -2x_1+4x_2+5x_3+3x_4=-12 \\ -x_1+2x_2+4x_3-2x_4=-11 \\ 3x_1+x_2+x_3+2x_4=16 \\ x_1-2x_2+4x_3+x_4=2 \end{cases}$ равна…
6	Векторы $\vec{a}=(-2;1;-4)$ и $\vec{b}=(5;2;\alpha)$ перпендикулярны при α равном… 1) *0* 2) *2* 3) *-2* 4) *10*
7	Уравнение прямой, проходящей через точку С (*3*, *-3*) перпендикулярно прямой *2x – 3y = 9* имеет вид… 1) *2x – 3y +15 = 0* 2) *3x + 2y - 3 = 0* 3) *3x – 2y +15 = 0*
8	Асимптотами гиперболы $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ являются прямые… 1) $y=\pm\frac{3}{4}x$ 2) $y=\pm\frac{4}{3}x$ 3) $y=\pm\frac{16}{9}x$ 4) $y=\pm\frac{9}{16}x$
9	Плоскости $2x-3y-5z=6$ и $3x+2y=9$ в пространстве… 1) *параллельны* 2) *перпендикулярны* 3) *совпадают* 4) *пересекаются*
10	Определите тип поверхности, определяемой уравнением $4x+2y^2-4y+z^2-6z-10=0$, и координаты центра симметрии

Вариант 9

Номер задания	Тестовое задание
1	Числа $x_1 = 7 + 5i$ и $x_2 = 7 - 5i$ принадлежат множеству 1) $\{ x : x^2 – 14x + 11 = 0 \}$ 2) $\{ x : x^2 - 14x - 29 = 0 \}$ 3) $\{ x : x^2 – 14x - 74 = 0 \}$ 4) $\{ x : x^2 + 4x – 21 > 0\}$
2	Если $z_1 = 5\left(cos\frac{\pi}{4} + i\,sin\frac{\pi}{4}\right)$ и $z_2 = 3\left(cos\frac{\pi}{3} + i\,sin\frac{\pi}{3}\right)$, то частное $\frac{z_2}{z_1}$ равно… 1) $\frac{5}{3}\left(cos\frac{\pi}{12} + i\,sin\frac{\pi}{12}\right)$ 2) $\frac{3}{5}\left(cos\frac{\pi}{12} + i\,sin\frac{\pi}{12}\right)$ 3) $\frac{5}{3}\left(cos\frac{\pi}{12} - i\,sin\frac{\pi}{12}\right)$ 4) $\frac{5}{3}\left(cos\frac{-\pi}{12} + i\,sin\frac{-\pi}{12}\right)$
3	Произведение матриц $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ равно… 1) $\begin{pmatrix} 22 & -42 & 50 \\ -22 & 30 & -43 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 22 & 42 & 50 \\ -22 & 30 & 43 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 22 & -42 & 50 \\ 22 & -30 & -43 \end{pmatrix}$
4	Вычисление определителя $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -10 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \end{vmatrix}$ приводит к ответу… 1) *3* 2) *180* 3) *100* 4) *5*
5	Сумма решений системы $\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 - x_3 + x_4 = -22 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 5 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -3 \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 = -21 \end{cases}$ равна…
6	Скалярное произведение $(3\bar{a} - 4\bar{b}) \cdot (\bar{a} + \bar{b})$, где $\bar{a} \perp \bar{b}$ и $\lvert a \rvert = \lvert b \rvert = \sqrt{3}$ равно… 1) *-1* 2) $-\frac{1}{2}$ 3) *-3* 4) *1*
7	Уравнение прямой, проходящей через точку *C (3, -1*) параллельно прямой $2x – 3y = 9$,имеет вид… 1) $2x – 3y + 9 = 0$ 2) $2x – 3y -15 = 0$ 3) $3x – 2y - 9 = 0$
8	Уравнение директрисы параболы $y = -2x^2 + 8x - 5$ имеет вид 1) $y = 3\frac{1}{8}$ 2) $y = 2\frac{7}{8}$ 3) $y = 2$ 4) $y = 8\frac{2}{7}$

9	Даны точка *M(1;-1;2)* и плоскость $2x+3y-5z=0$ Тогда верно утверждение, что… 1) *точка М принадлежит плоскости* *2) точка М совпадает с нормальным вектором* *3) точка М не принадлежит плоскости* *4) плоскость проходит через точку М и начало координат*
10	Определите тип поверхности, определяемой уравнением $x^2 - 4x - 4y + z^2 - 6z - 10 = 0$, и координаты центра симметрии

Вариант 10

Номер задания	Тестовое задание
1	Числа $x_1 = 4 + 5i$ и $x_2 = 4 - 5i$ принадлежат множеству… 1) $\{ x : x^2 - 4x + 11 = 0 \}$ 2) $\{ x : x^2 - 8x + 19 = 0 \}$ 3) $\{ x : x^2 - 29x - 4 = 0 \}$ 4) $\{ x : x^2 - 8x - 41 = 0\}$
2	Если $z_1 = 5\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ и $z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, то произведение $z_1 \cdot z_2$ равно… 1) $15\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$ 2) $8\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$ 3) $2\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$ 4) $15\left(\cos\frac{-7\pi}{12} + i\sin\frac{-7\pi}{12}\right)$
3	Произведение матриц $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ равно… 1) $\begin{pmatrix} -15 & -4 & 31 \\ -2 & 15 & 11 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 4 \\ -11 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} -13 & -4 & 31 \\ -2 & 1 & 11 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
4	Вычисление определителя $\begin{vmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 3 & -30 & -9 \end{vmatrix}$ приводит к ответу… 1) *360* 2) - *360* 3) *10* 4) *5*
5	Сумма решений системы $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = -3 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 9 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 9 \end{cases}$ равна…

