Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
Красноярский государственный аграрный университет

НЕПРЕРЫВНАЯ МАТЕМАТИКА

Рекомендовано научно-методическим советом Федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Красноярский государственный аграрный университет» для внутривузовского использования в качестве учебного пособия для бакалавров и специалистов, обучающихся по всем направлениям

Красноярск 2009

ББК 22.1я 73
Н 53

Рецензенты:
Я.Н. Нужин, д-р физ.-мат. наук, профессор СФУ
И.О. Богульский, д-р физ.-мат. наук, профессор, вед. науч. сотр. ИВМ СОРАН

Составители:
Городов А.А., Кузнецов А.А., Миронов Г.В., Паршуков Д.В., Середа В.А., Кодитя Е.В., Бородина Е.В., Толмачев И.В., Шлепкин А.А., Тухватуллина Л.Р., Усенко Н.В., Филиппов К.А., Ширяева Т.А., Шлепкин А.К.

Н 53 **Непрерывная математика: учеб. пособие** / А.А. Городов, А.А. Кузнецов, Г.В. Миронов [и др.]; Краснояр. гос. аграр. ун-т. – Красноярск, 2009. – 170 с.

Пособие включает в себя разделы: дифференциальное и интегральное исчисление, функции нескольких переменных, ряды, дифференциальные уравнения, комплексные числа.

Предназначено для студентов различных специальностей всех форм обучения.

ББК 22.1я 73

ВВЕДЕНИЕ

Математика – самая древняя и в то же время самая юная из наук. Она стала складываться во втором тысячелетии до нашей эры, когда потребности торговли, землемерия и мореплавания заставили упорядочить приемы счета и измерения, начало которых уходит в еще более глубокую древность.

Абстрактный характер математических понятий и методов придает им большую общность, и поэтому математика находит свое приложение в самых разнообразных областях науки и техники – всюду, где пространственные формы и количественные отношения составляют сколько-нибудь существенную сторону явления. Особенно велика роль математики в технических науках, где она служит мощным и верным средством исследования явлений и инженерного расчета.

Сила и правильность математических методов постоянно находила и находит свое подтверждение в нашей практической деятельности, в тех научных открытиях, которые своей реализацией обязаны математике, в способности математики служить основой для научного предвидения.

Иными словами, ценность и правильность математических теорий находили и находят свое подтверждение в нашей повседневной практике – в этом единственном критерии ценности и правильности всякой теории.

Сложившись, математика не перестает развиваться, разрабатываются новые методы, открываются новые области, совершенствуются символика и научный аппарат.

Материал, включенный в пособие, объединен общей идеей – подвести студентов к математическим понятиям исходя из практики, показать широкие возможности решения задач прикладного характера с помощью математических методов и тем самым способствовать организации самостоятельной работы студентов и совершенствованию профессиональной подготовки будущих специалистов.

ГЛАВА 1. ФУНКЦИИ И ПРЕДЕЛЫ
§1. ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ

Определение функции

Везде далее в этом параграфе под множествами будут пониматься числовые множества, т. е. множества, состоящие из действительных чисел.

Множество всех действительных чисел будет обозначаться буквой R. Пусть каждому числу x из некоторого множества X поставлено в соответствие одно и только одно число y. Тогда говорят, что на множестве X задана функция.

Способ (правило), с помощью которого устанавливается соответствие, определяющее данную функцию, обозначают той или иной буквой: $f, g, h, \varphi \dots$ Если, например, выбрана буква f, то пишут $y = f(x)$.

Переменная x при этом называется независимой переменной (или аргументом), а переменная y – зависимой.

Множество X называется областью определения данной функции и обозначается $D(f)$, а множество всех чисел y, соответствующих различным числам $x \in X$, – областью значений этой функции и обозначается $E(f)$.

Если числу x_0 из области определения функции $f(x)$ соответствует некоторое число y_0 из области значений, то y_0 называется значением функции в точке x_0 (или при $x = x_0$).

График функции

Пусть заданы прямоугольная система координат Oxy и функция $y = f(x)$. Графиком функции $f(x)$ называется множество всех точек плоскости с координатами $(x; f(x))$, где $x \in D(f)$.

Множество точек на координатной плоскости является графиком некоторой функции в том и только в том случае, когда каждая вертикальная (т. е. параллельная оси Oy) прямая пересекает его не более чем в одной точке.

График функции $y = f(x)$ зачастую можно построить с помощью преобразований (сдвиг, растяжение) графика некоторой уже известной функции.

1. График функции $y = f(x)$ + а получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вдоль оси Oy на $|a|$ единиц (вверх, если $a > 0$, и вниз если $a < 0$).

2. График функции $y = f(x-b)$ получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вдоль оси Ox на $|b|$ единиц (вправо, если b>0, и влево, если b<0).

3. График функции $y = kf(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ растяжением (сжатием) вдоль оси Oy в k раз ($\frac{1}{k}$раз), если $k > 1 (k \in (0,1))$.

4. График функции $y = f(mx)$ получается из графика функции $y = f(x)$сжатием (растяжением) по оси Ox в m раз ($1/m$ раз), если m >1($m \in$(0,1)).

5. График функции $y = -f(x)$получается из графика функции $y = f(x)$ симметричным отражением относительно оси Ox.

6. График функции $y = f(-x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ симметричным отражением относительно оси Oy.

Четность, нечетность и периодичность функции

Функция называется четной, если:

1) множество $D(f)$ симметрично относительно нуля (т.е. $\forall x \in D(f) \Rightarrow -x \in D(f)$);

2) для любого $x \in D(f)$справедливо равенство $f(-x) = f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси Oy.

Функция $f(x)$ называется нечетной, если:

1) множество $D(f)$ симметрично относительно нуля;

2) для любого $x \in D(f)$ справедливо равенство $f(-x) = -f(x)$.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Функция, не являющаяся ни четной, ни нечетной, называется функцией общего вида.

Функция $f(x)$ называется периодической, если существует число $T \neq 0$, что для любого $x \in D(f)$ справедливы условия:

1) $x + T \in D(f), x - T \in D(f)$;

2) $f(x+T) = f(x)$.

Число Т называется периодом функции $f(x)$. Если Т – период функции $f(x)$, то числа ±Т, ±2Т, ±3Т... также являются периодами этой функции. Как правило, под периодом функции понимают наименьший из ее положительных периодов (основной период), если таковой существует.

Если функция $f(x)$ периодическая с периодом Т, то ее график переходит сам в себя при сдвиге вдоль оси Ox на Т единиц влево или вправо.

Пусть область значений функции $y = f(x)$ содержится в области определения функции $g(y)$. Тогда функция $z = g(f(x)), x \in D(f)$ называется сложной функцией или композицией функций f и g и обозначается $g \circ f$.

Основными (или простейшими) элементарными функциями называются: постоянная функция $y = c$; степенная функция $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in R$; показательная функция $y = a^{x}$,a >0; логарифмическая функция $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$; тригонометрические функции $y = \sin x, y = \cos x, y = tgx, y = ctgx$, $y = \sec x$ (где $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$), $y = \cos ecx$ (где $\cos ecx = \dfrac{1}{\sin x}$); обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = arctgx, y = arcctgx$.

На рисунках 1,а и 1,б приведены соответственно графики функций $y = \arcsin x, y = arctgx$.

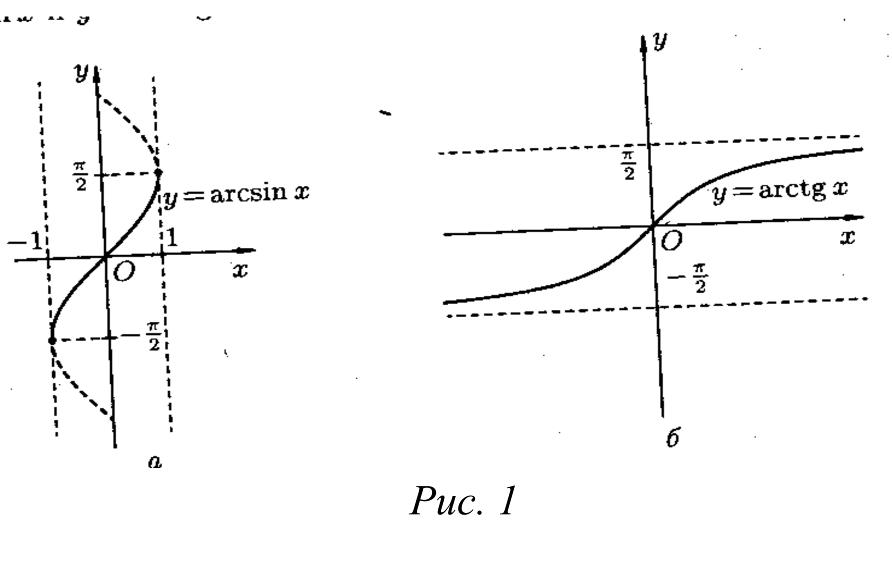

Рис. 1

Элементарными функциями называются функции, которые получаются из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических операций (+,–,*,:) и композиций (т.е. образования сложных функций).

Монотонная, обратная и ограниченная функция

- Функция $f(x)$ называется неубывающей (невозрастающей) на множестве $X \subseteq D(f)$, если для любых значений $x_1, x_2 \in X$, таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) \le f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) \ge f(x_2)$).

- Функция $f(x)$ называется монотонной, если она невозрастающая или неубывающая.

- Функция $f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на множестве $X \subseteq D(f)$,если для любых значений $x_1, x_2 \in X$, таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) > f(x_2)$).

- Функция $f(x)$ называется строго монотонной, если она возрастающая или убывающая.

- Пусть для любых различных значений $x_{1,} x_2 \in D(f)$ справедливо, что $f(x_1) \ne f(x_2)$. Тогда для любого $y \in E(f)$ найдется только одно значение $x = g(y) \in D(f)$, такое, что $y = f(x)$.

- Функция $x = g(y)$, определенная на $E(f)$, называется обратной для функции $f(x)$.

Отметим, что $E(g) = D(f)$.

Если функция $f(x)$ имеет обратную функцию, то каждая горизонтальная прямая $y = c$ пересекает ее график не более чем в одной точке.

Пусть функция $x = g(y)$ (иногда ее обозначают $x = f^{-1}(y)$) – обратная для функции $y = f(x)$. Если обозначить аргумент этой функции через х, то ее можно записать в виде $y = g(x)$. Тогда

$$g(f(x)) = x \text{ для всех } x \in D(f),$$

$$f(g(x)) = x \text{ для всех } x \in E(f).$$

Иными словами, если функция $g(x)$ – обратная для функции $f(x)$, то функция $f(x)$ – обратная для функции $g(x)$; поэтому обе эти функции называют еще взаимообратными.

Пусть функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на отрезке $[a;b]$. Тогда на отрезке $[f(a); f(b)]$ (соответственно $[f(b); f(a)]$) определена возрастающая (убывающая) функция $g(x)$, обратная для функции $f(x)$.

График функции $g(x)$, обратной для функции $f(x)$, симметричен графику относительно прямой у = х.

- Функция $y = f(x)$ называется ограниченной сверху (снизу) на множестве $X \in D(f)$, если существует такое число М, что $f(x) \le M$ ($f(x) \ge M$) для всех $x \in X$.

- Функция $y = f(x)$ называется ограниченной на множестве $X \in D(f)$, если существует такое число М>0, что $|f(x)| \le M$ для всех $x \in X$.

Гиперболические функции

Гиперболическими функциями называются следующие четыре функции:

1) гиперболический синус $y = shx$, где $shx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ (график этой нечетной возрастающей функции изображен на рис. 2, а);

2) гиперболический косинус $y = chx$, где $chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ (график этой четной функции см. на рис. 2, б);

3) гиперболический тангенс $y = thx$, где $thx = \dfrac{shx}{chx} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ (график этой нечетной возрастающей функции см. на рис. 2, в);

4) гиперболический котангенс $y = cthx$, где $cthx = \dfrac{chx}{shx} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ (график этой нечетной убывающей функции см. на рис. 2, г).

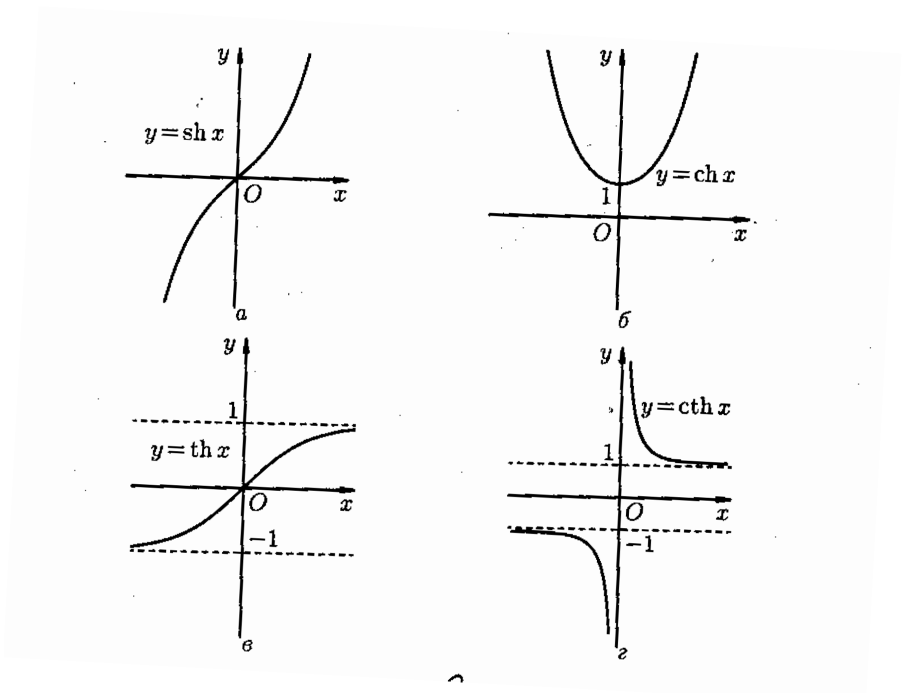

Рис. 2

Для гиперболических функций имеют место формулы, аналогичные (с точностью до знака) соответствующим формулам для обычных тригонометрических функций:

$$ch^2x - sh^2x = 1,\ ch2x = ch^2x + sh^2x;$$
$$ch(x \pm y) = chx \cdot chy \pm chx \cdot shy.$$

Неявные и параметрически заданные функции

Формула $y = f(x)$ определяет явный способ задания функции. Однако во многих случаях приходится использовать неявный способ задания функции.

Пусть данная функция определена на множестве D. Тогда если каждое значение $x \in D$ и соответствующее ему значение функции y удовлетворяют некоторому (одному и тому же) уравнению $F(x; y) = 0$, то говорят, что эта функция задана неявно уравнением $F(x; y) = 0$. Сама функция в этом случае называется неявной функцией.

Графиком уравнения $F(x; y) = 0$ называется множество всех точек координатной плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.

Пусть на некотором множестве $X \subset R$ заданы две функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$. Тогда множество всех точек на плоскости Oxy с координатами $(x(t), y(t))$, где $t \in X$, называется кривой (или линией), заданной параметрически.

Если кривая, заданная параметрически, является графиком некоторой функции $y = f(x)$, то эта функция также называется функцией, заданной параметрически (или параметрически заданной).

1.1.1. Найти области определения функций: 1) $f(x) = \dfrac{3x+1}{x^2-1}$;
2) $f(x) = \sqrt{5-3x}$; 3) $f(x) = \ln(x+2)$.

1) Дробь $\dfrac{3x+1}{x^2-1}$ определена, если ее знаменатель не равен нулю. Поэтому область определения данной функции находится из условия

$x^2-1 \neq 0$, т.е. $x \neq \pm 1$. Таким образом, $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

2) Функция $f(x)=\sqrt{5-3x}$ определена, если подкоренное выражение неотрицательно, т.е. $5-3x\geq 0$. Отсюда $x\leq\frac{5}{3}$ и, значит, $D(f)=(-\infty;\frac{5}{3}]$.

3) Выражение, стоящее под знаком логарифма, должно быть положительным, поэтому функция $\ln(x+2)$ определена в том и только в том случае, когда $x+2>0, т.е. x>-2$. Значит, $D(f)(-2;+\infty)$.

1.1.2. Найти области определения функций:

1) $f(x)=2^{\frac{1}{x}}+\arcsin\frac{x+2}{3}$; 2) $f(x)=\frac{5}{\sqrt[3]{2x-x^2}}-7\cos 2x$.

1) Функция $a^x, a>0$ определена при всех действительных значениях x, поэтому функция $2^{\frac{1}{x}}$ определена в точности при тех значениях x, при которых имеет смысл выражение $\frac{1}{x}$, т.е. при $x\neq 0$. Далее, область определения второго слагаемого находим из двойного неравенства $-1\leq\frac{x+2}{3}\leq 1$. Отсюда $-3\leq x+2\leq 3$, т.е. $-5\leq x\leq 1$.

Область определения функции $f(x)$ есть пересечение областей определения обоих слагаемых, откуда $D(f)=[-5;0)\cup(0;1]$.

2) Функция 7cos2x определена при всех действительных значениях x, а функция $\frac{5}{\sqrt[3]{2x-x^2}}$ – лишь при тех значениях x, при которых $2x-x^2\neq 0$, т.е. при $x\neq 0, x\neq 2$. Таким образом, $D(f)=(-\infty;0)\cup(0;2)\cup(2;+\infty)$.

Найти области определения функций:

1.1.3. $f(x)=\frac{x^2+4}{x^3+4}$. 1.1.4. $f(x)=\sin\frac{1}{|x|-2}$. 1.1.5. $f(x)=\log_3(-x)$.

1.1.6. $f(x)=\sqrt[4]{x^2-7x+10}$. 1.1.7. $f(x)=x^2+tgx$.

1.1.8. $f(x)=\sqrt{x-7}+\sqrt{10-x}$. 1.1.9. $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{|x^2-2|}}$.

1.1.10. $f(x)=e^{\sqrt{x}}\cdot\log_2(2-3x)$. 1.1.11. $f(x)=\arccos(x-2)-\ln(x-2)$.

Найти множество значений функций:

1.1.12. а) $f(x)=x^2-8x+20$; б) $f(x)=3^{-x^2}$.

1.1.13. а) $f(x)=2\sin x-7$; б) $f(x)=\frac{1}{x}+4$.

1.1.14. а) $f(x)=\dfrac{1}{\pi}arctgx$; б) $f(x)=\sqrt{5-x}+2$.

1.1.15. Для функции $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-1}$ найти:

1) $f(0)$; 2) $f(-2)$; 3) $f(\sqrt{2})$; 4) $f(-x)$; 5) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$; 6) $f(a+1)$; 7) $f(a)+1$;

8) $f(2x)$.

1) – 3). Подставляем значение $x=0$ в аналитическое выражение для данной функции, получим: $f(0)=\dfrac{0+3}{0^2-1}=-3$. Аналогично находим $f(-2)=\dfrac{-2+3}{(-2^2)-1}=\dfrac{1}{3}$, $f(\sqrt{2})=\dfrac{\sqrt{2}+3}{(\sqrt{2})^2-1}=\sqrt{2}+3.$

4) – 6) Для того чтобы найти $f(-x)$, надо формально заменить x в формуле для $f(x)$ на $-x$. Тогда $f(-x)=\dfrac{-x+3}{(-x^2)-1}=\dfrac{3-x}{x^2-1}$;

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\frac{1}{x}+3}{\left(\frac{1}{x}\right)^2-1}=\frac{x+3x^2}{1-x^2};\ f(a+1)=\frac{(a+1)+3}{(a+1)^2-1}=\frac{a+4}{a^2+2a.}.$$

7) $f(a)+1=\dfrac{a+3}{a^2-1}+1=\dfrac{a^2+a+2}{a^2-1}$.

8) $f(2x)=\dfrac{2x+3}{(2x)^2-1}=\dfrac{2x+3}{4x^2-1}$.

