Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Красноярский государственный аграрный университет»

Л.П. Скиба

Алгебра. Элементы аналитической геометрии
Часть I

Рекомендовано научно-методическим советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Красноярский государственный аграрный университет» для внутривузовского использования в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по всем направлениям подготовки

Красноярск 2015

ББК 512
С 42

Рецензенты:

*О.В. Пашковская, кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры ИЭС СибГАУ им. М.Ф. Решетнева*

*Л.В. Шатохина, кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математики СибГАУ им. М.Ф. Решетнева*

С 42 **Скиба, Л.П.**
Алгебра. Элементы аналитической геометрии. Ч.1: курс лекций / Л.П. Скиба; Краснояр. гос. аграр. ун-т. – Красноярск, 2015. – 108 с.

В издании рассматривается теория чисел, матриц, определителей, систем линейных уравнений, векторных пространств, аналитической геометрии. Теретический материал сопровождается примерами решения задач и графическими иллюстрациями.

Предназначено для студентов всех направлений подготовки, изучающих математику по программе, общей для инженерно-технических и экономических специальностей.

ББК 512

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Издание охватывает все разделы алгебры и аналитической геометрии, которые изучаются инженерно-техническими, экономическими и управленческими направлениями подготовки. Состоит из двух частей – курса лекций и практикума. В первой части, представленной курсом лекций, подробно рассмотрены основные типы задач по главным темам разделов: теория чисел, линейная и векторная алгебра, аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве. Важность этих тем состоит в использовании их во всем курсе не только высшей математики, но и физики, экономики и других естественно-научных дисциплинах.

Для изучения изложенного материала не требуется знаний больших, чем за курс средней школы.

Несмотря на огромный выбор литературы по математике, не удается найти единого учебного пособия, которое бы содержало и подробнейший разбор решения типовых задач, и достаточное теоретическое обоснование материала. Данное учебное пособие является попыткой решить эту задачу.

Пособие демонстрирует образцы решения задач, содержит вопросы для самопроверки и может быть использовано студентами заочной формы обучения для самостоятельного изучения соответствующего материала. Объем пособия позволяет использовать его как полноценную базу при подготовке к сдаче зачета и экзамена по линейной алгебре и аналитической геометрии. Изложение материала приближено к устному представлению курса лекций, что облегчает восприятие новых тем и позволяет студентам разобраться в тех вопросах, которые были пропущены во время занятий.

Нумерация формул, рисунков и таблиц идет внутри каждой темы, нумерация определений и примеров – внутри каждого подраздела.

Пособие будет полезно не только студентам, но и преподавателям при подготовке к лекциям и практическим занятиям.

I. АЛГЕБРА

1. Числа

1.1. Вещественные числа

Понятие числа относится к простейшим, первоначальным понятиям и не подлежит определению через другие, более простые понятия.

Числа могут быть объединены в разные группы.

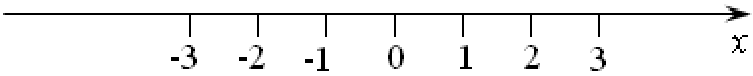
Множество чисел, употребляемых для счета предметов, называют натуральными и обозначаются символом $\mathbb{N}$ (N).

$$N = \{1; 2; 3; 4; \ldots, n, \ldots\}.$$

Множество целых отрицательных, положительных чисел и нуль (от слова «origo» – начало) обозначается $\mathbb{Z}$ (Z):

$$Z = \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \ldots, \pm n, \ldots\}.$$

Рене Декарт в XVII в. впервые изобразил их на числовой оси:



На эту ось укладывались и все числа, получающиеся при делении целых чисел и представленные либо целым числом, либо дробным, либо конечной или периодической десятичной дробью. Множество таких чисел называют рациональными, и обозначают буквой $\mathbb{Q}$ (Q).

Для того чтобы указать признак или свойство, присущее всем элементам, используется запись:

{x: x обладает свойством q(x)}.

Для множества рациональных чисел эта запись выглядит следующим образом:

$$Q = \left\{x : x = \frac{m}{n};\ n \in Z;\ m \in N\right\};$$

$$Q = \left\{\ldots -20, -19, -18\frac{1}{3}, \ldots -1, \ldots -\frac{1}{20} \ldots, 0, \ldots +0,333\ldots, \ldots +1, \ldots +20\frac{4}{7}, \ldots\right\}.$$

Ему принадлежат все решения линейных уравнений вида $a\,x = в$, $x = \frac{b}{a}$ и квадратных уравнений $ax^2 + bx + c = 0$, которые определяются по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

причем корень из дискриминанта является рациональным числом.

Для того чтобы уйти от последнего ограничения, ввели иррациональные числа вида $\pm\sqrt{3}$, $-\sqrt[5]{7}$, представляющие собой бесконечные непериодические дроби.

Все числа – натуральные *N*, целые *Z*, рациональные *Q* и иррациональные – называют множеством вещественных (действительных) и обозначают буквой $\mathbb{R}$ (R):

$$R = \left\{-10,..-6\frac{1}{4},..-\sqrt{7},..-\sqrt{2},...-1,..0,...\sqrt[5]{3},...7,6666...,...\right\}.$$

Факт принадлежности и непринадлежности элемента *x* множеству A записывается в виде:

$x \in A$ – *x* является элементом (принадлежит) множеству A;

$x \notin A$ – *x* не является элементом множества A.

В приведенном перечне видно, что каждое из последующих множеств является расширением предыдущего, так как в них наряду с вновь вводимыми элементами присутствуют и прежние.

Так, множество *Z* содержит в себе множество *N*, или, иными словами, *N* является подмножеством *Z* , т.е. его частью, так как все числа *N* = 1,2,3, ... $\in Z.$ Записывают этот факт следующим образом: $N \subset Z,$ читается следующим образом: «множество натуральных чисел *N* содержится во множестве целых чисел *Z*». Знаки «$\subset$» и «<» похожи не только внешне. Они имеют одинаковый смысл.

Выражение $R \supset Q$ означает, что множество $\boldsymbol{R}$ содержит в себе множество Q (покрывает собой, больше Q), поэтому Q является подмножеством $\boldsymbol{R}$ и знак «$\supset$» имеет тот же смысл что и «>». Так, $R \supset Q \supset Z \supset N.$

Пример. Дано множество $\boldsymbol{A}$. Найти элементы, из которых оно состоит, если $A=\left\{x\in R : x\cdot(x^2+x-20)=0\right\}$.

Решение

Исходя из условия задачи, из множества действительных чисел *R* нам следует найти и выделить только те числа, которые являются решением уравнения $x(x^2+x-20)=0$. Здесь

$$x_1=0,\qquad x_{2,3}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-20)}}{2\cdot1}=\left\{-5,4\right\}.$$

Все корни – действительные числа, поэтому $A=\left\{-5,0,4\right\}$.

Ответ: $A=\left\{-5,0,4\right\}$.

Над действительными числами определены 4 действия: сложение, вычитание, умножение и деление. Их результат, как правило, приводит к числу действительному. Исключение составляет дробь, у которой знаменатель равен нулю.

Операции сложения и произведения вещественных чисел обладают следующими свойствами:

1) переместительным (*коммутативным*):

$a + в = в + a;$

$a\cdot в = в\cdot a;$

2) сочетательным (*ассоциативным*):

$a + (в + c) = (a + в) + c;$

$a\cdot (в\cdot c) = (a\cdot в)\cdot c;$

3) распределительным *(дистрибутивным)*:

$(a + в)\cdot c = a\cdot c + в\cdot c.$

Нуль и *единица* занимают особое место в арифметике и продолжают эту традицию во многих разделах высшей математики. Их свойства записаны ниже:

1) $a + 0 = a;$

2) $a + (-a) = 0;$

3) $a\cdot 0 = 0;$

4) $a\cdot a^{-1} = 1.$

1.2. Комплексные числа

Рассмотрим квадратное уравнение $x^2 = -1$.Формальной записью его решения является выражение $x_{1,2} = \pm\sqrt{-1}$. Оно не входит в множество вещественных чисел, поэтому была введена мнимая единица $i = \sqrt{-1}$.

Определение 1. Число i называется мнимой единицей, если $i^2 = -1$.

Мнимое число с числовым коэффициентом записывается в виде $\pm yi$, где *y* – любое действительное число. Их множество называют множеством мнимых чисел $\pm yi \subset \mathrm{Im}$(от *imeqenary* – мнимый).

В таком случае решением уравнения $x^2 = -16$ являются мнимые числа $x_{1,2} = \pm\sqrt{-16} = \pm\sqrt{16}\cdot\sqrt{-1} = \pm 4i$, уравнения $x^2 + 81 = 0$ – числа $x_{1,2} = \pm\sqrt{-81} = \pm\sqrt{81}\cdot\sqrt{-1} = \pm 9i$ и т.д.

Так решаются неполные квадратные уравнения, у которых коэффициент *в* = 0. Используя тот же прием вычисления квадратного корня из отрицательного числа, можно находить решение любых уравнений.

Пример 1. Решить квадратное уравнение $x^2 - 2x + 5 = 0.$

Решение

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i.$$

Ответ: $x_1 = 1 + 2i$, $x_2 = 1 - 2i$.

Определение 2. Составное число $z = x + yi,$

где x и y – действительные числа, i – мнимая единица, называется **комплексным** числом.

Число x называется его действительной частью, число yi – мнимой частью.

Множество всех комплексных чисел обозначается символом *С*.

Такая форма записи называется ***алгебраической***. Она однозначно описывает комплексное число.

В зависимости от того, какими будут x и y, возможны следующие варианты:

1) если $x = 0$ и $y = 0$, то число $z = 0 + 0i = 0$ – равно нулю;

2) если $x = 0$ и $y \neq 0$, то число $z = 0 + yi = yi$ – чисто мнимое;

3) если $x \neq 0$ и $y = 0$, то число $z = x$ – действительное.

Таким образом, нуль, действительные и чисто мнимые числа являются частью множества комплексных чисел, т.е. $C \subset R$.

Определение 3. Два комплексных числа $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ называются равными, если в отдельности равны их действительные и мнимые части, т.е. если

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2\,,\ y_1\, i = y_2\, i.$$

Определение 4. Два числа $z = a + bi$ и $\overline{z} = a - bi$ называются комплексно сопряженными.

Так, если $z = 4 + 9i$, то ему сопряженное $\overline{z} = 4 - 9i$.

Для графического изображения действительных чисел достаточно одной оси. Комплексное число имеет два слагаемых, поэтому была введена вторая ось.

Объединение двух независимых осей – действительной и мнимой – создало комплексную плоскость *Z*, где на горизонтальной оси располагаются действительные числа x, на вертикальной – мнимые yi.

В этой плоскости комплексное число $z = x + yi$ изображается в виде вектора с началом в т. О (0,0) и концом в т. z (x, y) (рис. 1.1).

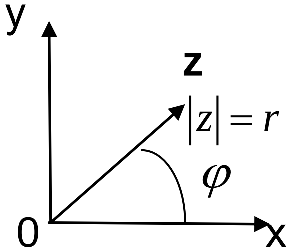


Рис. 1.1

Определение 5. Модулем комплексного числа $z = x + yi$ называется длина вектора $|z| = r$. Модуль по теореме Пифагора находится по формуле

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (1.1)$$

Определение 6. **Аргументом** комплексного числа $z = x + yi$ называется угол φ, который образует вектор с положительным направлением оси абсцисс.

Величина угла φ находится с помощью формул

$$\cos\varphi = \frac{x}{r} \quad \text{и} \quad \sin\varphi = \frac{y}{r}, \qquad (1.2)$$

откуда

$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi.$

Подставим в алгебраическую форму комплексного числа полученные значения модуля и аргумента, получим: $z = x + yi = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$

Определение 7. Выражение вида

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad (1.3)$$

называется тригонометрической формой комплексного числа.

Она неоднозначно описывает комплексное число, потому что система (1.2) имеет бесконечное множество решений $\varphi + 2\pi k$, отличающихся друг от друга на число, кратное 2π. Если $k = 0$, то получим *главное* значение аргумента, которое и будем называть аргументом комплексного числа.

Используя формулу Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$ любое комплексное число можно представить в виде $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}.$

Определение 8. Выражение вида

$$z = re^{i\varphi}, \qquad (1.4)$$

где e – число Эйлера, равное 2, 71828…, называется показательной формой комплексного числа.

Естественно, что одно и то же число можно записать в разных формах.

Пример 2. Записать комплексное число $z = 1 + i$ в двух формах:

а) в тригонометрической;

б) показательной.

Решение

Здесь x = 1 и y = 1, точка z лежит в первой четверти.

Для того чтобы перейти к форме (1.4), найдем модуль r и аргумент φ по формулам (1.2)-(1.3)

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},\ \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\ \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

т.е. угол $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

Запишем z в тригонометрической форме:

$$z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4});$$

используя формулу (1.4), получим $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ в показательной форме.

Ответ: $z = \sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}),\ z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Действия над комплексными числами

Простейшие арифметические действия – сложение, вычитание, умножение и деление – производят с комплексными числами, заданными в **алгебраической форме** по правилам соответствующих действий над двучленами. Очевидно, что сумма и произведение комплексных чисел обладают переместительным, сочетательным и распределительным свойствами.

1. При умножении комплексного числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ на число «k» его действительная и мнимая части умножаются на это число.

$$kz = k(a+bi) = ka + kbi. \qquad (1.5)$$

2. Пусть даны два комплексных числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$, тогда:

1) $z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i;$ (1.6)

2) $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i;$ (1.7)

3) $z \cdot \overline{z} = (a+bi) \cdot (a-bi) = (a^2 - bi \cdot bi) + (-abi + bia) = a^2 + b^2.$ (1.8)

То есть при сложении и вычитании комплексных чисел их действительные и мнимые части соответственно складываются и вычитаются (1.6), а умножение производится как двучлен на двучлен, причем учитывается, что $i \cdot i = i^2 = -1$ (1.7).

Произведение комплексно-сопряженных чисел есть число действительное, равное сумме квадратов его действительной и мнимой частей (1.8).

Пример 3. Пусть $z_1 = 2 - 8i$ и $z_2 = 5 + 2i$. Найти:

1) $z_1 + z_2$;

2) $2z_1 - 3z_2$;

3) $z_1 \cdot z_2$.

Решение

Используем формулы (1.5)-(1.7).

1) $z_1 + z_2 = (2-8i) + (5+2i) = (2+5) + (-8+2)i = 7 - 6i;$

2) $2z_1 - 3z_2 = 2(2-8i) - 3(5+2i) = (4-15) + (-16-6)i = -11 - 22i;$

3) $z_1 \cdot z_2 = (2-8i) \cdot (5+2i) = (2 \cdot 5 - 8 \cdot 2 \cdot (i^2)) + (-8 \cdot 5 + 2 \cdot 2)i = 26 - 34i.$

При делении двух комплексных чисел в общем случае получается число комплексное, состоящее из действительной и мнимой частей, которые следует выделить. Покажем это на примере.

Пример 4. Найти частное от деления $z_1 = 2-3i$ и $z_2 = 1+7i.$

Решение

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-3i}{1+7i} = \frac{(2-3i)(1-7i)}{(1+7i)(1-7i)} = \frac{(2-21)+(-3-14)i}{1+49} = \frac{-19-17i}{50} = \frac{-19}{50} - \frac{17}{50}i.$$

(1-й шаг) (2-й шаг) (3-й шаг)

Прокомментируем решение.

Для того чтобы в знаменателе было действительное число, его умножили на сопряженное. Чтобы дробь не изменилась, числитель также умножили на тот же множитель – (1-й шаг). Используя формулу (1.7) , нашли значения этих произведений – (2-й шаг). Поделив числитель полученной дроби на 50, придем к стандартной алгебраической форме комплексного числа – (3-й шаг).

Ответ: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-3i}{1+7i} = \frac{-19}{50} - \frac{17}{50}i.$

Возведение в степень комплексного числа в алгебраической форме можно производить с помощью формулы бинома Ньютона, что весьма затруднительно. ***Извлечение корней*** различных степеней из комплексного числа в алгебраической форме вообще невозможно.

Использование тригонометрической и показательной форм записей делает первую операцию очень простой, а вторую – возможной. Используется следующее правило:

При умножении (делении) двух комплексных чисел заданных в тригонометрической форме, их модули перемножаются (делятся), а аргументы складываются (вычитаются).

Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$

тогда $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2));$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)). \quad (1.9)$$

Оно распространяется на любое конечное число сомножителей.

В частности

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r^n e^{i\varphi n}. \qquad (1.10)$$

Это выражение называется *формулой Муавра.*

Пример 5. Вычислить $(1-\sqrt{3}i)^9$.

Решение

Для решения воспользуемся формулой Муавра, предварительно представив число $z = 1-\sqrt{3}i$ в тригонометрической форме.

По формуле (1.1) найдем его модуль: $r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$.

По формулам (1.2) определим аргумент: $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, $\sin\varphi = \frac{-\sqrt{3}}{2}$. Этим соотношениям соответствует угол, находящийся в IV четверти, равный $\varphi = -\frac{\pi}{3}$.

Запишем число z в тригонометрической форме:

$$z = 2(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})).$$

Вычисляем z по формуле Муавра (1.10)

$$z^9 = \left\{2(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})\right\}^9 = 2^9\left[\cos(-\frac{9\pi}{3}) + i\sin(-\frac{9\pi}{3})\right] =$$

$$= 2^9(\cos(-3\pi) + i\sin(-3\pi)) = 2^9(-1) = -512.$$

Ответ: $z^9 = (1-\sqrt{3}i)^9 = -512$.

Извлечение корня любой степени понимается как операция, обратная возведению в данную степень, т.е. если $w = \sqrt[n]{z}$, то $z = w^n$.

Из формулы Муавра можно вывести следующее выражение:

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\ (\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}), \qquad (1.11)$$

где k = 0,1, … $(n-1)$. Давая k различные значения, получим ровно n различных корней.

Пример 6. Решить квадратное уравнение $z^2 - 1 - i = 0$.

Решение

Так как $z^2 = 1 + i$, то его корни найдем по формуле (1.11), предварительно представив правую часть в тригонометрическом виде.

Здесь $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

следовательно, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Поэтому $1 + i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$.

Тогда по формуле (1.11) $\sqrt{1+i} = \sqrt[4]{2}\left[(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{2})\right]$,

где k = 0,1,

т.е. имеем два корня, соответствующие $k_1 = 0$ и $k_2 = 1$. Найдем их.

При k = 0 $z_1 = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8})$ или в алгебраической форме $z_1 = 1{,}189(0{,}9239 + 0{,}3827\ i) = 1{,}098 + 0{,}455\ i$.

При k = 1 $z_2 = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8})$ или в алгебраической форме $z_2 = 1{,}189(-0{,}9239 - 0{,}3827\ i) = -1{,}089 - 0{,}455\ i$.

Ответ: $z_1 = 1{,}098 + 0{,}455\ i$, $z_2 = -1{,}089 - 0{,}455\ i$.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие множества вещественных чисел вам известны?
2. Что называется мнимой единицей?
3. Что называется комплексным числом?
4. Какие действия над комплексными числами в алгебраической форме удобнее проводить?
5. Что такое модуль и аргумент комплексного числа?
6. Какие действия над комплексными числами в тригонометрической форме единственно возможны?

2. Матрицы

Человечество накопило огромную информацию по описанию различных процессов с точки зрения производства, экономики, психологии и т.д. Во многих случаях это описание связано с большим количеством чисел, объединенных в таблицы и имеющих различную смысловую нагрузку. Обезличенные прямоугольные таблицы, которые представляют собой совокупность строк и столбцов, назвали матрицами. Матрицы широко применяются в математике для компактной записи систем линейных алгебраических уравнений. Основоположниками этого направления принято считать Г. Крамера (формулы Крамера для квадратных систем), который ввел понятие определителя, и К.Ф. Гаусса (метод Гаусса для систем произвольных размеров).

Теория матриц, как раздел линейной алгебры, окончательно сформировалась в середине XIX в. и нашла применение во многих областях теоретических и прикладных направлений

2.1. Основные понятия и определения

Определение 1. **Матрицей** называют таблицу чисел, содержащую m строк и n столбцов.