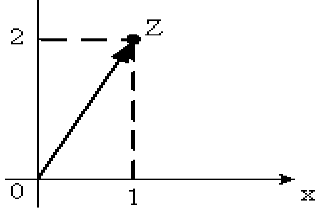
6	Даны три вектора $\vec{a}=(1;2;3)$, $\vec{b}=(2;4;6)$ $\vec{c}=(2;-1;0)$. Тогда верны утверждения … 1) $\vec{a}\perp\vec{b}$ 2) $\vec{b}\perp\vec{c}$ 3) $\vec{a}\perp\vec{c}$ 4) $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ *Укажите не менее 2 правильных ответов*
7	Уравнение прямой, проходящей через точку С (*1*, *-3*) параллельно прямой $x - 3y = 9$ имеет вид… 1) $x - 3y + 15 = 0$ 2) $3x + 2y - 3 = 0$ 3) $x - 3y - 10 = 0$
8	Каноническое уравнение кривой $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$ определяет… 1*) окружность* *2) эллипс* *3) параболу* *4) гиперболу* с центром в точке…
9	Уравнение «в отрезках» для плоскости $2x - y - 3z - 6 = 0$ имеет вид… 1) $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}-\frac{z}{2}=1$ 2) $\frac{x}{3}-\frac{y}{6}-\frac{z}{2}=1$ 3) $\frac{x}{6}-\frac{y}{6}-\frac{z}{6}=1$ 4) $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{2}=1$
10	Определите тип поверхности, определяемой уравнением $x^2 - 2x + 2y^2 - 4y + z - 9 = 0$, и координаты центра симметрии

Вариант 11

Номер задания	Тестовое задание
1	Числа $x_1 = 2 + 6i$ *и* $x_2 = 2 - 6i$ принадлежат множеству … 1) $\{ x : x^2 - 4x + 41 = 0 \}$ 2) $\{ x : x^2 - 4x + 40 = 0 \}$ 3) $\{ x : x^2 - 29x - 4 = 0 \}$ 4) $\{ x : x^2 + 4x - 21 = 0 \}$
2	Комплексное число $1+i$ можно представить в виде … 1) $\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ 2) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ 3) $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ 4) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ *Указать не менее двух правильных ответов.*
3	Произведение матриц $\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ 4 & 0 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4 & 3\\ -2 & 0 & 1\\ 3 & -2 & 2\end{pmatrix}$ равно… 1) $\begin{pmatrix}-1 & -14 & 4\\ 49 & 36 & 49\end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix}-1 & -14 & 41\\ -49 & 36 & 49\end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix}-1 & -14 & 41\\ 49 & -36 & 49\end{pmatrix}$

4	Вычисление определителя $\begin{vmatrix} 10 & -10 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ 8 & -10 & -3 \end{vmatrix}$ приводит к ответу… 1) *3* 2) *0* 3) *10* 4) *5*
5	Сумма решений системы $\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 9 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 10 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 16 \end{cases}$ равна…
6	Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{2}{3}\pi$. Известно, что $\lvert\bar{a}\rvert = 1, \lvert\bar{b}\rvert = 2$. Тогда скалярное произведение векторов $(\bar{a} + 3\bar{b}) \cdot (3\bar{a} - \bar{b})$ равно … 1) *1* 2) *13* 3) *5* 4) *-17*
7	Периметр треугольника с вершинами в точках *A(0, -1), B(2,2)* и *C(3,0)* приближенно равен… 1) *9* 2) *8* 3)*16* 4) *21*
8	Каноническое уравнение кривой $4x^2 + 5y^2 - 8x + 20y + 4 = 0$ определяет… 1) *окружность 2) эллипс 3) параболу 4) гиперболу* с центром в точке
9	Написать уравнение прямой, проходящей через точку *A(2;0;5)* с направляющим вектором $\vec{a} = (-7; 2; 3)$ 1)$\frac{x+2}{-7} = \frac{y}{2} = \frac{z+5}{3}$; 2) $\frac{x-2}{-7} = \frac{y}{2} = \frac{z-5}{3}$; 3) $\frac{x+7}{2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{5}$; 4) $\frac{x-7}{2} = \frac{y+2}{0} = \frac{z+3}{5}$
10	Определите тип поверхности, определяемой уравнением $x^2 - 6x - 2y^2 - 4y - 10 = 0$, и координаты центра симметрии

Вариант 12

Номер задания	Тестовое задание
1	Решения уравнения $x^2 - 14x - 29 = 0$ принадлежат множествам … 1) Z, 2) R, 3) C, 4) Q, 5) N
2	Алгебраическая форма комплексного числа, изображенного на  рисунке, и его сопряженного имеет вид… 1) $z = 2 + i$, $\bar{z} = 2 - i$ 2) $z = 1 + 2i$, $\bar{z} = 1 - 2i$ 3) $z = -2 + 2i$, $\bar{z} = 2 - 2i$ 4) $z = 4 - i$, $\bar{z} = 4 + i$

3	Произведение матриц $\begin{pmatrix}1&0&3\\3&1&7\\2&1&8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&5&4\\-3&0&1\\5&6&-4\end{pmatrix}$ равно… 1) $\begin{pmatrix}18&23&-8\\41&57&-15\\40&52&-23\end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix}18&23&-8\\41&-45&15\\43&58&-23\end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix}18&23&-8\\41&57&-15\\43&58&-23\end{pmatrix}$
4	Вычисление определителя $\begin{vmatrix}-51&40&3\\2&-3&6\\-49&37&9\end{vmatrix}$ приводит к ответу… 1) *3* 2) *0* 3) *10* 4) *5*
5	Сумма решений системы $\begin{cases}3x_1+2x_2+7x_3+x_4=15\\-x_1+3x_2+x_3+2x_4=-6\\2x_1-2x_2+4x_3+x_4=6\\x_1-x_2+x_3+3x_4=-2\end{cases}$ равна…
6	Даны вершины треугольника: $A(2;1;0)$, $B(3;0;0)$, $C(1;-1;-2)$ Тогда внутренний угол при вершине C равен… 1) $\arccos\frac{9}{8}$ 2) $\arccos\frac{8}{9}$ 3) $\arccos\frac{4}{9}$ 4) $\arccos\frac{6}{9}$
7	Уравнение прямой, проходящей через точку С $(3, -4)$ перпендикулярно прямой $3x - 4y = 19$ имеет вид… 1) $-4x - 3y + 12 = 0$ 2) $3x + 4y - 3 = 0$ 3) $4x + 3y = 0$
8	Каноническое уравнение кривой $4x^2 + 5y^2 + 24x + 30y + 61 = 0$ определяет… 1) окружность 2) эллипс 3) параболу 4) гиперболу с центром в точке…
9	Плоскости $4x-3y+2z-1=0$, $8x+ay+bz-5=0$ параллельны при… 1) $a = -6$, $b = 4$ 2) $a = 6$, $b = -4$ 3) $a = 5$, $b = 4$ 4) $a = 1$, $b = 5$
10	Определите тип поверхности, определяемой уравнением $x^2 - 4x + 2y^2 - 4y - 1 = 0$, и координаты центра симметрии