1.1.16. Для функции $f(x)=x^3\cdot 2^x$ найти:

1) $f(1)$; 2) $f(-3)$; 3) $f(-\sqrt[3]{5})$; 4) $f(-x)$; 5) $f(3x)$; 6) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$; 7) $\dfrac{1}{f(x)}$;

8) $f(b-2)$.

1.1.17. Какие из следующих функций четные, какие нечетные, а какие – общего вида?

1) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$. 2) $f(x)=x^4-5|x|$. 3) $f(x)=e^x-2e^{-x}$. 4) $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$.

1) $D(f)=(-\infty;+\infty)$, и, стало быть, область определения функции симметрична относительно начала координат. Кроме того, $f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{(-x)^2+1}=-\dfrac{x^3}{x^2+1}=-f(x)$, т.е. данная функция нечетная.

2) $D(f)=(-\infty;+\infty)$ и $f(-x)=(-x)^4-5|-x|=x^4-5|x|=f(x)$. Следовательно, функция четная.

3) $D(f)=(-\infty;+\infty)$ и $f(x)=e^{-x}-2e^{x}\neq \pm f(x)$, т.е. данная функция общего вида.

4) $D(f)=(-1;1)$ т.е. область определения симметрична относительно нуля. К тому же $f(-x)=\ln\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1}=-\ln\frac{1-x}{1+x}=-f(x),$ т.е. функция нечетная.

1.1.18. Какие из следующих функций четные, какие нечетные, а какие – общего вида?

1) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$. 2) $f(x)=x^5+3x^3-x$. 3) $f(x)=\sqrt{x}$. 4) $f(x)=\arcsin x$.

5) $f(x)=\sin x+\cos x$. 6) $f(x)=|x|-2$. 7) $f(x)=\frac{3}{x^2-1}$. 8) $f(x)=x\cdot e^{x}$.

1.1.19. Определить, является ли данная функция периодической, и найти ее положительный наименьший период, если он существует:

1) $f(x)=\sin 4x$; 2) $f(x)=\cos^2 5x$; 3) $f(x)=tg\frac{x}{3}$; 4) $f(x)=\sin 2x+\cos 3x$;

5) $f(x)=x^2$.

Построить графики функций:

1.1.20. $y=|x-3|$. 1.1.21. $y=x^2-6x+11$. 1.1.22. $y=3\cos 2x$.

1.1.23. $y=-\frac{2}{x}+1$. 1.1.24. $y=2^{x-1}+3$. 1.1.25. $y=\log_3(-x)$.

§2. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Определение предела

Пусть каждому натуральному числу n (т.е. n=1,2,3….) по некоторому закону поставлено в соответствие единственное действительное число x_n. В этом случае говорят, что задана последовательность: $x_1, x_2, ..., x_n, ...$, которую будем обозначать $\{x_n\}$.

Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε можно подобрать такой номер N (как правило, зависящий от ε), что, начиная с этого номера (т.е. для всех n$\geq N$), будет выполнено неравенство $|x_n-a|\langle\varepsilon$. Обозначается это так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ или $x_n\to a$ (при $n\to\infty$).

Окрестностью точки x_0 называется интервал с центром в точке x_0.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0. Дадим первое определение предела функции:

Число А называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к $x_0 (x_n \neq x_0 \forall n)$, последовательность $\{f(x_n)\}$ соответствующих значений функции сходится к А.

Обозначается это так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ (при $x \to x_0$).

Первое определение предела функции эквивалентно второму определению:

Число А называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$ (вообще говоря, зависящее от ε), что для всех x, таких, что $|x - x_0| < \delta, x \neq x_0$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Первое определение называется также определением предела функции «на языке последовательностей», а второе – определением предела на языке «$\varepsilon - \delta$» (эпсилон-дельта).

Операции над пределами функций

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0 и, кроме того, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$. Тогда:

1. Предел суммы (разности) этих функций равен сумме (соответственно, разности) их пределов, т. е.

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B.$$

2. Предел произведения функций равен произведению их пределов, т. е.

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B.$$

3. Предел частного функций равен частному их пределов (при условии $B \neq 0$), т. е.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

Отсюда, в частности, вытекает, что постоянный множитель можно выносить за знак предела функции, т. е.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad \Rightarrow \quad \forall \alpha \in R : \lim_{x \to x_0} \alpha f(x) = \alpha \lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha A.$$

4. Предел корня k-й степени функции равен корню этой же степени от предела функции, т. е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x\to x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{A}.$$

Пределы функций и неравенства

Теорема 2.1. Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0 (кроме, быть может, самой этой точки) и $f_1(x) \le f_2(x)$ для всех значений x из этой окрестности. Пусть, кроме того

$$\lim_{x\to x_0} f_1(x) = A_1,\ \lim_{x\to x_0} f_2(x) = A_2.\ \text{Тогда}\ A_1 \le A_2.$$

Теорема 2.2. (о двух милиционерах). Пусть функции $f_1(x)$, $f(x)$, $f_2(x)$ определены в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 (кроме, быть может, самой этой точки) и для всех $x \in U(x_0), x \ne x_0$ верно неравенство $f_1(x) \le f(x) \le f_2(x)$. Пусть, кроме того, $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = A.$. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ также существует и равен А.

Теорема 2.3. (о сохранении знака). Если предел функции в данной точке x_0 положителен, то и все значения функции в некоторой окрестности этой точки (кроме, быть может, самой точки x_0) положительны.

Теорема 2.4. (об ограниченности функции, имеющей предел). Пусть функция имеет предел в данной точке. Тогда она ограничена в некоторой окрестности этой точки.

Предел функции на бесконечности

Пусть функция $f(x)$ определена на бесконечном промежутке $(a;+\infty)$.

Число А называется пределом функции $f(x)$ при $x\to+\infty$, если для любой положительной бесконечно большой последовательности $\{x_n\}$ (т. е. $x_n\to+\infty, n\to\infty$) последовательность $\{f(x_n)\}$ соответствующих значений функции сходится к А.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.

Равносильное определение предела функции при $x\to+\infty$ на языке $\varepsilon-\delta$ будет выглядеть так:

Число А называется пределом функции $f(x)$ при $x \to +\infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $M > 0$, что для всех значений $x > M$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Аналогично определяется предел функции $f(x)$ при $x \to -\infty$

Обозначение: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

Пусть функция $f(x)$ определена в правой полуокрестности точки x_0, т. е. на некотором интервале $(x_0, x_0 + \delta)$, где $\delta > 0$. Тогда говорят, что число A называется пределом функции $f(x)$ справа в точке x_0 (или правосторонним пределом), если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x_0, и такой, что все ее члены больше, чем x_0, соответствующая последовательность значений функции $\{ f(x_n) \}$ сходится к числу A.

Обозначения: $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$ или $f(x_0 + 0) = A$.

Аналогично определяется предел функции слева (или левосторонний предел в точке x_0), обозначаемый $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$ или $f(x_0 - 0) = A$.

Очевидно, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ существует в том и только в том случае, когда существуют и односторонние пределы $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$, причем все три числа равны, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$.

Замечательные пределы

Первый замечательный предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \approx 2{,}71828.$$

Часто используются следующие следствия из обоих замечательных пределов: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin \alpha x}{x} = \alpha, \alpha \in R$; $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Функция $\varphi(x)$ называется бесконечно малой при $x \to x_0$ (или в окрестности точки x_0), если $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$.

Таким образом, $A=\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ бесконечно малая при $x\to x_0$.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малые функции при $x\to x_0$.

Тогда:

1) Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A\neq 0$, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – называются бесконечно малыми одного порядка в окрестности точки x_0.

В частности, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными бесконечно малыми, что обозначается $\alpha(x)\sim\beta\ (x), x\to x_0$.

2) Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка, чем $\beta(x)$. Этот факт записывается так: $\alpha(x)=o(\beta(x)), x\to x_0$ и говорят, что $\alpha(x)$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем $\beta(x)$, при $x\to x_0$. В частности, если $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x\to x_0$, то $\alpha(x)=o(\beta)$, $x\to x_0$.

При решении многих задач используются следующие эквивалентности, верные при $x\to 0$:

$$\sin x\sim x,\quad 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2},\quad tgx\sim x,\quad \arcsin x\sim x,\quad arctgx\sim x,\quad \ln(1+x)\sim x,$$

$a^x-1\sim x\ln a$ (в частности, $e^x-1\sim x$), $\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{x}{n}$.

Кроме того, имеет место следующий факт: если $\beta(x)\sim\beta_1(x), x\to x_0$ и существуют пределы $\lim\limits_{x\to x_0}(\alpha(x)\cdot\beta(x))$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, то

$$\lim_{x\to x_0}(\alpha(x)\cdot\beta(x))=\lim_{x\to x_0}(\alpha(x)\cdot\beta_1(x)),\quad \lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta_1(x)}.$$

Таким образом, предел произведения или частного двух бесконечно малых не меняется при замене любой из них на эквивалентную бесконечно малую.

1.2.1. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 2}(2x+1)=5$, используя

1) первое определение предела функции;

2) второе определение предела функции.

1) Пусть $\{x_n\}$ – произвольная последовательность, сходящаяся к 2, т. е. такая, что $\lim\limits_{x\to\infty}x_n=2$. Тогда в соответствии со свойствами пределов последовательностей $\lim\limits_{x\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{x\to\infty}(2x_n+1)=2\lim\limits_{x\to\infty}x_n+\lim\limits_{x\to\infty}1=2\cdot 2+1=5$.

Так как $\lim\limits_{x\to\infty} f(x_n) = 5$ для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к точке $x_0 = 2$, то по первому определению предела функции это как раз и означает, что $\lim\limits_{x\to 2}(2x+1) = 5$.

2) Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Требуется по этому ε найти такое $\delta > 0$, чтобы из условия $x \ne x_0, |x - x\ | < \delta$, т.е. вытекало бы неравенство $|\, f(x) - A < \varepsilon,|$ т.е. $|(2x+1) - 5 < \varepsilon|$.

Последнее неравенство приводится к виду $|2x - 4| < \varepsilon$, т.е. $|x-2| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Отсюда следует, что если взять $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$, то неравенство $|x-2| < \delta$ будет автоматически влечь за собой неравенство $|\, f(x) - 5| < \varepsilon$ (это значит, что для всех x, для которых верно первое неравенство, будет верно и второе). В соответствии со вторым определением предела функции это означает, что $\lim\limits_{x\to 2}(2x\ +1) = 5$.

Используя первое определение предела функции, найти пределы:

1.2.2. $\lim\limits_{x\to -1}(4x\ +3)$. 1.2.3. $\lim\limits_{x\to 2}(x^2\ -4x+8)$.

Используя второе определение предела функции, доказать, что:

1.2.4. $\lim\limits_{x\to -0}(3x\ -2) = -2$. 1.2.5. $\lim\limits_{x\to 1}(-x\ +4) = 3$.

1.2.6. $\lim\limits_{x\to 3} x^2\ = 9$. 1.2.7. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{5}$.

1.2.8. Доказать по второму определению предела, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\ = 1$, где $f(x) = \dfrac{2(x-1)^2}{x-1} + 1,\ x_0 = 1$. Найти соответствующие δ по данному ε, если: 1) $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$; 2) $\varepsilon = 0{,}01$.

1.2.9. Используя свойства пределов функций, найти следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2 - 1}{4x^2 + 5x + 2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8} - 3}{x-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1 + x - x^2}{2x^2 + 3x}$.

1) Применяя теоремы о действиях над пределами функций, получим:

$$\lim_{x\to -1}\frac{3x^2-1}{4x^2+5x+2}=\frac{\lim\limits_{x\to -1}(3x^2-1)}{\lim\limits_{x\to -1}(4x^2+5x+2)}=\frac{\lim\limits_{x\to -1}3x^2-\lim\limits_{x\to -1}1}{\lim\limits_{x\to -1}4x^2+\lim\limits_{x\to -1}5x+\lim\limits_{x\to -1}2}=$$

$$=\frac{3\lim\limits_{x\to -1}x\cdot\lim\limits_{x\to -1}x-1}{\lim\limits_{x\to -1}x\cdot\lim\limits_{x\to -1}x+5\lim\limits_{x\to -1}x+2}=\frac{3\cdot(-1)(-1)-1}{4(-1)(-1)+5(-1)+2}=2\,.$$

2) Так как пределы числителя и знаменателя при $x\to 2$ равны нулю, то мы имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. «Раскроем» эту неопределенность (т.е. избавимся от нее), разложив числитель и знаменатель на множители и сократив их далее на общий множитель x - 2:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-3}.$$

В полученной дроби знаменатель уже не стремится к нулю при $x\to 2$, поэтому можно применять теорему о пределе частного:

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+2}{x-3}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x+2)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-3)}=\frac{2+2}{2-3}=-4.$ Окончательно $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}=-4.$

3) Здесь мы также имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Домножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное к числителю (избавляемся от иррациональности в числителе):

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+8}^{\,2})-3^2}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+8)-9}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+8}+3}=\frac{1}{\sqrt{1+8}+3}=\frac{1}{6}.$$

4) Числитель и знаменатель дроби – бесконечно большие функции, поэтому здесь имеет место неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$. Раскрывая эту неопределенность, поделим числитель и знаменатель дроби на старшую степень x, т.е. на x^2:

$$\frac{1+x-x^2}{2x^2+3x}=\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-1}{2+\frac{3}{x}}.$$

Осталось воспользоваться свойствами пределов, а также тем, что функции $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x_2}$ бесконечно малые при $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty 1}\frac{1+x-x^2}{2x^2+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-1}{2+\frac{3}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-1\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{3}{x}\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}1}{\lim\limits_{x\to\infty}2+3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=\frac{0+0-1}{2+0}=-\frac{1}{2}.$$

Найти пределы:

1.2.10. $\lim\limits_{x\to -2}(5x^2+2x-1)$. 1.2.11. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{5x+1}{x^3-2x+3}$.

1.2.12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x^2-x}$.

1.2.13. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2^x-8}{2^x+8}$. 1.2.14. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-6x+5}{x^2-25}$.

1.2.15. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x^3-3x^2+x}{2x}$.

1.2.16. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+x+2}{x^3+1}$. 1.2.17. $\lim\limits_{x\to -0,5}\frac{2x^2-x-1}{-6x^2+5x+4}$.

1.2.18. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+3x-3}{2x^3-2x^2+x-1}$.

1.2.19. $\lim\limits_{x\to -6}\frac{x^2+7x+6}{x^3+6x^2+3x+18}$. 1.2.20. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+25}-5}{x^2+2x}$.

1.2.21. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{x}, \alpha\in R$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}$; 3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2x-\pi}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$.

1) Сделаем замену y=αx; тогда y$\to$0 при x$\to$0 и $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{(\frac{y}{\alpha})}= =\lim\limits_{y\to 0}\frac{\alpha\sin y}{y}=\alpha\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=\alpha$. В последнем равенстве мы воспользовались первым замечательным пределом. Таким образом, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{x}=\alpha$.

2) Поделим числитель и знаменатель дроби под знаком предела на x, после чего воспользуемся предыдущим пунктом:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\dfrac{\sin 5x}{x}\right)}{\left(\dfrac{\sin 3x}{x}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 5x}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{x}\right)}=\frac{5}{3}.$$

3) Сводя предел к первому замечательному, сделаем замену у = х – $\frac{\pi}{2}$. Тогда у$\to$0 при $x\to\frac{\pi}{2}$,а $x=y+\frac{\pi}{2}$, откуда

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2x-\pi}=\lim_{y\to 0}\frac{\cos\left(y+\dfrac{\pi}{2}\right)}{2\left(y+\dfrac{\pi}{2}\right)-\pi}=\lim_{y\to 0}\frac{-\sin y}{2y}=-\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=-\frac{1}{2}.$$

Во втором равенстве в этой цепочке мы использовали формулу приведения, а в последнем – первый замечательный предел.

4) Сделаем замену t=arcsin x, то есть x=sin t. Ясно, что $t\to 0$ при $x\to 0$, поэтому:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)}=1.$$

Найти пределы:

1.2.22. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\sin^2 2x}$; 1.2.23. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg2x}{\sin 5x}$; 1.2.24. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$;

1.2.25. $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot ctgx$;

1.2.26. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x, k\in R$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+5x}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^x$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{7x}$.

1) В данном случае мы имеем неопределенность вида 1^∞. Для ее раскрытия сделаем замену $y=\frac{x}{k}$. Тогда $y\to\infty$ при $x\to\infty$ и исходный предел сводится ко второму замечательному пределу:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\dfrac{x}{k}\right)}\right)^{k\cdot\frac{x}{k}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{ky}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^k=e^k.$$

2) Поскольку $\sqrt[x]{1+5x}=(1+5x)^{\frac{1}{x}}$, то здесь мы также имеем дело с неопределенностью 1^∞, для раскрытия которой нам снова понадобит-

ся одна из форм замечательного предела. Сделаем замену $y = 5x$. Тогда $y \to 0$ при $x \to 0$ и $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+5x} = \lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{5x}\cdot 5} = \lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}\cdot 5} =$

$$= \left[\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^5 = e^5.$$

3) Поделив числитель и знаменатель дроби на x, сведем данный предел к частному пределов из пункта 1:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)^x}{\left(1-\frac{2}{x}\right)^x} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x} = \frac{e^3}{e^{-2}} = e^5.$$

4) Сделав замену y = 2x и применяя одно из следствий второго замечательного предела, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{7x} = \lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{\frac{7}{2}y} = \frac{2}{7}\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y} = \frac{2}{7}.$$

Найти пределы:

1.2.27. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[2x]{1+3x}$; 1.2.28. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-5}{x+4}\right)^x$;

1.2.29. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{3+5x}{3+2x}\right)^{\frac{1}{x}}$; 1.2.30. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{e^x-e^2}{x-2}$.

Найти односторонние пределы функций $f(x)$ в точке x_0:

1.2.31. $f(x) = [x], x_0 = 2$.

1.2.32. $f(x) = \begin{cases} -2 \cdot при \cdot x \le 1, \\ \frac{x}{3} \cdot при \cdot x > 1; \end{cases}$ а) $x_0 = 1$; б) $x_0 = 11$.

1.2.33. Заменяя бесконечно малые эквивалентными, найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(e^x - e1)}{1-\cos x}$.

1) В силу следствия из первого замечательного предела $\sin\alpha x \sim \alpha x, x \to 0$. Отсюда (при $x \to 0$) $\sin 4x \sim 4x$, а $\sin 3x \sim 3x$, поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{4x}{3x} = \frac{4}{3}.$$

2) При $x \to 0$ имеем $e^x - 1 \sim x$ и $1 - \cos \sim \frac{x^2}{2}$, откуда

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\left(e^x - e1\right)}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot x}{\left(\frac{x^2}{2}\right)} = 2.$$

Найти пределы, используя эквивалентные бесконечно малые:

1.2.34. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg5x}{2x}$; 1.2.35. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{\arcsin 3x}$; 1.2.36. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\ln(1-6x)}$;

1.2.37. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{7^x-1}{3^x-1}$; 1.2.38. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+7x}-1}{x}$; 1.2.39. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg(x-2)}{x^2-2x}$.

§3. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Непрерывность функции в точке

- Функция f(x) называется непрерывной в точке x_0, если она определена в некоторой окрестности этой точки и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Если обозначить x – x_0 = Δx (приращение аргумента), $f(x) - f(x_0) = \Delta y$ (приращение функции, соответствующее приращению аргумента Δx), то это определение можно записать в эквивалентной форме.

Функция f(x) называется непрерывной в точке x_0, если она определена в некоторой окрестности этой точки и $\lim\limits_{x\to x_0}\Delta y = 0$.

Таким образом, если функция f(x) непрерывна в точке x_0, то бесконечно малому приращению аргумента в этой точке соответствует бесконечно малое приращение функции.

Односторонняя непрерывность

- Функция f(x) называется непрерывной слева в точке x_0, если она определена на некотором полуинтервале (a; x_0] и $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0)$.