На их пересечении стоят элементы a_{ij}, имеющие два индекса. Первый указывает на номер строки, второй – на номер столбца. Так, a_{23} находится во второй строке и третьем столбце, а элемент a_{56} – в пятой строке и шестом столбце любой матрицы. В общем виде матрицы обозначают заглавными буквами. *A, B* и т.д., а их элементы заключают в круглые скобки:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (2.1)$$

Например, элемент c_{13}, стоящий на пересечении первой строки и третьего столбца матрицы $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 8 \\ 3 & 4 & -5 \\ 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}$, равен 8.

Определение 2. Выражение вида (***m×n***) называется **размерностью** матрицы.

Если ***m≠n****,* то матрицы называют прямоугольными. Если **m=n,** матрицы называют квадратными, и термин «размерность» заменяется словом «порядок». Так, квадратная матрица второго порядка имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \qquad (2.2)$$

Частными случаями прямоугольных матриц являются

матрица-столбец $A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$

и матрица-строка $B=\begin{pmatrix} b_{11}, & b_{12}, & \ldots, & b_{1n} \end{pmatrix}.$

В сокращенной форме матрицу записывают как $A=(a_{ij})$, где $i=1,2,3,...m$ – номер строки, $j=1,2,3...,n$ – номер столбца.

Определение 3. Две матрицы А и В называются ***равными***, если равны их размерности и равны элементы, имеющие одинаковые индексы.

Пусть $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$,

тогда, если A = B, то $a_{ij}=b_{ij}$ (т.е. $a_{11}=в_{11}$, $a_{23}=в_{23}$ и т.д.).

Прямая линия, идущая из левого верхнего угла *квадратной* матрицы любого порядка в правый нижний, называется ***главной диагональю*** (2.3).

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & a_{33} \end{pmatrix} \qquad (2.3)$$

$$\begin{pmatrix} & & a_{13} \\ & a_{22} & \\ a_{31} & & \end{pmatrix} \qquad (2.4)$$

Она состоит из элементов a_{11}, a_{22}, a_{33}, и т.д.

Перпендикулярная ей прямая, выходящая из правого верхнего угла в левый нижний, называется ***побочной диагональю*** (2.4).

Квадратная матрица, у которой на главной диагонали стоят некоторые элементы, а на остальных местах – нули, называется диагональной и записывается следующим образом:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}).$$

Частным случаем диагональной матрицы является ***единичная матрица***, у которой на главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю:

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

Здесь E_2 – единичная матрица 2-го порядка, E_3 – единичная матрица 3-го порядка.

Квадратная матрица, у которой отличны от нуля лишь элементы, расположенные выше или ниже главной диагонали, называется ***треугольной***.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ – треугольная матрица n-го порядка.

Матрица **любой** размерности, элементы которой равны нулю, называется нуль-матрицей или нулевой. Она обозначается символом 0. Так, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ – нуль-матрица 2-го порядка.

2.2. Действия над матрицами

Матрицы остались бы просто таблицами чисел, если бы с ними нельзя было производить различные действия.

Над матрицами определены четыре операции: умножение на число, алгебраическая сумма, произведение и транспонирование.

Умножение матрицы на число

При умножении матрицы на число k, каждый ее элемент умножается на это число.

$$kA = k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ak_{23} \end{pmatrix}. \qquad (2.6)$$

Если k = - 1, то получаем матрицу - A, которая называется противоположной матрице A.

Так, матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ противоположна матрице

- A=$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$, а матрица $6A$ равна $6A = \begin{pmatrix} 12 & -18 \\ 24 & 36 \end{pmatrix}$.

Алгебраическая сумма матриц

При сложении матриц $A_{m\times n} = (a_{ij})$ и $B_{m\times n} = (b_{ij})$ одинаковой размерности получают матрицу $C_{m\times n} = (c_{ij})$ той же размерности с элементами $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Так же находится разность матриц:

$$C = A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & a_{13} \pm b_{13} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & a_{23} \pm b_{23} \end{pmatrix}. \qquad (2.7)$$

Операции умножения матрицы на число и сложение можно объединять.

Пример 1. Вычислить $2A - 3B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение

Умножим каждый элемент матрицы A на 2, а матрицы B на 3. После этого произведем операцию вычитания матриц, в результате получим:

$$2A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},\quad 3B = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 0 \\ -9 & 6 & 6 \end{pmatrix} \text{ и } 2A - 3B = \begin{pmatrix} 10 & -1 & -2 \\ 9 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $2A - 3B = \begin{pmatrix} 10 & -1 & -2 \\ 9 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$

Операции сложения и умножения матрицы на число, т.е. линейные операции, обладают теми же свойствами, что и числа:

1) *A + B = B + A – переместительным*;
2) *A + (B + C) =(A+B)+C – сочетательным*;
3) k *(A + B) = kA + kB – распределительным*;
4) *A - A = 0 , A + 0 = A – существование нулевой матрицы.*

Произведение матриц

Для введения произведения матриц рассмотрим строку A и столбец B *одинаковой длины:*

$$A = (a_1, a_2, ..., a_n) \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

Произведением строки A на столбец B называется **число**, равное сумме произведений элементов с одинаковыми номерами, т.е.

$$AB = (a_1, a_2, ..., a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix} = (a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n). \tag{2.9}$$

Условимся, что перемножать можно только те матрицы, у которых длина строк первого сомножителя равна высоте столбцов второго.

Произведением матриц *A·B* является матрица *C*, каждый элемент которой равен сумме произведений элементов *i*-й строки матрицы A на элементы *j*-го столбца матрицы B, вычисляемых по формуле (2.9).

Результирующая матрица C имеет столько строк, сколько их в матрице A и столько столбцов, сколько их в матрице *B*.

Пример 2. Вычислить произведения матриц.

а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot5+3\cdot6 & 1\cdot7+3\cdot8 & 1\cdot9+3\cdot10 \\ 2\cdot5+4\cdot6 & 2\cdot7+4\cdot8 & 2\cdot9+4\cdot10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 31 & 39 \\ 34 & 46 & 58 \end{pmatrix};$

б) $\begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ – не существует, так как длина строк первой матрицы не равна высоте столбцов второй матрицы

в) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot4 & 1\cdot5 \\ 2\cdot4 & 2\cdot5 \\ 3\cdot4 & 3\cdot5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 10 \\ 12 & 15 \end{pmatrix};$

г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot4+2\cdot5+2\cdot6 \end{pmatrix} = (32).$

Свойства произведения матриц

1. ***AB* ≠ *BA*,** т.е. произведение матриц в общем случае не обладает переместительным свойством.

Если *AB* = *BA,* то такие матрицы называются коммутативными.

2. ***A*·*0* = *0*** – произведение на нуль матрицу всегда дает нуль-матрицу.

3**. *AE* = *EA* = *A*** – умножение на единичную матрицу с любой стороны оставляет матрицу *A* без изменения.

4. ***A*·(*B* + *C*) = *AB* + *AC*** – распределительное свойство. Здесь важно сохранить порядок сомножителей.

5. $\boldsymbol{A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = E}$ – произведение матрицы *A* на обратную ей A^{-1} дает единичную матрицу *E*. (Что такое обратная матрица определим чуть позже, а пока просто примите это свойство к сведению).

Свойства 2 и 3 показывают, что единичная и нулевая матрицы играют ту же роль, как 1 и 0 в арифметике.

Отметим еще одну особенность, отличающую матрицы от чисел: произведение матриц может быть нулевой матрицей, хотя оба сомножителя не являются нуль-матрицами. Например, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Пример 3. Найти значение матричного многочлена 2А + 3Е В, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 0 & -11 \end{pmatrix}.$$

Решение

Матрица $2A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 6 & 20 \end{pmatrix}$, матрица *3EB = 3B* по свойству 3 произведения матриц и равна $3B=\begin{pmatrix} 30 & 60 \\ 0 & -33 \end{pmatrix}$,

тогда $2A + 3EB = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 6 & 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 & 60 \\ 0 & -33 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 32 & 68 \\ 6 & -13 \end{pmatrix}$.

Ответ: $2A + 3EB =\begin{pmatrix} 32 & 68 \\ 6 & -13 \end{pmatrix}$.

2.3. Приложение матричного исчисления в экономике

Рассмотрим возможность использования матриц на примере.

Пример. Магазин, реализующий продукцию трех однотипных предприятий, получил прибыль за четыре квартала прошлого года. Найти прибыль за каждый квартал и год в целом, если продукция первого предприятия составляет 60%, второго – 30, и третьего – 10% от общего объема продаж. Данные о прибылях приведены в таблице 2.1. Знак (+) означает прибыль, знак (-) – убытки.

Таблица 2.1

Прибыли по кварталам (тыс. руб.)

Квартал	1-е предприятие	2-е предприятие	3-е предприятие
1-й	105	120	-110
2-й	110	115	0
3-й	115	121	–120
4-й	118	122	140

Таблица 2.2

Доля в продажах

Предприятие	Доля в продажах
1	0,6
2	0,3
3	0,1

Для того чтобы найти среднюю прибыль за первый квартал от всех предприятий, нужно первую строку таблицы 2.1 почленно умножить на столбец таблицы 2.2. По остальным кварталам проведем аналогичные вычисления. Представим решение в матричном виде. Пусть матрица *A* – данные таблицы 2.1, матрица *B* – данные таблицы 2.2, тогда

$$AB = \begin{pmatrix} 105 & 120 & -110 \\ 110 & 115 & 0 \\ 115 & 121 & -120 \\ 118 & 122 & 140 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,3 \\ 0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 105\cdot 0,6+120\cdot 0,3-110\cdot 0,1 \\ 110\cdot 0,6+115\cdot 0,3+0\cdot 0,1 \\ 115\cdot 0,6+121\cdot 0,3-120\cdot 0,1 \\ 118\cdot 0,6+122\cdot 0,3+140\cdot 0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 88 \\ 100,5 \\ 93,33 \\ 121,4 \end{pmatrix},$$

т.е. прибыль по всем продажам за первый квартал составила 88 тыс. руб., за второй – 100,5 тыс. руб. и т.д. Эти данные видны из последней таблицы – матрицы-столбца.

Таблица 2.3

Квартальные прибыли

Квартал	Доля прибыли, тыс. руб.
1-й	88
2-й	100,5
3-й	93,33
4-й	121,4
Итого	403,2

Общую прибыль за весь год нашли как сумму его элементов:

88 + 100,5 + 93,3 + 121,4 = 403,2 тыс. руб.

Решение этой задачи матричным способом было бы невозможным, если бы в таблице 2.3 строки (кварталы) были поменяны местами со столбцами (предприятиями). Чтобы избежать указанного неудобства, была введена еще одна операция над матрицами – транспонирование.

Транспонирование матрицы

При транспонировании матрицы ее строки и столбцы меняются местами**,** т.е. 1-я строка становится 1-м столбцом, 2-я строка – 2-м столбцом и т.д. Транспонированную матрицу обозначают A^{T}. Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Свойства операции транспонирования:

1) $(A^T)^T = A;$ 2) $(A+B)^T = A^T + B^T;$

3) $(AB)^T = B^T A^T;$ 4) $(kA)^T = kA^T.$

Сформулируем основные выводы:

1. Матрица – таблица чисел, имеющих различную смысловую нагрузку.

2. Матрицами можно оперировать: умножать на число и складывать. Эти действия производят по простым правилам. Их называют ***линейными операциями***.

3. Произведение матриц потребовало специального приема: элементы строки последовательно умножаются на элементы столбца и полученные произведения складываются.

4. С помощью средств матричного исчисления можно решать экономические задачи. В необходимых случаях можно использовать транспонирование матриц (перемену местами строк и столбцов).

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется матрицей?
2. Какая матрица называется квадратной, диагональной, единичной, нулевой?
3. Может ли прямоугольная матрица иметь диагональ?
4. Какие линейные операции над матрицами вы знаете?
5. Какие требования предъявляются к размерности перемножаемых матриц?
6. Сформулировать определение произведения матриц.
7. Перечислить свойства операций суммы и произведения матриц.

3. Определители

Впервые понятие определителя возникло в XVII в. в связи с решением систем линейных уравнений. Рассмотрим вначале общую теорию вопроса, а затем применим полученные знания для решения задач.

3.1. Определители 2-го порядка

Определитель (или детерминант) квадратной матрицы – это число, полученное из ее элементов по определенным правилам. Обозначают определитель символами $\det A$, ΔA, $|A|$.

Рассмотрим матрицу 2-го порядка:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Определение 1. Число

$$\Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (3.1)$$

называют определителем 2-го порядка.

Из предыдущей лекции вы помните, что элементы a_{11} и a_{22} – это элементы, стоящие на главной диагонали, а два других – на побочной, т.е. определение 2.

Определение 2. Определителем матрицы 2-го порядка называют число, равное произведению членов, стоящих на главной диагонали, минус произведение членов, стоящих на побочной диагонали.

Пример. Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - (-2) \cdot 3 = 11;$

2) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$

3) $\begin{vmatrix} 2i & 3 \\ -1 & i \end{vmatrix} = 2i^2 + 3 = -2 + 3 = 1.$

3.2. Определители высших порядков

Пусть дана матрица 3-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \qquad (3.2)$$

Определение 1*.* Определителем матрицы 3-го порядка называется число

$$\Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{array} \qquad (3.3)$$

Здесь первые 3 слагаемые иллюстрируются рисунком 3.1, вторые – рисунком 3.2.

(+) (-)

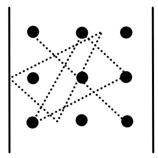


Рис. 3.1

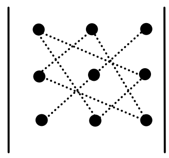


Рис. 3.2

Пример 1. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, используя формулу (3.3).

Решение

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot 2 + 3\cdot 1\cdot (-1) - (-1)\cdot 0\cdot 2 - 1\cdot 1\cdot 1 - 3\cdot 2\cdot 2 = -12.$$

Ответ: $\Delta =$-12.

Правило вычисления определителя по этой формуле называют правилом Сарюса (звезды, треугольников) и применяется в основном для определителей 3-го порядка.

Для вычисления определителей любого порядка введем дополнительные определения.

Определение 2. Минором M_{ij} к элементу a_{ij} называют определитель, оставшийся после вычеркивания i-й строки и j-го столбца.

Определение 3. Алгебраическим дополнением A_{ij} к элементу a_{ij} называют минор M_{ij}, умноженный на $(-1)^{i+j}$. Последний множитель равен ± 1 в зависимости от того, четной или нечетной будет сумма $i+j$. Например, A_{23} будет иметь множитель (–1), так как 2 + 3 = 5 – нечетное число.

Определение 4. Определитель любого порядка равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения. Например, определитель 3-го порядка можно представить в виде одного из выражений:

$$\Delta A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \begin{cases} a_{11}A_{11} + & a_{12}A_{12} + & a_{13}A_{13} \\ a_{21}A_{21} + & a_{22}A_{22} + & a_{23}A_{23} \\ a_{13}A_{13} + & a_{23}A_{23} + & a_{33}A_{33} \end{cases} \qquad (3.4)$$

Формула (3.4) показывает, как вычисление определителя третьего порядка сводится к вычислению трех определителей 2-го порядка.

Здесь первая сумма дает разложение определителя по элементам первой строки, вторая – по элементам второй, а третья – по элементам третьего столбца. Раскрыв выражения для алгебраических дополнений, получим, например, разложение определителя по элементам первой строки:

$$\Delta A = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12\cdot} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13\cdot} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Пример 2. Вычислить определитель методом разложения.

Решение

Разложим данный определитель по элементам второго столбца:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -2 & 9 & 8 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} + 9\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= -2(16-6) - 9(-6-2) = -20 + 72 = 52.$$

Ответ: $\Delta = 52$.

Вычисление определителей более высоких порядков проводится по той же схеме.

3.3. Свойства определителей

Рассмотрим свойства определителей всех порядков, применение которых в дальнейшем поможет быстрее решать примеры.

Свойство 1. Определитель не изменится:

1) при транспонировании: $\det A = \det A^{\mathrm{T}}$, т.е. строки и столбцы в определителе равноправны;

2) если к элементам одной строки (столбца), прибавить элементы другой строки (столбца), умноженной на какое-либо число.

Свойство 2. Определитель равен нулю, если он имеет:

1) две одинаковые строки (столбца);

2) строку (столбец), все элементы которой равны нулю;

3) две строки (столбца), элементы которых пропорциональны;

4) если элементы какой-либо строки (столбца) являются суммой или линейной комбинацией двух других строк (столбцов).

Матрица, определитель которой равен нулю, называется вырожденной.

Свойство 3. Определитель меняет знак при перестановке двух строк (столбцов).

Свойство 4. Общий множитель какой-либо строки (столбца) можно вынести за знак определителя.

Свойство 5. Сумма произведений элементов одной строки на алгебраические дополнения к другой равна нулю.

Свойство 6. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

К треугольному виду определитель сводится с использованием свойства 1 пункт 2.

Доказательство этих свойств проводится с помощью простого вычисления определителя с заявленными изменениями.

Докажем свойство 2 (пункт 1), кажущееся наименее очевидным для определителя второго порядка.

Прибавим к элементам второго столбца элементы первого, умноженные на число «k», и посчитаем определитель по формуле (3.1)

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + ka_{11} \\ a_{21} & a_{22} + ka_{21} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22} + ka_{21}) - a_{21}(a_{12} + ka_{11}) =$$

$$= a_{11}a_{22} + a_{11}ka_{21} - a_{21}a_{12} - a_{21}ka_{11} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12},$$

что и требовалось доказать.

Последнее свойство особенно помогает, когда элементы определителя – большие числа.

Пример 1. Вычислить определитель: $\Delta A = \begin{vmatrix} 1359 & 1428 \\ 1361 & 1427 \end{vmatrix}$.

Решение

Вычислим вначале определитель обычным образом:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1\,359 & 1\,428 \\ 1\,361 & 1\,427 \end{vmatrix} = 1\,359 \cdot 1\,427 - 1\,428 \cdot 1\,361 = 1\,939\,293 - 1\,943\,508 = -4\,215.$$

С другой стороны, используем свойство 2: умножим первую строку на (–1) и сложим со второй.

В новом определителе первую строку оставим прежней, а вторую – какой получится:

$$\Delta\, A = \begin{vmatrix} 1\,359 & 1\,428 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1\,359 - 2 \cdot 1\,428 = -4\,215.$$

Понятно, что ответы получились одинаковые, но во втором случае считать легче, особенно в отсутствии калькулятора.

Пример 2. Найти определители, равные нулю и противоположные по знаку:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \quad \Delta_5 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Ответ: $\Delta_2 = 0$ по свойству 2. 2 (он имеет нулевую строку);
$\Delta_3 = 0$ и $\Delta_4 = 0$ по свойству 2.3 (их строки пропорциональны);
$\Delta_1 = -\Delta_5$ = - 3 по свойству 3 (их столбцы переставлены).

Вычисление определителей любого порядка производится методом их разложения по элементам той строки (столбца), вычисления которых будет простейшим.

Пример 3. Вычислить определитель 4-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 0 \\ 3 & 6 & 10 & 0 \\ 2 & 5 & 6 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 0 \\ 3 & 6 & 10 & 0 \\ 2 & 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 1(5\cdot 10 - 7\cdot 6) - 1(2\cdot 10 - 7\cdot 3) + 3(2\cdot 6 - 3\cdot 5) = 8 + 1 - 9 = 0.$$

Разложение провели по элементам четвертого столбца, имеющим наибольшее количество нулевых элементов и, следовательно, наименьшее число нулевых слагаемых. Оставшийся определитель 3-го порядка разложили по элементам первой строки и получили ответ, который можно было написать сразу, применив пункт 4 свойства 2. Здесь элементы 3-й строки являются суммой элементов первых двух строк, поэтому определитель равен нулю.

Ответ: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 0 \\ 3 & 6 & 10 & 0 \\ 2 & 5 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ = 0.

Пример 4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, приведя его к треугольному виду.