Вариант 13

Номер задания	Тестовое задание
1	Решения уравнения $x^2 - 4x - 2 = 0$ принадлежат множествам … 1) $\mathbf{Z}$, 2) □ , 3) □ , 4) □ , 5) □
2	Расположите комплексные числа в порядке возрастания их модулей 1) i 2) $-2+i$ 3) $1-i$ 4) $1-3i$
3	Произведение матриц $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ равно… 1) $\begin{pmatrix} -2 & -9 & -1 \\ -15 & 20 & -5 \\ -20 & 10 & -10 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} -2 & -9 & -11 \\ 15 & -20 & 5 \\ -20 & 10 & -10 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} -2 & -9 & -11 \\ -15 & 20 & 5 \\ -20 & 10 & -10 \end{pmatrix}$
4	Вычисление определителя $\begin{vmatrix} -1 & 20 & 3 \\ -2 & 0 & 6 \\ -3 & 20 & 9 \end{vmatrix}$ приводит к ответу… 1) *3* 2) *0* 3) *10* 4) *5*
5	Сумма решений системы $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4 = 7 \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 - 3x_4 = -2 \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = -4 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$ равна…
6	Даны вершины треугольника $A(2;1;0)$, $B(3;0;0)$, $C(1;-1;-2)$. Тогда $пр_{\overline{CA}}\overline{CB}$ равна… 1) $\frac{9}{8}$ 2) $\frac{8}{9}$ 3) $\frac{8}{3}$ 4) *2*
7	Уравнение прямой, проходящей через точку С (*3*, *-13*) параллельно прямой $2x - 3y = 9$ имеет вид… 1) $3x - 3y + 15 = 0$ 2) $2x + 3y - 3 = 0$ 3) $2x - 3y - 45 = 0$
8	Каноническое уравнение кривой $4x^2 - 5y^2 - 8x + 20y + 4 = 0$ определяет… 1*) окружность* *2) эллипс* *3) параболу* *4) гиперболу* с центром в точке…
9	Угол между плоскостями $2x - 3y + z = 9$ и $3x + 2y = 8$ равен… 1) 0^0 2) π 3) $\frac{\pi}{2}$ 4) $\frac{\pi}{4}$
10	Определите тип поверхности, определяемой уравнением $2y^2 - 4y + z^2 - 6z - 10 = 0$, и координаты центра симметрии

Вариант 14

Номер задания	Тестовое задание
1	Решения уравнения $x^2 - 14x - 9 = 0$ принадлежат множествам … 1) Z, 2) R, 3) C, 4) Q, 5) N
2	Установите соответствие между комплексными числами и сопряженными к ним 1. $2-3i$ A) $-3+2i$ 2. $-2+3i$ B) $-2-3i$ 3. $3-2i$ C) $2+3i$ 4. $-3-2i$ D) $3+2i$
3	Произведение матриц $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ равно… 1) $\begin{pmatrix} -20 & 20 \\ 69 & -27 \\ 96 & -88 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 24 & 5 \\ 39 & -19 \\ 96 & -86 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 25 & 5 \\ 39 & -17 \\ 96 & -88 \end{pmatrix}$
4	Вычисление определителя $\begin{vmatrix} 1 & -20 & 13 \\ -2 & 10 & 16 \\ -1 & -10 & 29 \end{vmatrix}$ приводит к ответу… 1) *3* 2) *10* 3) *0* 4) *5*
5	Сумма решений системы $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 17 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 7 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 = 13 \end{cases}$ равна…
6	Векторное произведение векторов $\vec{a} \times \vec{b} = (-2;0;3)$. Тогда координаты вектора $\vec{c} = -3\vec{b} \times 2\vec{a}$ равны… 1) *(-12; 0; 18)* 2) *(12; 0; -18)* 3) *(6; 0; 9)* 4) *(-4; 0; 6)*
7	Определите, при каких значениях параметров *а* и *в* прямые $(a-1)x - 2y - 1 = 0$ $6x - 4y + b = 0$ пересекаются. В ответе укажите не менее двух правильных ответов 1) $a = 4, b = 1$ 2) $a = 2, b = 4$ 3) $a = -2, b = 3$ 4) $a = 4, b = 5$
8	Каноническое уравнение кривой $4x^2 + 5y^2 - 8x + 20y + 4 = 0$ определяет… 1*) окружность* *2) эллипс* *3) параболу* *4) гиперболу* с центром в точке…

9	Даны точки $A=(-5;0;4)$ и $B=(-2;3;-1)$. Тогда уравнение плоскости, проходящей через точку B, перпендикулярно вектору $\overline{AB}$ имеет вид … 1) $3x+3y-5z+35=0$ 2) $3x+3y-5z-8=0$ 3) $3x+3y-5z+8=0$ 4) $3x+3y-5z-35=0$
10	Определите тип поверхности, определяемой уравнением $x^2 - 4x + 2y^2 - 4y + 10 = 0$, и координаты центра симметрии