- Функция f (x) называется непрерывной справа в точке x_0, если она определена на некотором полуинтервале [x_0; b) и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$.

- Функция f(x) непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда она непрерывна слева и справа в этой точке, т. е. когда $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$.

Непрерывность функции на промежутке

- Функция f(x) называется непрерывной на данном промежутке (интервале, полуинтервале, отрезке), если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

При этом, если функция определена в конце промежутка, то под непрерывностью в этой точке понимается непрерывность справа или слева. В частности, функция f(x) называется непрерывной на отрезке [a; b], если она:

1) непрерывна в каждой точке интервала (a;b);
2) непрерывна справа в точке a;
3) непрерывна слева в точке b.

Точки разрыва функции

Пусть точка x_0 принадлежит области определения функции f(x) или является граничной точкой этой области. Точка x_0 называется точкой разрыва функции f(x), если f(x) не является непрерывной в этой точке.

Точки разрыва подразделяются на точки разрыва 1-го рода и 2-го рода.

Если в точке x_0 существуют конечные односторонние пределы $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, но они не равны между собой, или же односторонние пределы равны между собой, а значение функции в этой точке не совпадает с односторонними пределами, то x_0 называется точкой разрыва 1-го рода.

Если в точке x_0 существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x_0)$, а $f(x_0)$ не определено или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x_0)\neq f(x_0)$,то эта точка называется точкой устранимого разрыва.

Точки разрыва 1-го рода функции f(x), не являющиеся точками устранимого разрыва, называются точками скачка этой функции.

Если x_0 – точка скачка функции f(x), то разность $\Delta f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)-\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ не равна нулю и называется скачком функции f(x) в точке x_0.

Если в точке x_0 не существует хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, то x_0 называется точкой разрыва 2-го рода.

Свойства функций, непрерывных в точке

Теорема. Пусть функции f(x) и g(x) непрерывны в точке x_0. Тогда функции f(x) ± g(x); f(x) * g(x) и f(x)/g(x) (если $g(x_0) \neq 0$) также непрерывны в точке x_0 .

В частности, если функция f(x) непрерывна в точке x_0, то функция $\alpha * f$ (x), где $\alpha \in R$, также непрерывна в точке x_0.

Теорема (о непрерывности сложной функции). Пусть функция u(x) непрерывна в точке x_0, а функция f(u) непрерывна в точке $u_0=u(x_0)$. Тогда сложная функция f(u(x)) непрерывна в точке x_0.

Непрерывность элементарных функций

Теорема. Все простейшие элементарные функции $(c, x^{\alpha}, a^{x}, \log_{\alpha} x, \sin x, \cos x, \arcsin x, \arccos x)$ непрерывны в каждой точке своих областей определения.

Из этой теоремы, а также из двух предыдущих следует, что также непрерывны в каждой точке своих областей определения все функции, полученные из простейших с помощью конечного числа арифметических операций и операции композиции.

Свойства функций, непрерывных на отрезке

Теорема (Больцано-Коши). Пусть функция f(x) определена и непрерывна на отрезке [a; b] и принимает на его концах разные знаки. Тогда найдется хотя бы одна такая точка $x_0 \in$(a;b), что $f(x_0) = 0$.

Теорема (о промежуточных значениях). Пусть функция f(x) определена и непрерывна на отрезке [a;b]. Тогда для любого числа C, заключенного между числами f(a) и f(b), найдется такая точка $x_0 \in$ [a;b], что $f(x_0) = C$.

Теорема (1-я теорема Вейерштрасса). Пусть функция f(x) определена и непрерывна на отрезке [a;b]. Тогда эта функция ограничена на этом отрезке.

Теорема (2-я теорема Вейерштрасса). Пусть функция f(x) определена и непрерывна на отрезке [a; b]. Тогда эта функция принимает на отрезке [a;b] свое наибольшее и наименьшее значение, т. е. существуют такие точки $x_1, x_2 \in$ [a; b], что для любой точки x$\in$ [a; b] справедливы неравенства

$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2).$$

1.3.1. Заполнить таблицу для функции f(x), найдя для каждого приращения Δx в точке $x_0=2$ соответствующее приращение $\Delta y = f(x) - f(x_0)$.

Δx	-1	-0,2	-0,1	-0,01	1	0,2	0,1	0,01
Δy								

а) $f(x) = 3x + 1$;

б) $f(x)=\begin{cases} x-2 & при\ \ x\le 0, \\ 1 & при\ \ x>0. \end{cases}$

На основании заполненной таблицы сделать предположение о поведении функции в точке $x_0 = 2$.

а) При $\Delta x = -1$ имеем $x = x_0 + \Delta x = 2 - 1 = 1$, откуда $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(1) - f(2) = 4 - 7 = -3$.

Аналогично находим и другие значения Δy. В результате получаем таблицу

Δx	-1	-0,2	-0,1	-0,01	1	0,2	0,1	0,01
Δy	-3	-0,6	-0,3	-0,03	3	0,6	0,3	0,03

Как видно из этой таблицы, малым значениям приращения аргумента соответствуют малые значения приращения функции. Поэтому можно сделать предположение о непрерывности данной функции в точке $x_0 = 2$. Разумеется, подобные нестрогие рассуждения не могут служить доказательством непрерывности функции в данной точке.

б) Производя вычисления, как и в пункте а), получаем таблицу

Δx	-1	-0,2	-0,1	-0,01	1	0,2	0,1	0,01
Δy	-1	-0,2	-0,1	-0,01	1	1	1	1

Из таблицы видно, что малые приращения функции соответствуют малым приращениям аргумента лишь слева от точки $x_0 = 2$; справа же от этой точки (т. е. при $\Delta x > 0$) Δy не уменьшается при уменьшении Δx. Отсюда можно предположить, что $x_0 = 2$ – точка разрыва данной функции; при этом f(x) непрерывна слева в этой точке.

1.3.2. Найдя для каждого приращения Δx функции f(x) в точке $x_0=-1$ соответствующее приращение Δy, заполнить таблицу

Δx	-0,5	-0,1	-0,01	0,5	0,1	0,01
Δy						

На основании заполненной таблицы сделать предположение о поведении функции в точке $x_0=-1$.

а) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1} & при\ x\ne -1; \\ 1 & при\ \ x=-1; \end{cases}$

б) f(x)=x2.

1.3.3. Пользуясь определением непрерывности функции, доказать, что функция $y = x_2$ непрерывна в произвольной точке $x_0 \in R$. Пусть

Δx – приращение аргумента в точке x_0. Найдем соответствующее приращение функции:

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = (x_0+\Delta x)^2 - x_0^2 = (x_0^2 + 2x_0 * \Delta x + (\Delta x)^2) - x_0^2 = 2x_0 * \Delta x + (\Delta x)^2.$$

Теперь, применяя теоремы о пределе суммы и произведения функций, получим:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}\left[2x_0 * \Delta x + (\Delta x)^2\right] = \lim_{\Delta x\to 0} 2x_0 * \Delta x + \lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x)^2 = 2x_0 * \lim_{\Delta x\to 0}\Delta x + (\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x)^2 = 0.$$

Таким образом, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$, что и означает (по определению) непрерывность данной функции в точке $x_0 \in R$.

1.3.4. Пользуясь определением, доказать непрерывность функции f(x) в каждой точке $x_0 \in R$.

а)f(x)=c; б)f(x)=x; в)f(x)=x^3; г)f(x)=$4x^3 - 5x + 2$.

1.3.5. Доказать, что функция

$$f(x)=\begin{cases} x & при\, x \le 1, \\ 2 & при\, x > 1 \end{cases}$$

не является непрерывной в точке $x_0 = 1$, но непрерывна слева в этой точке. Построить график функции f(x).

1.3.6. Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} -x-3 & при\, x < -2, \\ x^2 - 4 & при\, x \ge -2 \end{cases}$$

не является непрерывной в точке x_0 = -2, но непрерывна слева в этой точке. Построить график функции f(x).

1.3.7. Исследовать на непрерывность и построить график функции

$$f(x) = \begin{cases} x & при\, x \le -\pi, \\ \sin & при -\pi < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ 1 & при\ x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти скачок функции в точках скачка.

Функции y = x, y = sin x и y = 1 непрерывны на всей числовой прямой, поэтому данная функция может иметь разрывы только в точках, где меняется ее аналитическое выражение, т. е. в точках $x_1 = -\pi \cdot u \cdot x_2 = \dfrac{\pi}{2}$.

Исследуем функцию на непрерывность в этих точках, для чего найдем соответствующие односторонние пределы и значения функции.

В точке $x_1 = -\pi$ имеем:

$$\lim_{x\to-\pi-0} f(x) = \lim_{x\to-\pi} x = -\pi, \qquad \lim_{x\to-\pi+0} f(x) = \lim_{x\to-\pi+0} \sin x = 0,$$
$$f(-\pi) = -\pi.$$

Таким образом, в этой точке $\lim\limits_{x\to-\pi-0} f(x) = f(-\pi) \neq \lim\limits_{x\to-\pi+0} f(x),$ то есть функция имеет разрыв 1-го рода и непрерывна слева. Скачок функции f(x) в точке $x_1 = -\pi$ равен $\Delta f(-\pi) = \lim\limits_{x\to-\pi+0} f(x) - \lim\limits_{x\to-\pi-0} f(x) = \pi.$

Аналогично для точки $x_2 = \dfrac{\pi}{2}$ получим: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0} 1 = 1,$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \sin x = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

А значение f($\dfrac{\pi}{2}$) не определено. Отсюда следует, что $x_2 = \dfrac{\pi}{2}$ – точка устранимого разрыва для функции f(x).

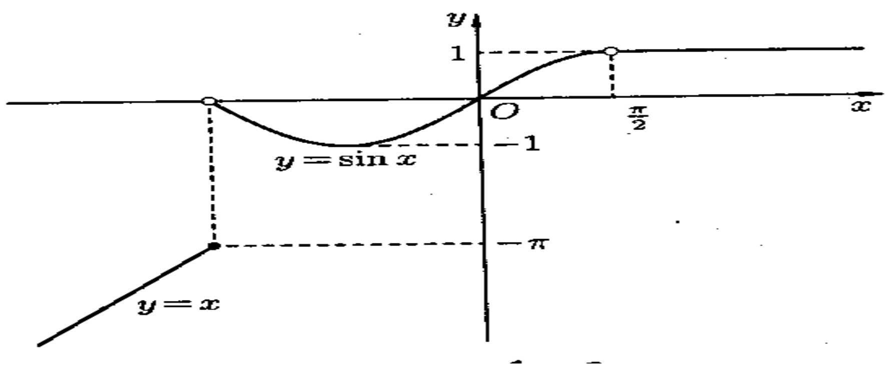

Рис. 3

График функции изображен на рисунке 3.

1.3.8. Исследовать на непрерывность и построить график функции f(x).

Найти скачок функции в точках разрыва.

а) $f(x) = \begin{cases} 2, & если \cdot x < -2, \\ \sqrt{4 - x^2}, & если \cdot -2 \le x < 2, \\ x - 2, & если \cdot x > 2; \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & еслс \cdot x < 1, \\ 2, & если \cdot 1 < x \le 2, \\ 3x, & если \cdot x > 2. \end{cases}$

ГЛАВА 2. ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

§1. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

Понятие производной

Пусть функция y = f(x) определена в некоторой окрестности точки x_0. Предел отношения приращения Δy функции в этой точке (если он существует) к приращению Δx аргумента, когда $\Delta x \to 0$, называется производной функции f(x) в точке x_0.

Обозначения: $f'(x_0)$ или y'(x0) или $\frac{df(x_0)}{dx}$ или $f'|_{x=x_0}$.

Таким образом,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Вычисление производной называется дифференцированием функции.

Таблица производных

1. $(c)' = 0, c = const.$
2. $(x^{\alpha})' = \alpha * x^{\alpha - 1}(где \cdot\cdot \alpha \in R);$ *в частности*, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$
3. $(a^x)' = a^x * \ln a, a > 0;$ *в частности*, $(e^x)' = e^x.$
4. $(\log_{\alpha} x)' = \frac{1}{x \ln a}, a > 0, a \neq 1;$ *в частности*, $(\ln x)' = \frac{1}{x}.$
5. $(\sin x)' = \cos x.$
6. $(\cos x)' = -\sin x.$
7. $(tg \cdot x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$
8. $(ctg \cdot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$
9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$
10. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$
11. $(arctg \cdot x)' = \frac{1}{1 + x^2}.$
12. $(arcctg \cdot x)' = -\frac{1}{1 + x^2}.$

13. $(shx)' = chx.$

14. $(chx)' = shx.$

15. $(thx)' = \frac{1}{ch^2 x}.$

16. $(cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}.$

где $shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $thx = \frac{shx}{chx}$, $cthx = \frac{chx}{shx}$.

Основные правила дифференцирования

Пусть с – константа, а u(x) и v(x) имеют производные в некоторой точке x. Тогда функции $u(x) \pm v(x),\ c * u(x),\ u(x) * v(x),\ \frac{u(x)}{v(x)}$ (где v(x) $\neq 0$) также имеют производные в этой точке, причем

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'.$

2. $(u * v)' = u'v + uv',$ *в частности,* $(cu)' = c * u'.$

3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2},$ *в частности,* $\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2}.$

Пусть теперь функция u=φ(x) имеет производную в точке x_0, а функция y =f(u) – в точке $u_0=\varphi(x_0)$. Тогда сложная функция y=f(φ(x)) также имеет производную в точке x_0, причем

$$y'(x_0) = y'(u_0) * u'(x_0).$$

Геометрический смысл производной

Пусть функция y=f(x) имеет производную в точке x_0.Тогда существует касательная к графику этой функции в точке $M_0(x_0; y_0)$, уравнение которой имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

При этом $f'(x_0) = tg\alpha$, где α – угол наклона этой касательной к оси Ox (рис. 4).

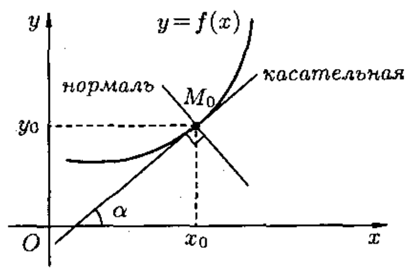

Рис. 4

Прямая, проходящая через точку касания перпендикулярно касательной, называется нормалью к кривой и имеет уравнение

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} * (x - x_0).$$

Если f'(x_0)= 0 (т.е. касательная горизонтальна), то нормаль вертикальна и имеет уравнение x = x_0.

Пусть даны две пересекающиеся в точке $M_0(x_0, y_0)$, кривые $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, причем обе функции имеют производные в точке x_0. Тогда углом между этими кривыми называют угол между касательными к ним, проведенными в точке M_0.

Этот угол φ можно найти из формулы $tg\varphi = \dfrac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) * f_2'(x_0)}$.

Логарифмическая производная

При нахождении производных от показательно-степенной функции $u(x)^{v(x)}$, а также других громоздких выражений, допускающих логарифмирование (произведение, частное и извлечение корня), удобно применять логарифмическую производную.

- Логарифмической производной от функции y=f(x) называется производная от логарифма этой функции:

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y}.$$

Используя логарифмическую производную, нетрудно вывести формулу для производной показательно-степенной функции $u(x)^{v(x)}$:

$$(u^v)' = u^v * v' * \ln u + u^{v-1} * u' * v.$$

Производная неявной функции

Пусть функция y = y(x), обладающая производной в точке x, задана неявно уравнением

$$F(x,y)=0. \qquad (1)$$

Тогда производную y'(x) этой функции можно найти, продифференцировав уравнение (1) (при этом y считается функцией от x) и разрешая затем полученное уравнение относительно y'.

Производные высших порядков

- Производная f'(x) от функции f(x) называется также производной первого порядка. В свою очередь, производная от функции f'(x) называется производной второго порядка от функции f(x) (или второй производной) и обозначается f''(x).

Аналогично определяется производная третьего порядка (или третья производная), обозначаемая f'''(x) и т.д.

Производная n-го порядка обозначается $f^{(n)}$(x).

Производная функций, заданных параметрически

Пусть функция y = f(x) определена параметрически функциями x= x(t) и y = y(t). Тогда, если функции x(t) и y(t) имеют производные в точке t_0, причем $x'(t_0) \neq 0$, а функция y= f(x) имеет производную в точке $x_0 = x(t_0)$, то эта производная находится по формуле

$$y'(x_0) = \frac{y_t'(t_0)}{x_t'(t_0)} \qquad \text{или} \qquad y_x' = \frac{y_t'}{x_t'}.$$

Вторая производная y''(x) находится по формуле

$$y_{xx}'' = \frac{y_t'' * x_t' - x_t'' * y_t'}{(x_t')^3}.$$

2.1.1. Пользуясь определением, найти производную функции y =f(x):

1) $y = 3x^2$; 2) $y = \sin x$.

1) Придадим аргументу x приращение Δx. Тогда соответствующее приращение Δy функции будет иметь вид

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 3(x + \Delta x)^2 - 3x^2 = 3(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2) = 3\Delta x(2x + \Delta x).$$

Отсюда находим предел отношения $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ в точке x при $\Delta x \to 0$.

Таким образом, $y' = (3x^2)' = 6x$.

2) Найдем приращение Δy функции, соответствующее приращению Δx аргумента, используя формулу разности синусов:

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}*\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Отсюда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}*\cos(x+\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}*\lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})=\cos x.$$

В последнем равенстве мы воспользовались первым замечательным пределом и непрерывностью $\cos x$. Таким образом,

$$y'=(\sin x)'=\cos x.$$

Пользуясь определением, найти производные функций:

2.1.2. $y=5x-2$. 2.1.3. $y=x^3$. 2.1.4. $y=\sqrt{x}$. 2.1.5. $y=\frac{1}{x}$.

2.1.6. Пользуясь основными правилами дифференцирования, найти $f'(x)$, если: 1) $f(x)=\frac{9}{\sqrt[3]{x^2}}-5^{x+1}$; 2) $f(x)=(x^4-x)*(3\cdot tg\cdot x-1)$.

1) Преобразуем функцию к виду $f(x)=9*x^{-2/3}-5*5^x$. Отсюда, используя таблицу производных, получим:

$$f'(x)=(9*x^{-2/3}-5*5^x)'=(9*x^{-2/3})'-(5*5^x)'=9*(x^{-2/3})'-5*(5^x)'=$$
$$=9*(-\frac{2}{3})*x^{-\frac{2}{3}-1}-5*5^x\ln 5=-6x^{-5/3}-5^{x+1}\ln 5).$$

2) Воспользуемся формулой для производной произведения:

$$f'(x)=\left[(x^4-x)(3tgx-1)\right]'=(x^4-x)'(3tgx-1)+(x^4-x)(3tgx-1)'=$$
$$=(4x^3-1)(3tgx-1)+(x^4-x)*\frac{3}{\cos^2 x}.$$

Найти производные указанных функций:

2.1.7. $y=x^3-\frac{1}{5}x^2+2x-4$. 2.1.8. $y=ax^2+bx+c$. 2.1.9. $y=6x^7+4x^3-\frac{1}{8}x$.

2.1.10. $y=\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{3}$. 2.1.11. $y=\sqrt{x}-\frac{3}{x}+\frac{9}{x^2}$. 2.1.12. $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{2}{x^3}+\sqrt{7}*x$.