Решение

Для того чтобы привести определитель к треугольному виду, следует все элементы, стоящие ниже главной диагонали, сделать равными нулю, начиная с первого столбца:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot (-8) = -16.$$

1-й шаг: первую и вторую строку переписываем, третью формируем следующим образом: умножаем все элементы первой строки на (-2) и складываем с соответствующими элементами третьей строки. Получили второй определитель, у которого первый столбец имеет требуемый вид.

2-й шаг: во втором столбце «зануляем» (-6). Для этого элементы второй строки умножаем на 3 и прибавляем элементы 3-й строки. Получили определитель треугольного вида, который по свойству (6) равен -16.

Ответ: определитель равен -16.

3.4. Обратная матрица

Мы рассмотрели 3 операции над матрицами: умножение на число, алгебраическую сумму и произведение. Операцию деления двух чисел a и b ($a : b$) можно представить в виде $a \cdot b^{-1}$, где $b^{-1} = \dfrac{1}{b}$ – число, обратное b. Таким образом, $\dfrac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$.

Воспользуемся этим равенством. Покажем, как найти матрицу, обратную данной.

Определение 1. Матрица A^{-1} называется обратной матрице *А*, если их произведение равно единичной матрице *Е*, т.е. $AA^{-1} = A^{-1}A = E.$

Из данного определения следует, что взаимообратные матрицы коммутативны, т.е. обладают переместительным свойством в произведении. Это означает, что ***только квадратные матрицы могут иметь обратные.*** Однако не каждая квадратная матрица имеет обратную.

Определение 2 (необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы). Для того чтобы матрица A имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был отличен от нуля: $\Delta A \neq 0$.

Доказательство этих условий можно найти в рекомендуемой литературе.

Метод нахождения обратной матрицы

Рассмотрим этот метод на примере матрицы 3-го порядка:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

1. Находим определитель матрицы ΔA. Если он равен нулю, то делаем вывод, что матрица – вырожденная и обратная матрица не существует. Следовательно, дальнейших шагов не делаем. Если определитель отличен от нуля, то переходим к следующему шагу.

2. Находим алгебраические дополнения к каждому из элементов A_{ij} с учетом знака соответствующего определителя, на который указывает $(-1)^{i+j}$. Составляем матрицу из A_{ij}. Ее называют союзной:

$$A_{союзн} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

3. Транспонируем ее, т.е. меняем местами строки и столбцы. Эта матрица называется присоединенной:

$$A_{прис} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

4. Делим все элементы присоединенной матрицы на определитель ΔA и получаем A^{-1}:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{32}}{\Delta} \\ \frac{A_{13}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} & \frac{A_{33}}{\Delta} \end{pmatrix}. \qquad (3.5)$$

5. Производим проверку.

По определению обратной матрицы должно выполняться условие $AA^{-1} = E$. Для удобства вынесем общий множитель обратной матрицы, равный 1/Δ за знак матрицы, и произведем умножение матрицы на матрицу по правилам умножения строки на столбец:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{32}}{\Delta} \\ \frac{A_{13}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} & \frac{A_{33}}{\Delta} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Все элементы, стоящие вне главной диагонали, будут равны нулю по пятому свойству определителей. Элементы, стоящие на главной диагонали, равны Δ. В результате умножения этой матрицы на число 1/Δ получим единичную матрицу, что и требовалось доказать.

Пример 1. Найти матрицу, обратную данной $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение

Решение проведем по всем пунктам правила.

1. Вычислим определитель матрицы:

$\Delta A=\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}=13\neq 0 \quad \Rightarrow$ матрица имеет обратную.

2. Найдем алгебраические дополнения и составим союзную матрицу:

A_{11} = 3; A_{12} = -(-2) = 2;
A_{21} = -5; A_{22}= 1. ,

Составляем из них союзную матрицу

$$A_{союз}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Транспонируем ее и находим присоединенную матрицу:

$$A_{прис}=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Составляем обратную матрицу:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 3/13 & -5/13 \\ 2/13 & 1/13 \end{pmatrix}=\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Делаем проверку:

$$AA^{-1}=\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 3\cdot 1-5\cdot(-2) & 3\cdot 5-5\cdot 3 \\ 2\cdot 1-1\cdot 2 & 2\cdot 5+1\cdot 3 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E.$$

Ответ: $A^{-1}=\dfrac{1}{13}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Пример 2. Найти матрицу, обратную данной: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение

1. $\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 0,$ так как первые две строки пропорциональны.

Ответ: матрица вырожденная и обратной не имеет.

Пример 3. Найти матрицу, обратную данной: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение

1. $\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -116 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad A^{-1}$ существует.

2. $A_{11} = +\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4$, $A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, $A_{31} = +\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -20$,

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 9$, $A_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -29$, $A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 13$,

$A_{13} = +\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -24$, $A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $A_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4$.

Мы намеренно расположили алгебраические дополнения к строкам по столбцам, для того чтобы сразу составить $A_{прис}$ и затем A^{-1}.

$$A_{прис} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -20 \\ 9 & -29 & 13 \\ -24 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \; A^{-1} = \frac{1}{-116} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -20 \\ 9 & -29 & 13 \\ -24 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$A^{-1}A = \frac{1}{-116} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -20 \\ 9 & -29 & 13 \\ -24 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$=-\frac{1}{116}\begin{pmatrix} 1\cdot4+0\cdot9+5\cdot(-24) & 1\cdot0-0\cdot29+5\cdot0 & -20+0\cdot13+5\cdot4 \\ 3\cdot4+4\cdot9-2\cdot24 & 3\cdot0-4\cdot29+2\cdot0 & -3\cdot20+4\cdot13+2\cdot4 \\ 6\cdot(-4)+0\cdot9+1\cdot24 & 6\cdot0-0\cdot29+1\cdot0 & 6\cdot(-20)+0\cdot13+1\cdot4 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{-1}{116}\begin{pmatrix} -116 & 0 & 0 \\ 0 & -116 & 0 \\ 0 & 0 & -116 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Для каких матриц вводится понятие «определитель матрицы»? Как происходит вычисление определителей 2-го и 3-го порядков?

2. Что называется минором и алгебраическим дополнением элемента квадратной матрицы?

3. Что называется определителем n-го порядка?

4. Какие свойства определителей вы знаете?

5. В чем состоит метод приведения определителя к треугольному виду?

6. Что происходит с определителем при транспонировании матрицы?

7. В каких случаях можно не вычисляя, увидеть, что определитель равен нулю?

8. Что называется обратной матрицей? Как она составляется?

4. Системы линейных алгебраических уравнений

4.1. Общие понятия и определения

Определение 1. Выражение вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (4.1)$$

где $x_{1,}\ x_2, ..., x_n$ – неизвестные; a_{ij} – коэффициенты при неизвестных, причем первый индекс обозначает номер уравнения, а второй – номер неизвестного; $b_{1,}$ $b_2, \dots b_n$ – свободные члены, называется системой линейных уравнений (СЛАУ).

Система, у которой все свободные члены b_i равны нулю, назвается однородной (ОСЛАУ).

Уравнения, входящие в систему, называются линейными, потому что неизвестные $x_{1,}, x_2, ..., x_n$ входят в нее линейно, т.е. в первой степени.

Определение 2. Набор чисел $x_1^0, x_2^0, x_3^0, ..., x_n^0$, обращающих при подстановке каждое уравнение в тождество, называется **решением** системы.

Определение 3. Система называется **совместной**, если она имеет решение, и **несовместной** – в противном случае.

Определение 4. Если система имеет единственное решение, то говорят, что она **совместна и определена**.

Если система имеет бесконечное множество решений, то говорят – она **совместна и не определена**.

Определение 5. Две системы называются равносильными, если они имеют одинаковые множества решений.

Исходная система уравнений приведется к равносильной, если в системе произвести **элементарные преобразования**, т.е.:

1) поменять местами два любых уравнения;

2) умножить (разделить) все члены любого уравнения на некоторое число k;

3) прибавить ко всем членам одного уравнения соответствующие члены другого уравнения, умноженные на некоторое число;

4) отбросить уравнения с нулевыми коэффициентами, или пропорциональными коэффициентам другого уравнения, то исходная система уравнений приведется к равносильной**.**

По внешнему виду системы, как и матрицы, могут быть *квадратными*, когда число уравнений совпадает с числом неизвестных ($m=n$), и *прямоугольными*, когда эти числа не совпадают.

Пусть A – матрица из коэффициентов при неизвестных, X – матрица-столбец из неизвестных, B – матрица-столбец из свободных членов:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ x_m \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix},$$

тогда

$$AX=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ x_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+ & \dots & +a_{1n}x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_1+ & \cdots & +a_{mn}x_n \end{pmatrix},$$

т.е. мы получили левую часть системы (4.1). Из условия системы следует, что

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1+ & \dots & +a_{1n}x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_1+ & \cdots & +a_{mn}x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix}=b.$$

По определению равенства матриц вновь приходим к системе уравнений:

$$AX=B \Rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases}$$

Матричное уравнение $AX = B$ называется матричной записью системы «m» линейных уравнений с «n» неизвестными.

Если число уравнений совпадает с числом неизвестных, то матрица из коэффициентов при неизвестных будет квадратной. В этом случае система называется квадратной, в противном случае – прямоугольной.

Рассмотрим способы решения квадратных неоднородных систем.

4.2. Метод Крамера

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2, \end{cases} \tag{4.2}$$

найдем ее решение. Для этого первое уравнение умножим на a_{22}, а второе – на a_{12}, и после почленного сложения этих выражений и приведения подобных членов получим выражение: $\left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right)x = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$, откуда

$$x = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{4.3}$$

Аналогично, умножив первое уравнение системы (4.2) на a_{21}, а второе на – a_{11} и почленно сложив их, получим

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y = a_{11}b_2 - a_{21}b_1,$$

откуда

$$y = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{4.4}$$

Множитель, стоящий перед неизвестными x и y и в знаменателях полученных дробей, нам уже встречался. Это определитель 2-го порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Он составлен из коэффициентов при неизвестных. Выражения, стоящие в правых частях и затем в числителях – тоже определители. Они получаются из определителя Δ заменой первого и второго столбцов поочередно на столбец свободных членов:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \mathrm{b}_1 & a_{12} \\ \mathrm{b}_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - a_{12} b_2, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & \mathrm{b}_1 \\ a_{21} & \mathrm{b}_2 \end{vmatrix} = a_{11} b_2 - b_1 a_{21}.$$

И тогда выражения (4.3) и (4.4) для решения системы запишутся в более компактной форме, которую называют формулами Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}. \tag{4.5}$$

Число Δ называют главным, а числа Δ_x и Δ_y – побочными определителями, потому что все они определяют решение системы.

Итак, вычисляем три определителя, подставляем в формулы Крамера, и решение получено. Но не всегда. Рассмотрим это на примерах.

Пример 1. Определить, будет ли совместна система уравнений, и найти ее решение:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 21, \\ 2x + 7y = 20. \end{cases}$$

Решение

Для использования формулы (4.5), вычислим определители Δ, Δ_x, Δ_y:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 35 - 6 = 29, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 21 & 3 \\ 20 & 7 \end{vmatrix} = 147 - 60 = 87, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 21 \\ 2 & 20 \end{vmatrix} = 100 - 42 = 58.$$

отсюда

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{87}{29} = 3, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{58}{29} = 2.$$

Сделаем проверку, подставив полученные числа в оба уравнения системы: 5·3 + 3·2 = 21, 2·3 + 7·2 = 20.

Ответ: система совместна. Ее решение: x = 3, y = 2**,** или в матричной форме: $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Пример 2. Решить систему $\begin{cases} 3x + 5y = 8, \\ 6x + 10y = 3. \end{cases}$

Решение

Найдем все определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = 80 - 15 = 65, \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 48 = -39,$$

откуда $x = \frac{65}{0}$ – не существует, $y = \frac{-39}{0}$ – не существует.

Ответ: система несовместна, так как главный определитель равен нулю, а остальные отличны от него.

Пример 3. Решить систему $\begin{cases} 3x + 5y = 8, \\ 6x + 10y = 16. \end{cases}$

Решение

Главный определитель равен нулю (см. пример 2). Найдем побочные определители:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 16 & 10 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 6 & 16 \end{vmatrix} = 0.$$

По формулам Крамера x = $\frac{0}{0}$, y = $\frac{0}{0}$ такие выражения называются неопределенными.

Найдем решение следующим образом. Поскольку второе уравнение пропорционально первому, то его можно отбросить. Останется только первое уравнение

3x + 5y = 8. Откуда $x = \frac{8-5y}{3} = \frac{8}{3} - \frac{5}{3}y$ или $y = \frac{8}{5} - \frac{3}{5}x$.

В обоих выражениях одна переменная выражается через другую, поэтому общее решение запишется в виде

$$X_{общ} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{8}{5} - \frac{3}{5}x \end{pmatrix} \text{ или } X_{общ.} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} - \frac{5}{3}y \\ y \end{pmatrix}.$$

Если в последнем выражении положить y = *1*, то получим частное решение $X_{част.} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Давая переменной «$y$» другие значения, получим новые решения для неизвестной «x». В этом случае говорят, что система имеет множество решений, т.е. совместна, но неопределена.

Ответ: система совместна, но не определена. Ее общее решение запшется в виде $X_{общ} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{8}{5} - \frac{3}{5}x \end{pmatrix}$ или $X_{общ.} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} - \frac{5}{3}y \\ y \end{pmatrix}$.

Итак, мы рассмотрели все варианты решения квадратных систем второго порядка методом Крамера. Сформулируем их в виде утверждений, доказательства которых очевидны.

Пусть дана квадратная система неоднородных линейных уравнений. Тогда:

1) если главный определитель системы отличен от нуля – система имеет единственное решение (она совместна и определена);

2) если главный определитель равен нулю, а побочные – нет, то система не имеет решения (она несовместна);

3) если все определители системы равны нулю – система имеет множество решений (она совместна и не определена).

Эти утверждения будут верны для квадратных систем любого порядка.

Рассмотрим систему из 3 уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1; \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2; \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases}$$

Используя определители 3-го порядка, решение такой системы можно записать формулами Крамера, как и для системы двух уравнений, т.е.:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}, \tag{4.6}$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Такие же формулы верны для систем 4-го и более высокого порядков. Главный определитель всегда составлен из коэффициентов при неизвестных. Побочные получены из главного путем замены 1-го (2-го, 3-го поочередно) столбца на столбец свободных членов. Остальные столбцы остаются без изменения.

Пример 4. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} y + 3z = -1; \\ 2x + 3y + 5z = 3; \\ 3x + 5y + 7z = 6. \end{cases}$$

Решение

Находим главный определитель из коэффициентов при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4.$$

Поскольку $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение. Для его нахождения можно применить метод Крамера. Составим и вычислим побочные определители:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \\ 6 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 8, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -4.$$

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{4}{4}=1,\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{8}{4}=2,\quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{-4}{4}=-1.$$

Ответ: x = 1, y = 2, z = -1.

4.3. Матричный метод решения систем линейных уравнений

Определение. Уравнения вида $AX = B$, $XA = B$, $AXB = C$, где A, B, C – матрицы с известными элементами, X – матрица с неизвестными элементами, называются ***матричными уравнениями.***

При решении таких уравнений следует помнить, что умножение матриц в общем случае не обладает переместительным свойством.

1. Уравнения вида $AX = B$ решаются так. Умножим обе части этого уравнения на A^{-1} слева, получим: $A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow$ $EX = A^{-1}B \Rightarrow$

$$X = A^{-1}B. \tag{4.7}$$

Эта простая формула дает возможность решать квадратные системы уравнений, при условии отличия от нуля главного определителя.

Пример. Решить систему матричным способом:

$$\begin{cases} 2x + y = 5, \\ 3x - y = 5. \end{cases}$$

Решение

Запишем систему уравнений в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

В нашем случае

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Убедимся, что система уравнений будет совместна и определена, для чего составим главный определитель:

$\Delta A=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-2-3=-5\neq 0\Rightarrow$ система имеет единственное решение.

Составим матрицу A^{-1}.

Найдем алгебраические дополнения к каждому из элементов:

$$A_{11} = +(-1) = -1, \;\; A_{12} = -(3) = -3,$$
$$A_{21} = -(1) = -1, \;\; A_{22} = +(2) = 2.$$

Тогда $A_{союз} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ – союзная матрица;

$A_{присоед} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ – присоединенная матрица;

$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{-5} & \frac{-1}{-5} \\ \frac{-3}{-5} & \frac{2}{-5} \end{pmatrix}$ – обратная матрица.

Проверим правильность составления A^{-1}:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{-5} & \frac{-1}{-5} \\ \frac{-3}{-5} & \frac{2}{-5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2-3}{-5} & \frac{-1+1}{-5} \\ \frac{-6+6}{-5} & \frac{-3-2}{-5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем решение исходной системы уравнений:

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 3/5 & -2/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5+5}{5} \\ \frac{15-10}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Ответ: x = 2, y =1.

4.4. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Пусть дана система из m линейных уравнений **с** n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Метод Гаусса называют методом последовательных исключений неизвестных, с которым вы уже знакомы из курса школы. Отличие состоит в том, что все преобразования проводятся в таблице из коэффициентов при неизвестных и свободных членах. Ее называют ***расширенной матрицей***.

В ней, как и в системе, можно переставлять строки, умножать одну из них на произвольное число и складывать с другими, отбрасывать нулевые.

Матрицы, получившиеся после этих эквивалентных преобразований, не равны исходной, а эквивалентны, как системы уравнений, которые они представляют. Множества решений получившихся систем будут равными.

Идея преобразований: привести систему к возможно простому виду – треугольному, если количество уравнений совпадает с числом неизвестных $m=n$, и трапецеидальному, если число неизвестных больше числа уравнений $n \geq m$.

Составим расширенную матрицу исходной системы уравнений:

$$A_{\text{рас}} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right). \tag{4.8}$$

В результате элементарных преобразований, как отмечалось выше, возможны два варианта расширенных матриц:

треугольный
$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{23} & r_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} & r_n \end{array}\right),$$

трапецеидальный
$$\left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2к} & \dots & a_{2n} & r_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_{rk} & \dots & d_{rn} & r_m \end{array}\right).$$

Отдельно выделим вариант, содержащий противоречие $0 = r_m$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} & r_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & r_m \end{array}\right), \quad r_m \neq 0.$$

Это соответствует следующим видам систем уравнений:

1. $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\qquad c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n = r_2, \\ \qquad\qquad\qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \qquad\qquad\qquad\qquad c_{nn}x_n = r_n. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad c_{22}x_2 + \dots + c_{2m}x_m + \dots + c_{2n}x_n = r_2 \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \qquad d_{mm}x_m + \dots + d_{mn}x_n = r_m \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad c_{22}x_2 + \dots + c_{2m}x_m + \dots + c_{2n}x_n = r_2, \\ \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \qquad\qquad\qquad 0x_{mk} + \dots + 0x_{mn} = r_m. \end{cases}$$

Теорема 1 (теорема Кронекера-Капели). Для того чтобы система линейных уравнений была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы, составленный из коэффициентов при неизвестных, был равен рангу ее расширенной матрицы**.**

Под рангом матрицы будем понимать *количество ненулевых строк*, оставшихся в ней после элементарных преобразований.

Так, ранг матрицы из коэффициентов при неизвестных в третьем варианте равен m-1 , а ранг расширенной матрицы – m.

Если приведенная к треугольному или трапецеидальному виду система не имеет противоречий, то в первом случае она имеет единственное решение, во втором – множество, а в третьем – не имеет вообще. Такова идея метода, а порядок действий изложен ниже.

Прямой ход метода Гаусса

1. Записываем расширенную матрицу. Первое уравнение (первую строку) объявляем ведущим (неизменным), а коэффициент при неизвестной x_1 – разрешающим.

Пусть $a_{11}= 1$. В противном случае разделим все члены первого уравнения на a_{11}.

2. Исключаем неизвестную x_1 из второго уравнения. Для этого умножаем ведущую первую строку на a_{21} и вычитаем ее из второй строки.

Затем умножаем ее на a_{31} и вычитаем из третьей строки и т.д.

В расширенной матрице все элементы первого столбца, кроме a_{11}, равны нулю. Следовательно, все уравнения системы, начиная со второго, не содержат неизвестную x_1.