Вариант 15

Номер задания	Тестовое задание
1	Решения уравнения $x^2 - 14x = 0$ принадлежат множеству … 1) Z, 2) R, 3) C, 4) Q, 5) N
2	Дано комплексное число $z=1+\sqrt{3}i$. Установите соответствие между операциями над данным числом и результатами их выполнения. 1. $z\cdot\overline{z}$ A) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ B) 2 2. $\frac{\overline{z}}{\lvert z\rvert}$ C) $2\sqrt{3}i$ 3. $z+\overline{z}$ D) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 4. $z-\overline{z}$ E) 4
3	Произведение матриц $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ равно… 1) $\begin{pmatrix} -33 & -11 & 3 \\ 4 & 27 & -19 \\ -5 & -20 & 12 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} -33 & -11 & 3 \\ 4 & -27 & -39 \\ -5 & 20 & 12 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} -2 & -9 & -11 \\ -15 & 20 & 5 \\ -20 & 10 & -10 \end{pmatrix}$
4	Вычисление определителя $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & 6 & 6 \\ 3 & 10 & -1 \end{vmatrix}$ приводит к ответу… 1) 0 2) 10 3) 10 4) 5
5	Сумма решений системы $\begin{cases} 3x_1-2x_2-x_3+x_4=12 \\ -x_1+3x_2+2x_3-2x_4=-8 \\ x_1+2x_2+2x_3+3x_4=9 \\ -4x_1+2x_2+x_3-x_4=-15 \end{cases}$ равна…

6	Модули векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно равны 5 и 2 , а угол между ними равен 30^0 . Тогда $\lvert \vec{a}\times\vec{b} \rvert$ равен… 1) $5\sqrt{3}$ 2) $-5\sqrt{3}$ 3) $5/2$ 4) 5
7	Прямые $(a-1)x-2y-1=0$ и $6x-4y+b=0$ параллельны, если параметры a и $в$ соответственно равны… 1) $a = 4, b = 2$ 2) $a = 4, \quad b = -2$ 3) $a=3, \ b=-2$ 4) $a= -4, \ b=2$
8	Каноническое уравнение кривой $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 61 = 0$ определяет… 1) *окружность* 2) *эллипс* 3) *параболу* 4) *гиперболу* с центром в точке…
9	Расстояние от точки $A=(1;-2;-1)$ до плоскости $6x+3y-2z=0$ равно … 1) 7 2) 2 3) $\frac{2}{49}$ 4) $\frac{2}{7}$
10	Определите тип поверхности, определяемой уравнением $x^2-4x+z^2-4z+7=0$, и координаты центра симметрии.

Вариант 16

Номер задания	Тестовое задание
1	Решения уравнения $x^3 - 4x = 0$ принадлежат множествам … 1) Z, 2) R, 3) C, 4) Q, 5) N
2	Значение выражения $\frac{5z_1-4z_2}{z_1}$, где $z_1=2-3i,\ z_2=1-i$ и его модуль соответственно равны... 1) $z=\frac{45}{13}-\frac{4}{13}i$, $\lvert z\rvert=3,475$ 2) $z=\frac{44}{13}+\frac{4}{13}i$, $\lvert z\rvert=4,475$ 3) $z=\frac{5}{3}-\frac{4}{3}i$, $\lvert z\rvert=5,975$ 4) $z=\frac{45}{13}+\frac{4}{13}i$, $\lvert z\rvert=3,475$
3	Произведение матриц $\begin{pmatrix}5&4&2\\1&2&4\\3&0&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5&4&-5\\3&-7&1\\1&2&2\end{pmatrix}$ равно… 1) $\begin{pmatrix}39&-4&-17\\15&-2&5\\20&22&-5\end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix}39&-4&-17\\15&2&-5\\20&20&-5\end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix}39&-4&-18\\15&-2&6\\21&22&-5\end{pmatrix}$

4	Вычисление определителя $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ 3 & -15 & 9 \end{vmatrix}$ приводит к ответу… 1) *3* 2) *11* 3) *0* 4) *5*
5	Сумма решений системы $\begin{cases} -5x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 = -14 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 11 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 8 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 4 \end{cases}$ равна…
6	В результате упрощения выражение $2\bar{i}\left(\bar{j} \times \bar{k}\right) + 3\bar{j}\left(\bar{i} \times \bar{k}\right) + 4\bar{k}\left(\bar{i} \times \bar{j}\right)$ примет вид … 1) $\bar{i} \times \bar{j} \times \bar{k}$ 2) 3 3) *0* 4) $2\bar{i} \times 3\bar{j} \times 4\bar{k}$
7	Определите, при каких значениях параметров *а* и *в* прямые $(a-1)x - 2y - 1 = 0$ и $6x - 4y + b = 0$ совпадают 1) *a = 4, b = -2* 2) *a = -2, b = 4* 3)*a =5 , b= -4* 4) *a = 3, b =5*
8	Каноническое уравнение кривой $9x^2 + 16y^2 - 18x - 64y - 64 = 0$ определяет… 1*) окружность* 2*) эллипс* 3*) параболу* 4*) гиперболу* с центром в точке…
9	Прямые $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{2}$ и $\frac{x+1}{2} = \frac{y-11}{4} = \frac{z-3}{4}$ в пространстве…. 1) *пересекаются* 2) *параллельны* 3) *скрещиваются* 4) *перпендикулярны*
10	Определите тип поверхности, определяемой уравнением $x^2 + 2x + y^2 - 4y - z^2 - 6z - 10 = 0$, и координаты центра симметрии

Вариант 17

Номер задания	Тестовое задание
1	Решения уравнения $x^3 + 16x = 0$ принадлежат множествам… 1) Z, 2) R, 3) C, 4) Q, 5) N
2	Если $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 1 - 7i$, то значение выражения $(z_1 + 2z_2)^2$ и его модуля соответственно равны… 1) $z = 137 - 88i$, $\lvert z \rvert = 162{,}8$ 2) $z = -105 - 88i$, $\lvert z \rvert = 137$ 3) $z = 137 + 88i$, $\lvert z \rvert = 162{,}8$ 4) $z = 105 - 88i$, $\lvert z \rvert = 137$
3	Произведение матриц $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ равно… 1) $\begin{pmatrix} 51 & -42 & 63 \\ -18 & 16 & -22 \\ 7 & -4 & 9 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 51 & -42 & 63 \\ -18 & -16 & 22 \\ 7 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 53 & -42 & 63 \\ -18 & -16 & 22 \\ 7 & 4 & 9 \end{pmatrix}$