2.1.13. $y = x\sqrt[4]{x} + 3\sin 1.$ 2.1.14. $y = 5*2^x + \frac{3}{4}ctgx.$ 2.1.15. $y = tgx - ctgx.$

2.1.16. $y = -10arctgx + 7*e^x.$ 2.1.17. $y = x^3\log_2 x.$ 2.1.18. $y = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1).$

2.1.19. Применяя правило дифференцирования сложной функции, найти производную функции у:

1) $y = \sin^2 x;$

2) $y = \ln(arctg3x).$

1) Данная функция является композицией двух имеющих производные функций $u = \sin x$ и $f(u) = u^2$. Так как u'= cosx, а $f'(u) = 2u$, то с учетом правила дифференцирования сложной функции получим:

$$y'(x) = (u^2)'_x = 2u*u' = 2\sin x*\cos x = \sin 2x.$$

2) Функция $\ln(arctg3x)$ – композиция функций $u = arctg3x$ и $f(u) = \ln u,$ откуда

$$y'(x) = (\ln u)'_x = \frac{1}{u}*u' = \frac{1}{arctg3x}*(arctg3x)'.$$

Функция $arctg3x$, в свою очередь, является композицией двух функций v=3x и g(v)=arctgv, поэтому для нахождения ее производной нам придется еще раз применить правило дифференцирования сложной функции:

$$(arctg3x)' = (arctgv)'_x = \frac{1}{1+v^2}*v' = \frac{1}{1+(3x)^2}*3 = \frac{3}{1+9x^2}.$$

Отсюда окончательно

$$y' = \frac{1}{arctg3x}*(arctg3x)' = \frac{3}{(1+9x^2)arctg3x}.$$

Найти производные функций:

2.1.20. $y = \cos 5x.$

2.1.21. $y = 7^{3x-1}.$

2.1.22. $y = \cos^3 x.$

2.1.23. $y = (x+1)^{100}.$

2.1.24. $y = \sqrt{tgx}.$

2.1.25. $y = \arcsin\sqrt{x}.$

2.1.26. $y = \frac{1}{\ln x}.$

2.1.27. $y = \ln\sin x.$

2.1.28. $y = e^{ctgx}.$

2.1.29. $y = \arccos(e^x).$

2.1.30. $y = \sin^9\left(\frac{x}{2}\right).$

2.1.31. $y = \sqrt[3]{(1-3x)^2}.$

2.1.32.1) Написать уравнения касательной и нормали к параболе $y^2 = 4x$ в точке M(1;2).

2) Найти точки, в которых касательная к графику гиперболы $y = \frac{1}{x}$ параллельна прямой $y = -\frac{1}{4}x + 3$.

3) Найти угол, под которым пересекаются кривые $y = \frac{8}{x}$ и $x^2 - y^2 = 12$.

1) Найдем y'(x) как производную неявной функции: $(y^2)' = (4x)'$, т.е. $2yy' = 4$, откуда $y' = \frac{2}{y}$. Значит, $y'(x_0) = y'(1) = 1$.

Отсюда получаем уравнение касательной в точке M:

$$y - 2 = x - 1, \text{ то есть } y = x + 1.$$

Теперь найдем уравнение нормали: $y - 2 = -(x - 1)$, то есть $y = -x + 3$.

2) Угловой коэффициент данной прямой равен $-\frac{1}{4}$, производная к кривой в искомой точке x_0 также равна $-\frac{1}{4}$:

$$y'(x_0) = -\frac{1}{4}, \text{то есть } -\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{4}, \text{ откуда } x^2 = 4, \text{ или } x = \pm 2.$$

3) Сначала найдем точку пересечения кривых, для чего подставим $y = \frac{8}{x}$ во второе уравнение: $x^2 - \left(\frac{8}{x}\right)^2 = 12$, или $t - \frac{64}{t} = 12$, где $t = x^2$. Решая последнее уравнение, найдем t=16, откуда x = ± 4, y = ± 2. Таким образом, имеем 2 точки пересечения M_1 (4;2) и M_2(-4; -2).

Найдем угол φ_1 пересечения кривых в точке M_1, предварительно вычислив $y_1'(4)$ и $y_2'(4)$ из уравнений $y_1 = \frac{8}{x}$ и $x^2 - y_2{}^2 = 12$:

$$y_1' = -\frac{8}{x^2} \Rightarrow y_1'(4) = -\frac{8}{16} = -0{,}5;$$
$$(x^2 - y_2^2)' = 12' \Rightarrow 2x - 2y_2 * y_2' = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y_2' = \frac{x}{y_2} \Rightarrow y_2'(4) = \frac{4}{2} = 2.$$

Теперь окончательно найдем $tg\varphi_1 = \dfrac{y_2'(4) - y_1'(4)}{1 + y_1'(4) y_2'(4)} = \dfrac{2 + \frac{1}{2}}{1 - 1}.$

Поскольку знаменатель дроби обратился в ноль, то это означает, что $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{2}$.Аналогично находим угол $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{2}$ во второй точке пересечения данных кривых.

Найти уравнения касательной и нормали к данной кривой в точке x_0:

2.1.33. $y = e^x, x_0 = 0.$ 2.1.34. $y = \sin x, x_0 = \dfrac{\pi}{3}.$

2.1.35. В какой точке касательная к кривой y=ln(x) параллельна прямой: $а) y = 2x + 5;$ $б) y = x + \sqrt{3}$?

2.1.36. Найти углы, под которыми пересекаются кривые $y^2 = 2x$ и $x^2 + y^2 = 8$.

2.1.37. Найти: 1) $f'''(x)$, где $f(x) = \sin 3x;$

2) y''_{xx} для функции y=y(x) , заданной параметрически $x = t^2, y = t^3$.

1) Находим первую производную: $f'(x) = (\sin 3x)' = 3\cos 3x.$ Отсюда получим вторую производную $f''(x) = (3\cos 3x)' = -9\sin 3x,$ а затем и искомую третью: $f'''(x) = (-9\sin 3x)' = -27\cos 3x.$

2) Воспользуемся формулой

$$y''_{xx} = \frac{x_t' * y_{tt}'' - y_t' * x_{tt}''}{(x_t')^3}.$$

Пользуясь определением, найти производные следующих функций: 2.1.38. $y = -4.$ 2.1.39. $y = e^x$ 2.1.40. $y = 5t^3 - 2t + 7.$ 2.1.41. $f(h) = \dfrac{3}{h^2 + 1}.$

Найти производные функций:

2.1.42. $y = 5\sqrt{x} + \dfrac{13}{x^4} - \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}.$

2.1.43. $y = 10x^6 - \dfrac{4}{x} + 3\sqrt[5]{x}.$

2.1.44. $y = 2ctgx - 3\sin x.$

2.1.45. $y = arctgx + 7 * e^x.$

2.1.46. $y = 19^x - 8\arcsin x.$

2.1.47. $y = (x^2 - 1)(x^3 + x).$

2.1.48. $\varphi(\alpha) = 3\arcsin\alpha - 4\arccos\alpha + 14\sqrt[7]{\alpha}.$

2.1.49. $f(t)=\frac{t}{1-t^2}.$

2.1.50. $y=3\sin^2 x-\lg x+3cox^2x.$

2.1.51. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x-\frac{1}{3^x}+4^x.$

2.1.52. $y=\frac{e^x+\ln x}{e^x-\ln x}$.

2.1.53. $y=(x+1)(x+2)(x+3)$.

2.1.54. $y=(x^2-1)(x^2-3)(x^2-5).$

2.1.55. $f(x)=\frac{x^2-x+2}{x^3+4}.$

2.1.56. $y=\frac{3}{x^4+2}.$

2.1.57. $y=\sqrt{x}(x^5+\sqrt{x}-2).$

2.1.58. $y=\frac{3^{2x}}{2^{2x}}-\sqrt[5]{x}*\ln x^5.$

Найти уравнения касательной и нормали к данной кривой в данной точке:

2.1.59. $y=x^3, x_0=-2.$ 2.1.60. $x^2+y^2=4, M_0=(1;\sqrt{3}).$ 2.1.61. $x=t^2, y=t^3, t_0=2.$

2.1.62. $y=2x-x^2$ в точках пересечения с осью Ох.

2.1.63. В какой точке касательная к параболе $-x^2+4x-6$ наклоняется к оси абсцисс под углом $а)0^0$; $б)45^0$?

Найти производные указанных порядков для следующих функций:

2.1.64. $y=\ln\cos x, y''=.$

2.1.65. $y=\sin^2 x, y''=.$

2.1.66. $y=5^x, y''=.$

2.1.67. $y=\frac{1}{4x-1}, y''=.$

§2. ДИФФЕРЕНЦИАЛ

Понятие дифференциала

Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Тогда если существует такое число А, что приращение Δy этой функции в точке x_0, соответствующее приращению Δx аргумента, представимо в виде:

$$\Delta y=A*\Delta x+\alpha(\Delta x)*\Delta x, \tag{2}$$

где $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$, то функция $f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0. При этом главная, линейная относительно Δx, часть этого приращения, т.е. $A*\Delta x$, называется дифференциалом функции в точке x_0 и обозначается dy или $df(x_0)$.

Нетрудно показать (положив y = x в формуле (2)), что $dx = \Delta x$. Функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда в этой точке существует конечная производная $f'(x_0)$; при этом $A = f'(x_0)$. Поэтому $df(x_0) = f'(x_0)dx$, или, если $f'(x)$ существует в данном интервале (a;b), то

$$dy = f'(x)dx, \ x \in (a;b).$$

Отсюда $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$, т.е. производная функции $y = f(x)$ в точке x равна отношению дифференциала этой функции в данной точке к дифференциалу независимой переменной.

Если приращение Δx аргумента x близко к нулю (т. е. достаточно мало), то приращение Δy функции приближенно равно ее дифференциалу, т. е. $\Delta y \approx dy$, откуда

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)\Delta x}_{df(x_0)}.$$

Последняя формула удобна для приближенного вычисления значения функции $f(x)$ в точке x_0 по известному значению этой функции ее производной в точке x_0.

Геометрический смысл и свойства дифференциала

Геометрически (рис. 5) приращение Δy функции $f(x)$ в точке x – приращение ординаты точки на кривой ($\Delta y = AC$), а дифференциал dy функции в этой точке – приращение ординаты соответствующей точки на касательной (dy = AB).

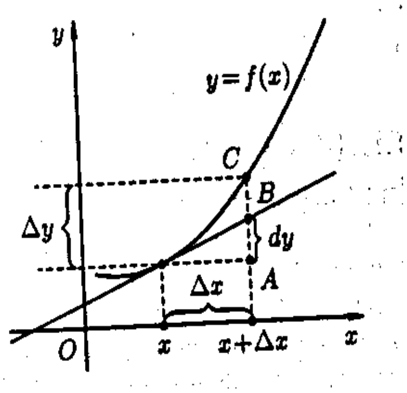

Рис. 5

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ – некоторые функции, дифференцируемые в точке x. Тогда:

1. $dC = 0$, где C – константа.
2. $d(\alpha u) = \alpha \bullet du$, где α – константа.
3. $d(u \pm v) = du \pm dv$.
4. $d(u \bullet v) = udv + vdu$.
5. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$, где $v(x) \neq 0$.

6. Инвариантность формы дифференциала. Если $y = f(x)$ сложная функция, то

$$df(u) = f^{/}(u)du, \text{ или } dy = y_u^{/} * du,$$

форма дифференциала не меняется (инвариантна) независимо от того, рассматривается у как функция независимой переменной х или зависимой переменной u.

Дифференциалы высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$. Тогда, известно, в каждой точке этого интервала определен дифференциал $dy = f^{/}(x)dx$ функции $f(x)$, называемый также дифференциалом первого порядка (или первым дифференциалом).

Дифференциалом второго порядка (или вторым дифференциалом) от функции $y = f(x)$ в точке $x \in (a;b)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка функции $f(x)$ в этой точке.

Дифференциал второго порядка обозначается d^2y или $d^2f(x)$. Таким образом, $d^2y = d(dy)$. Учитывая, что $dy = f^{/}(x)dx$, где dx независящая от x константа, получим $d^2y = f^{//}(x)(dx)^2$, или, более кратко, $d^2y = f^{//}(x)dx^2$.

Аналогично определяются дифференциалы третьего и более высоких порядков: $d^3y = d(d^2y)$, $d^4y = d(d^3y),\ldots$. В общем случае, дифференциалом n-го порядка от функции $f(x)$ в точке x называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка функции $f(x)$ в этой точке:

$d^ny = d(d^{n-1}y)$, т.е. $d^ny = f^{(n)}(x)(dx)^n$, или, более кратко, следует, что

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}, \text{ в частности } f^{//}(x) = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Заметим, что для дифференциалов высших порядков свойство инвариантности (как для дифференциалов первого порядка) не имеет места.

2.2.1. Найти дифференциал функции $y = e^{x^3}$.

Так как $dy = f^{/}(x)dx$, то в данном случае $dy = (e^{x^3})^{/} dx = 3x^2 * e^{x^3} dx.$

Найти дифференциал функции:

2.2.2. $y = arctg\sqrt{x}.$ 2.2.3. $y = (x^3 - x)tgx.$ 2.2.4. $y = x^2 \ln x.$

2.2.5. $y = \dfrac{x-2}{x^2+1}.$

2.2.6. Найти приращение и дифференциал функции $y = x^2 - 3x + 1$ в точке $x_0 = 2$, если $\Delta x = 0{,}1$. Сначала найдем приращение Δy в общем виде: $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = \left[(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) + 1\right] - (x^2 - 3x + 1) =$
$= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x + 1 - x^2 + 3x - 1 = 2x\Delta x - 3\Delta x + (\Delta x)^2 =$
$= (2x - 3)\Delta x + (\Delta x)^2$.

Из полученного выражения для приращения Δy видно, что линейная часть в произвольной точке x_0 равна $(2x_0 - 3)\Delta x$. Тогда, по определению, дифференциал данной функции будет равен $dy = (2x - 3)\Delta x$, или, в более привычной записи, $dy = (2x - 3)dx$.

Второе слагаемое в полученной записи для Δy, т.е. $(\Delta x)^2$, есть бесконечно малая более высокого порядка, чем первое слагаемое.

Заметим, что можно найти dy и сразу (без вычисления Δy) по формуле $dy = y^{/}dx$, откуда $dy = (x^2 - 3x + 1)^{/} dx = (2x - 3)dx$.

Теперь Δy найдем и dy в точке $x_0 = 2$, если $\Delta x = 0{,}1$:

$$\Delta y = (2 * 2 - 3) * 0{,}1 + (0{,}1)^2 = 0{,}1 + 0{,}11 = 0{,}11,\ dy = 0{,}1.$$

Найти приращение и дифференциал функции $y = f(x)$ в общем виде, а также в точке x_0, если известно Δx:

2.2.7. $y = x^3 + 2x, x_0 = 1, \Delta x = 0{,}01$. 2.2.8. $y = x^2 + x - 5, x_0 = 0, \Delta x = 0{,}5.$

2.2.9. Вычислить приближенно: 1) $\ln 1{,}02.$ 2) $\sqrt{24}.$

1) Воспользуемся приближенной формулой $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f^{/}(x_0)\Delta x$. Тогда, подставляя $f(x) = \ln x,$ получим $\ln(x_0 + \Delta x) \approx \ln x_0 + \dfrac{1}{x_0} \bullet \Delta x.$ Полагая здесь $x_0 = 1, \Delta x = 0{,}02$, найдем $\ln 1{,}02 \approx \ln 1 + \dfrac{1}{1} \bullet 0{,}02 = 0{,}02$. Таким образом, $\ln 1{,}02 \approx 0{,}02$.

2) Учитывая, что $f(x)=\sqrt{x}, x_0=25, \Delta x=-1$, получим $\sqrt{x_0+\Delta x}\approx\sqrt{x_0}+\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}*(\Delta x)$, $\sqrt{24}\approx\sqrt{25}+\dfrac{1}{2\sqrt{25}}*(-1)=4{,}9$. Окончательно $\sqrt{24}\approx 4{,}9$.

Вычислить приближенно:

2.2.10. $\sqrt[3]{26}$. 2.2.11. $tg44^{\circ}$. 2.2.12. $(1{,}02)^5$.

§3. ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ. ПРАВИЛА ЛОПИТАЛЯ. ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА

Теоремы о среднем

Теорема 1 (Ролля). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале $(a;b)$ и принимает на концах отрезка равные значения (т.е. $f(a)=f(b)$). Тогда существует по крайней мере одна точка c на интервале $(a;b)$,для которой $f'(c)=0$.

Теорема 2 (Лагранжа). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема на интервале $(a;b)$, Тогда на интервале $(a;b)$ найдется такая точка c, что $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

Теорема 3 (Коши). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$непрерывны на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемы на интервале $(a;b)$, причем $g'(x)\neq 0$ для всех $x\in(a;b)$. Тогда найдется такая точка c на этом интервале, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Правила Лопиталя

Первое правило Лопиталя. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0, кроме, быть может, самой этой точки, и $g'(x)\neq 0$для всех $x\in U(x_0), x\neq x_0$. Тогда, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ (в этом случае говорят, что в точке x_0 место неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$) и существует $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, причем $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Второе правило Лопиталя. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0, кроме, быть может, самой этой точки, и $g^{/}(x) \neq 0 \ \ \forall x \in U(x_0), x \neq x_0$ (где знак $\forall$ означает для любого, каждого). Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$ (т.е. в точке x_0 имеет место неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$) и существует $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f^{/}(x)}{g^{/}(x)}$, то существует и $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, причем $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f^{/}(x)}{g^{/}(x)}$.

Если отношение $\frac{f^{/}(x)}{g^{/}(x)}$, в свою очередь, представляет собой неопределенность вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, то правило Лопиталя (при условии выполнения соответствующих ограничений на функции $f^{/}(x)$ и $g^{/}(x)$) можно применять второй раз и т.д.

Формула Тейлора

Пусть функция $f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки x_0 производные $f^{/}, f^{//}, ..., f^{(n)}$. Тогда для любой точки x из этой окрестности имеет место равенство

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{/}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{//}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... \\ ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n). \qquad \text{при } x \to x_0$$

Эта формула называется формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Последнее слагаемое (т.е. остаточный член) в формуле Тейлора иногда записывают в виде $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)}(x - x_0)^{n+1}$ (в этом случае надо дополнительно предполагать существование $f^{(n+1)}(x)$ в данной окрестности точки x_0).

Соответствующая формула тогда называется формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

В случае $x_0 = 0$ формула Тейлора принимает вид

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{/}(0)}{1!}x + \frac{f^{//}(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n), \ \ x \to 0$$

и называется формулой Маклорена.

Полезно помнить разложения по формуле Маклорена некоторых важнейших элементарных функций:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^n * x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n * x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} * x^n}{n} + o(x^n),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\alpha(\alpha-1).....(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + o(x^n).$$

2.3.1. Проверить, справедлива ли теорема Ролля для функции $f(x) = x^2 - 2x$ на отрезке [-1; 3], найти соответствующее значение с (если оно существует).

Функция непрерывна на отрезке [-1;3] и дифференцируема на интервале (-1; 3). Кроме того, $f(-1) = f(3) = 3$, поэтому теорема Ролля на данном отрезке для данной функции справедлива. Найдем значение $c \in (-1;3)$, для которого $f'(c) = 0$, из равенства $(x^2 - 2x)' = 0$, т.е. 2х - 2 = 0, откуда x= 1. Поскольку $1 \in (-1;3)$, то с = 1 – искомое значение.

Проверить справедливость теоремы Ролля для функции $f(x)$ на данном отрезке, найти соответствующее значение c (если оно существует):

2.3.2. $f(x) = |x| - 2, [-2;2].$

2.3.3. $f(x) = -x^2 + 4x - 3, [0;4].$

2.3.4. $f(x) = \cos x, \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right].$

2.3.5. $f(x) = \sqrt[5]{x^2}, [-1;1].$

2.3.6. Найти пределы, используя правило Лопиталя:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln \sin 3x}{\ln x};$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3}{x - \sin x}.$

1) Поскольку $\ln \sin 3x$ и $\ln x$ стремятся к бесконечности при $x \to 0$, то в данном случае имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin 3x}{\ln x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln\sin 3x)'}{(\ln x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{3x\cos 3x}{\sin 3x}=3\lim_{x\to 0}\cos 3x\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\frac{\sin 3x}{x}\right)}=3*\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}}=1.$$

В последнем равенстве мы воспользовались первым замечательным пределом.