3. Объявляем второе уравнение ведущим и коэффициент c_{22} – разрешающим. И исключаем x_2 из третьего, четвертого и последующих уравнений.

4. Далее исключаем x_3 из четвертого, пятого и последующих уравнений.

И так далее, пока не придем к треугольному или трапецеидальному виду. Если система не имеет противоречий, то делаем вывод о том, что она имеет решение и начинаем искать его обратным ходом.

Обратный ход метода Гаусса

1. Если система приведена к треугольному виду, то из последнего уравнения найдем $x_n = \frac{r_n}{c_n}$.

Полученное значение x_n подставим в n–1 уравнение и определим x_{n-1}. Двигаясь по системе вверх, найдем все неизвестные до x_1 включительно. Система решена, ответ записываем в виде матрицы-строки или матрицы столбца: $X = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$.

2. Если система стала трапецеидального вида, то из последнего уравнения выражаем первую из оставшихся неизвестных через остальные: $X_к = f(x_{k+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n)$. Неизвестные, оказавшиеся в правой части, называются *свободными*, а все остальные, выражающиеся через них – *зависимыми*. Из общего решения можно выделить частные решения, дав свободным переменным любые значения.

3. Если система имеет противоречия, как в третьем случае, то говорят, что она не совместна. Иногда эти противоречия можно увидеть сразу, не проводя длительных вычислений. Если, например, левые части двух строк равны друг другу или пропорциональны, а правые – нет, то система, естественно, несовместна.

Пример 1. Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 5z = 0; \\ x + y - z = 1; \\ 3x - y - z = 1. \end{cases}$$

Решение

Выпишем расширенную матрицу, предварительно переставив первое и второе уравнения. Прокомментируем полученное решение, записанное в виде цепочки матриц, связанных знаком эквивалентности ⊔ .

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & -4 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \end{array}\right).$$

(1) (2) (3)

Прямой ход

1. Исключаем x_1 из второй и третьей строки. Для этого первую строку умножаем на (–2) и складываем со второй, получаем новую вторую. Первую умножаем на (–3) и складываем с

третьей – получаем новую третью строку. Получаем вторую матрицу.

2. Исключаем x_2 из третьего уравнения, сделав ведущим элемент a_{22}. Для этого умножаем второе уравнение на 4 и складываем с третьим. Получили третью расширенную матрицу. Она треугольного вида и не имеет противоречий. Вывод – система имеет единственное решение. Находим его из окончательной системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ x_2 - 3x_3 = -2; \\ -10x_3 = -10; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 + x_3 + 1 = -1 + 1 + 1 = 1; \\ x_2 = 3x_3 - 2 = 3 \cdot 1 - 2 = 1; \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Пример 2. Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 2; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4; \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$$

Решение

Выпишем расширенную матрицу и произведем необходимые преобразования:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -5 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4; \\ -x_2 - 3x_3 = -6; \\ 0 = -5. \end{cases}$$

Последнее уравнение имеет противоречие, поэтому делаем вывод, что система не имеет решения. Это можно было увидеть сразу: в *исходной* системе левые части второго и третьего уравнений пропорциональны, а правые – нет. Поэтому главный определитель равен нулю, а побочные – нет. Согласно второму утверждению метода Крамера и теоремы Кронекера-Капели система решений не имеет.

Ответ: система не совместна.

Пример 3. Исследовать и решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1; \\ x_1 - x_2 - 2x_4 = -1; \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 5. \end{cases}$$

Решение

Выписываем и преобразуем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & -2 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

В результате преобразований в последней строке получились одни нули. Это означает, что число уравнений уменьшилось на единицу:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1; \\ -2x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$$

Так как после упрощений осталось два уравнения, а неизвестных – 4, то 2 неизвестных оказались «лишними». Пусть «лишними», или, как говорят, *свободными переменными*, будут x_3 и x_4. Тогда решение запишется в виде:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -x_3 + 2x_4 + 1; \\ -2x_2 = x_3 - 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_4 - \dfrac{x_3}{2}; \\ x_2 = 1 - \dfrac{x_3}{2}. \end{cases}$$

Полагая $x_3 = 2a$ и $x_4 = b$, получим $x_2 = 1 - a$ и $x_1 = 2b - a$; или в матричном виде:

$$X = \begin{pmatrix} 2b - a \\ 1 - a \\ 2a \\ b \end{pmatrix}.$$

Записанное подобным образом решение называется ***общим,*** поскольку, придавая параметрам a и b различные значения, можно описать все возможные решения системы. Подставив полученные выражения в любое уравнение системы, мы получим тождества.

Для того чтобы упростить обратный ход метода Гаусса, французский ученый Жордан модифицировал метод Гаусса, предложив исключать не только элементы, стоящие ниже ведущего, но и выше. Тогда система приводится к диагональному виду и решается мгновенно, хотя промежуточных вычислений становится больше.

Пример 4. Решить систему методом Жордана-Гаусса:

$$\begin{cases} x+3y-z=1; \\ 2x-y+z=5; \\ 3x-2y+z=7. \end{cases}$$

Решение

Выписываем и преобразуем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 3 \\ 0 & -11 & 4 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-3}{7} & \frac{-3}{7} \\ 0 & -11 & 4 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{16}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & -\frac{3}{7} \\ 0 & 0 & \frac{5}{7} & \frac{5}{7} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{16}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & -\frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{14}{7} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2; \\ x_2 = 0; \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Применение метода Гаусса для решения однородных систем линейных уравнений

Методом Гаусса можно решать и однородные системы линейных уравнений, у которых все элементы правой части равны нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0; \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Они всегда имеют *нулевое* решение вида X (0, 0, …0), которое называется *тривиальным*.

Для того чтобы квадратная однородная система n линейных уравнений с n неизвестными обладала ненулевым решением, необходимо и достаточно, чтобы главный определитель матрицы системы был равен нулю.

В этом случае система имеет множество решений.

Пример 5. Исследовать систему уравнений $\begin{cases} 2x - 3y = 0; \\ -6x + 9y = 0. \end{cases}$

Решение

Составим главный определитель системы:

$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 9 \end{vmatrix} = 18 - 18 = 0$ в силу пропорциональности строк. Одну из них можно отбросить, и тогда система уравнений запишется как одно уравнение $2x - 3y = 0$. Его решение $x = \dfrac{3}{2}y$, а решение системы $X_{общ.=}\begin{pmatrix} \dfrac{3}{2}y \\ y \end{pmatrix}$. Давая переменной y разные значения, будем получать частные решения.

Пусть $y = 2$, тогда $x = 3$, и $X_{част..=}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ответ: $X_{общ.=}\begin{pmatrix} \dfrac{3}{2}y \\ y \end{pmatrix}$.

Покажем, как можно найти нетривиальные решения, если они существуют, для прямоугольных систем.

Пример 6. Исследовать систему уравнений:

$$\begin{cases} x+2y+3z=0; \\ 2x-y+z=0; \\ 3x+2y-z=0; \\ x-y-z=0. \end{cases}$$

Решение

Выписываем и преобразуем расширенную матрицу системы, отметив ведущие элементы звездочкой:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & -4 & -10 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1^* & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -10 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x+2y+3z=0; \\ y+z=0; \\ -7z=0; \\ -z=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0; \\ y=0; \\ z=0, \end{cases}$$

т.е. система имеет только тривиальное решение.

Пример 7. Исследовать систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=0; \\ x_1+x_2-x_3=0; \\ x_1+2x_2=0. \end{cases}$$

Решение

Выписываем и преобразуем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2-x_3=0; \\ x_2+x_3=0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=2x_3; \\ x_2=-x_3. \end{cases}$$

Общее решение запишется в виде:

$$X_{общее} = \begin{pmatrix} 2x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

т.е. имеется множество решений, зависящих от разных значений x_3.

Найдем частное решение. Пусть x_3 = 2, тогда $X_ч = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ответ: $X_{общее} = \begin{pmatrix} 2x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

4.5. Пример применения теории СЛАУ на практике

Транспортное предприятие специализируется на перевозке продукции трех типов А,В,С с установленной таксой Т = 2 тыс. руб. за 100 кг (1ц) веса. К нему обратились три поставщика, причем первому надо перевезти 2 ц груза А, 4 ц груза В и 1 ц груза С, за что он готов заплатить 15 тыс. руб.; для второго эти цифры были 3, 1, 2 и предлагаемая сумма 13 тыс. руб.; для третьего 0,5; 2; 1,5; и 7 тыс. руб. Можно ли составить такой план перевозок, чтобы удовлетворить потребности и возможности всех поставщиков сразу, а также получить максимальную прибыль?

Решение

Для сложившегося ценообразования первый поставщик должен заплатить (2+4+1) 2 = 14 тыс. руб., второй (3+1+2) 2 = = 12 тыс. руб., третий (0,5+2+1,5) 2 = 8 тыс. руб., и общая прибыль предприятия составит 14+12+7 = 33 тыс. руб., а могла бы 15+13+7 = 35 тыс. руб.

Найдем оптимальное решение.

Пусть x, y, z – искомые цены на перевозки продукции типа А, В и С соответственно.

Тогда первый должен заплатить $2x+4y+z=15$ тыс. руб., второй $3x+y+2z=13$ тыс. руб., третий $0,5x+2y+1,5z=7$ тыс. руб.

Получили систему из трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} 2x+4y+z=15; \\ 3x+y+2z=13; \\ 0,5x+2y+1,5z=7. \end{cases}$$

Решим ее методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0,5 & 2 & 1,5 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1,5 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0,5 & 1,5 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0,5 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot(-2,5) - 4\cdot 3,5 + 1\cdot 5,5 = -13,5;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 15 & 4 & 1 \\ 13 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & 1,5 \end{vmatrix} = 15\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1,5 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 13 & 2 \\ 7 & 1,5 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 13 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 15\cdot(-2,5) - 4\cdot 5,5 + 1\cdot 19 = -40,5;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 15 & 1 \\ 3 & 13 & 2 \\ 0,5 & 7 & 1,5 \end{vmatrix} = -27; \qquad \Delta z = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 15 \\ 3 & 1 & 13 \\ 0,5 & 2 & 7 \end{vmatrix} = -13,$$

откуда

$$x = \frac{-40,5}{-13,5} = 3,\ y = \frac{-27}{13,5} = 2,\ \ z = \frac{-13,5}{-13,5} = 1.$$

Ответ: оптимальный план перевозок составляет 3, 2 и 1 (тыс. руб.) за 100 кг веса продукции типа А, В и С соответственно. Получившаяся прибыль равна 35-33 = 2 (тыс. руб.).

Вопросы для самоконтроля

1. Можно ли решать системы из 5 линейных уравнений с тремя неизвестными методом Крамера?

2. В каком случае система из 4 уравнений с пятью неизвестными имеет решение?

3. Как выбираются свободные переменные при решении систем методом Гаусса?

4. В каком случае экономические задачи могут быть решены с целью оптимизации цен?

5. Векторная алгебра

Наука и практика всегда различали понятия числа (скаляра) и вектора, о чем говорят древние работы по физике, теоретической механике, мостостроению и т.д., где рассматривались так называемые свободные векторы. После введения Р. Декартом системы координат алгебра векторов приобрела новый вид. Все операции над векторами проводятся в координатной форме. Векторный анализ как раздел математики окончательно сформировался в XIX в. в работах Гамильтона.

5.1. Основные понятия и определения

Определение *1. Вектором* называется направленный отрезок в пространстве. Обозначается вектор одной или двумя буквами: $\vec{a}$, *а*, $\overrightarrow{AB}$, AB. Мы будем пользоваться всеми видами обозначений.

Длина вектора называется его *модулем* и обозначается $|\overrightarrow{AB}|$ или $|\vec{a}|$.

Множество векторов с определенными над ними операциями, называется ***пространством векторов***. Особую роль играют нуль-вектор и единичный вектор.

Определение 2. Нуль-вектор ***0*** – это вектор, модуль которого равен нулю, а направление неопределенно.

Определение *3.* Единичный вектор **е –** это вектор, модуль которого равен единице, а направление произвольно.

Определение 4. Два вектора *АВ* и *CD* называются равными, если:

1) располагаются на параллельных прямых;
2) их модули равны;
3) направления совпадают.

Тогда пишут векторное равенство $AB = CD$ или $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Поскольку здесь не сказано, на каких именно параллельных прямых лежат эти векторы, можно взять любые, а значит, перенос вектора параллельно самому себе не изменит его величины и направления. Этим обстоятельством пользуются достаточно широко, перенося векторы параллельно себе в любую точку не только плоскости, но и пространства.

Если первые два условия равенства векторов выполнены, а последнее – нет, векторы называются ***противоположными***. Их можно записать в виде векторного равенства *AB* = –*CD*.

Если первое и третье условие выполнены – векторы называют ***коллинеарными*** (параллельными) или пропорциональными: *AB* = *kCD,* где *k* – коэффициент пропорциональности.

Пример. Стороны квадрата *ABCD* – суть векторы *AB*, *BC*, *DA*, *DC*. Найти среди них равные и противоположные, если координаты точек *A* (1, 2), *B* (1, 4), *C* (3, 4). Сделать чертеж.

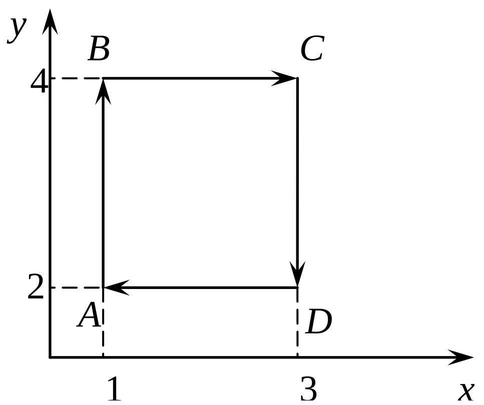


Рис. 5.1

Решение

Сделаем чертеж (рис. 5.1). Следуем определению равных векторов. На параллельных прямых лежат векторы *AB* и *DC*, *AD* и *BC*. Но если первая пара направлена в одну сторону, то вторая – в противоположные. Поэтому делаем вывод, что *AB* = *DC*, *AD* = –*BC*.

Ответ: *AB* = *DC*, *AD* = –*BC*.

Простейшие действия над свободными векторами: сложение, вычитание, умножение на число, скалярное произведение двух векторов. Эти операции вам знакомы из школьного курса. Коротко повторим их.

1. Для того чтобы найти сумму двух векторов $a + b$, нужно начало второго вектора совместить с концом первого и соединить начало первого с концом второго (правило большей диагонали (рис. 5.2). Получившийся вектор будет называться *суммой* векторов $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$.

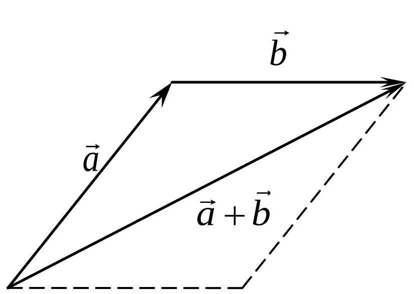


Рис. 5.2

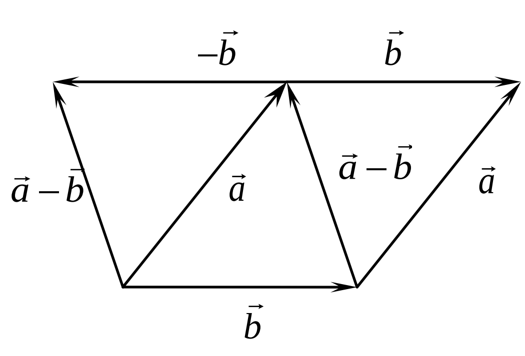


Рис. 5.3

Свойства суммы векторов:

1) $a + b = b + a;$
2) $a + 0 = a;$
3) $a + (-a) = 0;$
4) $(a + в) + c = a + (в + c).$

2. Разность векторов $a - b$ можно ввести как сумму векторов a и $(-b)$, (правило меньшей диагонали на рис. 5.3).

3. При умножении вектора на число k его модуль меняется в $|k|$ раз, направление остается прежним, если $k > 0$ и меняется на противоположное, если $k < 0$.

4. Скалярным произведением двух векторов называется число (скаляр), равное произведению модулей этих векторов и косинуса угла между ними:

$$(a \cdot b) = |a| \cdot |b| \cdot \cos (a, b). \tag{5.1}$$

Скалярное произведение обозначается символами $(a \cdot b)$, $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$, $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$. Мы будем пользоваться всеми тремя формами записи.

Свойства скалярного произведения:

1) $(a \cdot b) = (b \cdot a)$;
2) $(a \cdot kb) = k\,(a \cdot b)$;
3) $(a + b)\,c = a \cdot c + b \cdot c$;
4) $(a \cdot 0) = 0$;
5) $(a \cdot b) = 0$, если $a = 0$ или $b = 0$, или $\cos (a, b) = 0$.

Линейная зависимость

Определение 5. Векторы $a_1, a_2, \ldots, a_k$ линейного пространства *V* называются линейно зависимыми, если существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, не равные одновременно нулю:

$$\alpha_1 \boldsymbol{a_1} + \alpha_2 \boldsymbol{a_2} + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{a_n} = 0. \tag{5.2}$$

Левая часть равенства (5.2) называется линейной комбинацией данных векторов.

Векторы, не являющиеся линейно зависимыми, называются линейно независимыми.

Определение 6. Векторы $a_1, a_2, \ldots, a_k$ называются линейно зависимыми, если один из векторов можно представить в виде линейной комбинации остальных векторов:

$$\vec{a}_k = \beta_1\vec{a}_1 + \beta_2\vec{a}_2 + \ldots + \beta_{k-1}\vec{a}_{k-1}.$$

Любые два неколлинеарные (непараллельные) вектора на плоскости являются линейно независимыми.

Любые три некомпланарные (не принадлежащие одной плоскости) вектора являются линейно независимыми в пространстве.

Размерность и базис

Определение 7. Линейное пространство *V* называется *n-мерным*, если в нем можно найти *n* линейно независимых векторов, но больше, чем *n* линейно независимых векторов оно не содержит.

Определение 8. Размерность пространства – это максимальное число содержащихся в нем линейно независимых векторов.

Множество векторов на прямой имеет размерность 1.

Размерность множества векторов на плоскости равна 2.

Размерность векторов в пространстве равна 3.

Пространство, имеющее конечную размерность, называется ***конечномерным***. Пространство, в котором можно найти сколь угодно много линейно независимых векторов, называется ***бесконечномерным***.

Определение 9. Совокупность n линейно независимых векторов *n*-мерного векторного пространства *V* называется его *базисом*.

Теорема. Каждый вектор x линейного n-мерного пространства V можно представить, и притом единственным способом, в виде линейной комбинации векторов базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots \vec{e}_n$ (без доказательства).

$$\vec{x} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n. \qquad (5.3)$$

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из разложения вектора x называются координатами вектора $\vec{x}$ в базисе векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \ldots \vec{e}_n$.

Определение 10. Любые два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на плоскости могут составить базис 2-мерного пространства.

Тогда выражение $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ называется разложением вектора **с** в базисе векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$,а числа x и y называются его координатами в этом базисе.

Определение 11. Любые три некомпланарных вектора в пространстве могут составить базис 3-мерного пространства, и выражение

$\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ называется разложением вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Определение 12. Если координаты двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в некотором базисе совпадают, то эти векторы равны.

Обратное утверждение будет также справедливо.

Таким образом, задавать вектор можно, просто указывая его координаты в определенном базисе: $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Заметим, что в разных базисах один и тот же вектор будет иметь разные наборы координат.

5.2. Векторы в декартовой системе координат

Определение 1. *Проекциями* вектора на ось *OX* и ось *OY* называются разности соответствующих координат его начала и конца:

$$Пр_{OX} AB = X_b - X_a, \quad Пр_{OY} AB = Y_b - Y_a.$$

Чтобы показать отличие координат вектора от координат точек, Декарт предложил соотнести их с единичными векторами, лежащими на осях координат i и j.