4	Определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & \alpha \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix}$ равен нулю при α равном … 1) *2* 2) *3* 3) *-2* 4) *9*
5	Сумма решений системы $\begin{cases} 4x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = 15 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -5 \\ -2x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 19 \end{cases}$ равна…
6	Момент силы $\overline{F}(2;-4;5)$ приложенной к точке $O(0;\,2;\,1)$, относительно точки $A(-1;\,2;3)$ есть вектор $\overline{M} = \overline{OA} \times \overline{F}$. Тогда вектор $\overline{M}$ имеет вид … 1) $\overline{M} = (8;9;4)$ 2) $\overline{M} = (-8;-9;-4)$ 3) $\overline{M} = (-8;0;-9)$ 4) $\overline{M} = (7;8;4)$
7	Прямые $(a-1)x-2y-1=0$ *и* $6x-4y+b=0$ перпендикулярны, если параметры *а* и *в* соответственно равны… 1) $a=-\frac{1}{3}$, *b = 1* 2) *a = 2, b =2* 3) *a = 0,5 , b = 4* 4) *a = 0,4 ,b=9*
8	Каноническое уравнение кривой $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 16 = 0$ определяет… *1) окружность 2) эллипс 3) параболу 4) гиперболу* с центром в точке…
9	Уравнение плоскости, проходящей через точки *A (2, 1, 4), B (-1, 5, 2), C (3, 3, 2)* , запишется в виде… 1)$2x + 4y + 5z - 28 = 0$ 2)$2x + 4y + 5z + 28=0$ 3) $-2x +4y +5z - 28 = 0$
10	Определите тип поверхности, определяемой уравнением $z^2 - 6z = 10x - 9$, и координаты центра симметрии

Вариант 18

Номер задания	Тестовое задание
1	Решения уравнения $x^4 - 14x^2 - 2 = 0$ принадлежат множеству … 1) Z, 2) R, 3) C, 4) Q, 5) N
2	Вычисление выражения $z = (2+3i)^3$ и его модуля приводит к ответу... 1) $z=46-9i$ $\lvert z\rvert = 46{,}82$ 2) $z=-46-9i$ $\lvert z\rvert = 46{,}82$ 3) $z=16-9i$ $\lvert z\rvert = 18{,}36$ 4) $z=-46+9i$ $\lvert z\rvert = 46{,}82$

3	Произведение матриц $\begin{pmatrix} 8 & -1 & 1 \\ 5 & -5 & -1 \\ 10 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ равно… 1) $\begin{pmatrix} 20 & 14 & 41 \\ -1 & 0 & 18 \\ 41 & 26 & 57 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 22 & 14 & 41 \\ -1 & 10 & 18 \\ 41 & 26 & 57 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 22 & 14 & 41 \\ -1 & 0 & 18 \\ 41 & 26 & 57 \end{pmatrix}$
4	Определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & \alpha \\ 4 & 8 & 0 \end{vmatrix}$ равен нулю при α равном … 1) *2* 2) *0* 3) *-2* 4) *6*
5	Сумма решений системы $\begin{cases} -3x_1 + 7x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 14 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$ равна…
6	Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} = (8; 4; 1)$ и $\bar{b} = (2; -2; 1)$ равна … 1) $2\sqrt{18}$ 2) $18\sqrt{2}$ 3) $6\sqrt{2}$ 4) $2\sqrt{6}$
7	Прямые **L_1**: *(a – 3)x + 2y + 4 = 0* и **L_2**: *- 4x + 6y + в = 0* пересекаются, если «*a*» и «*в*» соответственно равны… 1) *a=5/3, b=1/3* 2) *a= 3/2 b=4* 3) *a = 5/3, b = 4/3* *4) a =1, b = 3*
8	Каноническое уравнение кривой $4x^2 - 3y^2 - 64x - 54y = 0$ определяет… *1) окружность* 2*) эллипс* 3*) параболу* 4*) гиперболу* с центром в точке…
9	Прямые $\frac{x-3}{10} = \frac{y+2}{-8} = \frac{z-1}{-4}$ и $\frac{x-2}{-5} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-5}{2}$ в пространстве... 1) *совпадают* 2*) параллельны* 3*) перпендикулярны* 4*) расположены под углом 30^0*
10	Определите тип поверхности, определяемой уравнением $x^2 - 4x + 2y^2 - 4y - 6z + 6 = 0$

Вариант 19

Номер задания	Тестовое задание
1	Решения уравнения $x^4 - 4x^2 = 0$ принадлежат множествам.. 1) Z, 2) R, 3) C, 4) Q, 5) N
2	Вычисление выражения $z_1 + \dfrac{5z_2}{z_3}$, если $z_1 = 2+3i$, $z_2 = 3-5i$, $z_3 = 2-3i$, приводит к ответу… 1) $z = \dfrac{134+34i}{13}$ 2) $z = \dfrac{131+34i}{6}$ 3) $z = \dfrac{-131+34i}{13}$ 4) $z = \dfrac{131+34i}{13}$
3	Произведение матриц $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ равно… 1) $\begin{pmatrix} -16 \\ 50 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 16 & 50 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 50 & 0 \end{pmatrix}$
4	Определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & \alpha \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix}$ отличен от нуля при α, равном … 1) *2* 2) *3* 3) *-2* 4) *6*
5	Сумма решений системы $\begin{cases} 2x_1 - 9x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 19 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -3 \end{cases}$ равна…
6	Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a} = (1; -2; 1)$, $\bar{b} = (3; 2; 1)$ и $\bar{c} = (1; 0; -1)$ равен … . 1) *10* 2) *20* ***3)*** *13* 4) *12*
7	Прямые $(a-3)x + 2y + 4 = 0$ и $-4x + 6y + b = 0$ параллельны, если « *a*» и «*b*» соответственно равны… 1) $a = 5/3$, $b = 0$ 2) $a = 2/3$, $b = 7$ 3) $a = 0$, $b = 4$ 4) $a = 1$, $b = 8$
8	Каноническое уравнение кривой $6x^2 - 24x - 54y = 0$ определяет… *1) окружность* *2) эллипс* *3) параболу* *4) гиперболу* с центром в точке…

9	Уравнение плоскости, проходящей через точки *A(4,5,-3)*, *B(6,5,-4), C(3,2,0)* , запишется в виде… 1) *3x -5y - 6z =2* 2) *-3x -5y + 6z =2* 3) *3x +5y+ 6z - =19*
10	Определите тип поверхности, определяемой уравнением $x^2 - 4x + z^2 - 2z + 4 = 0$, и координаты центра симметрии