2) $\lim\limits_{x\to 0}x^3=\lim\limits_{x\to 0}(x-\sin x)=0,$ поэтому имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x^3)'}{(x-\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{1-\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(3x^2)'}{(1-\cos x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{6x}{\sin x}=6*\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=6.$$

В этом примере правило Лопиталя применялось дважды.

Найти пределы:

2.3.7. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3+x-10}{x^3-3x-2}$. 2.3.8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}$. 2.3.9. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$. 2.3.10. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}$.

2.3.11. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^3}$. 2.3.12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{ctg 2x}$.

2.3.13. 1) Разложить по формуле Тейлора функцию $f(x)=\frac{1}{x}$ в точке $x_0=1$.

2) Разложить по формуле Маклорена функцию $f(x)=arctgx$ до $o(x^3)$.

1) Сначала найдем формулу для n-го члена разложения.

Так как

$f'(1)=-1!,\ f''(1)=2!,\ f'''(1)=-3!,\ f^{(1\vee)}(1),...,\ f^{(n)}(1)=(-1)^n\bullet n!,$

то $\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n=(-1)^n\bullet(x-1)^n$. Отсюда

$$\frac{1}{x}=1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3+...+(-1)^n\bullet(x-1)^n+o((x-1)^n),x\to x_0.$$

2) Необходимо представить данную функцию в виде

$$arctgx=arctg(0)+\frac{arctg'(0)}{1!}x+\frac{arctg''(0)}{2!}x^2+\frac{arctg'''(0)}{3!}x^3+o(x^3),x\to 0.$$

Учитывая, что

$$arctg(0)=0,arctg'(0)=\left.\frac{1}{1+x^2}\right|_{x=0}=1,arctg''(0)=\left.\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\right|_{x=0}=0,arctg'''(0)=\left.\frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}\right|_{x=0}=-2,$$

получим требуемое разложение:

$$arctgx=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3).$$

Разложить по формуле Тейлора функцию $f(x)$ в точке x_0:

2.3.14. $f(x)=2^x, x_0=\log_2 3.$

2.3.15. $f(x)=\dfrac{x^2\ln x}{2}, x_0=1.$

Разложить по формуле Маклорена функцию $f(x)$ до $o(x^k)$, где

2.3.16. $f(x)=e^{2-x}, k=4.$

2.3.17. $f(x)=\arcsin x, k=3.$

Найти пределы, используя правило Лопиталя:

2.3.18. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{10}-2x+1}{x^{20}-4x+3}.$

2.3.19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sqrt{x+1}-1}.$

2.3.20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin 2x}.$

2.3.21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgx-x}{x^3}.$

2.3.22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-1}{\sin^3 x}.$

2.3.23. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{ctg\,\frac{\pi x}{2}}{\ln(x-2)}.$

2.3.24. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\log_2 x}{2^x}.$

2.3.25. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3-x}{5x^3+x^2-7x+3}.$

2.3.26. $\lim\limits_{x\to 0} x*\sin\dfrac{1}{x}.$

2.3.27. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(t-\dfrac{\pi}{2}\right)tgt.$

2.3.28. $\lim\limits_{x\to 0} x\ln ctgx.$

2.3.29. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\cos x}-\dfrac{1}{\pi-2x}\right).$

2.3.30. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\left(ctg^2\alpha-\dfrac{1}{\alpha^2}\right).$

2.3.31. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{arctgx}\right).$

2.3.32. $\lim\limits_{x\to 0}(ctgx)^{\sin x}.$

2.3.33. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}.$

2.3.34. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+2^x\right)^{\frac{1}{x}}.$

2.3.35. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{3}{x}}.$

§4. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

Условия монотонности функции

Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и для любого x из интервала $(a;b)$ выполнено неравенство $f'(x)>0 (f'(x)<0)$, $f(x)$ возрастает (соответственно убывает) на этом интервале.

Условие же $\forall x \in (a;b)$: $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) равносильно тому, что функция $f(x)$ не убывает (соответственно, не возрастает) на интервале $(a;b)$, т.е $\forall x_1, x_2 \in (a;b)$, из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) \leq f(x_2)$ (соответственно, $f(x_1) \geq f(x_2)$).

Экстремумы функции

Точка x_0 называется точкой локального максимума (локального минимума), если существует такая окрестность $U(x_0)$ окрестности, что $f(x_1) \leq f(x_0)$ $\forall x \in U(x_0), x \neq x_0$ (соответственно, $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in U(x_0), x \neq x_0$).

Точки локального максимума и минимума называются точками локального экстремума, а значения функции в этих точках экстремумами функции.

Теорема 4 (Ферма – необходимое условие экстремума). Если x_0 – точка локального экстремума для функции $f(x)$, то в этой точке производная функции либо равна нулю ($f'(x_0) = 0$), либо не существует.

Точки области определения непрерывной функции $f(x)$, в которых ее производная не существует или равна нулю, называются критическими точками функции.

В силу теоремы Ферма экстремумы функции находятся среди ее критических точек.

Первое достаточное условие экстремума. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и дифференцируема в некоторой ее окрестности (кроме, быть может, самой точки x_0). Тогда, если $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то x_0– точка локального экстремума (если с «+» на «-» – локальный максимум, если же с «-» на «+» – локальный минимум).

Второе достаточное условие экстремума. Пусть функция $f(x)$ в точке x_0– производные первого и второго порядков. Тогда, если $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$, то x_0 – точка локального экстремума. В частности, если т $f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0$, то x_0 точка локального максимума, а если $f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка локального минимума.

Если $x_1, x_2, ..., x_n$ – критические точки непрерывной на отрезке $[a;b]$ функции $f(x)$, то наибольшее и наименьшее значения этой функции есть соответственно наибольшее и наименьшее из чисел $f(a), f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), f(b)$.

Выпуклость и вогнутость функции. Точки перегиба

Функция $f(x)$, определенная на интервале $(a;b)$, называется выпуклой вверх (выпуклой вниз) на этом интервале, если точки любой дуги графика функции расположены выше (соответственно, ниже) хорды, стягивающей эту дугу (рис.6).

Иногда выпуклость вверх (соответственно, выпуклость вниз) называют просто выпуклостью (соответственно, вогнутостью).

График выпуклой вверх (выпуклой вниз) на интервале $(a;b)$ функции ее называют выпуклым вверх (соответственно, выпуклым вниз).

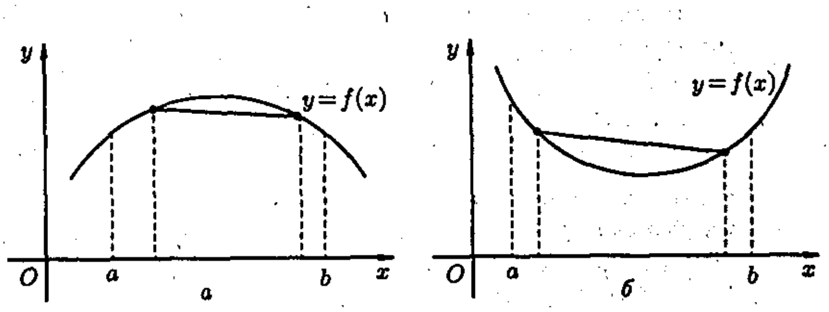

Рис. 6

Можно дать другое, эквивалентное, определение выпуклости вверх (выпуклости вниз): функция $f(x)$ называется выпуклой вверх (выпуклой вниз) на интервале $(a;b)$, если график этой функции при $x \in (a;b)$ расположен ниже (соответственно, выше) касательной, проведенной в любой его точке (рис. 7).

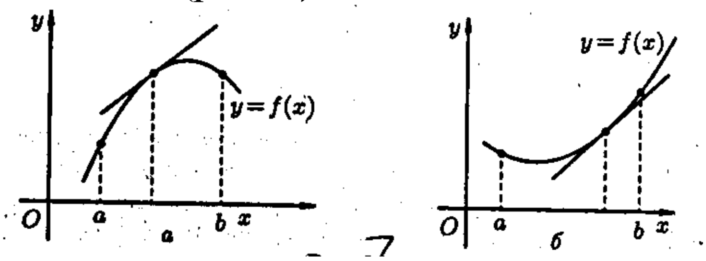

Рис. 7

Достаточное условие выпуклости вверх (вниз). Пусть функция $f(x)$ имеет вторую производную на интервале $(a;b)$. Тогда, если $f''(x) < 0$ (соответственно, $f''(x) > 0$) на этом интервале, то функция $f(x)$ выпукла вверх (соответственно, выпукла вниз) на нем.

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0. Тогда, если при переходе через точку x_0 функция меняет направление выпуклости, то эта точка называется точкой перегиба функции $f(x)$. Точка $(x_0, f(x_0))$при этом называется точкой перегиба графика функции $f(x)$ (рис. 8).

Необходимое условие точки перегиба. Если x_0 – точка перегиба функции $f(x)$, то в этой точке вторая производная функция либо равна нулю $f''(x_0) = 0$, либо не существует.

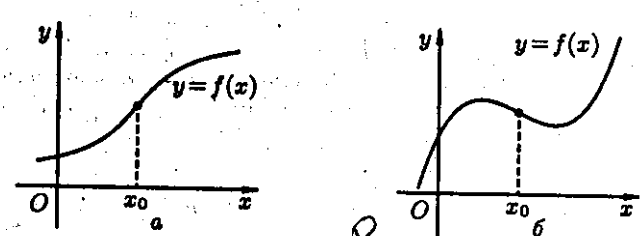

Рис. 8

Точки, в которых вторая производная функции равна нулю или не существует, называются критическими точками 2-го рода.

Точки перегиба следует искать среди критических точек 2-го рода.

Первое достаточное условие точки перегиба. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и имеет вторую производную в некоторой окрестности этой точки (кроме, быть может, самой точки x_0). Тогда, если при переходе через точку x_0 вторая производная меняет знак, то x_0 – точка перегиба.

Второе достаточное условие точки перегиба. Пусть в точке x_0 функция $f(x)$ имеет производные до третьего порядка включительно. Тогда $f''(x_0) = 0$, а $f'''(x_0) \neq 0$, то x_0 – точка перегиба этой функции.

Асимптоты

Прямая линия m называется асимптотой графика функции $y = f(x)$, если расстояние d от точки *M,* лежащей на этом графике, до m стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки по графику от начала координат в бесконечность (рис. 9).

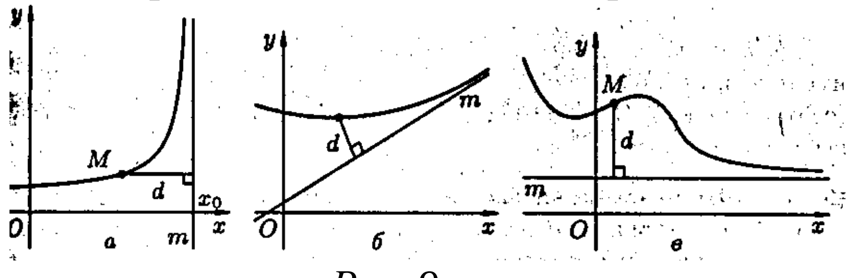

Рис. 9

Асимптоты бывают трех видов: вертикальные, наклонные и горизонтальные.

Прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой графика функции $f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to x\ +0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x\ -0} f(x)$ равен бесконечности (рис. 9, а).

Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$), если $\lim\limits_{x \to +\infty}(f(x) - (kx + b)) = 0$ (соответственно, $\lim\limits_{x \to -\infty}(f(x) - (kx + b)) = 0$ (рис. 9, б)).

Прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$) тогда и только тогда, когда существуют пределы $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[f(x) - kx\right] = b$ (соответственно $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x \to -\infty}\left[f(x) - kx\right] = b$).

Частным случаем наклонной асимптоты (при $k = 0$) является горизонтальная асимптота (рис. 9, в).

Прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$) тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ (соответственно, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$).

Построение графиков функций

При построении графика данной функции целесообразно пользоваться следующей схемой:

1) найти область определения функции;

2) исследовать функцию на четность, нечетность и периодичность;

3) найти участки непрерывности функции, а также точки разрыва с указанием вида разрыва;

4) найти точки пересечения графика с осями координат;

5) найти интервалы знакопостоянства функции;

6) найти асимптоты;

7) найти интервалы возрастания и убывания, экстремумы функции;

8) найти интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба.

2.4.1. Найти интервалы возрастания и убывания функции $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5.$

Функция определена на всей числовой оси, а ее производная равна. Функция $f(x)$ возрастает тогда и только тогда, когда $f'(x) > 0$, т.е. $(x-2)(x+2) > 0,$ откуда $x \in (-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$. Аналогично данная функция убывает в точности, когда $f'(x) < 0$, т.е $(x-2)(x+2) < 0$, откуда $x \in (-2;2)$.

Таким образом, функция $f(x)$ возрастает на интервале $(-\infty;-2)$ и $(2;+\infty)$, а убывает на интервале (-2; 2).

Найти интервалы возрастания и убывания функции $f(x)$:

2.4.2. $f(x)=(x-2)^2\bullet(x+2)$.

2.4.3. $f(x)=\ln(x^2-2x+4)$.

2.4.4. Найти экстремумы функции $f(x)=x^3-9x^2+15x.$

Функция определена и дифференцируема на всей числовой прямой, причем $f^{/}(x)=3x^2-18x^2+15=3(x-1)(x-5)$. Критические точки $x_1=1, x_2=5$. Воспользуемся вторым достаточным условием экстремума, для чего найдем $f^{//}(1)$ и $f^{//}(5)$:

$$f^{//}(x)=6x-18\Rightarrow f^{//}(1)=-12, f^{//}(5)=12.$$

Поскольку $f^{/}(1)=0,$ а $f^{//}(1)<0$, то $x=1$ – точка локального максимума, причем $f(1)=7$. Аналогично, так как $f^{/}(5)=0,$ а $f^{//}(5)>0$, то $x=5$ – точка локального минимума, а $f(5)=-25.$

Найти экстремумы функций:

2.4.5. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}.$

2.4.6. $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}.$

2.4.7. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$.

Функция определена и дважды дифференцируема на всей действительной оси. Находим вторую производную:

$$f^{//}(x)=\frac{6(x^2-\frac{1}{3})}{(x^2+1)^3}.$$

Отсюда получим: функция выпукла вверх тогда и только тогда, когда $f^{//}<0$, т.е. $x^2-\dfrac{1}{3}<0$, или $|x|<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Функция выпукла вниз тогда и только тогда, когда $x^2-\dfrac{1}{3}>0$, т.е. $x\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$.

Таким образом, функция выпукла вверх на $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}};\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$, выпукла вниз на $\left(-\infty;-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и на $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$. Откуда ясно, что точки $x_1=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ и $x_2=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ являются точками перегиба данной функции.

Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функций:

2.4.8. $f(x)=\dfrac{x^3}{4-x^2}$.

2.4.9. $f(x)=x^4-4x^3-48x^2+6x-9$.

2.4.10. Найти асимптоты графика функции $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$.

Функция непрерывна всюду, кроме точки $x=1$, в которой она терпит разрыв второго рода, причем $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x^2}{x-1}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{x^2}{x-1}=+\infty$. Отсюда следует, что прямая $x=1$ – вертикальная асимптота, и других вертикальных асимптот нет.

Проверим, есть ли у графика функции наклонные асимптоты. Находим

$k=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x-1}=1,$ откуда

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1}=0.$$

Таким образом, прямая $y=x$ – наклонная асимптота графика функции при $x\to+\infty$. Аналогично получим, что эта прямая является наклонной асимптотой и при $x\to-\infty$.

Поскольку угловой коэффициент k наклонной асимптоты не равен нулю, то график функции не имеет горизонтальных асимптот.

Найти асимптоты графика функции $f(x)$:

2.4.11. $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x^2-9}$.

2.4.12. $f(x)=x\bullet e^x$.

2.4.13. Провести полное исследование функции $y=\dfrac{x^3}{4-x^2}$ и построить ее график.

Область определения $D(f)$ функции – вся числовая, за исключением точек $x=-2$ и $x=2$, т.е. $D(f)=(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;+\infty)$.

Функция непериодическая, исследуем ее на четность и нечетность:

$$f(-x)=\frac{(-x)^3}{4-(-x)^2}=-\frac{x^3}{4-x^2}=-f(x).$$

Следовательно, данная функция нечетная и ее график симметричен относительно начала координат. Поэтому далее исследуем функцию только при $x\geq 0$.

Найдем точки пересечения графика с осями координат: с осью Oy график пересекается при $x=0$, откуда $y=f(0)=0$, где $M(0;0)$ – точка пересечения с осью Oy; с осью Ox график пересекается, если $f(x)=0$, т.е. $\frac{x^3}{4-x^2}=0$, откуда $x=0$. Таким образом, $M(0;0)$ единственная точка пересечения графика с осями координат.

Находим интервалы знакопостоянства функции:

$$f(x)>0 \Leftrightarrow \frac{x^3}{4-x^2}>0 \Leftrightarrow \frac{x}{4-x^2}>0$$

и так как мы рассматриваем только случай $x \geq 0$, то получаем $0<x<2$. Аналогично $y<0$ при $x>2$.

Далее, $\lim\limits_{x\to 2-0}\frac{x^3}{4-x^2}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 2+0}\frac{x^3}{4-x^2}=-\infty$, т.е. прямая $x=2$ – вертикальная асимптота. Отсюда, в силу симметрии, следует, что прямая $x=-2$ – также вертикальная асимптота.

Найдем наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{4-x^2}=-1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{4-x^2}+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{4-x^2}=0,$$

т.е. прямая $y=-x$ – наклонная асимптота при $x\to+\infty$ (то же и при $x\to-\infty$). Горизонтальных асимптот график не имеет.

Найдем интервалы монотонности и экстремумы функции, исследуя первую производную:

$$f'(x)=\left(\frac{x^3}{4-x^2}\right)'=\frac{x^2(12-x^2)}{(4-x^2)^2}=\frac{x^2(2\sqrt{3}-x)(2\sqrt{3}+x)}{(4-x^2)^2}.$$

Отсюда видно, что при $x\geq 0$ (см. рис. 10) функция имеет максимум в точке $x=2\sqrt{3}$ (причем $f(2\sqrt{3})=-3\sqrt{3}\approx-5.2$), возрастает на (0; 2) и $(2;2\sqrt{3})$ и убывает на $(2\sqrt{3};+\infty)$.

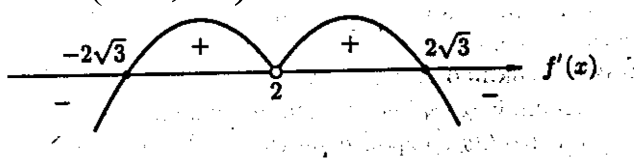

Рис. 10

Чтобы определить интервалы выпуклости и точки перегиба, вычислим вторую производную:

$$f''(x)=\frac{8x(12+x^2)}{(4-x^2)^3}.$$

Отсюда ясно, что при $x\geq 0$ функция выпукла вверх (т.е. $f''<0$) на $(2;+\infty)$ и выпукла вниз (т.е. $f''>0$) на $(0;2)$, $x=0$ – точка перегиба.

Учитывая накопленную информацию, строим график функции при $x\geq 0$, а затем симметрично отражаем его относительно начала координат (рис. 11).