Определение 2. Произведение проекции вектора на единичный вектор называется *составляющей вектора на ось*:

$$\text{Сост}_{OX}\ AB = \left(X_b - X_a\right) i \qquad \text{Сост}_{OY}\ AB = \left(Y_b - Y_a\right) j$$

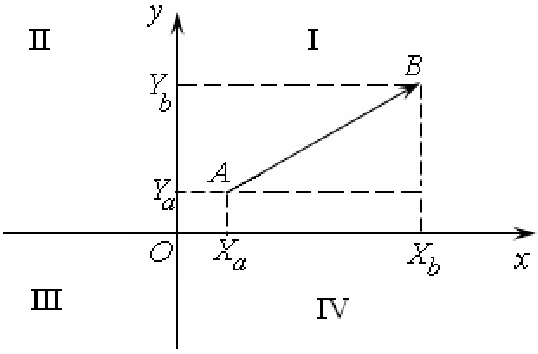


Рис. 5.4

Векторы i и j называются *ортами*. Их модули равны единице, они направлены в положительном направлении осей координат.

Вектор, помещенный в декартову систему координат, представляется в виде

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \tag{5.4}$$

где a_x, a_y, a_z – его проекции на оси Ox, Oy, Oz, которые называются координатами. Выражение (5.4) называется разложением вектора $\vec{a}$ в базисе векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Разложение вектора $\overrightarrow{AB}$ определится формулой

$$\overrightarrow{AB} = (x_b - x_a)\vec{i} + (y_b - y_a)\vec{j} + (z_b - z_a)\vec{k}, \tag{5.5}$$

где (x_a, y_a, z_a) и (x_b, y_b, z_b) – координаты точек A и B соответственно.

Модуль вектора находят по формуле

$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{5.6}$$

Линейные операции над векторами в координатной форме

1. $p\vec{a} = pa_x \vec{i} + pa_y \vec{j} + pa_z \vec{k}$ (5.7)

при умножении вектора на число «p» его координаты умножаются на число «p».

Пусть даны два вектора ***a*** (a_x, a_y, a_z) и ***b*** (b_x, b_y, b_z), заданные своими координатами, тогда:

2. $\vec{a}+\vec{b} = (a_x + b_x)\,i + (a_y + b_y)j + (a_z + b_Z)k$ (5.8)

при сложении их одноименные координаты складываются.

3 $\vec{a}-\vec{b} = (a_x - b_x)i + (a_y - b_y)j + (a_z - b_Z)k$ (5.9)

при вычитании – вычитаются.

4. Скалярное произведение в координатной форме равно:

с одной стороны,

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\ \varphi=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}\cdot\cos\varphi,$$

с другой стороны,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \qquad (5.10)$$

Объединив две последние формулы, можно найти угол между векторами:

$$\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{(\vec{a}\cdot\vec{в})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{в}|}=\frac{x_ax_b+y_ay_b+z_az_b}{\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}\cdot\sqrt{x_b^2+y_b^2+z_b^2}}. \qquad (5.11)$$

Условие перпендикулярности двух векторов запишется в виде:

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Rightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0. \qquad (5.12)$$

Условие параллельности:

$$\vec{a}\,||\,\vec{b}\Rightarrow\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}. \qquad (5.13)$$

Пример 1. Найти значение выражения $(2\vec{a}+\vec{b})\cdot 3\vec{c}$ по заданным координатам векторов $\vec{a}$ (1,5,3), $\vec{b}$ (3,0,-1), $\vec{c}$ (3, 1, 0), а также угол между векторами-сомножителями.

Решение

Найдем координаты вектора $2\vec{a}+\vec{b}$ в координатной форме:

$$2\vec{a}=\left(2\cdot1,\quad 2\cdot5,\quad 2\cdot3\right)=(2,10,6);$$

$2\vec{a}+\vec{b}=(2\cdot1,\ 2\cdot5,\ 2\cdot3)+(3,\ 0,\ -1)=(2+3,\ 10+0,\ 6-1)=(5,\ 10,\ 5).$

Координаты вектора $3\vec{c}$ будут (9, 3, 0).

По формуле (5.10) найдем скалярное произведение:

$$(2\vec{a}+\vec{b})\cdot 3\vec{c} = 5\cdot 9+10\cdot 3+5\cdot 0=72.$$

Косинус угла между векторами-сомножителями найдем по формуле (5.11)

$$\cos\varphi=\frac{72}{\sqrt{5^2+10^2+5^2}\cdot\sqrt{9^2+3^2+0}}=\frac{72}{12,25\cdot 9,49}=0,620,$$

а сам угол по калькулятору или таблице Брадиса $\varphi=51^\circ 12'$.

Ответ: угол между векторами равен $\varphi=51^\circ 12'$.

Пример 2. При каком значении параметра «α» векторы $\vec{a}$ (-2, 1, -4) и $\vec{b}(5,2,\alpha)$ перпендикулярны?

Решение

Используем условие перпендикулярности двух векторов. По формуле (5.12)

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0\to\ -2\cdot 5+1\cdot 2+(-4)\cdot\alpha=0;\ \ -4\alpha=8,\ \ \alpha=-2.$$

Ответ: $\vec{a}\perp\vec{b}$, если $\alpha=-2.$

Пример 3. Чему равно скалярное произведение векторов $\vec{a}$ (3,-2,-3) и $\vec{b}$ (1,2,-1)?

Решение

По формуле (5.10) находим скалярное произведение:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(3,-2,-3)\cdot(1,2,-1)=3-4+3=2.$$

Ответ: $\vec{a}\vec{b}=2.$

Пример 4. Могут ли векторы $\vec{a}(1,2)$, и $\vec{c}(2,4)$ составить базис 2-мерного пространства?

Решение

Согласно определению 10, два вектора могут составить базис 2-мерного пространства, если они не параллельны. Используем формулу (5.13):

$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$ – верное равенство, следовательно, векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ не могут составить базис 2-мерного пространства.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется геометрическим вектором, модулем вектора? Как обозначается вектор?

2. Какие векторы называются равными, противоположными, коллинеарными, компланарными?

3. Как определяются линейные операции над векторами: сложение, умножение на число? Запишите свойства этих операций.

4. Что называется ортом вектора?

5. Дайте понятие прямоугольной декартовой системы координат. Разложение вектора по единичным векторам *i, j, k*.

6. Дайте определение скалярного произведения. Свойства скалярного произведения векторов.

7. Как находится угол между двумя векторами?

8. Как запишутся необходимое и достаточное условие ортогональности и коллинеарности двух векторов в координатной форме?

5.3. Векторное произведение двух векторов

Упорядоченная тройка векторов ***a***, ***b***, ***c*** называется правоориентированной (или правой), если с конца 3-го вектора кратчайший поворот от 1-го ко 2-му виден против часовой стрелки. В противном случае тройка векторов называется левоориентированной (или левой).

Определение. Векторным произведением векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется вектор ***c***, который удовлетворяет следующим условиям:

- он перпендикулярен плоскости, содержащей векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$;

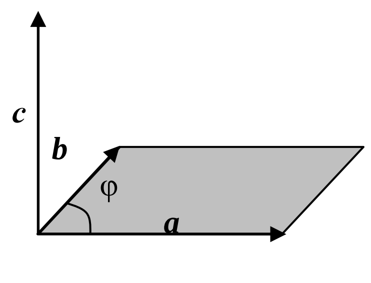


Рис. 5.5

- его модуль равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

$|c| = |a| \cdot |b| \cdot \sin\varphi,$ (5.14)

где φ – угол между векторами a и b;

a, b, c – правая тройка векторов.

Для векторного произведения обычно используют два обозначения:

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b},\ \ \vec{c}=\left[\vec{a},\vec{b}\right].$$

Свойства векторного произведения

1. $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

– векторное произведение обладает антикоммутативным свойством.

2. $k\vec{a}\times t\vec{b}=kt\vec{a}\times\vec{b}=\kappa t\left[\vec{a},\vec{b}\right]$

– постоянные «κ» и «t» можно вынести за знак векторного произведения.

3. Если $\vec{a}\parallel\vec{b}$, то $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin\varphi=0,$

в частности $\vec{a}\times\vec{a}=0.$

4. Если $\vec{a}\perp\vec{b}$, то $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|.$

5. $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}.$

Выражение векторного произведения в координатной форме. Пусть векторы-сомножители имеют вид:

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\quad \text{и}\quad \vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k},$$

тогда векторное произведение определяется по формуле

$$[\mathbf{a},\mathbf{b}]=\begin{vmatrix}\vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

или

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\vec{\mathbf{i}}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\vec{\mathbf{j}}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\vec{\mathbf{k}}. \qquad (5.15)$$

Пример 1. Найти векторное произведение векторов $\vec{a}\times\vec{b}$, если $\vec{a}(1,2,0)$ и $\vec{b}(3,6,1)$.

Решение

Используем формулу (5.15) $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 0\\ 3 & 6 & 1\end{vmatrix}=2\vec{i}-\vec{j}+0\vec{k}.$

Ответ: $\vec{a}\times\vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}.$

Пример 2. Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно (–2, 0, 3). Какие координаты будет иметь вектор $\vec{c}=-3\vec{b}\times 2\vec{a}$?

Решение

Используя свойства 1 и 2 векторного произведения, получим вектор $\vec{c}=-3\vec{b}\times 2\vec{a}=-6(-\vec{a}\times\vec{b})=6(-2,0,3)=(-12,0,18).$

Ответ: вектор $\vec{c}$ имеет координаты (-12, 0, 18).

Формулу модуля векторного произведения можно применять для определения площади параллелограмма, построенного на векторах-сомножителях, как на сторонах.

Пример 3. Определить площадь параллелограмма, если его сторонами служат векторы $\vec{a}(1,2,0)$ и $\vec{b}(3,6,1)$.

Решение

Векторное произведение этих векторов было найдено в примере 1. Найдем модуль этого вектора:

$$\left|\vec{c}\right|=\sqrt{(2)^2+(-1)^2}=\sqrt{5}=2,24.$$

Ответ: 2,24 (ед.)^2

5.4. Смешанное произведение трех векторов

Рассмотрим операцию, соединяющую скалярное и векторное произведения.

Пусть даны три вектора ***a***, ***b***, ***c***. Умножим ***b*** и ***c*** векторно. Полученный вектор [***b***, ***c***] умножим скалярно на вектор ***a***. В результате получим число (***a***, [***b***, ***c***]).

Определение. Число (***a***, [***b***, ***c***]) называется смешанным произведением векторов ***a***, ***b***, ***c*** и обозначается (***a***, ***b***, ***c***).

Свойства смешанного произведения

1. Смешанное произведение некомпланарных векторов ***a***, ***b***, ***c*** по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на сомножителях.

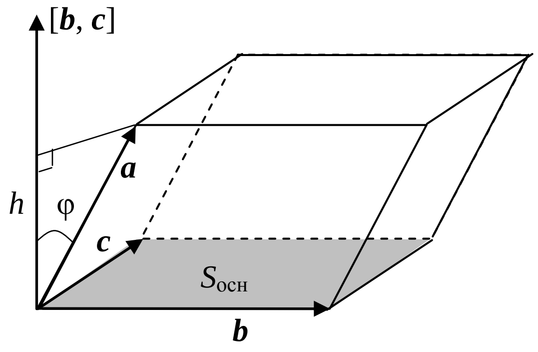


Рис. 5.6

Действительно, по определению скалярного произведения (***a***, ***b***, ***c***)=(***a***, [***b***, ***c***])=|***a***| · |[***b***, ***c***]| · cosφ, где φ – угол между векторами ***a*** и [***b***, ***c***].

Учитывая, что |***a***| cosφ равно высоте параллелепипеда h, а модуль векторного произведения |[***b***, ***c***]| равен площади параллелограмма, построенного на векторах ***b*** и ***c***, получаем

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = S_{\text{осн}} \cdot h = V_{\text{паралл}}.$$

2. Смешанное произведение является положительным, если тройка векторов ***a***, ***b***, ***c*** правая, и отрицательным, если она левая.

3. Смешанное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда сомножители лежат в одной плоскости, т.е. компланарны.

4. При перестановке сомножителей внутри векторного произведения общий знак меняется на противоположный, т.е. (***a***, [***b***, ***c***])= -(***a***, [***c***, ***b***]).

Перестановка сомножителей внутри скалярного произведения оставляет результат неизменным:

$$(\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]) = ([\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]\ \boldsymbol{a}).$$

В общем случае для любых векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ верны равенства

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = -(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = -(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = -(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}).$$

5. Для любых векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и чисел α, β верно равенство

$$(\alpha\, \boldsymbol{a}_1 + \beta \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \alpha\, (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) + \beta\, (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}),$$

т.е. смешанное произведение линейно по любому своему сомножителю.

Координаты смешанного произведения находятся по формуле

$$(a,b,c) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} =$$

$$= a_x \cdot \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} - a_y \cdot \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + a_z \cdot \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \qquad (5.16)$$

Понятно, что вычисление определителя можно производить разложением по элементам любой строки (столбца).

Пример 1. Определить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}(1,2,4)$, $\vec{b}(3,0,1)$ $\vec{c}(-2,4,2)$ как на сторонах.

Решение

Воспользуемся определением смешанного произведения 3 векторов и формулой (5.16), разложив определитель по элементам второго столбца:

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -2\cdot 8 + 4\cdot 12 = 32.$$

Ответ: объем параллелепипеда равен 32(ед)^3.

Пример 2. Будут ли компланарны векторы $\vec{a}(3,4,5)$, $\vec{b}(1,-2,3)$, $\vec{c}(6,8,10)$?

Решение

Воспользуемся свойством 3 смешанного произведения. Найдем *(а в с)* по формуле (5.16)

$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 6 & 8 & 10 \end{vmatrix} = 0,$ так как первая и третья строки пропорциональны. Следовательно, векторы лежат в одной плоскости.

Ответ: векторы компланарны.

5.5. Пример практического применения векторов в экономике

Покажем, как векторы можно использовать в экономике.

Пример. Первоначальные цены на товары пяти видов имели вид: первый стоил 124 руб., второй – 319 руб., третий – 276 руб., четвертый – 519 руб., пятый – 120 руб. Через год их цена установилась на следующих цифрах: 124, 187, 309, 564, 100 руб. Определить вектор цен.

Решение

Для того чтобы найти вектор цен, нужно найти их изменение. На языке экономики – это прирост (П). Его находят, вычитая из конечной цифры предыдущую $(X_2 – X_1)$. Поэтому получим

П = (124–120, 187–319, 309–276, 564–519, 100–120) =
= (4, –132, 33, 45, –20).

О чем говорят эти цифры или координаты этого вектора? Цены на первый, третий, четвертый товары повысились, а на второй и пятый – снизились. Вектор, полученный по этим правилам, называют вектором абсолютного прироста.

Иногда важен не абсолютный, а относительный прирост цены по отношению к первоначальной, выраженный в процентах. Поэтому каждая координата последнего вектора делится на первоначальную цену соответствующего товара и умножается на 100%:

$\boldsymbol{C}\%$ = (4/124)·100%; –(132/319)·100%; (33/276)·100%; (45/519)·100%; (–20/100)·100%) = (3,22%; –41,38%; 11,96%; 8,67%; –20%).

Таким образом, векторы как упорядоченные наборы чисел могут быть использованы и в экономике.

Вопросы для самоконтроля

1. Дать определение векторного произведения двух векторов. Свойства векторного произведения векторов.
2. Как можно определить площадь параллелограмма, сторонами которого являются векторы?
3. Дать определение смешанного произведения трех векторов. Свойства смешанного произведения.
4. Геометрический смысл смешанного произведения.
5. Как определить, будут ли 3 вектора компланарны?

II. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

6. Аналитическая геометрия на плоскости

Наука, описывающая геометрические фигуры с помощью формул, называется ***аналитической геометрией***. Ее создателем является выдающийся французский математик, философ и физиолог Рене Декарт, подаривший миру не только систему координат, которая носит его имя, но и всю современную алгебраическую символику.

Самым простым геометрическим объектом является прямая линия, или просто прямая.

Рассмотрим общий подход к составлению уравнений различных линий и поверхностей. Порядок действия (или алгоритм) такой:

1. Берем текущую точку M (x, y) рассматриваемого объекта. Текущие координаты (x, y) могут принимать любые, допустимые для объекта значения, т.е. не «соскакивать» с линии или поверхности.
2. Подставляем ее в уравнение связи для геометрического места точек. Уравнение связи, как правило, словесно описывает объект, т.е. определяет условие, которому подчиняются все точки объекта.
3. Получаем формулу или уравнение, связывающее текущие координаты и какие-либо постоянные.

Подобный подход, повторяющийся в выводах, приводил к так называемым *каноническим уравнениям* (от слова канон – повтор) прямых, плоскостей, кривых и поверхностей второго порядка.

6.1. Уравнения прямой на плоскости

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $A(X_a, Y_a)$, **параллельно данному вектору** $\mathbf{l}(m, n)$.

Этот вектор называется *направляющим* прямой L.

Вывод уравнения проведем как решение геометрической задачи, используя алгоритм, указанный выше.

Дано: точка $A(X_a, Y_a)$, $A(X_a, Y_a) \in L$

вектор $\boldsymbol{l}(m,n) \parallel L$

Найти: уравнение прямой *L.*

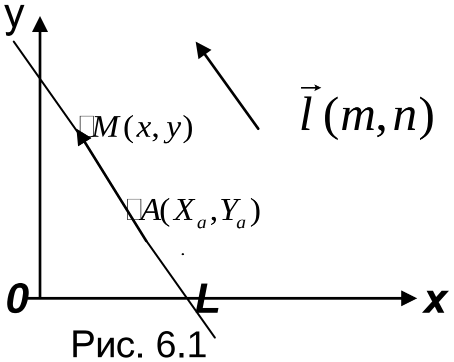


Рис. 6.1

Решение

1. Сделаем чертеж (рис. 6.1).

Берем текущую точку *M* (x_0, y_0) на прямой *L*.

2. Составляем вектор ***AM*** $(X{-}X_a,\ Y{-}Y_a)$.

Сравниваем векторы ***AM*** и ***l***. Они параллельны, следовательно, их координаты пропорциональны, т.е.

$$\frac{x - x_a}{m} = \frac{y - y_a}{n}. \tag{6.1}$$

Этому уравнению будут подчиняться только точки, лежащие на рассматриваемой прямой, и не будут удовлетворять точки, находящиеся вне нее. Именно это уравнение называют ***каноническим уравнением прямой***.

Уравнение прямой, проходящей через две точки *A* (X_a, Y_a) *и B* (X_b, Y_b).

В качестве направляющего вектора здесь берется вектор ***AB*** $(X_в{-}X_a\ ,\ Y_b{-}Y_a)$, и уравнение (6.1) запишется в виде

$$\frac{x - x_a}{x_b - x_a} = \frac{y - y_a}{y_b - y_a}. \tag{6.2}$$

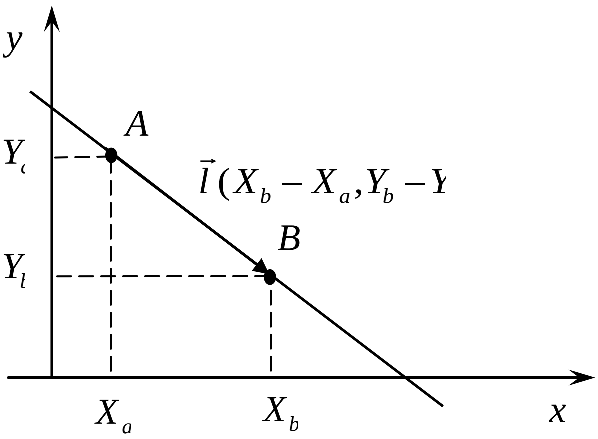


Рис. 6.2

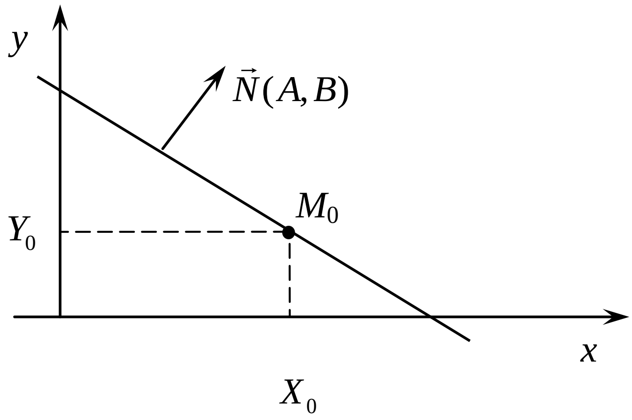


Рис. 6.3

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(X_0, Y_0)$, **перпендикулярно данному вектору *N* (*A, B*)** (рис. 6.3).