Вариант 20

Номер задания	Тестовое задание
1	Решения уравнения $x^4 - 25x^2 + 1 = 0$ принадлежат множествам… 1) Z, 2) R, 3) C, 4) Q, 5) N
2	Значение выражения z^2, где z - комплексное число, у которого модуль $\lvert z \rvert = 5$ и аргумент $\varphi = 30^0$, в алгебраической форме равно… 1) $z^2 = 8 + 8\sqrt{3}i$ 2) $z^2 = 16 + 4\sqrt{3}i$, 3) $z^2 = 16 - 4\sqrt{3}i$ 4) $z = 8 - 4\sqrt{3}i$
3	Произведение матриц $\begin{pmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 1 & -8 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ равно… 1) $\begin{pmatrix} -10 & -11 & -26 \\ -10 & -24 & -26 \\ 2 & 15 & -29 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} -10 & -11 & -26 \\ -10 & -26 & -21 \\ 23 & 15 & -29 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} -10 & 11 & -26 \\ -14 & -28 & -26 \\ 2 & 15 & 29 \end{pmatrix}$
4	Определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & \alpha \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix}$ отличен от нуля при α , не равном… 1) *2* 2) *3* 3) *-2* 4) *6*
5	Сумма решений системы $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -4 \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = -21 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = -8 \end{cases}$ равна…
6	Векторы $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j} + \lambda\bar{k}$, $\bar{b} = (0; 1; 0)$ и $\bar{c} = (3; 0; 1)$ компланарны. Тогда λ равно … 1) $-\frac{1}{3}$ 2) $\frac{2}{3}$ 3) $\frac{1}{3}$ 4) *3*
7	Прямые *(a – 3)x + 2y + 4 = 0* и *- 4x + 6y + в = 0* совпадают, если а и в соответственно равны... 1) *a = 5/3, b = 12* 2) *a = 4/3 b = 12* 3) *a = -5/3 ,b = 3* 4) *a =2 , b=5*

8	Каноническое уравнение кривой $x^2 - 9y^2 - 4x - 54y - 76 = 0$ определяет… 1*) окружность* 2) *эллипс* 3) *параболу* 4) *гиперболу* с центром в точке…
9	Вектор, параллельный плоскости *3x +5y+ 6z +2 =0,* имеет координаты… 1) *(3,5,6)* 2) *(0,0,2)* 3) *(-3,-5, 0)* 4) *(5,-3,0)*
10	Определите тип поверхности, определяемой уравнением $2y^2 - 4y + z^2 - 6z - 12 = 0$, и координаты центра симметрии

Вариант 21

Номер задания	Тестовое задание
1	Решения уравнения $x^4 - 2x^2 - 1 = 0$ принадлежат множеству 1) Z, 2) R, 3) C, 4) Q, 5) N
2	Значения выражений $z_1 \cdot z_2$ и $\frac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 5(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ $z_2 = 3(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$, в показательной форме соответственно равны… 1) $z_1 z_2 = 15e^{\frac{7\pi}{12}i}$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{5}{3}e^{\frac{-\pi}{12}}$ 2) $z_1 z_2 = 8e^{\frac{7\pi}{12}}$, $\frac{z_1}{z_2} = 2e^{\frac{-\pi}{12}}$ 3) $z_1 z_2 = 15e^{\frac{7\pi}{12}i}$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{5}{3}e^{\frac{-\pi}{12}i}$ 4) $z_1 \cdot z_2 = 8e^{\pi}$, $\frac{z_1}{z_2} = 8e^{\pi}$
3	Произведение матриц $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ равно… 1) $\begin{pmatrix} 18 & 24 & 75 \\ 12 & 16 & 50 \\ 24 & 32 & 100 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 18 & 24 & 35 \\ 12 & 106 & 50 \\ 24 & 32 & 101 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 18 & 24 & 0 \\ 12 & 16 & 50 \\ 21 & 32 & 10 \end{pmatrix}$
4	Определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & \alpha \\ 8 & -16 & 2 \end{vmatrix}$ отличен от нуля при α не равном 1*) 0,5* 2) *3* 3) *-2* 4) *6*
5	Сумма решений системы $\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 + x_4 = -3 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -13 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$ равна…

6	Векторы $\vec{a}(1,2,\lambda)$, $\bar{b}=(0;1;0)$ и $\bar{c}=(3;0;1)$ компланарны. Тогда λ равно … 1) $-\frac{1}{3}$ 2) $\frac{2}{3}$ 3) $\frac{1}{3}$ 4) 3
7	Прямые $(a-3)x+2y+4=0$ и $-4x+6y+в=0$ перпендикулярны, если параметры «*а*» и «в» соответственно равны... 1) $a=6$, $в=7$ 2) $a=-2$, $в=0$ 3) $a=4$, $в=9$ 4) $a=-1$, $в=4$
8	Каноническое уравнение кривой $x^2-4x-4y-76=0$ определяет 1) *окружность* 2) *эллипс* 3) *параболу* 4) *гиперболу* с центром в точке…
9	Параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $A=(-1;3;0)$ параллельно вектору $\bar{s}=(2;-3;1)$, имеют вид… 1) $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=-3t+3 \\ z=t \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=-t-2 \\ y=3t+3 \\ z=-1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x=-t+2 \\ y=3t-3 \\ z=1 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x=2t+1 \\ y=-3t-3 \\ z=-t \end{cases}$
10	Определите тип поверхности, определяемой уравнением $2y^2-4y+z^2-6z-1=0$, и координаты центра симметрии

Вариант 22

Номер задания	Тестовое задание
1	Решения уравнения $x^4-2x^2+1=0$ принадлежат множествам 1) $\mathbf{Z}$, 2) □ , 3) □ , 4) □ , 5) □
2	Если $z_1=5(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$ и $z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$, то z_1+z_2 в показательной форме соответственно равно … 1) $z_1+z_2=6e^{\frac{\pi}{4}}$ 2) $z_1+z_2=5e^{\frac{\pi}{4}i}$ 3) $z_1+z_2=6e^{\frac{\pi}{4}i}$ 4)$4z_1+z_2=2{,}5e^{\frac{\pi}{4}i}$
3	Произведение матриц $\begin{pmatrix} 8 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -7 & -6 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ равно… 1) $\begin{pmatrix} 47 & -47 & -55 \\ 19 & 6 & -5 \\ 7 & 5 & -7 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 47 & -47 & -55 \\ 19 & 6 & -5 \\ 7 & 5 & -7 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 47 & -47 & -55 \\ 19 & 6 & -5 \\ 7 & -5 & -7 \end{pmatrix}$