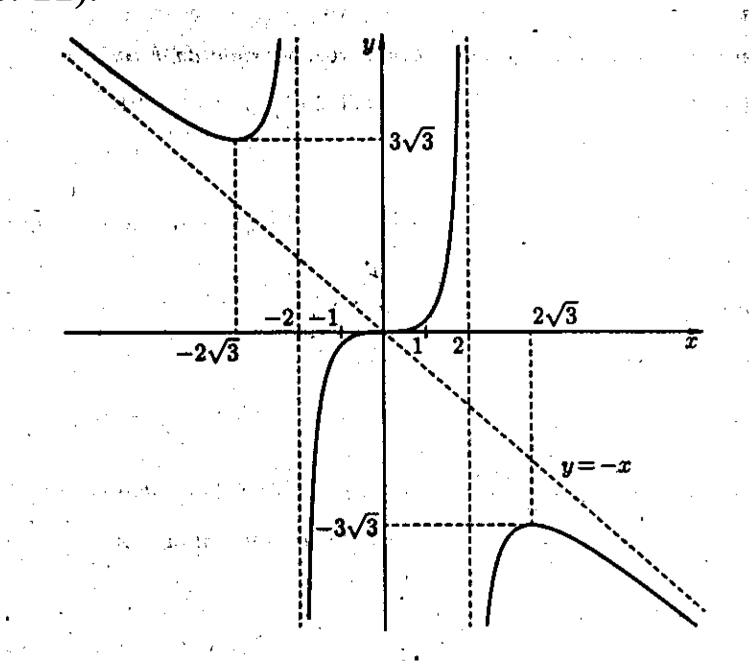

Рис. 11

Провести полное исследование и построить графики функций:

2.4.14. $f(x)=2x^2+\frac{1}{x}$. 2.4.15. $y=e^{\frac{1}{x+2}}$.

2.4.16. $y=\ln(1-x^2)$. 2.4.17. $y=\frac{x^2}{1-x^2}$.

2.4.18. $y=x^3-4x^2+3x$. 2.4.19. $y=x+\frac{1}{x}$.

2.4.20. $y=x^2\bullet e^{-x}$. 2.4.21. $y=\frac{(x+1)^2}{x-2}$.

2.4.22. $y=\frac{3x-2}{5x^2}$. 2.4.23. $y=\frac{x^3}{3-x^2}$.

2.4.24. $y=x-\ln x$.

ГЛАВА 3. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§1. ВАЖНЕЙШИЕ СВОЙСТВА ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Первообразная функция

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором (конечном или бесконечном) интервале $(a;b)$. Тогда функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$на интервале $(a;b)$, если $F^{/}(x)=f(x)$ для всех $x\in(a;b)$.

Если $F(x)$ – первообразная функция для функции $f(x)$,то функция $F(x)+C$, где C – некоторая постоянная, также первообразная функции $f(x)$. Кроме того, если $F(x)$ и $G(x)$ – две первообразные функции $f(x)$, то они отличаются на некоторую постоянную, т. е. существует такое число $C\in R,$ что $F(x)-G(x)=C$.

Таким образом, зная только одну первообразную $F(x)$ для $f(x)$, мы без труда находим и множество всех первообразных для этой функции, которое совпадает с множеством функций вида $F(x)+C$, где C – произвольная постоянная.

Если функция $f(x)$ непрерывна на данном интервале, то у нее существует первообразная на этом интервале.

Неопределенный интеграл

Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$. Обозначения: $\int f(x)dx$ (читается так: «интеграл эф от икс дэ икс»].

Таким образом, если $F(x)$ – какая-нибудь первообразная для функции $f(x)$, то

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

(в правой части последнего равенства более правильно было бы написать $\{F(x)+C\}$, поскольку речь идет о множестве всех первообразных, фигурные скобки, обозначающие множество, обычно не пишут).

Знак $\int$ называется интегралом, функция $f(x)$ – подынтегральной функцией, а $f(x)dx$ – подынтегральным выражением.

Операция нахождения неопределенного интеграла от данной функции называется интегрированием этой функции.

Интегрирование – операция, обратная операции дифференцирования (т.е. операции, заключающейся в нахождении производной от данной функции). У всякой непрерывной на данном интервале функции существует неопределенный интеграл.

Основные свойства неопределенного интеграла

Везде далее предлагается, что все рассматриваемые неопределенные интегралы существуют.

1. $\int dF(x) = F(x) + C.$

2. $d\int f(x)dx = f(x)dx.$

3. $\int \alpha f(x)dx = \alpha\int f(x),\ \ \alpha \neq 0,$

т.е. постоянный множитель можно вынести за знак неопределенного интеграла.

4. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx,$

т.е. неопределенный интеграл от суммы равен сумме неопределенных интегралов от этих функций.

5. Если $\int f(x)dx = F(x) + C,$ то

$\int f(ax+b)dx = \dfrac{1}{a}F(ax+b) + C$, где $a \neq 0.$

Таблица простейших интегралов

Следующие интегралы обычно называются табличными интегралами:

1. $\int 0 \bullet dx = C.$

2. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq 0).$

В частности, $\int 1 \bullet dx = x + C, \int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C, \int \dfrac{dx}{x^2} = -\dfrac{1}{x} + C.$

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C.$

В частности, $\int e^x dx = e^x + C.$

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

6. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C.$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C.$

9. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C, (a \neq 0).$

В частности, $\int \frac{dx}{x^2 + 1} = arctgx + C.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, (a > 0).$

В частности, $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C.$

11. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C, (a > 0).$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + \alpha} \right| + C.$

Иногда к этому списку добавляют еще несколько интегралов:

13. $\int shxdx = ch + C.$

14. $\int chxdx = shx + C.$

15. $\int tgxdx = -\ln|\cos x| + C.$

16 $\int ctgxdx = \ln|\sin x| + C.$

17. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| tg \frac{x}{2} \right| + C.$

18. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| tg \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$

Интегралы, получающиеся из табличных линейным сдвигом аргумента (т.е. интегралы вида $\int \cos xdx, \int \frac{dx}{4x - 5}, \int e^{7x+1} dx, ...$), будем называть почти табличными интегралами.

3.1.1. Используя таблицу, найти следующие интегралы:

1) $\int \frac{dx}{x^3}$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$; 3) $\int 2^x dx$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{5 - x^2}}$; 5) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 7}}$.

1) Воспользуемся табличным интегралом 2($\alpha = -3$):

$$\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C.$$

2) Аналогично находим:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}} = \int \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} = \int x^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = -\frac{2}{\sqrt{x}} + C.$$

3) Используя табличный интеграл 4($a = 2$), находим:

$$\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C.$$

4) Подставляя $a = \sqrt{5}$ в табличный интеграл 10, получим:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5 - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{5})^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} + C.$$

5) Воспользуемся табличным интегралом 12($\alpha = -7$):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 7}} = \ln\left| x + \sqrt{x^2 - 7} \right| + C.$$

Найти интегралы, используя таблицу:

3.1.2. $\int x^{10} dx.$ 3.1.3. $\int \frac{dx}{x^7}.$ 3.1.4. $\int \sqrt[4]{x} dx.$ 3.1.5. $\int \frac{dx}{x^2 + 9}.$

3.1.6. $\int \frac{dx}{x^2 - \frac{1}{2}}.$ 3.1.7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3}}.$

3.1.8. Используя таблицу и основные свойства неопределенного интеграла, найти интеграл:

1) $\int \left(3 \bullet 5^x - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 7 \right) dx;$ 2) $\int \frac{x^2 - 3x + 5}{\sqrt{x}} dx.$

1) Воспользуемся свойствами 3 и 4 неопределенного интеграла:

$$\int \left(3 \bullet 5^x - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 7 \right) dx = \int 3 \bullet 5^x dx - \int \frac{2}{\sqrt[3]{x}} dx + \int 7 dx = 3\int 5^x dx - 2\int x^{-\frac{1}{3}} dx + 7\int dx =$$

$$= \frac{3 \bullet 5^x}{\ln a} - 2\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + 7x + C = \frac{3 \bullet 5^x}{\ln a} - 3\sqrt[3]{x^2} + 7x + C.$$

2) Почленно поделим числитель подынтегральной дроби на знаменатель: $\frac{x^2 - 3x + 5}{\sqrt{x}} = x^{\frac{3}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}} + 5x^{-\frac{1}{2}}$. Отсюда

$$\int \frac{x^2-3x+5}{\sqrt{x}}dx = \int\left(x^{\frac{3}{2}}-3x^{\frac{1}{2}}+5x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = \int x^{\frac{3}{2}}dx - 3\int x^{\frac{1}{2}}dx + 5\int x^{-\frac{1}{2}}dx =$$

$$\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - 3\bullet\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 5\bullet\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}} + 10x^{\frac{1}{2}} + C.$$

Найти «почти табличные» интегралы:

3.1.9. $\int \cos 2x dx.$ 3.1.10. $\int (9x+2)^{17} dx.$ 3.1.11. $\int \frac{dx}{8x-1}.$

3.1.12. $\int 4^{3-5x} dx.$ 3.1.13. $\int \sqrt{3x+4} dx.$ 3.1.14. $\int \frac{dx}{3x^2-25}.$

Найти интегралы, используя таблицу неопределенных интегралов, и результат проверить дифференцированием:

3.1.15. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x}}.$ 3.1.16. $\int \frac{dx}{x^2+3}.$

3.1.17. $\int \frac{1}{5^x} dx$ 3.1.18. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$

3.1.19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}.$ 3.1.20. $\int \frac{dx}{x^2-25}.$

§2. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Метод подстановки (замена переменной)

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(\varphi(x))\bullet\varphi'(x)dx$, при этом функции $\varphi'(x)$ и $f(x)$ непрерывны на заданном интервале. Тогда этот интеграл можно упростить с помощью подстановки $t=\varphi\ (x)$, используя равенство

$$\int f(\varphi(x))\bullet\varphi'(x)dx = \int f(t)dt. \qquad (3)$$

Эта формула называется формулой замены переменной в неопределенном интеграле.

Иногда удобнее делать подстановку не $t=\varphi(x)$, а $x=\psi(t)$, где $\psi(t)$ функция, имеющая непрерывную производную (т. е. непрерывно дифференцируема). Применяя такую подстановку к интегралу $\int f(x)dx$, получим одну формулу замены переменной

$$\int f(x)dx = \int f(\psi(t))\psi'(t)dt. \qquad (4)$$

Получающиеся после применения той или иной подстановки интегралы должны быть более удобны для интегрирования, чем исходные. Не существует общего «рецепта», следуя которому можно всегда понять, какую подстановку надо применить к данному интегралу. Однако следует иметь в виду следующие полезные подсказки:
1) если под знаком интеграла стоит сложная функция $f(\varphi(x))$, то, как правило, используется подстановка $t = \varphi(x)$ (к примеру, если в подынтегральном выражении встречается функция $\sin\frac{1}{x}$, то стоит попробовать подстановку $t = \frac{1}{x}$, а если e^{x^2} – то $t = x^2$ и т.д.);
2) если в подынтегральном выражении есть готовый дифференциал функции $\varphi(x)$, т. е. выражение $\varphi'(x)dx$, то имеет смысл попробовать подстановку $t = \varphi(x)$. Поэтому целесообразно запомнить следующие формулы для наиболее часто встречающихся дифференциалов:

$$\cos x dx = d(\sin x),$$
$$e^x dx = d(e^x),$$
$$\frac{1}{x}dx = d(\ln x),$$
$$\frac{1}{x^2}dx = -d\left(\frac{1}{x}\right),$$
$$\frac{1}{\cos^2 x}dx = d(tgx).$$
$$\sin x dx = -d(\cos x),$$
$$x dx = \frac{1}{2}d(x^2),$$
$$\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2d(\sqrt{x}),$$
$$dx = \frac{1}{a}d(ax+b),$$
$$\frac{1}{\sin^2 x}dx = -d(ctgx).$$

В простых случаях введение новой переменной можно (после обретения определенного навыка) проводить в уме, мысленно обозначив соответствующую функцию через t или какую-либо иную букву: $u, y, z, \ldots$.

Интегрирование по частям

Пусть производные функций $u(x)$ и $v(x)$ существуют и непрерывны на заданном интервале. Тогда имеет место равенство

$$\int uv' dx = uv - \int vu' dx. \qquad (5)$$

Эта формула называется формулой интегрирования по частям

Поскольку $v'(x)dx = dv(x), u'(x)dx = du(x),$ то формулу (5) часто записывают в более компактном виде:

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad (6)$$

Метод интегрирования по частям целесообразно применять в тех случаях, когда получающийся в правой части формулы (5) (или формулы (6)) интеграл проще исходного либо подобен ему. Этим методом, например, пользуются, когда под знаком интеграла стоит произведение многочлена на одну из функций $\sin x, \cos x, a^x, \ln x, arctgx$ и т. д. В частности, интегрирование по частям применяют к интегралам вида $\int x^n \bullet e^x dx, \int x^n \bullet \sin xdx, \int x^n \cos xdx, \int x^n \ln xdx, \int x^n \arcsin xdx, (n = 1,2,3,...)$ или подобным.

Также с помощью интегрирования по частям находятся интегралы вида $\int \arcsin xdx, \int \arccos xdx, \int arctgxdx, \int arcctgxdx, \int e^x \cos xdx, \int e^x \sin xdx$ и подобные им.

3.2.1.Найти интеграл, используя подходящую подстановку:

1) $\int (7x-1)^{23} dx$; 2) $\int x^2 \bullet \sin(x^3+1)dx$; 3) $\int \frac{xdx}{x^2+1}$.

1) Данный интеграл – почти табличный и поэтому легко вычисляется с помощью свойства 5 интеграла из предыдущего параграфа. Однако такие интегралы можно находить и с помощью замены переменной.

В нашем случае применим подстановку $t = 7x - 1$. Тогда $dt = 7dx,$ откуда $dx = \frac{1}{7}dt.$ Поэтому

$$\int (7x-1)^{23} dx = \int t^{23} \bullet \frac{1}{7}dt = \frac{1}{7}\int t^{23}dt = \frac{1}{7} \bullet \frac{t^{24}}{24} + C.$$

Возвращаясь к переменной x, получим окончательно:

$$\int (7x-1)^{23} dx = \frac{(7x-1)^{24}}{168} + C.$$

2) Подынтегральное выражение содержит сложную функцию $\sin(x^3+1)$, поэтому стоит попробовать подстановку $t=x^3+1$. Тогда $dt=d(x^3+1)=3x^2dx$, откуда $x^2dx=\frac{1}{3}dt$. Таким образом,

$$\int x^2 \bullet \sin(x^3+1)dx=\int \sin(x^3+1)\bullet x^2dx=\int \sin t \bullet \frac{1}{3}dt=\frac{1}{3}\int \sin tdt=-\frac{1}{3}\cos(x^3+1)+C.$$

3) Поскольку $xdx=\frac{1}{2}d(x^2)=\frac{1}{2}d(x^2+1)$, а выражение x^2+1 стоит в знаменателе подынтегральной дроби, то целесообразно сделать замену $t=x^2+1$.Тогда

$$\int \frac{xdx}{x^2+1}=\int \frac{\frac{1}{2}dt}{t}=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|+C=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+C=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.$$

Мы избавились от знака модуля в последнем выражении, так как $x^2+1>0,\ \forall x$.

Последний из разобранных интегралов является частным случаем интегралов вида $\int \frac{f'(x)dx}{f(x)}$ (в числителе подынтегральной дроби здесь стоит производная знаменателя), решаемых с помощью замены $t=f(x)$. Поэтому

$$\int \frac{f'(x)dx}{f(x)}=\ln|f(x)|+C.$$

Найти интегралы, используя подходящую подстановку:

3.2.2. $\int \sqrt{4x-5}dx.$ 3.2.3. $\int \frac{dx}{(3x+2)^4}.$ 3.2.4. $\int \sin^3 x * \cos xdx.$

3.2.5. $\int e^{x^3} * x^2dx.$ 3.2.6. $\int \frac{\ln^5 xdx}{x}.$ 3.2.7. $\int \frac{\sin xdx}{\cos x+1}.$

3.2.8. $\int \frac{x^2dx}{x^3+1}.$ 3.2.9. $\int \frac{arctgxdx}{x^2+1}.$

Найти интегралы, используя подходящую подстановку $x=\psi(t)$:

3.2.10. $\int \sqrt{9-x^2}dx.$ 3.2.11. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}.$ 3.2.12. $\int x\sqrt{2-x}dx$ 3.2.13. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x+16}.$

3.2.14. Найти интеграл, используя интегрирование по частям:

1) $\int x*e^x dx;$ 2) $\int \ln xdx;$ 3) $\int x^2\cos xdx.$

1) Положим $u=x$; $dv=e^xdx$, откуда $du=dx$; $v=e^x$,

$$\int x*e^xdx=x*e^x-\int e^xdx=xe^x-e^x+C.$$

В интеграле $\int x*e^x dx$ положим $dv = xdx$, $u = e^x$, откуда $du = e^x dx$, $v = \frac{1}{2}x^2$.

В этом случае $\int x*e^x dx = \frac{1}{2}x^2\ e^x - \int \frac{1}{2}x^2 e^x dx$.

Интеграл не упростился, а усложнился.

2) Для того чтобы к этому интегралу можно было применить формулу интегрирования по частям, необходимо иметь произведение двух функций под знаком интеграла. Для этого домножим подынтегральную функцию на единицу. Тогда

$\int \ln xdx = \int 1*\ln xdx =$ (введем обозначения $u = \ln x$, $dv = 1*dx$, тогда $du = \frac{1}{x}dx$, $v = x$) $x*\ln x - \int x*\frac{1}{x}dx = x*\ln x - x + C$,

3) Дважды применяя формулу интегрирования по частям, получим:

$$\int x^2 \cos xdx = x^2 \sin x - \int 2x \sin xdx$$

$$\int 2x \sin xdx = -2x\cos x - 2\int(-\cos x)dx = -2x\cos x + 2\sin x + C.$$

Отсюда окончательно:

$$\int x^2 * \cos xdx = x^2 * \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C.$$

Найти интеграл, используя интегрирование по частям:

3.2.15. $\int x \sin xdx$. 3.2.16. $\int (2x-1)*e^{3x}dx.$ 3.2.17. $\int \frac{\ln xdx}{x^2}$.

3.2.18. $\int x*2^x dx$. 3.2.19. $\int \ln^2 xdx.$ 3.2.20. $\int xarctgxdx.$

Найти интегралы, используя подходящую подстановку $t=\psi(x)$:

3.2.21. $\int \sqrt{16-x^2}dx$. 3.2.22. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$. 3.2.23. $\int x\sqrt{x+3}dx.$

3.2.24. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$. 3.2.25. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x}}$. 3.2.26. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Найти интегралы, используя интегрирование по частям:

3.2.27. $\int x \ln xdx$. 3.2.28. $\int (2x+3)*\cos xdx.$

3.2.29. $\int x*sh5xdx$. 3.2.30. $\int \frac{x*\cos xdx}{\sin^3 x}$.

3.2.31. $\int x^2 \ln xdx$. 3.2.32. $\int (x^2-4x+1)e^{-x}dx.$

3.2.33. $\int x^3 e^x dx.$ 3.2.34. $\int \frac{\arccos xdx}{\sqrt{1+x}}$.

§ 3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ
Правильные и неправильные дроби

Рациональной дробью называется выражение вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ многочлены.

Рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ называется правильной, если степень многочлена $P(x)$ в ее числителе меньше степени члена $Q(x)$ в знаменателе. В противном случае дробь называется неправильной.

Всякая неправильная рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ с помощью деления числителя на знаменатель приводится к виду

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = P_0(x) + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)},$$

где $P_0(x)$ – многочлен (целая часть при делении), $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ – правильная рациональная дробь (остаток).

Поэтому $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int P_0(x) dx + \int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} dx.$

Так как интеграл $\int P_0(x)dx$ вычисляется элементарно (сводится к сумме табличных), то интегрирование неправильной дроби сводится к интегрированию правильной дроби. Интегрирование правильной рациональной дроби сводится, в свою очередь, к интегрированию простейших дробей.

Разложение правильной дроби на простейшие дроби

Правильные дроби следующих четырех типов называются простейшими (или элементарными) дробями:

$I. \frac{A}{x-a}.$

$II. \frac{A}{(x-a)^k} \ (k = 2,3,4,...).$

$III. \frac{Ax+B}{x^2+px+q}.$

$IV. \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} \ (n = 2,3,4,...).$

При этом предполагается, что A, B, p, q – действительные числа, а квадратный трехчлен x^2+px+q в дробях III и IV типов не имеет действительных корней (т. е. $p^2-4q<0$).