Для вывода этого уравнения учитывается, что векторы ***N*** и $\overrightarrow{MM_0}\left(X - X_a, Y - Y_b\right)$ будут перпендикулярны и, следовательно, их скалярное произведение будет равно нулю. По формуле (5.6) из предыдущего параграфа составляем их скалярное произведение в координатной форме и приравниваем его нулю:

$$A\left(x - x_a\right) + B\left(y - y_a\right) = 0. \tag{6.3}$$

Ему также будут отвечать только координаты точек, лежащих на прямой.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку *A* *(X$_a$, Y$_a$)* **в заданном направлении** (рис. 6.4).

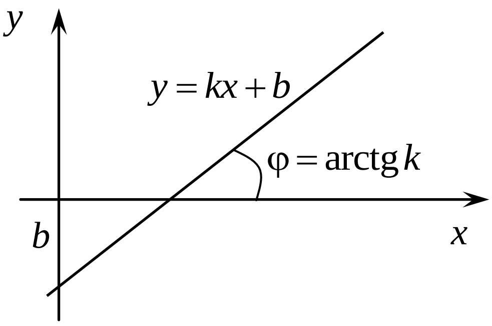


Рис. 6.4

Направление прямой можно задать с помощью углового коэффициента k, который равен тангенсу угла наклона прямой к положительному направлению оси *OX* (рис. 6.4). Тогда, $k = \dfrac{Y - Y_a}{X - X_a}$, где ($X$, $У$) – координаты текущей точки. Разрешая это уравнение относительно $Y - Y_a$, получим уравнение в виде:

$$y - y_a = k(\mathrm{x} - x_a). \tag{6.4}$$

Общее уравнение прямой на плоскости

Если все предыдущие уравнения привести к общему знаменателю, раскрыть скобки и привести подобные члены, то в результате этих преобразований получим уравнение вида:

$$Ax + By + C = 0. \tag{6.5}$$

Оно называется ***общим уравнением прямой*** на плоскости. Чтобы убедиться, что такое уравнение описывает именно прямую, преобразуем его еще раз и запишем следующим образом:

$$A(x-0) + B\left(y + \frac{C}{B}\right) = 0,$$

т.е. это – уравнение прямой, проходящей через точку (0, –*C*/*B*), перпендикулярно вектору с координатами (*A*, *B*), которое мы выводили.

Поэтому любое уравнение первой степени относительно текущих координат описывает на плоскости прямую.

Уравнение прямой в отрезках

Преобразуем уравнение (6.5) следующим образом:

Перенесем свободный член в правую часть: $Ax + By = -C.$

Поделив обе части уравнения на *(-C),* получим $\dfrac{Ax}{-C} + \dfrac{By}{-C} = 1$ или $\dfrac{x}{\frac{-C}{A}} + \dfrac{y}{\frac{-C}{B}} = 1.$ Обозначим $\dfrac{-C}{A} = a$ и $\dfrac{-C}{B} = b,$ тогда наше уравнение запишется в виде:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \tag{6.6}$$

Оно называется уравнением прямой в отрезках, которые она отсекает от осей координат $x=a$ и $y=в$ (рис. 6.5).

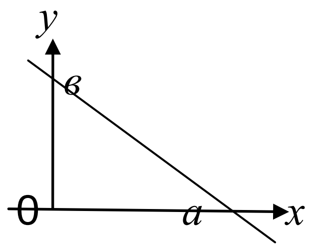


Рис. 6.5

Итак, мы рассмотрели 6 возможных уравнений прямой на плоскости, причем показали геометрический смысл каждой пары коэффициентов *(A, B)* (m, n), ($a, в$).

При решении задач по аналитической геометрии следует внимательно читать условие, которым задается прямая и выбирать то уравнение, которое подходит условию задачи.

Пример 1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку *A* (1, –3), параллельно вектору $\boldsymbol{a}$ (4, –7).

Решение

Воспользуемся уравнением (6.1), потому что именно в нем фигурируют точка и параллельный вектор. Получим

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-(-3)}{-7},$$

что после приведения к общему знаменателю дает:

$$-7(x-1)=4(y+3).$$

Раскрываем скобки, приводим подобные, получаем уравнение в общем виде:

$$7x+4y+5=0.$$

Ответ: *у*равнение прямой $7x+4y+5=0.$

Пример 2. Прямая проходит через точки *A* (3, 5) и *B* (4, 7). Будет ли точка *K* (1, 1) лежать на этой прямой?

Решение

Можно решить эту задачу чисто геометрически: построить точки *A* и *B* в Декартовой системе координат, соединить их прямой и посмотреть, будет ли точка *K* принадлежать этой прямой. Это известный школьный прием. А можно составить уравнение прямой, проходящей через две точки *A* и *B*, затем подставить в него координаты точки *K* и посмотреть, что получится. Если равенство – точка принадлежит прямой, если нет – не принадлежит.

Решим эту задачу аналитически.

Уравнение прямой *AB* будем составлять как уравнение прямой, проходящей через две точки (см. формулу (6.2)):

$$\frac{x-3}{4-3}=\frac{y-5}{7-5},$$

или после приведения к общему знаменателю

$$2(x-3)=1(y-5), \text{ или } y=2x-1.$$

Подставив в него координаты т. *K*(1, 1), получим:

$$2(1-3)=(1-5), \text{ т.е. } -4=-4.$$

Ответ: точка *K* принадлежит прямой *AB* (рис. 6.6).

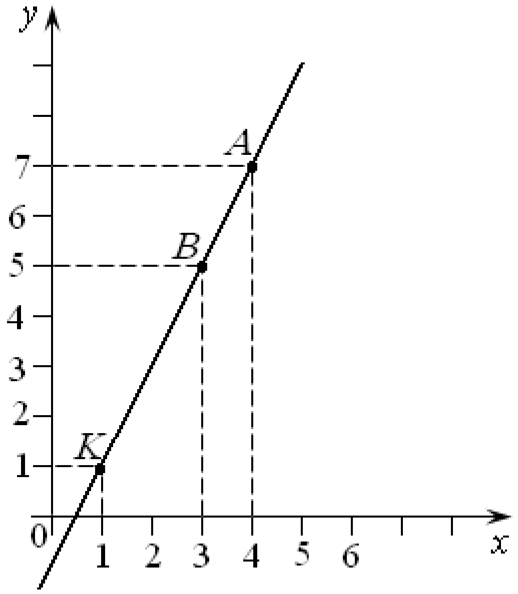


Рис. 6.6

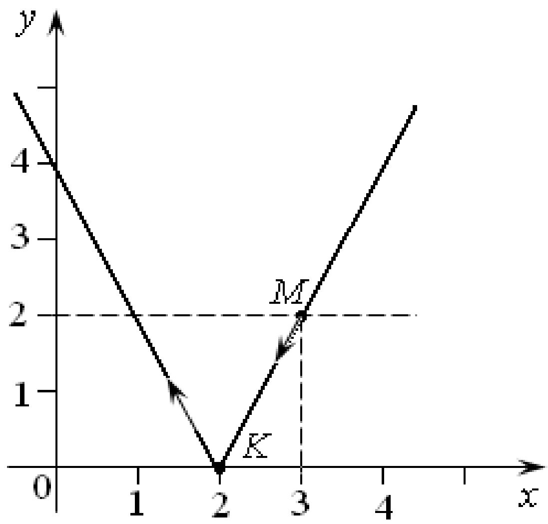


Рис. 6.7.

Пример 3. Из точки *M* (3; 2) выходит луч света под углом $\varphi=\operatorname{arctg}2$ к оси *OX*. Найти уравнения падающего и отраженного лучей (рис. 6.7).

Решение

Найдем уравнение падающего луча. Эта прямая L_1 проходит через точку M с угловым коэффициентом.

$$k_1 = \operatorname{tg}\varphi = 2.$$

Тогда, используя уравнение (6.4), получим

$$y - 2 = 2(x - 3),$$

или

$$L_1:\ 2x - y - 4 = 0.$$

Это уравнение падающего луча.

Чтобы составить уравнение отраженного луча L_2, нужно знать координаты точки отражения K и угловой коэффициент k_2. Координаты точки отражения K можно найти как точку пересечения прямой L_1 и оси Оx:

$$\begin{cases} 2x - y - 4 = 0; \\ y = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2; \\ y = 0, \end{cases}$$

т.е. координаты точки K (2;0).

Угловой коэффициент k_2 найдем из условия, известного из физики: «угол падения равен углу отражения». Тогда очевидно, что

$$\varphi_2 = 180^0 - \varphi,$$

отсюда

$$k_2 = \operatorname{tg}\varphi_2 = \operatorname{tg}(180^0 - \varphi) = -\operatorname{tg}\varphi = -2.$$

Теперь известны все параметры, чтобы записать уравнение отраженного луча. Используем ту же формулу (6.4)

$$y = -2(x - 2),$$

или

$$L_2:\ 2x + y - 4 = 0.$$

Ответ: уравнение падающего луча $L_1:\ 2x - y - 4 = 0,$ уравнение отраженного луча $L_2:\ 2x + y - 4 = 0.$

6.2. Взаимное расположение прямых на плоскости

Очень часто при решении задач по аналитической геометрии приходится выяснять, пересекаются ли прямые, и в случае пересечения – в какой точке и под каким углом. Ответим на этот вопрос.

Пусть две прямые L_1 и L_2 заданы своими общими уравнениями:

$$A_1x + B_1y = C_1,$$
$$A_2x + B_2y = C_2$$

Какую информацию несут коэффициенты A_1, B_1 и A_2, B_2?

Это координаты перпендикулярных (нормальных) векторов к обеим прямым (см. «уравнение прямой, проходящей через данную точку, перпендикулярно данному вектору»).

Для того чтобы определить, будут ли они пересекаться, нужно решить систему их уравнений. Вспомните, когда система будет совместна и определена. Когда главный определитель отличен от нуля, т.е. когда его строки непропорциональны и выполняется условие $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$.

Тогда система будет иметь единственное решение, которое можно найти любым методом (Крамера, Гаусса и т.д.).

С другой стороны, последнее неравенство говорит о не параллельности их нормальных векторов.

Если прямые параллельны, то система решения не имеет. Аналитически это будет выглядеть так:

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}. \qquad (6.7)$$

Но если все три дроби равны, то прямые совпадают друг с другом, и поэтому система имеет бесконечное множество решений.

Угол между двумя прямыми можно найти по двум формулам.

Если прямые заданы общими уравнениями, то угол между ними совпадает с углом между их нормальными векторами. Его вычисляют по формуле (5.11) из предыдущей лекции. Для нашего случая она будет иметь вид:

$$\cos(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2) = \cos\left(\vec{\mathbf{N}}_1, \vec{\mathbf{N}}_2\right) = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{\left(A_1^2 + B_1^2\right)\left(A_2^2 + B_2^2\right)}}. \qquad (6.8)$$

Условие ***перпендикулярности*** прямых запишется в виде:

$$L_1 \perp L_2 \Rightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \qquad (6.9)$$

Если прямые заданы уравнениями с угловыми коэффициентами вида:

$$y = k_1x + b_1 \text{ и } y = k_2x + b_2,$$

то тангенс угла между ними определится по формуле

$$\operatorname{tg}(L_1, L_2) = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \qquad (6.10)$$

Условие параллельности в этом случае:

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2. \qquad (6.11)$$

Условие перпендикулярности:

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow k_1 = -\frac{1}{k_2}. \qquad (6.12)$$

Пример 4. Найти точку пересечения прямых $2x + 5y = 3$ и $5x - 2y = 4$ и угол между ними.

Решение

Найдем точку пересечения прямых, решив систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 3, \\ 5x - 2y = 4, \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 25 = -29, \ \Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -26, \ \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -7,$$

$$X_a = \frac{26}{29}, \quad Y_a = \frac{7}{29}.$$

Угол между данными прямыми равен углу между их нормальными векторами $\overrightarrow{N_1}$ (2, 5) и $\overrightarrow{N_2}$ (5, –2).

По формуле (6.8) имеем:

$$\cos\varphi = \frac{2 \cdot 5 - 5 \cdot 2}{\sqrt{4 + 25} \cdot \sqrt{25 + 4}} = 0, \ \cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Ответ: 1) точка пересечения $A(\frac{26}{29}, \frac{7}{29})$;

2) прямые перпендикулярны.

Пример 5. При каком значении параметров a и b прямые $L_1: (a-1)x - 2y - 1 = 0$ и $L_2: 6x - 4y + b = 0$ пересекаются, параллельны, совпадают?

Решение

Две прямые пересекаются, если выполняется условие

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}.$$

В нашем случае

$$\frac{a-1}{6} \neq \frac{-2}{-4} \quad \Rightarrow \quad a \neq 4.$$

Две прямые параллельны, если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$,

т.е. $\frac{a-1}{6} = \frac{-2}{-4} \neq \frac{-1}{b} \quad \Rightarrow \quad a = 4, b \neq -2.$

Две прямые совпадают при условии, что $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$,

т.е. если $a = 4, \quad b = -2.$

Ответ: L_1 и L_2 пересекаются, если $a \neq 4$;

$L_1 \parallel L_2$, если $a = 4$ и $b \neq -2$;

$L_1 =$ L_2, если $a = 4, \quad b = -2.$

Пример 6. Дана точка $A(0;4)$ и прямая $L: y = -2x + 8$. Написать уравнения прямых L_1 и L_2, проходящих через точку *A*, причем

1. $L_1 \parallel L$ и 2. $L_2 \perp L$.

Решение

Сделаем чертеж (6.8).

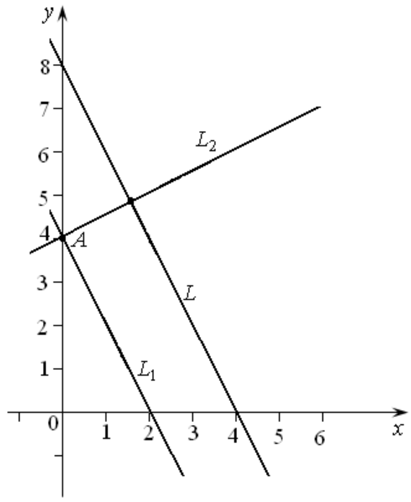


Рис. 6.8

1. Угловой коэффициент прямой L равен k = –2. По условию $L_1 \parallel L$, следовательно $k_1 = k = -2$. По формуле (6.4) находим уравнение прямой L_1:

$y-4=-2(x-0)$, или $y=4-2x$. Здесь k = - 2.

2. Поскольку $L_2 \perp L$, то $k_2 = -\frac{1}{k} = \frac{1}{2}$. Тогда уравнение прямой L_2 будет иметь вид:

$y-4=\frac{1}{2}(x-0)$ или $y=4+\frac{1}{2}x.$

Ответ: 1) уравнение прямой L_1: $y=4-2x$;

2) уравнение прямой L_2: $y=4+\frac{1}{2}x.$

Приведем формулу расстояния d от точки M_0 (x_0, y_0) до прямой, заданной в общем виде $Ax+By+C=0$ без доказательства:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (6.13)$$

Пример 7. Найти расстояние от точки M_0 *(-1,2)* до прямой $2x - 4y = 5$.

Решение

По формуле (6.13) имеем: $d=\frac{|2\cdot(-1)+(-4)\cdot 2-5|}{\sqrt{2^2+(-4)^2}}=\frac{|-15|}{\sqrt{20}}=3,354.$

Ответ: d = 3, 354 (ед. дл.)

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте алгоритм вывода уравнений прямой на плоскости.
2. Какие уравнения прямой на плоскости вы знаете?
3. Как выводится каноническое уравнение? Чем задается такая прямая?
4. Какие виды уравнений прямой были известны вам из школьного курса?
5. Каков геометрический смысл коэффициентов, входящих в эти уравнения?
6. Как найти точку пересечения двух прямых на плоскости?

6.3. Канонические уравнения кривых 2-го порядка

Кривой 2-го порядка называется линия, определяемая уравнением второй степени относительно текущих координат. В общем случае это уравнение имеет вид:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dx + 2Ey + H = 0, \tag{6.14}$$

где все числа *A*, *B*, *C*, и т.д. – действительные числа, кроме того, по крайней мере одно из чисел *A*, *B*, *C* – отлично от нуля.

До введения декартовой системы координат все кривые описывались *словесно*, исходя из геометрических свойств рассматриваемой кривой. Вывод их *уравнений* проводится по той же схеме, что и вывод уравнений прямых на плоскости**.**

Каноническое уравнение окружности

Определение 1. ***Окружность* –** геометрическое место точек на плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой центром.

Уравнение окружности, с центром в точке O_1 (a, b) и радиусом R в декартовой системе координат, известное из школьного курса математики, имеет вид:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2, \tag{6.15}$$

или $$\frac{(x-a)^2}{R^2}+\frac{(y-b)^2}{R^2}=1. \qquad (6.15а)$$

Последнее уравнение называют каноническим уравнением окружности со смещенным центром.

Если раскрыть скобки, то получим уравнение, схожее с уравнением (6.14), в котором отсутствует член, содержащий произведение текущих координат, и коэффициенты при старших степенях равны между собой.

Каноническое уравнение параболы

Определение 2. ***Парабола*** **–** геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки *F*, называемой *фокусом*, и данной прямой, называемой *директрисой.*

Обозначим расстояние от фокуса до директрисы через *p.* Эта величина называется *параметром* параболы.

1. Расположим ось абсцисс так, чтобы она проходила через фокус перпендикулярно директрисе и имела положительное направление от директрисы к фокусу.

2. Начало координат поместим в середину этого перпендикуляра. Тогда координаты точки будут $F(p/2,\ 0)$, а уравнение директрисы: $x=-p/2$.

3. Возьмем текущую точку на параболе $M(x,\ y)$.

4. По определению параболы расстояние MN от точки M до директрисы равно ее расстоянию MF от фокуса: $MF = MN.$ Как видно из чертежа (рис. 6.9), координаты точки $N(-p/2,\ y)$. Найдем эти расстояния по формуле расстояния между двумя точками:

$$MN=\frac{p}{2}+x,\quad MF=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+y^2}.$$

Приравняв правые части этих выражений и возведя обе части равенства в квадрат, получим:

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2$$

или после сокращений

$$y^2 = 2px. \qquad (6.16)$$

Уравнение (6.16) называется *каноническим уравнением параболы*. Ему будут удовлетворять только точки, лежащие на кривой.

Исследуем форму ее графика по каноническому уравнению.

Поскольку переменная y входит в четной степени, то ось *OX* будет являться осью симметрии, т.е. одному значению *X* будет соответствовать два значения *Y* – положительное и отрицательное.

Так как правая часть неотрицательна $y^2 \geq 0$, то и левая – тоже. Поскольку p – расстояние между фокусом и директрисой, всегда больше нуля, то и $x \geq 0$. Если x=0, то y=0, т.е. парабола проходит через начало координат. При неограниченном возрастании x абсолютная величина *y* также будет неограниченно возрастать.

График параболы, определяемой уравнением (6.16) приведен на рисунке 6.9.