4	Определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & \alpha \\ 3 & 6 & 3+\alpha \end{vmatrix}$ отличен от нуля при α не равном 1) *2* 2) *3* 3) *0* 4) *6*
5	Сумма решений системы $\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 = -19 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 12 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = -3 \\ -4x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -2 \end{cases}$ равна…
6	В результате упрощения выражение $2\bar{i}\left(\bar{j} \times \bar{k}\right) + 3\bar{j}\left(\bar{i} \times \bar{k}\right) + 4\bar{k}\left(\bar{i} \times \bar{j}\right)$ примет вид … 1) $\bar{i} \times \bar{j} \times \bar{k}$ 2) *3* 3) *0* 4) $2\bar{i} \times 3\bar{j} \times 4\bar{k}$
7	Даны 3 вершины треугольника A (0,1), B (-2, 3), C(2, 0). Тогда периметр этого треугольника равен… 1) *2* 2) *5* 3) *7* 4) $5+3\sqrt{5}$
8	Каноническое уравнение кривой *16x*^{2} *– 64x – 54y – 161=0* определяет… 1) *окружность* 2) *эллипс* 3) *параболу* 4) *гиперболу* с центром в точке…
9	Вектор, перпендикулярный прямой $\frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-9}{-1}$, имеет координаты… 1) *(2, -3, 9)* 2) *(4, 0, 12)* 3) *(2, - 3, 9)* 4) *(3, 0, 3)*
10	Определите тип поверхности, определяемой уравнением $x + 2y^2 - 4y - 10 = 0$, и координаты центра симметрии

Вариант 23

Номер задания	Тестовое задание
1	Решения уравнения $\frac{x^2+6x+9}{2x-1} = 0$ принадлежат множествам... 1) Z, 2) R, 3) C, 4) Q, 5) N
2	Значение выражения $\frac{z_1 - 2z_2}{z_1 \cdot \bar{z}_1}$, если $z_1 = 2+3i$, $z_2 = 1-7i$, равно… 1) $\frac{17}{11}i$, 2) $-\frac{17}{7}i$ 3) $\frac{2-3i}{11}$ 4) $\frac{17i}{13}$
3	Произведение матриц $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ равно… 1) $\begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 24 & 42 \\ 73 & 71 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} -3 & -9 \\ 24 & 42 \\ 77 & 71 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} -3 & -9 \\ 34 & 32 \\ 77 & 71 \end{pmatrix}$

4	Определитель $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & \alpha \\ 1 & 6 & 4 \end{vmatrix}$ отличен от нуля при α не равно 1) *1* 2) *3* 3) *-2* 4) *6*
5	Сумма решений системы $\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 - x_4 = 13 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 = -2 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 10 \\ -2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 5 \end{cases}$ равна ...
6	Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{5}{6}\pi$. Известно, что $\lvert\bar{a}\rvert = 2, \lvert\bar{b}\rvert = 6$. Тогда $\lvert\bar{a} \times \bar{b}\rvert$ равен … 1) *6* 2) *3* 3) *0* 4) *- 4*
7	Даны 3 вершины треугольника: *A (0,1), B (-2, 3), C(2, 0)*. Тогда косинус угла *BAC* равен... 1) *0,2* 2) *– 0,2* 3) *0,25* 4) *0,33*
8	Каноническое уравнение кривой $6x^2 - 9y^2 - 36x - 18y - 161 = 0$ определяет… 1) *окружность* 2) *эллипс* 3) *параболу* 4) *гиперболу* с центром в точке…
9	Величина угла между прямой $\frac{x-3}{2} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+7}{-2}$ и плоскостью $4x - 2y - 2z - 3 = 0$ составляет … градусов. 1) *30* 2) *50* 3) *60* 4) *90*
10	Определите тип поверхности, определяемой уравнением $y^2 - 4y - 6z + 2 = 0$, и координаты центра симметрии

Вариант 24

Номер задания	Тестовое задание
1	Решения уравнения $\frac{x^4 + 4x^2 + 9}{x - 1} = 0$ принадлежат множествам 1) Z, 2) R, 3) C, 4) Q, 5) N
2	Модуль выражения $\frac{z_2 - z_1}{2z_1 + z_2}$, если $z_1 = 2 - i$, $z_2 = 5i$, равен… 1) $\frac{\sqrt{40}}{5}$, *2)* $\frac{\sqrt{1576}}{25}$ *3)* $\frac{\sqrt{241}}{32}$ *4) 6*

3	Произведение матриц $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ равно… 1) $\begin{pmatrix} -1 & 8 & -1 \\ -2 & -23 & 22 \\ 2 & -18 & -27 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} -1 & 8 & -9 \\ -2 & -23 & 2 \\ 2 & -18 & -2 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} -1 & 8 & -1 \\ -2 & -27 & 22 \\ 2 & 18 & -27 \end{pmatrix}$
4	Определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & \alpha \\ 2 & -4 & 6 \end{vmatrix}$ отличен от нуля, если α не равно.. 1) *2* 2) *3* 3) *-2* 4) *6*
5	Сумма решений системы $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 5 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 13 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = -2 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$ равна ...
6	Модули векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно равны *5* и *2* , а угол между ними равен 30^0. Тогда $\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\|$ равен… 1) $5\sqrt{3}$ 2) $-5\sqrt{3}$ 3) *5/2* 4) *5*
7	Даны 3 вершины треугольника A (0,2), B (-2, 0), C(1, 0). Тогда косинус угла ABC равен … 1) *0,5* 2) $\sqrt{2}/2$ 3) *0* 4)*1*
8	Каноническое уравнение кривой $2x^2 + 9y^2 - 4x - 72y - 110 = 0$ определяет 1*) окружность* 2) *эллипс* 3) *параболу* 4) *гиперболу* с центром в точке
9	Уравнение плоскости, проходящей через точки *A(2,1,4), B(-1,5,2), C(3,3,2)* , запишется в виде… 1)$2x + 4y + 5z - 28 = 0$ 2)$2x + 4y + 5z + 28 = 0$ 3) $-2x + 4y + 5z - 28 = 0$
10	Определите тип поверхности, определяемой уравнением $x^2 - 14x - z + 99 = 0$, и координаты центра симметрии