Каждая правильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы простейших дробей указанных четырех типов. А именно: если знаменатель данной правильной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ разложен на неповторяющиеся линейные и квадратные множители $Q(x)=(x-a_1)^{k_1}*(x-a_2)^{k_2}*...*(x-a_n)^{k_n}*(x^2+p_1x+q_1)^{r_1}*...\times$
$\times(x^2+p_mx+q_m)^{r_m}$,
где $k_1,k_2,...k_n,r_1,r_2,...r_m$ – натуральные числа, то эту дробь можно представить в виде следующей суммы простейших:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)}&=\frac{A_1}{(x-a_1)^{k_1}}+\frac{A_2}{(x-a_1)^{k_1-1}}+...+\frac{A_{k_1}}{(x-a_1)}+...+\frac{B_1x+C_1}{(x^2+p_1x+q_1)}+\\&+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+p_1x+q_1)^{r_1-1}}+...+\frac{B_{r1}x+C_{r1}}{x^2+p_1x+q_1}+...\end{aligned}\tag{7}$$

Коэффициенты $A_1,A_2,...,B_1,C_1,...,B_{r1},C_{r1},...$ в разложении (7) находятся с помощью метода неопределенных коэффициентов или метода частных значений (см. далее решение задачи 3.3.8). Отметим, что общее число этих коэффициентов равно степени многочлена Q(x).

Таким образом, интегрируя правильную дробь, мы сначала раскладываем ее на сумму простейших, а затем интегрируем каждое слагаемое в этом разложении.

Вычисляя интегралы от простейших дробей, надо иметь в виду, что:

1) Простейшие дроби первых двух типов – почти табличные:

$$\int\frac{A}{x-a}dx=A*\ln|x-a|+C,$$
$$\int\frac{A}{(x-a)^k}dx=\frac{A}{1-k}*\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+C,k\neq1.$$

2) При интегрировании простейшей дроби третьего типа $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ сначала выделяют в числителе производную знаменателя, т.е. $2x+p$:

$$Ax+B=\frac{A}{2}*(2x+p)+B-\frac{Ap}{2}.$$

Отсюда

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{A}{2}*(2x+p)+(B-\frac{Ap}{2})}{x^2+px+q}dx =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q} + (B-\frac{Ap}{2})\int \frac{dx}{x^2+px+q}.$$

В первом из полученных интегралов делаем замену $t = x^2+px+q, откуда \cdot \cdot dt = (2x+p)dx$ и

$$\int \frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln(x^2+px+q)+C.$$

Во втором интеграле сначала выделяем полный квадрат в знаменателе подынтегральной дроби, а потом делаем подходящую линейную подстановку:

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \left[y = x+\frac{p}{2} \Rightarrow dy = dx \right] = \int \frac{dy}{y^2+a^2} = \left[a = \sqrt{q-\frac{p^2}{4}} \right] =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} arctg \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

Здесь в знаменателе выделили полный квадрат

$$x^2+px+q = (x)^2 + 2*x*\frac{p}{2} + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right).$$

Окончательно

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}*\ln(x^2+px+q) + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}*arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

3) Если требуется проинтегрировать простейшую дробь четвертого типа $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}, где \cdot n = 2,3,4,... и \cdot p^2-4q<0$, то сначала, как в пункте 2, в числителе дроби производная от квадратного трехчлена в знаменателе, откуда

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+x(B-\frac{Ap}{2})}{(x^2+px+q)^n}dx =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}dx + (B-\frac{Ap}{2})*\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} = \left[t = x^2+px+q \right] =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{dt}{t^n} + (B-\frac{Ap}{2})*\int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + (q-\frac{p^2}{4}) \right]^n} = \left[y = x+\frac{p}{2} \right] =$$

$$= \frac{A}{2(1-n)} * \frac{1}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + (B - \frac{Ap}{2}) * \int \frac{dy}{(y^2 + a^2)^n},$$

где $a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$.Последний интеграл считается с помощью рекуррентной формулы, позволяющей свести его к более простому интегралу

$$\int \frac{dy}{(y^2 + a^2)^{n-1}}:$$

$$\int \frac{dy}{(y^2 + a^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)a^2} * \frac{y}{(y^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2} * \frac{2n-3}{2n-2} * \int \frac{dy}{(y^2 + a^2)^{n-1}}.$$

Далее к интегралу $\int \frac{dy}{(y^2 + a^2)^{n-1}}$ снова применяется рекуррентная формула, понижающая степень знаменателя подынтегральной дроби, и далее, пока не получится табличный интеграл $\int \frac{dy}{y^2 + a^2}$.

3.3.1. Найти интеграл $\int \frac{6x-7}{x^2 + 4x + 13} dx.$

Дискриминант квадратного трехчлена в знаменателе подынтегральной дроби отрицателен, поэтому данная дробь – простейшая третьего типа.

Сначала найдем производную знаменателя дроби:

$$(x^2 + 4x + 13)' = 2x + 4.$$

Затем выделим производную знаменателя в числителе дроби:

6x-7=3(2x+4)-19.

Отсюда, учитывая, что $x^2 + 4x + 13 = (x + 2)2 + 9$, имеем:

$$\int \frac{6x-7}{x^2 + 4x + 13} dx = \int \frac{3(2x+4) - 19}{x^2 + 4x + 13} dx = 3\int \frac{(2x+4)dx}{x^2 + 4x + 13} - 19\int \frac{dx}{(x+2)^2 + 9} =$$

$$= \begin{bmatrix} t = x^2 + 4x + 13, \cdots y = x + 2, \\ dt = (2x+4)dx \cdots \cdot dy = dx \end{bmatrix} = 3\int \frac{dt}{t} - 19\int \frac{dy}{y^2 + 3^2} = 3\ln|t| - \frac{19}{3} arctg \frac{y}{3} + C =$$

$$= 3\ln(x^2 + 4x + 13) - \frac{19}{3} arctg \frac{x+2}{3} + C.$$

В последнем равенстве мы воспользовались тем, что $x^2+4x+13>0$ ($\forall$x) и, стало быть, $|x^2 + 4x + 13| = x^2 + 4x + 13.$

Найти интегралы от простейших дробей первых трех типов:

3.3.2. $\int \frac{4dx}{x+3}$. 3.3.3. $\int \frac{dx}{(x-1)^5}$. 3.3.4. $\int \frac{11dx}{(x+2)^3}$.

3.3.5. $\int \frac{dx}{x^2+10x+29}$. 3.3.6. $\int \frac{(x+6)dx}{x^2-2x+17}$. 3.3.7. $\int \frac{(4x-1)dx}{x^2+x+1}$.

3.3.8. Вычислить интегралы:

$а)\int \frac{7x+4}{(x-3)(x+2)}dx;$ $б)\int \frac{x^2+5x-2}{(x^2-1)(x+1)}dx;$ $в)\int \frac{x^5-1}{x^3+x^2+x}dx.$

а) Подынтегральная дробь – правильная. Разложим ее на сумму простейших дробей первого типа:

$$\frac{7x+4}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}.$$

Для того чтобы найти неизвестные коэффициенты A и B, приведем дроби в правой части равенства к общему знаменателю, откуда

$$\frac{7x+4}{(x-3)(x+2)} = \frac{A(x+2)+B(x-3)}{(x-3)(x+2)},$$

т. е. 7x+4=A(x+2)+B(x-3) (8)

Из полученного равенства можно найти коэффициенты A и B двумя способами: с помощью метода неопределенных коэффициентов или метода частных значений. Рассмотрим оба способа.

1. Метод неопределенных коэффициентов. Раскроем скобки в правой части равенства (8) и сгруппируем члены с одинаковыми степенями:

$$7x + 4 = (A + B)x + (2A - 3B).$$

Так как многочлены в обеих частях полученного равенства тождественно равны, то у них должны быть равны и коэффициенты при соответствующих степенях переменной x. Сравнивая эти коэффициенты, получаем систему двух уравнений:

$$\begin{cases} A+B=7 \\ 2A-3B=4. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем A = 5, B = 2.

2. Метод частных значений. Придадим неизвестной x в равенстве (8) частное значение x = 3. Тогда получим

$$7*3+4=A*(3+2), \text{то есть } 25=5A.$$

Откуда A = 5. Подставляя теперь в уравнение (8) значение x = -2 (удобнее всего подставлять значения, обращающие одну или несколько скобок в правой части равенства в ноль; эти значения совпадают с действительными корнями знаменателя подынтегральной дроби), получим

$$7*(-2)+4=B*(-2-3),$$

откуда B = 2.

Таким образом,

$$\frac{7x+4}{(x-3)(x+2)} = \frac{5}{x-3} + \frac{2}{x+2}$$

и, стало быть,

$$\int \frac{7x+4}{(x-3)(x+2)}dx = 5\int \frac{dx}{x-3} + 2\int \frac{dx}{x+2} = 5\ln|x-3| + 2\ln|x+2| + C.$$

б) Подынтегральная дробь – правильная, однако ее знаменатель не до конца разложен на множители. Поэтому сначала преобразуем знаменатель:

$$(x^2-1)(x+1) = (x-1)(x+1)(x+1) = (x-1)(x+1)^2.$$

Отсюда

$$\frac{x^2+5x-2}{(x^2-1)(x+1)} = \frac{x^2+5x-2}{(x-1)(x+1)^2}.$$

Разложим эту дробь на простейшие:

$$\frac{x^2+5x-2}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1}.$$

Приводя к общему знаменателю и избавляясь от знаменателей, приходим к равенству

$$x^2+5x-2 = A(x+1)^2 + B(x-1) + C(x-1)(x+1).$$

Для вычисления неизвестных коэффициентов A, B и C воспользуемся методом частных значений. Положим x = -1, тогда

$$1^2+5*1-2 = A*(1+1)^2,$$

т. е. 4A = 4, откуда A= 1. Аналогично положим x = -1. Тогда

$$(-1)^2+5*(-1)-2=B*(-1-1),$$

откуда B = 3.

Осталось найти коэффициент C. Поскольку «удобных» частных значений уже не осталось, придадим x какое-нибудь значение, приводящее к не очень громоздким подстановкам. Проще всего положить x = 0. Тогда -2 = A- B - C, откуда с учетом найденных значений A и B получим -2 = 1-3-C,то есть C=0.

Итак,

$$\frac{x^2+5x-2}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{1}{x-1}+\frac{3}{(x+)^2},$$

т. е. окончательно

$$\int\frac{x^2+5x-2}{(x^2-1)(x+1)}dx=\int\frac{dx}{x-1}+3*\int\frac{dx}{(x+1)^2}=\ln|x-1|-\frac{3}{x+1}+C.$$

в) Данная подынтегральная дробь – неправильная, поэтому сначала выделим целую часть, поделив числитель на знаменатель «столбиком»:

$$_x^5+0*x^4+0*x^3+0*x^2-1\left|\frac{x^3+x^2+x}{x^2-x}\right.$$

$$\underline{x^5+x^4+x^3}$$

$$_-x^4-x^3+0*x^2-1$$

$$-\underline{x^4-x^3-x^2}$$

$$x^2-1,$$

т.е.

$$\frac{x^5-1}{x^3+x^2+x}=x^2-x+\frac{x^2-1}{x^3+x^2+x}.$$

Отсюда

$$\int\frac{x^5-1}{x^3+x^2+x}dx=\int(x^2-x)dx+\int\frac{x^2-1}{x^3+x^2+x}dx=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\int\frac{x^2-1}{x^3+x^2+x}dx.$$

Разложив на множители знаменатель полученной правильной дроби, представим ее в виде суммы простейших:

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

Избавляясь от знаменателей, получим

$$x^2-1=A(x^2+x+1)+(Bx+C)x.$$

Сначала воспользуемся методом частных значений. Положив x=0, найдем A = -1. Далее воспользуемся методом неопределенных коэффициентов (на практике часто приходится комбинировать оба метода). Раскроем скобки в правой части последнего равенства и приведем подобные:

$$x^2-1=(A+B)x^2+(A+C)x+A.$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты при x^2 и x, в левой и правой частях последнего равенства получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} A+B=1, \\ A+C=0, \end{cases}$$

откуда, учитывая, что A = -1, найдем оставшиеся коэффициенты: B=2, C = 1. Таким образом,

$$\frac{x^2-1}{x^3+x^2+x}=-\frac{1}{x}+\frac{2x+1}{x^2+x+1},$$

откуда

$$\int\frac{x^2-1}{x^3+x^2+x}dx=-\int\frac{dx}{x}+\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx=\left[t=x^2+x+1\Rightarrow dt=(2x+1)dx\right]=$$

$$=-\ln|x|+\ln|t|+C=-\ln|x|+\ln(x^2+x+1)+C=\ln\left|\frac{x^2+x+1}{x}\right|+C.$$

Возвращаясь к исходному интегралу, получим окончательный ответ:

$$\int\frac{x^5-1}{x^3+x^2+x}dx=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\ln\left|\frac{x^2+x+1}{x}\right|+C.$$

Найти интегралы:

3.3.9. $\int\frac{2x-3}{(x-5)(x+2)}dx.$ 3.3.10. $\int\frac{x+2}{x^2-6x+5}dx.$

3.3.11. $\int\frac{dx}{x^4+x^2}.$ 3.3.12. $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4}dx.$

3.3.13. $\int\frac{dx}{x^3-8}.$ 3.3.14. $\int\frac{7x^3-10x^2+50x-77}{(x^2+9)(x^2+x-2)}dx.$

§4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Интегралы от тригонометрических функций во многих ситуациях удается рационализировать либо существенно упростить. Рассмотрим шесть наиболее типичных случаев.

1. Если под знаком интеграла стоит выражение *R(sinx, cosx)*, получающееся из функций *sinx* и *cosx* и некоторых констант с помощью четырех арифметических действий *R(sinx, cosx)* и которое называется рациональной функцией от *sinx* и *cosx*), то данный интеграл

$\int R(\sin x, \cos x)dx$ сводится к интегралу от рациональной дроби при помощи универсальной тригонометрической подстановки $t = tg\frac{x}{2}$. Тогда

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Хотя универсальная подстановка позволяет найти любой интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, однако в большинстве случаев она приводит к чересчур громоздким вычислениям, и тогда удобнее пользоваться другими, более эффективными подстановками. Тем не менее, некоторые интегралы наиболее быстро считаются именно с помощью этой подстановки. В частности, это относится к интегралам вида

$$\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c},$$

где а или b не равны нулю.

2. Если подынтегральная функция R (sin$x$, cos$x$) не меняется при перемене знаков у sin$x$ и cos$x$ одновременно, т. е. если

$$R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos x), \tag{9}$$

то целесообразно применить подстановку $t=tgx$. *В* частности, это относится к интегралам вида

$$\int \frac{dx}{a\sin^2 x + b\sin x * \cos x + c * \cos^2 x + d}.$$

3. Если подынтегральная функция *R (sinx, cosx)* меняет знак при замене sinx на - sin x, т. е. если

$$R(-\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то интеграл рационализируется с помощью подстановки t = cosx. В частности, это относится к интегралам вида $\int \sin^{2n+1} x * \cos^{2k} xdx$, где n=0,1,2,3,…

Если же подынтегральная функция *R(sinx, cosx)* меняет знак в замене *cosx* на – *cosx*, т. е. если

$$R(-\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то интеграл рационализируется с помощью подстановки *t= sinx*. В частности, это относится к интегралам вида $\int \sin^{2n} x * \cos^{2k+1} xdx$, k=0,1,2,3,...

4. Если подынтегральная функция представляет собой произведение четных степеней синуса и косинуса, то есть данный интеграл имеет вид

$$\int \sin^{2n} x * \cos^{2k} xdx, \textit{где} \cdot\cdot n = 0,1,2,....., \cdot\cdot\cdot\cdot k = 0,1,2,......,$$

то следует упростить ее с помощью формул

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}, \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}, \sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x.$$

5. При вычислении интегралов $\int\sin nx*\cos kxdx, \int\sin nx*\sin kxdx$, $\int\cos nx*\cos kxdx$ пользуются тригонометрическими формулами преобразования произведения в сумму:

$$\sin\alpha*\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)],$$

$$\sin\alpha*\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)],$$

$$\cos\alpha*\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]. \qquad (10)$$

6. Интегралы вида $\int tg^n xdx$ и $\int ctg^n xdx$ вычисляются с помощью формул

$$tg^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}-1 \text{ и } ctg^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}-1,$$

позволяющих понизить степень тангенса или котангенса.

3.4.1. Найти интеграл $\int\frac{dx}{4\sin x-3\cos x-5}$.

Воспользуемся универсальной тригонометрической подстановкой (случай 1):

$$\int\frac{dx}{4\sin x-3\cos x-5}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4*\frac{2t}{1+t^2}-3*\frac{1-t^2}{1+t^2}-5}=$$

$$=\int\frac{2dt}{8t-3(1-t^2)-5(1+t^2)}=-\int\frac{dt}{t^2-4t+4}=-\int\frac{dt}{(t-2)^2}=$$

$$=\frac{1}{t-2}+C=\frac{1}{tg\frac{x}{2}-2}+C.$$

Найти интегралы:

3.4.2. $\int\frac{dx}{\sin x}$. 3.4.3. $\int\frac{dx}{5\cos x+3}$.

3.4.4. Найти интеграл $\int\frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

Поскольку подынтегральная функция удовлетворяет условию (9), то применим подстановку ($t=tgx$ случай 2, тогда $dx=\frac{dt}{1+t^2}, \sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ и $cosx=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$). Для удобства поделим числитель и знаменатель подынтегральной дроби на cos^2x и воспользуемся тождеством $\frac{1}{\cos^2 x}=1+tg^2x$. Тогда

$$\int\frac{dx}{1+\sin^2 x}=\int\frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\int\frac{dtgx}{(1+tg^2x)+tg^2x}=\left[t=tgx\right]=\int\frac{dt}{2t^2+1}=$$

$$=\frac{1}{2}arctg\sqrt{2}t+C=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}tgx)+C.$$

Найти интегралы:

3.4.5. $\int\sin^3 xdx$. 3.4.6 $\int\frac{\cos^3 xdx}{\sin^4 x}$.

3.4.7. Найти интеграл: $\int\sin^4 x*\cos^2 xdx.$

В данном примере имеет место случай 4, поэтому сначала упростим подынтегральное выражение.

$$\int\sin^4 x*\cos^2 xdx=\int\sin^2 x*(\sin x\cos x)^2dx=\int\frac{1-\cos 2x}{2}*(\frac{1}{2}\sin 2x)^2dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int(1-\cos 2x)\sin^2 2xdx=\frac{1}{8}\int\sin^2 2xdx-\frac{1}{8}\int\sin^2 2x*\cos 2xdx=$$

$$=\left[t=\sin 2x\Rightarrow dt=2\cos 2xdx\right]=\frac{1}{8}\int\frac{1-\cos 4x}{4}dx-\frac{1}{8}\int t^2*\frac{dt}{2}=$$

$$=\frac{1}{16}(\int dx-\int\cos 4xdx)-\frac{1}{16}*\frac{t^3}{3}=\frac{1}{16}(x-\frac{\sin 4x}{4}-\frac{\sin^3 2x}{3})+C.$$

Найти интегралы:

3.4.8. $\int\cos^4 xdx.$ 3.4.9. $\int\sin^2 x*\cos^2 xdx.$

3.4.10. Найти интеграл $\int\cos 5x*\cos 3xdx.$

Здесь удобно воспользоваться формулами (10). Учитывая, что $cos5x*cos\ 3x=\frac{1}{2}(cos\ 2x+cos\ 8x)$, получим

$$\int\cos 5x*\cos 3x=\frac{1}{2}\int(\cos 2x+\cos 8x)dx=\frac{1}{2}(\int\cos 2xdx+\int\cos 8xdx)=$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 8x}{8})+C=\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{16}\sin 8x+C.$$

Найти интегралы:

3.4.11. $\int\cos 2x*\sin 4xdx$. 3.4.12. $\int\sin\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2}dx.$

ГЛАВА 4. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§1. ПРИЕМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Основные понятия и свойства

Пусть функция $y=f(x)$ определена на отрезке $[a;\ b]$ и на этом отрезке произвольно выбраны точки $x_0, x_1, ..., x_n$, так что $a=x_0<x_1<$

…$<x_n=b$ – выбрано разбиение этого отрезка на n частей. В каждом интервале ($x_{i-1};x_i$] произвольным образом выбрана точка $c_i, i=1,2,...,n.$

Сумма вида

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i, \tag{11}$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ называется интегральной суммой функции *f(x)* на отрезке $[a; b]$.