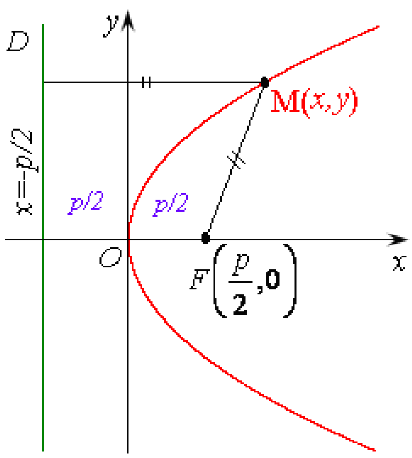


Рис. 6.9

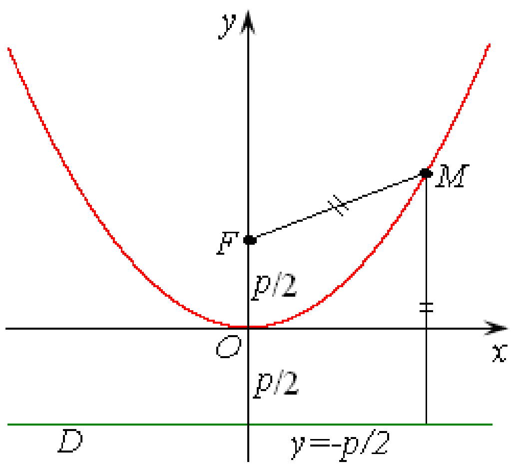


Рис. 6.10

Ось симметрии параболы называется фокальной осью, так как на ней лежит фокус. Если фокальную ось параболы принять за ось ординат, то ее уравнение примет вид:

$$x^2 = 2py. \qquad (6.16а)$$

Ее чертеж показан на рисунке 6.10. В этом случае фокус будет находиться в точке $F(0, p/2)$, а уравнение директрисы будет иметь вид $y = -p/2$.

Таким образом, мы рассмотрели параболу, нашли ее уравнение и показали возможные расположения относительно начала координат.

Если вершина параболы смещена в точку $O'(x_0, y_0)$, то ее каноническое уравнение записывается в виде:

$$(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0) \text{ или } (x-x_0)^2 = 2p(y-y_0).$$

Выводы остальных кривых 2-го порядка можно найти в рекомендуемой литературе, поэтому ограничимся их определениями и уравнениями.

Каноническое уравнение эллипса

Определение 3. ***Эллипсом*** называется множество всех точек плоскости, для каждой из которых *сумма* расстояний от двух заданных точек, называемых *фокусами,* есть величина постоянная, равная 2 *a*, при условии, что 2 *a* > 2 *c*, где 2 *c* – расстояние между фокусами.

Фокусы эллипса лежат на оси абсцисс, начало координат – в середине отрезка между фокусами, их координаты соответственно $F_{1,2}(\pm c, 0).$ Они располагаются внутри эллипса.

Каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (6.17)$$

где $b^2 = a^2 - c^2$.

Если центр симметрии эллипса смещен в точку $O'(x_0, y_0),$ то его уравнение запишется в виде:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1. \qquad (6.17а)$$

Как видно из уравнений эллипса, его график симметричен относительно обеих осей координат и каждому значению *x* соответствует два значения *y*. Кроме того, график пересекает оси координат в точках $A_{1,2}(\pm a, 0)$ и $B_{1,2}(0, \pm b)$. Эти точки называют *вершинами* эллипса. Для удобства его построения строят основной прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат: $x = a$, $x = -a$, $y = b$, $y = -b$, и в него вписывают эллипс.

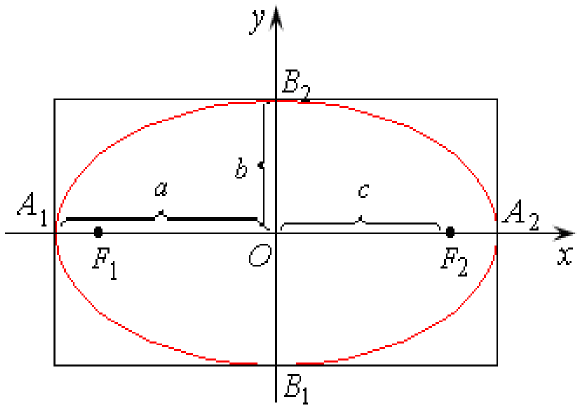


Рис. 6.11

Каноническое уравнение гиперболы

Определение 4. ***Гиперболой*** называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых *модуль разности* расстояний до двух заданных, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, равная $2a$, при условии, что $2a < 2c$, где $2c$ – расстояние между фокусами.

Фокусы гиперболы $F_{1,2}(\pm c, 0)$ располагают на оси *OX*, которую называют *фокальной* и *действительной* осью, потому что только с ней пересекаются вершины гиперболы в точках $A_{1,2}(\pm a, 0)$. Пересечения с осью *OY* нет, поэтому ее называют еще *мнимой* осью гиперболы.

Каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (6.18)$$

где $b^2 = c^2 - a^2$ (рис. 6.12).

Уравнение гиперболы с центром симметрии, смещенным в точку (x_0, y_0), запишется в виде:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1. \qquad (6.18а)$$

Гипербола также симметрична относительно обеих осей координат. При построении ее графика также строится основной прямоугольник со сторонами, лежащими на прямых $x=\pm a$ и $y=\pm b$. Затем проводят его диагонали. Они будут служить асимптотами – прямыми, к которым стремятся точки графика гиперболы при неограниченном удалении *x* от начала координат.

Уравнения ***асимптот*** в гиперболы имеют вид:

$$y=\pm\frac{b}{a}x, \quad y-y_0=\frac{b}{a}(x-x_0). \qquad (6.18б)$$

Если *x* неограниченно удаляется от начала координат, то *y* тоже будет уходить в бесконечность. График гиперболы приведен на рисунке 6.12.

Если фокальной и действительной осью будет служить ось *OY*, то уравнение такой гиперболы запишется в виде:

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1. \qquad (6.18в)$$

На рисунке 6.12 она изображена пунктирной линией.

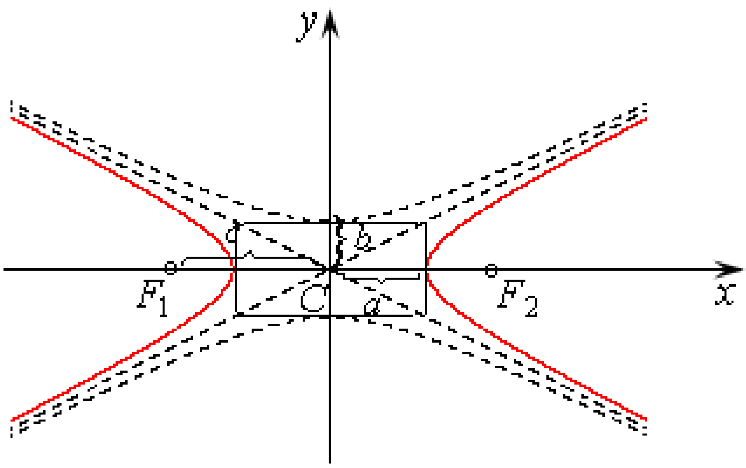


Рис. 6.12

Приведение уравнения кривой второго порядка к каноническому виду

Итак, мы рассмотрели четыре кривых второго порядка: окружность, параболу, эллипс и гиперболу. Возникает вопрос: существуют ли другие линии, определяемые уравнением второй степени $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+H=0$?

Чтобы ответить на этот вопрос, приведем примеры:

1) $x^2+y^2=0$. Этому уравнению удовлетворяет только одна точка на плоскости O(0,0), так как сумма квадратов двух чисел всегда больше нуля;

2) $x^2-y^2=0$. Это уравнение можно переписать в виде $(x-y)(x+y)=0$ и приравнять каждый из сомножителей нулю. Получим две пересекающиеся прямые $x=y$ и $x=-y$;

3) $x^2-2xy+y^2=0$. Оно равносильно уравнению $(x-y)^2=0$, которое представляет две слившиеся прямые вида $x-y=0$;

4) $x^2=4$, $y^2=9$. Каждое из этих уравнений также представляет пары прямых: $x=\pm 2$ в первом случае и $y=\pm 3$ во втором;

5) $x^2+y^2+1=0$. Это уравнение не может определять никакую линию на плоскости, так как сумма трех положительных чисел не может быть равна нулю.

Приведенные примеры показывают, что нельзя однозначно ответить на поставленный вопрос. Необходимо подходить к каждому случаю отдельно.

Рассматривая уравнения второго порядка, не содержащие члена с произведением координат, можно привести их к одному из рассмотренных выше видов с помощью выделения полного квадрата по каждой из переменных.

Пример 1. Привести уравнение к каноническому виду, указать вид кривой:

$$x^2+2x+y^2+6y-7=0.$$

Решение

Представим левую часть в виде суммы квадратов:

$$(x^2+2x+1)-1+(y^2+6y+9)-9-7=0,$$

или

$$(x+1)^2+(y+3)^2=17.$$

Это уравнение представляет окружность с центром в точке O' (–1,–3) и радиусом, равным $\sqrt{17}$.

Пример 2. Показать, что уравнение

$$16x^2+25y^2+32x-100y-284=0$$

определяет эллипс, приведя его к каноническому виду. Найти центр эллипса, его полуоси и фокусы. Сделать чертеж.

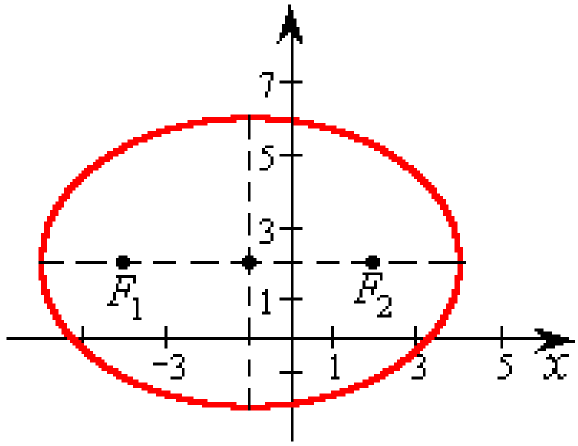


Рис. 6.13

Решение

Сгруппируем слагаемые, содержащие x и y:

$$16(x^2+2x)+25(y^2-4y)-284=0.$$

После этого выражения в скобках преобразуем таким образом, чтобы можно было воспользоваться формулой полного квадрата, т.е. в каждой скобке добавим и отнимем такое число, чтобы можно было воспользоваться формулой

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2:$$

$$16(\underbrace{x^2+2x+1}_{(x+1)^2}-1)+25(\underbrace{y^2-4y+4}_{(y-2)^2}-4)-284=0,$$

отсюда получаем:

$$16(x+1)^2 - 16 + 25(y-2)^2 - 100 - 284 = 0$$

или

$$16(x+1)^2 + 25(y-2)^2 = 400.$$

Разделив обе части уравнение на 400, получим

$$\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1.$$

Это каноническое уравнение эллипса, центр которого находится в точке O' (–1,2).

Большая полуось равна a = 5, малая b = 4, фокальное расстояние $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 3$.

Пример 3. Показать, что уравнение

$$9x^2 - 16y^2 + 18x + 64y - 199 = 0$$

определяет гиперболу, приведя его к каноническому виду. Найти центр гиперболы, ее полуоси, фокусы и уравнения асимптот. Сделать чертеж.

Решение

Дополняя члены, содержащие x и y, до полного квадрата:

$$9(x^2 + 2x) - 16(y^2 - 4y) - 199 = 0$$

или

$$9(x + 1)^2 - 9 - 16(y - 2)^2 + 64 - 199 = 0.$$

Получаем каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1.$$

Следовательно, центр гиперболы находится в точке O' (–1;2), действительная полуось a=4, мнимая b=3, фокальное расстояние $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$. Уравнения асимптот согласно формуле (6.18 в) имеют вид:

$$y - 2 = \pm\frac{3}{4}(x+1).$$

Построение гиперболы лучше начинать с построения основного прямоугольника с центром в т. O', затем асимптот, а затем уже отмечать фокусы, отложив от центра 5 ед. масштаба (рис. 6.14).

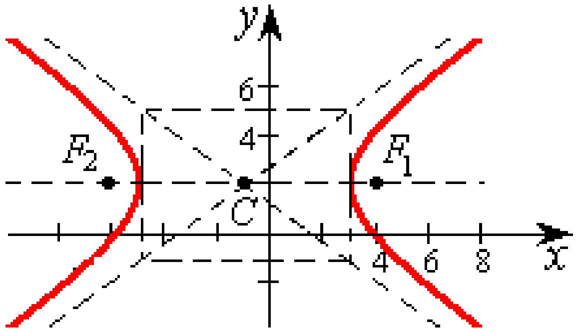


Рис. 6.14

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте алгоритм исследования геометрического образа уравнения вида $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

2. Как записываются канонические уравнения окружности, параболы, гиперболы с центром в начале координат?

3. Как записываются канонические уравнения окружности, параболы, гиперболы с центром в точке с координатами (x_0, y_0)?

4. С помощью какого приема уравнения второй степени приводятся к каноническому виду?

7. Аналитическая геометрия в пространстве

7.1. Уравнения плоскости в пространстве

Начальными для описания геометрическими объектами в пространстве являются плоскость и прямая.

Плоскость в пространстве может быть задана различными уравнениями, которые выводятся по тому же алгоритму, что уравнения *прямой на плоскости* с использованием средств векторной алгебры для пространственного случая.

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, перпендикулярно нормальному вектору $\vec{N}$ с координатами (A, B, C) (рис. 7.1)

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \tag{7.1}$$

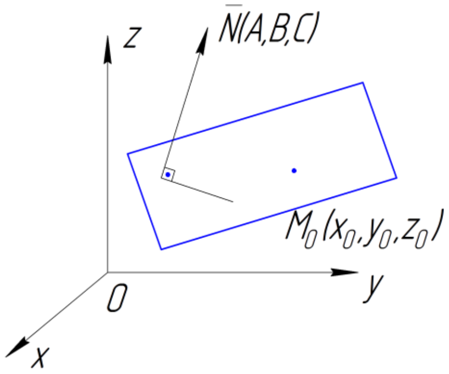


Рис. 7.1

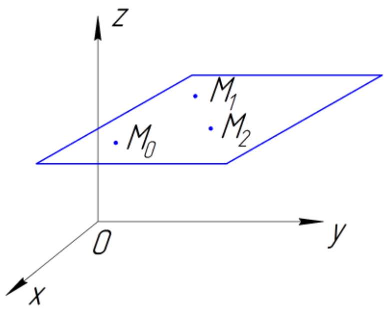


Рис. 7.2

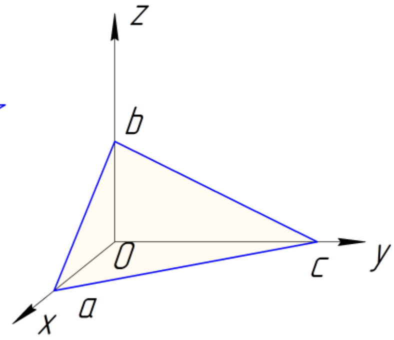


Рис. 7.3

Уравнение плоскости, проходящей через три точки с координатами $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ (рис. 7.2).

.
$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0. \tag{7.2}$$

Уравнение плоскости в отрезках (см. рис. 7.3)

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{c}+\frac{z}{b}=1. \qquad (7.3)$$

Здесь числа a, c, b, показывают, какие отрезки отсекает плоскость от осей координат Ох, Оу, Оz. Оно удобно для построения плоскости в трехмерной системе координат.

Раскрыв скобки в уравнении (7.1), разложив определитель (7.2) по элементам *первой* строки, приведя к общему знаменателю выражение (7.3), получим ***общее уравнение плоскости***

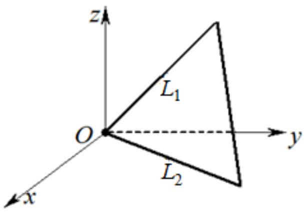
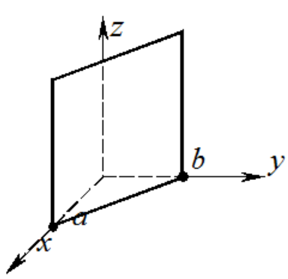
$$Ax+By+Cz+D=0. \qquad (7.4)$$

Уравнение первой степени относительно текущих координат всегда представляет плоскость.

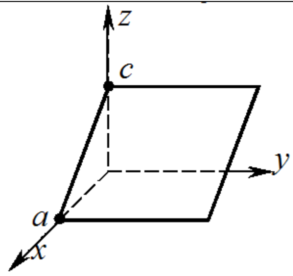
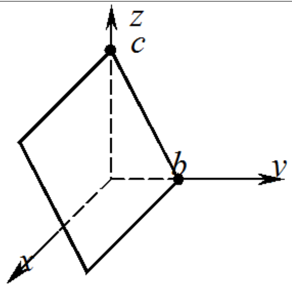
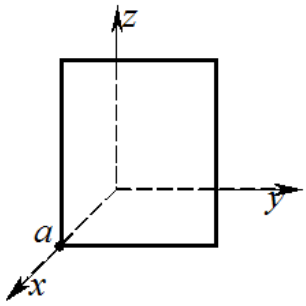
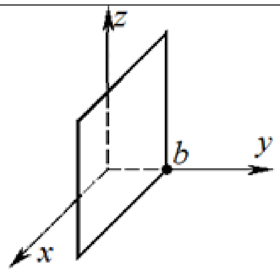
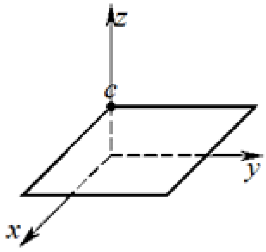
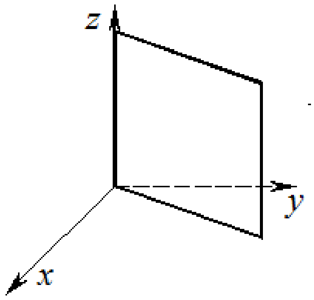
В зависимости от значений коэффициентов А, В, С плоскость может принимать различные положения относительно координатных плоскостей. В таблице 7.1 приведены различные виды неполных уравнений и показаны соответствующие рисунки.

Неполные уравнения плоскостей и их положения в пространстве

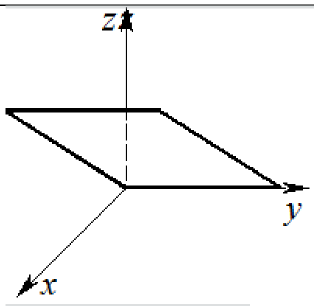
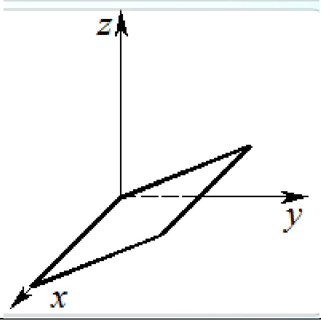
Таблица 7.1

$Ax+By+Cz=0$ т. $O\in P$ $L_1: By+Cz=0$ (пересечение с плоскостью yOz) $L_2: Ax+By=0$ (пересечение с плоскостью xOy)	
$Ax+By+D=0$ $P\parallel Oz,\quad P\perp xOy$ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$	

Продолжение табл. 7.1

$Ax + Cz + D = 0$ $P \parallel Oy, \quad P \perp xOz$ $\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = 1$	
$By + Cz + D = 0$ $P \parallel Ox, \quad P \perp yOz$ $\dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$	
$Ax + D = 0$ $P \parallel yOz, \quad P \perp Ox$ $\dfrac{x}{a} = 1$	
$By + D = 0$ $P \parallel xOz, \quad P \perp Oy$ $\dfrac{y}{b} = 1$	
$Cz + D = 0$ $P \parallel xOy, \quad P \perp Oz$ $\dfrac{z}{c} = 1$	
$Ax + By = 0$ $P \supset Oz$	

Окончание табл. 7.1

$Ax + Cz = 0$ $P \supset Oy$	
$By + Cz = 0$ $P \supset Ox$	

Прокомментируем данные этой таблицы:

выражение $O \in P$ в левой части говорит о том, что плоскость проходит через начало координат;

выражение $P \supset Ox$ – плоскость проходит через ось Ox;

выражение $P \parallel xOy,\ \ P \perp Oz$ – плоскость параллельна координатной плоскости xOy и перпендикулярна оси Oz.

Коэффициенты *а, в, с* получаются после преобразований соответствующих уравнений плоскости.

Анализ уравнений показывает, что если в уравнении отсутствуют:

1) свободный член, то она проходит через начало координат;

2) какая-либо координата, то плоскость параллельна отсутствующей оси координат;

3) две координаты, то плоскость параллельна координатной плоскости, с отсутствующими координатами.

Угловые соотношения между двумя плоскостями P_1 *и* P_2 определяются угловыми соотношениями между их нормальными векторами $\vec{N}_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{N}(A_2, B_2, C_2)$.