Вариант 25

Номер задания	Тестовое задание
1	Решения уравнения $\frac{x^2 - 4x + 12}{3x - 1} = 0$ принадлежат множествам 1) Z, 2) R, 3) C, 4) Q, 5) N

2	Значения выражений $z_1 \cdot z_2$ и $\dfrac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 5(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$, $z_2 = 3(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$, в тригонометрической форме соответственно равны… 1) $z_1 z_2 = 15(\cos\frac{7}{12}\pi + i\sin\frac{7}{12}\pi)$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{5}{3}(\cos(-\frac{\pi}{12}) + i\sin(-\frac{\pi}{12}))$ 2) $z_1 z_2 = 15e^{\frac{7\pi}{12}i}$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{5}{3}e^{\frac{-\pi}{12}}$ 3) $z_1 z_2 = 8e^{\frac{7\pi}{12}}$, $\frac{z_1}{z_2} = 2e^{\frac{-\pi}{12}}$ 4) $z_1 z_2 = 15e^{\frac{7\pi}{12}i}$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{5}{3}e^{\frac{-\pi}{12}i}$
3	Произведение матриц $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ равно… 1) $\begin{pmatrix} -1 & 14 & 4 \\ 49 & 26 & 49 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} -1 & -14 & 4 \\ 39 & 36 & 39 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} -1 & -14 & 4 \\ 49 & 36 & 49 \end{pmatrix}$
4	Определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & \alpha \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ равен нулю если α равно… 1) *2* 2) *3* 3) *4* 4) *6*
5	Сумма решений системы $\begin{cases} -3x_1 - 5x_2 + 7x_3 + x_4 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 16 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 6 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$ равна…
6	Даны вершины треугольника $A(2;1;0)$, $B(3;0;0)$, $C(1;-1;-2)$. Тогда его площадь равна… 1) 3 2) 5 3) $3\sqrt{2}$ 4) $4\sqrt{5}$
7	Даны 3 вершины треугольника *A (0,1), B (-2, 3), C(2, 0)*. Тогда косинус угла *ABC* равен…
8	Каноническое уравнение кривой $9y^2 - 64x - 54y + 17 = 0$ определяет на плоскости … 1*) окружность* 2) *эллипс* 3) *параболу* 4) *гиперболу* с центром в точке…
9	Уравнение плоскости, проходящей через точки *A(2,1,4), B(-1,5,2), C(3,3,2)*, запишется в виде… 1) *2x+4y+5z - 28=0* 2*)2x+4y+5z + 28=0* 3*) -2x+4y+5z - 28=0* 4*)-4x + 8y -10z -56 = 0*
10	Определить тип поверхности, определяемой уравнением $y^2 - 4y + z^2 - 6z - 1 = 0$, и координаты центра симметрии.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Умение применять теоретические знания математики к решению прикладных инженерных, экономических, управленческих задач – один из важнейших результатов обучения. Осмысление информации, постановка конкретной задачи и выбор путей ее решения – навыки, необходимые каждому специалисту. Но прививать их, развивать логическое мышление необходимо постепенно: от простого к сложному.

В изучении математических дисциплин, каждая из которых сложна сама по себе, необходимо показать не только возможности применения математических знаний на практике, но и определить внутренние связи самой науки. Тогда сами собой отпадут вопросы о нужности и ненужности, достаточности и лишнести, постоянно возникающие у студентов.

Упражнения и задачи, предложенные в данном учебном пособии, соответствуют основным компетенциям, заложенным в основные образовательные программы и рабочие программы дисциплин: математика, линейная алгебра, аналитическая геометрия всех направлений обучения бакалавров:

ОК-5: владение культурой мышления, способностью к восприятию, обобщению и анализу информации, постановке цели и выбору путей ее достижения;

ОК-6: умение логически верно, аргументированно и ясно строить устную и письменную речь;

ОК-8: способность находить организационно-управленческие решения и готовность нести за них ответственность;

ОК-15: владение методами количественного анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования;

ПК-8: способность оценивать условия и последствия принимаемых организационно-управленческих решений.

Авторы надеются, что достаточное количество заданий разного уровня сложности: от простых упражнений до умения переводить текст на язык цифр, формул, алгоритмов, позволят выполнить задачи, поставленные образовательными стандартами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бугров, Я.С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – Т. 1. – М.: Дрофа, 2003 – 288 с.
2. Кудрявцев, В.А. Краткий курс высшей математики : учеб. пособие / В.А. Кудрявцев, Б.П. Демидович. – 7-е изд., испр. – М.: Наука, 1989. – 655 с.
3. Сборник задач по высшей математике с контрольными работами: учеб. пособие для студентов вузов / К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин [и др.]. – М.: Айрис Пресс, 2006. – 574 с.
4. Скиба, Л.П. Алгебра. Элементы аналитической геометрии. Ч. 1.: учеб. пособие / Л.П.Скиба; Краснояр гос. аграр. ун-т. – Красноярск, 2015. – 107 с.
5. Шипачев, В.С. Высшая математика / В.С. Шипачев. – М.: Высшая школа, 2008. – 479 с.

Алгебра. Элементы аналитической геометрии

Часть 2

Практикум

Скиба Людмила Петровна
Александрова Светлана Владимировна

Редактор Л.Э. Трибис

Санитарно-эпидемиологическое заключение № 24.49.04.953.П. 000381.09.03 от 25.09.2003 г.
Подписано в печать 6.06.2016. Формат 60х90/16. Бумага тип. № 1.
Печать – ризограф. Усл. печ. л. 5,75. Тираж 70 экз. Заказ № 172
Редакционно-издательский центр Красноярского государственного аграрного университета
660017, Красноярск, ул. Ленина, 117