Если

1. $P_1 \| P_2$, то $\overrightarrow{N_1} \| \overrightarrow{N_2}$ и $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$. (7.5)

2. $P_1 \perp P_2$, то $\vec{N}_1 \perp \overrightarrow{N_2}$ и $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0.$ (7.6)

3. $\angle P_1 P_2 = \varphi$, то $\cos\varphi = \dfrac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$. (7.7)

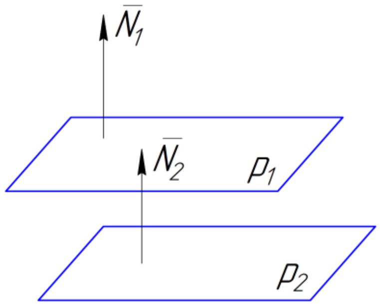


Рис. 7.4

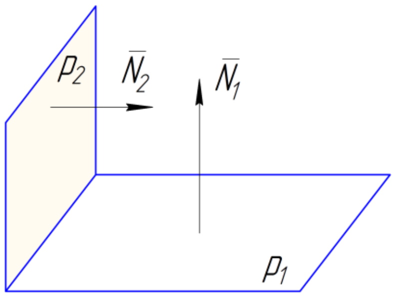


Рис. 7.5

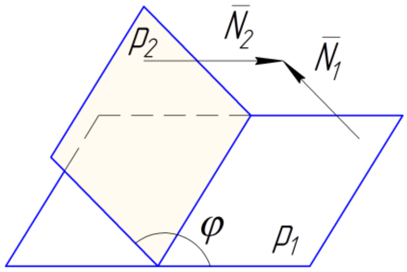


Рис. 7.6

В последней формуле (7.7) полагается, что двугранный угол между плоскостями равен плоскому углу между их нормальными векторами.

7.2. Уравнения прямой в пространстве

Пересечение двух плоскостей всегда происходит по прямой линии. Поэтому первое уравнение *прямой в пространстве* представляется так:

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0; \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (7.8)$$

Эта система имеет множество решений при условии, что плоскости не параллельны.

Уравнение прямой, проходящей через две точки ***A*** (x_a, y_a, z_a) и ***B*** $(x_в, y_в, z_в)$ аналогично уравнению прямой на плоскости (6.2), но добавляется третья координата и третье равенство:

$$\frac{x - x_a}{x_b - x_a} = \frac{y - y_a}{y_b - y_a} = \frac{z - z_a}{z_b - z_a}. \qquad (7.9)$$

Уравнение прямой, проходящей через данную точку A (x_a, y_a, z_a) **параллельно направляющему вектору** $\vec{s}(l,m,n)$, также имеет аналог (см. формулу (7.1)):

$$\frac{x-x_a}{l}=\frac{y-y_a}{m}=\frac{z-z_a}{n}. \qquad (7.10)$$

Угловые соотношения между двумя прямыми определяются формулами (5.11)–(5.13) для направляющих векторов $\vec{s_1}(l_1,m_1n_1)$ и $\vec{s}_2(l_2,m_2,n_2)$, в которые введена третья координата.

Пример 1. Найти угол между прямыми $\frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{2}=\frac{z-9}{-1}$ и $\frac{x+3}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z+6}{7}$.

Решение

Направляющий вектор первой прямой имеет координаты (*3, 2, -1*), второй – (*1,2,7*). Используя формулу, получаем: $\cos\varphi=\frac{3\cdot1+2\cdot2-1\cdot7}{\sqrt{9+4+1}\cdot\sqrt{1+4+49}}=0 \ \Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{2}$, т.е. прямые перпендикулярны.

Ответ: $L_1\perp L_2$.

Пример 2. При каком значении параметра «c» прямые $\frac{x-7}{3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-5}{1}$ и $\frac{x+4}{6}=\frac{y-2}{4}=\frac{z}{c}$ параллельны?

Решение

Условием параллельности прямых является параллельность их направляющих векторов. Для того чтобы два вектора были параллельны, их координаты должны быть пропорциональны, т.е. должно выполняться равенство $\frac{3}{6}=\frac{2}{4}=\frac{1}{c}$,

отсюда $\frac{1}{2}=\frac{1}{c}$ и c = *2.*

Ответ: c =*2.*

7.3. Угловые соотношения между плоскостью и прямой

Угловые соотношения между плоскостью и прямой определяют исходя из того, что вектор $\vec{s}(l,m,n)$ параллелен прямой, а вектор ***N*** *(A, B, C)* перпендикулярен плоскости. Поэтому, если прямая и плоскость перпендикулярны, их определяющие векторы перпендикулярны (рис. 7.7); если параллельны, то векторы перпендикулярны (рис. 7.8).

В остальных случаях угол между плоскостью и прямой φ заменится на дополнительный $(90° - \varphi)$ и $\cos(90° - \varphi) = \sin\varphi$.

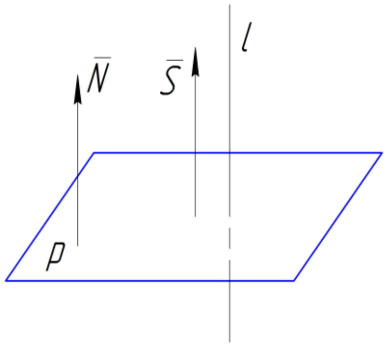


Рис. 7.7

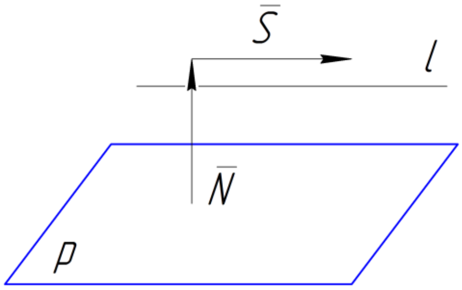


Рис. 7.8

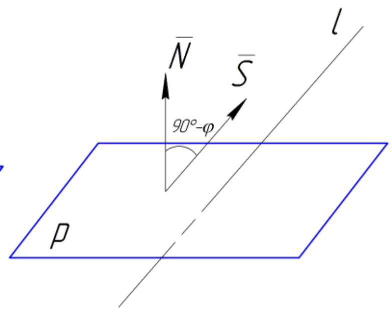


Рис. 7.9

В этом случае:

Условие параллельности прямой и плоскости:

$$l \parallel P \Leftrightarrow \vec{s} \perp \vec{N} \text{ и } Al + Bm + Cn = 0. \qquad (7.11)$$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости:

$$l \perp P \Leftrightarrow \vec{s} \parallel \vec{N} \text{ и } \frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}. \qquad (7.12)$$

Угол между прямой и плоскостью:

$$\sin\varphi = \frac{A\,l + B\,m + C\,n}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \qquad (7.13)$$

Составление уравнений прямой и плоскости определяется их заданием.

Пример. Даны вершины треугольной пирамиды $A_1(1,3,0)$, $A_2(-1,5,3)$, $A_3(0,-3,1)$, $A_4(0,-5,2)$.

Найти угол между ребром A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$.

Решение

Составим уравнение прямой A_1A_4 по формуле (7.9)

$\frac{x-1}{0-1}=\frac{y-3}{-5-3}=\frac{z-0}{2-0}$ или $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-3}{-8}=\frac{z}{2}$, т.е. $\vec{s}(-1,-8,2)$.

Составим уравнение плоскости $A_1A_2A_3$, используя формулу (7.2) как уравнение плоскости, проходящей через три точки:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-0 \\ -1-1 & 5-3 & 3-0 \\ 0-1 & -3-3 & 1-0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z \\ -2 & 2 & 3 \\ -1 & -6 & 1 \end{vmatrix}=(x-1)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 1 \end{vmatrix}-(y-3)\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -6 \end{vmatrix}=$$

$$=(x-1)(2+18)-(y-3)(-2+3)+z(12+2)=20(x-1)-(y-3)+14z=$$

$$=20x-y+12z-17=0,$$

откуда вектор нормали к плоскости равен $\vec{N}(20,\quad -1,\quad 12)$.

Найдем угол между ребром A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$ по формуле (7.13)

$$\sin\varphi=\frac{-1\cdot 20-8\cdot(-1)+2\cdot 12}{\sqrt{1+64+4}\cdot\sqrt{400+1+144}}=\frac{12}{193,92}=0,062,\quad \varphi=\arcsin 0,062.$$

Ответ: $\varphi=3^{\circ}36'$.

7.4. Поверхности 2-го порядка

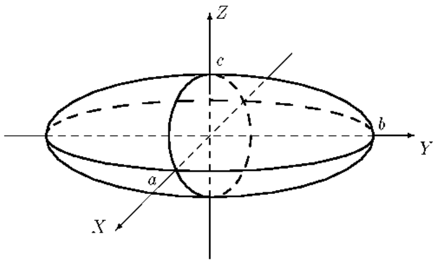
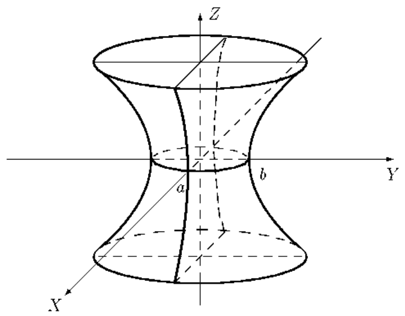
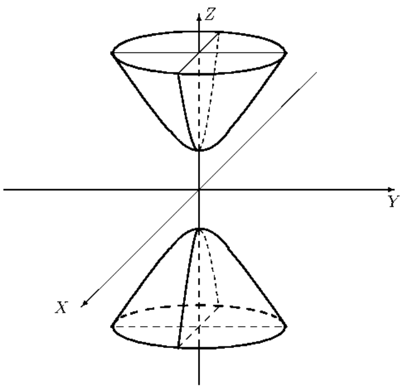
Аналогами кривых 2-го порядка на плоскости в пространстве служат поверхности 2-го порядка. Общее уравнение поверхности 2-го порядка записывается в виде:

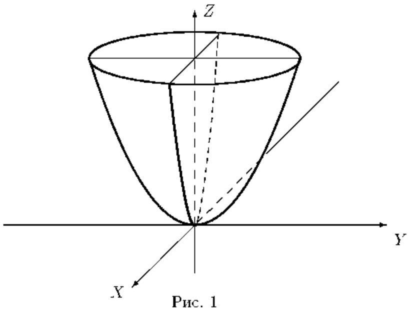
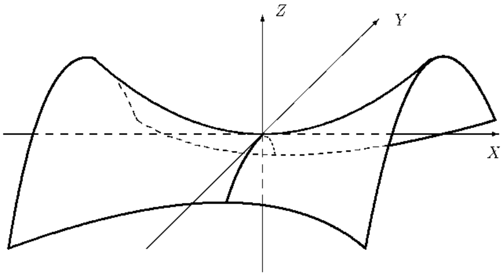
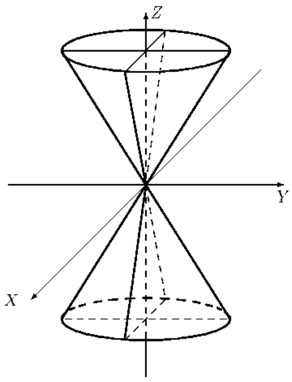
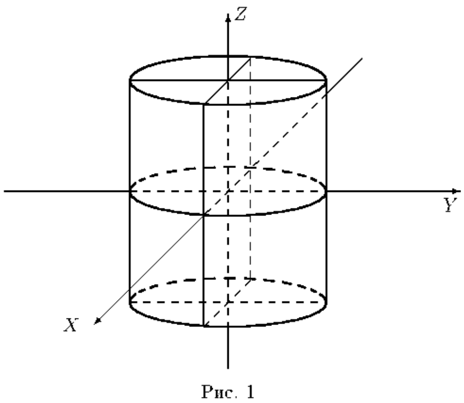
$$Ax^2+Bx+Cy^2+Dy+Ez^2+Fz+G=0.$$

С помощью выделения полных квадратов по всем трем переменным его приводят к каноническому виду 9 типов, которые сведены в таблицу 7.2.

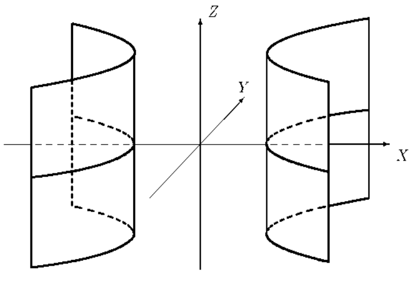
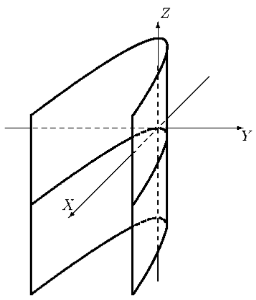
Таблица 7.2

Поверхности 2-го порядка

Поверхность	*Уравнение*
1. Эллипсоид	
 Рис. 1	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
2. Гиперболоид	
а) однополостной	
 Рис. 1	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
б) двуполостной	
 Рис. 2	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

Поверхность	Уравнение
3. Параболоид	
а) эллиптический	
 Рис. 1	$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$
б) гиперболический	
 Рис. 2	$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$
4. Конус	
 Рис. 1	$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$
5. Цилиндр	
а) эллиптический	
 Рис. 1	$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Окончание табл. 7.2

Поверхность	*Уравнение*
б) гиперболический	
 Рис. 2	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
в) параболический	
 Рис. 3	$y^2 = 2px$

Пример. Какую поверхность определяет уравнение $4x^2 - 8x + 9y^2 - 36y + 4z^2 + 8z + 8 = 0$?

Решение

Выделим полные квадраты по переменным x, y, z:

$$4(x^2-2x+1)-4+9(y^2-4y+4)-36+4(z^2+2z+1)-4+8=0;$$
$$4(x-1)^2+9(y-2)^2+4(z+1)^2-36=0$$
$$\text{или } 4(x-1)^2+9(y-2)^2+4(z+1)^2=36.$$

Поделим обе части равенства на 36 и после упрощения получим: $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} + \frac{(z+1)^2}{9} = 1.$ Это уравнение эллипсоида с центром в точке *(1, 2, -1)* и полуосями a = *3*, $в$ = *2*, c = *3.*

Вопросы для самоконтроля

1. Вывести общее уравнение плоскости.

2. Записать уравнение плоскости, проходящей через заданную точку, перпендикулярно заданному вектору.

3. Как расположена плоскость относительно системы координат, если в ее общем уравнении отсутствуют:

а) свободный член;

б) одна из переменных;

в) две переменных;

г) одна из переменных и свободный член;

д) две переменные и свободный член?

4. Записать уравнение плоскости в отрезках. Каков геометрический смысл параметров этого уравнения? Для всякой ли плоскости можно записать уравнение в отрезках?

5. Записать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки.

6. Сформулировать условия параллельности, перпендикулярности, совпадения двух плоскостей, заданных общими уравнениями.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Множество действительных чисел, известное из школьного курса математики, расширили новым понятием – *множеством комплексных чисел*, причем введение понятия мнимой единицы позволило решать алгебраические уравнения второй степени, дискриминант которых меньше нуля.

Матрицы, как таблицы чисел, с которыми можно производить различные действия, дают возможность быстрого и правильного получения информации требуемого свойства. Задачи о платежах легко решаются с помощью алгебраических действий над матрицами.

Системы линейных алгебраических уравнений могут описывать любые процессы, например, задачу оптимального назначения цен на услуги. Решение систем линейных уравнений возможно тремя способами: Крамера, Гаусса и матричным способом, причем метод Крамера (его еще называют методом определителей) и матричный (при помощи обратной матрицы) пригодны только для квадратных систем, у которых главный определитель отличен от нуля, а метод Гаусса (метод последовательных исключений неизвестных в расширенной матрице) – для любых систем.

Декартова система координат и вытекающие из нее *векторная алгебра и аналитическая геометрия* в плоскости и пространстве показали способы описания точки, прямой, а также кривых и поверхностей 2-го порядка. Это позволяет с помощью формул описать любой физический и экономический процесс.

Таким образом, рассмотренный материал является полезным для студентов не только в теоретическом, но и практическом плане для последующего изучения дисциплин по выбранному направлению.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Бугров, Я.С. Высшая математика: в 3 т. / Я.С Бугров С.М. Никольский. Т. 1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М., 2006.
2. Клюшин, В.Л. Высшая математика для экономистов / В.Л. Клюшин. – М.: ИНФРА-М 2011.
3. Кремер, Н.Ш. Высшая математика для экономистов / Н.Ш. Кремер. – М.: ЮНИТИ, 2001.
4. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике / Д.Т. Письменный. – М., 2009.
5. Соловьев, И.А. Практическое руководство к решению задач по высшей математике / И.А. Соловьев. – СПб.: Лань 2009.
6. Щипачев, В.С. Высшая математика / В.С. Щипачев. – М.: Высш. шк., 2008.

Дополнительная

7. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д.В. Беклемишев. – М.: Наука, 1984.
8. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высш. шк., 1980.
9. Ефимов, Н.В. Краткий курс аналитической геометрии / Н.В. Ефимов. – М.: Наука, 1978.
10. Клетенник, Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии / Д.В. Клетенник. – М.: Наука, 1985.
11. Кузнецов, Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты) / Л.А. Кузнецов. – М.: Высш. шк.,1994.

ГЛОССАРИЙ

Вектор (*от лат. vector – «несущий»*) – математический объект, характеризующийся величиной и направлением. Например, в геометрии и естественных науках вектор есть направленный отрезок прямой в евклидовом пространстве (или на плоскости).

Каноническое уравнение. Уравнение вида $\frac{x-x_1}{a_x}=\frac{y-y_1}{a_y}$ называют каноническим уравнением прямой на плоскости в прямоугольной системе координат Oxy. Такое уравнение также называют уравнением прямой в каноническом виде.

Комплексные числа (устар. мнимые числа) – числа вида $x+iy$, где x и y – вещественные числа, i – мнимая единица (величина, для которой выполняется равенство $i^2=-1$). Множество всех комплексных чисел с арифметическими операциями является полем и обычно обозначается $\mathbb{C}$ (*от лат. Complex – тесно связанный*).

Кривая 2-го порядка – линия, определяемая уравнением второй степени относительно текущих координат.

Линия на плоскости – множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению F(x, y)=0.

Матрица – математический объект, записываемый в виде прямоугольной таблицы элементов кольца или поля (например, целых, действительных или комплексных чисел). Количество строк и столбцов матрицы задают ее размер.

Множество – одно из ключевых понятий математики, в частности, теории множеств и логики. Понятие множества обычно принимается за одно из исходных (аксиоматических) понятий, т.е. не сводимое к другим понятиям, а значит, и не имеющее определения; для его объяснения используются описательные формулировки, характеризующие множество как совокупность различных элементов, мыслимую как единое целое.

Обратная матрица – такая матрица A−1, при умножении на которую, исходная матрица А дает в результате единичную матрицу Е: Квадратная матрица обратима тогда и только тогда, когда она невырожденная, т.е. ее определитель не равен нулю.

Определитель матрицы – одно из основных понятий линейной алгебры. Это многочлен, комбинирующий элементы прямоугольной матрицы таким образом, что его значение сохраняется при транспонировании и линейных комбинациях строк или столбцов, т.е. определитель характеризует содержание матрицы.

Поверхность 2-го порядка – геометрическое место точек трехмерного пространства, прямоугольные координаты которых удовлетворяют уравнению вида

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{13}xz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0$$

в котором, по крайней мере, один из коэффициентов a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{23}, a_{13} отличен от нуля.

Системы линейных алгебраических уравнений – совокупность уравнений относительно неизвестных x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n.

Алгебра. Элементы аналитической геометрии
Часть I

Курс лекций

Скиба Людмила Петровна

Редактор Л.Э. Трибис

Санитарно-эпидемиологическое заключение № 24.49.04.953.П. 000381.09.03 от 25.09.2003 г.
Подписано в печать 24.09.2015. Формат 60×90/16. Бумага тип. № 1.
Печать – ризограф. Усл. печ. л. 6,75. Тираж 113 экз. Заказ № 417
Редакционно-издательский центр Красноярского государственного аграрного университета
660017, Красноярск, ул. Ленина, 117