Определенным интегралом от функции *f(x)* на отрезке $[a; b]$ называется предел интегральных сумм S_n при условии, что длина наибольшего частичного отрезка Δx_i стремится к нулю;

$$\int_b^a f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i. \tag{12}$$

Если функция *f(x)* непрерывна на отрезке $[a;b]$, то предел (12) существует и не зависит от способа разбиения отрезка $[a; b]$ и от выбора точек c_i *(теорема существования* определенного интеграла). Функция $f(x)$ в этом случае называется *интегрируемой* на отрезке $[a;b]$. Более того, если функция *f(x)* ограничена на отрезке $[a; b]$ и непрерывна в нем, кроме конечного числа точек разрыва первого рода, то она интегрируема на этом отрезке.

Свойства определенного интеграла:

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

2. $\int_a^a f(x)dx = 0.$

3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt,$

т.е. переменную интегрирования можно обозначить любой буквой.

4. $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b (f_1(x))dx \pm \int_a^b f_2(x))dx.$

5. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$

6. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

7. Если $f(x)\geq 0$ на отрезке $[a; b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0;$ если $f(x)\leq 0$ для всех точек

$x\in[a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx \leq 0.$

8. Если $f(x) \le g(x)$ на отрезке $[a;\, b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx.$

9. Если M – наибольшее, m – наименьшее значение *f(x)* на $[a;b]$, то

$$m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

10. $\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a), c \in [a;b]$ (теорема о среднем).

11. $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|dx.$

Формула Ньютона-Лейбница

Если для непрерывной на отрезке $[a;\, b]$ функции $f(x)$ может быть найдена ее первообразная $F(x)$, то простым и удобным методом вычисления определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ является формула Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (13)$$

При интегрировании четных и нечетных функций в симметричных пределах интегрирования полезно использовать формулу

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int\limits_0^a f(x), \textit{если} & f(x) - \textit{четная функция}, \\ 0, \quad \textit{если} & f(x) - \textit{нечетная функция}. \end{cases}$$

4.1.1. Используя формулу Ньютона-Лейбница, вычислить интеграл

$$\int\limits_1^4 x^2 dx.$$

Подынтегральная функция $f(x) = x^2$ на отрезке [1; 4] имеет первообразную $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Тогда по формуле (13) имеем: $\int\limits_1^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 21.$

4.1.2. Вычислить интеграл $\int\limits_{-4}^{-2} \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$.

Подынтегральная функция имеет «почти табличный» вид. Для нахождения первообразной проведем преобразования подкоренного выражения, выделив полный квадрат.

$$\int_{-4}^{-2}\frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}=\int_{-4}^{-2}\frac{dx}{\sqrt{29-(x+2)^2}}=\int_{-4}^{-2}\frac{d(x+2)}{\sqrt{3^2-(x+2)^2}}=\arcsin\frac{x+2}{3}\Bigg|_{-4}^{-2}=$$

$$=\arcsin 0-\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)=\arcsin\frac{2}{3}.$$

Используя формулу Ньютона-Лейбница, найти интегралы:

4.1.3. $\int_0^{\pi}(2x+\sin 2x)dx.$ 4.1.4. $\int_0^{\lg 2}2^x * 5^x\,dx.$

4.1.5. $\int_2^5\frac{dx}{2x-3}.$ 4.1.6. $\int_1^2\frac{x+2}{3-x}dx.$

4.1.7. $\int_1^e\frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}dx$. 4.1.8. $\int_0^1\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}dx.$

4.1.9. $\int_1^5\frac{x}{1+x^2}dx.$ 4.1.10. $\int_1^5\frac{x}{1+x^2}dx.$

4.1.11. $\int_0^2 x\sqrt{9-\frac{9}{4}x^2}\,dx$.

4.1.12. Найти значение интеграла $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(\frac{\pi}{6}-x)dx.$

Это также «почти табличный» интеграл. Для нахождения первообразной (и использования формулы Ньютона-Лейбница) применим формулу понижения степени:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(\frac{\pi}{6}-x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(1+\cos(\frac{\pi}{3}-2x))dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}dx+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\frac{\pi}{3}-2x)dx=$$

$$=\frac{1}{2}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}*(-\frac{1}{2})*\sin(\frac{\pi}{3}-2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}*\frac{\pi}{2}-0-\frac{1}{4}(\sin(-\frac{2}{3}\pi)-\sin\frac{\pi}{3})=$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2})=\frac{1}{4}(\pi+\frac{\sqrt{3}+1}{2}).$$

Найти интегралы тригонометрических функций:

4.1.13. $\int_0^{\pi}(\cos^3 x-\frac{3}{4}\cos x)dx.$ 4.1.14. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin^2 x-\sin^4 x}.$

4.1.15. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}tg^2 x dx.$ 4.1.16. $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin 2x*\cos 8x dx.$

4.1.17. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{1-\cos 6x}.$ 4.1.18. $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx.$

Найти интегралы от рациональных дробей:

4.1.19. $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x^2+x}$. 4.1.20. $\int\limits_3^5 \frac{x^2+5}{x-2}dx$.

4.1.21. $\int\limits_2^3 \frac{x^2+1}{x^3-x}dx$. 4.1.22. $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x^3+x}$.

4.1.23. $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x^2+6x+10}$.

4.1.24. Найти значение интеграла $\int\limits_0^2 f(x)dx$, если

$$f(x)=\begin{cases} e^x, 0\le x<1; \\ 2, 1\le x\le 2. \end{cases}$$

Подынтегральная функция имеет на отрезке [0; 2] одну точку разрыва ($x = 1$) первого рода, ограничена на нем.

Тогда:

$$\int\limits_0^2 f(x)dx = \int\limits_0^1 e^x dx + \int\limits_1^2 2dx = e^x\Big|_0^1 + 2x\Big|_1^2 = e-1+4-2 = e+1.$$

§2. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Интегралы с бесконечными пределами (I рода)

Пусть функция *y = f(x)* интегрируема на любом отрезке *[a, ь]*, Тогда несобственные интегралы с бесконечными пределами (или I рода) определяются следующим образом:

$$\int\limits_a^{+\infty} \mathrm{f(x)dx} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b \mathrm{f(x)dx},\quad \int\limits_{-\infty}^b \mathrm{f(x)dx} = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b \mathrm{f(x)dx}, \tag{14}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{f(x)dx} = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^c \mathrm{f(x)dx} + \lim_{b\to+\infty}\int\limits_c^b \mathrm{f(x)dx},$$

где c – произвольное число (обычно $c = 0$).

Несобственные интегралы I рода называются *сходящимися,* если существуют конечные пределы, стоящие в правых частях равенств (14). Если же указанные пределы не существуют или бесконечны, то несобственные интегралы называются *расходящимися.*

Вот некоторые *признаки сходимости и расходимости* несобственных интегралов I рода:

1. Если на промежутке $[a;+\infty)$ непрерывные функции *f(x)* и $\varphi(x)$ удовлетворяют условию $0\le$ *f(x)* $\le$ $\varphi(x)$, то из сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty}\varphi(\mathrm{x})\mathrm{dx}$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(\mathrm{x})\mathrm{dx}$, а из расходимости

интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, следует расходимость интеграла $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ («признак сравнения»).

2. Если при $x \in [a;+\infty)$, $f(x) > 0$, $\varphi(x) > 0$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = k \neq 0$, то интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно («предельный признак сравнения»).

3. Если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$, то сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, который в этом случае называется *абсолютно сходящимся.*

4.2.1. Вычислить несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2}$ или установить его расходимость. По определению несобственного интеграла I рода (14) имеем

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{x} \right)\Bigg|_1^b = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{b} \right) + \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{1} \right) = 1,$$ интеграл сходится и его величина равна 1.

Замечание. Можно показать, что интеграл $\int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

Найти значение несобственных интегралов или установить их расходимость:

4.2.2. $\int_0^{+\infty} e^{-4x} dx.$ 4.2.3. $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx.$ 4.2.4. $\int_{13}^{+\infty} \dfrac{dx}{x\ln x}.$

4.2.5. $\int_{e^2}^{+\infty} \dfrac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$ 4.2.6. $\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \dfrac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}.$ 4.2.7. $\int_0^{+\infty} 2x\sin x dx.$

4.2.8. $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2+6x+12}.$ 4.2.9. $\int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}.$ 4.2.10. $\int_{-\infty}^{0} xe^x dx.$

4.2.11. $\int_0^{+\infty} 2e^{-\sqrt{x}} dx.$

Интегралы от неограниченных функций (II рода)

Если функция $y = f(x)$ непрерывна в промежутке $[a;b)$ и имеет *разрыв II рода* при $x = b$, то несобственный интеграл от неограниченной функции (II рода) определяется следующим образом:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \qquad (15)$$

Если предел, стоящий в правой части равенства (15) существует, то несобственный интеграл II рода называется *сходящимся;* в противном случае – *расходящимся.*

Аналогично, если функция *y =* γ *(x)* терпит *бесконечный разрыв в точке* $x = a$, то полагают

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx. \qquad (16)$$

Если функция *y = f(x)* терпит разрыв *II рода во внутренней точке* $c \in [a;b]$, то несобственный интеграл второго рода определяется формулой

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \qquad (17)$$

В этом случае интеграл называется *сходящимся,* если оба несобственных интеграла, стоящих справа, сходятся.

Приведем некоторые *признаки сходимости и расходимости* для несобственных интегралов второго рода.

1. Если на промежутке *[a; b)* функции *f(x)* и $\varphi(x)$ непрерывны, при *x=b* терпят разрыв II рода и удовлетворяют условию $0 \le f(x) \le \varphi(x)$, то из сходимости интеграла $\int_a^b \varphi(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^b f(x)dx$, а из расходимости интеграла $\int_a^b f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^b \varphi(x)dx$ («признак сравнения»).

2. Пусть функции *f(x)* и $\varphi(x)$ непрерывны на промежутке *[a; b)* и в точке *x = b* терпят разрыв II рода. Если существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = k,\ 0<k<\infty$, то интегралы сходятся $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b \varphi(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно («предельный признак сравнения»).

3. Если функция *f(x)* знакопеременная на отрезке *[a;b)* имеет разрыв в точке *x =b* и несобственный интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

4.2.12. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$ или установить его расходимость. Подынтегральная функция терпит разрыв при $x = 3$ $\left(\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{9-x^2}} = +\infty\right)$. Согласно формуле (15), имеем

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{3-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin\frac{x}{3}\Big|_0^{3-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin\frac{3-\varepsilon}{3} - 0 = \frac{\pi}{2},$$

интеграл сходится и его величина составляет $\frac{\pi}{2}$.

4.2.13. Вычислить значение интеграла $\int_0^1 \ln x dx$. При $x\to 0$ функция $\ln x \to -\infty$. По формуле (16) имеем

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon\to 0}(x\ln x - x)\Big|_\varepsilon^1 = -1 - \lim_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon\ln\varepsilon - \varepsilon) = -1 - 0 = -1,$$

так как $\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\ln\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}(-\varepsilon) = 0.$ Интеграл сходится и равен-1.

4.2.14. Исследовать сходимость интеграла $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$. Внутри отрезка интегрирования [-1;1] функция $\frac{1}{x^2}$, при $x\to 0$, неограниченно возрастает. Согласно формуле (17), имеем

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{0-\varepsilon}\frac{dx}{x^2} + \lim_{\delta\to 0}\int_{0+\delta}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\delta\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_\delta^1 =$$

$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon} - 1 + \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta} - 1 = \infty$, интеграл расходится.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

4.2.15. $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{3-x}}$. 4.2.16. $\int_2^5 \frac{dx}{(x-4)^2}$. 4.2.17. $\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^2}}$.

4.2.18. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1-\cos 2x}$. 4.2.19. $\int_0^1 x\ln x dx.$ 4.2.20. $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{x\ln x}$.

§3. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Вычисление площадей плоских фигур

Все подынтегральные функции, встречающиеся в этом параграфе, предполагаются непрерывными.

Вычисление площадей плоских фигур основано на геометрическом смысле определенного интеграла. Площадь криволинейной *трапеции,* ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$) слева и соответственно прямыми $x = a$ и $x = b$, снизу – отрезком $[a;b]$ оси Оx (см. рис.12), вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx. \tag{18}$$

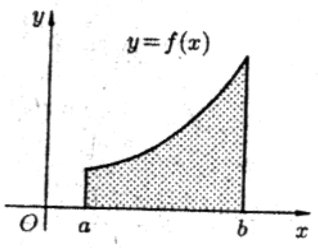

Рис. 12

Если $f(x) \leq 0$ при $x \in [a;b]$, то

$$S = -\int_a^b f(x)dx. \tag{19}$$

Формулы (18) и (19) можно объединить в одну:

$$S = \int_a^b |f(x)|dx. \tag{20}$$

Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, причем $f_1(x) \leq f_2(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx. \tag{21}$$

Пусть криволинейная трапеция ограничена кривой $x = \varphi(y)$, прямыми $y = c$, $y = d$ и отрезком $[c;d]$ оси Оy. Тогда площадь этой трапеции вычисляется по формуле

$$S = \int_c^d \varphi(y)dy \tag{22}$$

Если криволинейная трапеция ограничена сверху *кривой, заданной параметрическими уравнениями* $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $y(t) \geq 0, t \in [t_1;t_2]$, прямыми $x = a$, $x = b$ и отрезком $[a;b]$ оси Ox, то ее площадь вычисляется по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt, \qquad (23)$$

где t_1 и t_2 определяются из равенств $a = x(t_1), b = x(t_2)$.

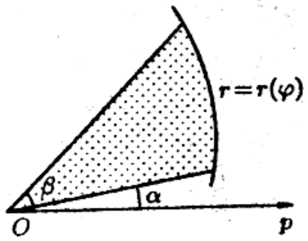

Рис. 13

Площадь *криволинейного сектора,* ограниченного кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi = \alpha, p = \beta(\alpha > \beta)$, вычисляется по формуле (см. рис. 13):

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi . \qquad (24)$$

Отметим, что площадь всякой плоской фигуры, отнесенной к прямоугольной (полярной) системе координат, может быть составлена из площадей криволинейных трапеций (секторов).

4.3.1. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \sin x$, прямыми $x = -\frac{7}{6}\pi, x = \frac{\pi}{4}, y = 0.$

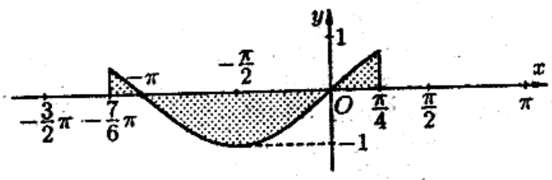

Рис.14

Фигура имеет вид, изображенный на рисунке 14. Площадь фигуры находим по формуле (20):

$$S = \int_{-\frac{7}{6}\pi}^{\frac{\pi}{4}} |\sin x| dx = \int_{-\frac{7}{6}\pi}^{-\pi} \sin x dx - \int_{-\pi}^{0} \sin x dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx = -\cos x\Big|_{-\frac{7}{6}\pi}^{-\pi} + \cos x\Big|_{-\pi}^{0} - \cos x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \frac{1}{2}(8 - \sqrt{3} - \sqrt{2}).$$

Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

4.3.2. $y = -x^2, y = -9x.$

4.3.3. $y = \arccos x, x = -1, x = 0, y = 0.$

4.3.4. $y = tg^2 x, x = \frac{\pi}{4}, y = 0.$

4.3.5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 6$ и $y = -x^2 + 5x - 6$.

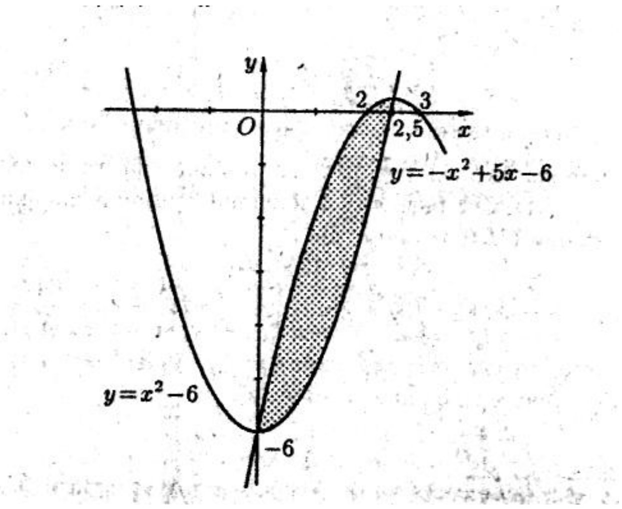

Рис. 15

Найдем абсциссы точек пересечения графиков данных функций. Для этого решаем систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 - 6, \\ y = -x^2 + 5x - 6. \end{cases}$$

Отсюда находим $x_1 = 0, x_2 = 2.5$. Искомую площадь (см. рис. 15) находим по формуле (21):

$$S = \int_0^{2.5} (-x^2 + 5x - 6 - x^2 + 6)dx = \int_0^{2.5} (-2x^2 + 5x)dx = 5\frac{5}{24}.$$

Найти площади фигур, ограниченных линиями:

4.3.6. $y = \sin x, y = 2\sin x, x = 0, x = \frac{7}{4}\pi.$

4.3.7. $y = x^2, y = \frac{1}{x^2}, y = 0, x = 0, x = 3.$

4.3.8. $y^2 = 2x + 1, y = x - 1.$

4.3.9. $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 6, y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1.$

4.3.10. $y = x^2, y = 2x, y = x.$

4.3.11. $y = x^3 - 3x, y = x.$

4.3.12. $y = x^2 - 2x + 3, y = 3x - 1.$

4.3.13. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = x^3$, $y = 8$, $x = 0$.

Для вычисления искомой площади воспользуемся формулой (22):

$$S = \int_0^8 \sqrt[3]{y^2}dy = \int_0^8 y^{\frac{2}{3}}dy = \frac{3}{5}y^{\frac{5}{3}}\Big|_0^8 = \frac{96}{5}.$$

Заметим, что искомую площадь можно найти, используя формулу (18) как разность площадей прямоугольника $OABC$ и трапеции OBC (см. рис. 16):

$$S = 4*8 - \int_0^4 \sqrt{x^3}\,dx = 32 - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^4 = 32 - \frac{64}{5} = \frac{96}{5.}$$

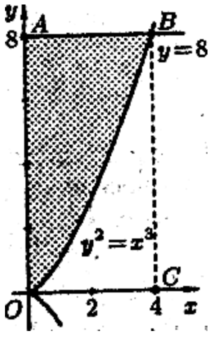

Рис. 16

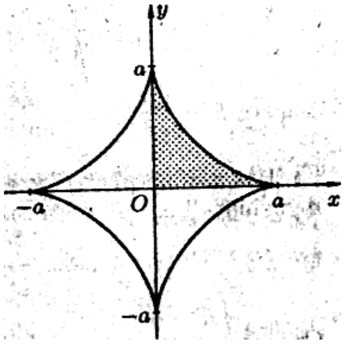

Рис. 17

Найти площади фигур, ограниченных линиями:

4.3.14. $y = \arcsin x, \pi x = 2y.$

4.3.15. $xy = 8,\ y =,8x^3,\ y = 27.$

4.3.16. $y^2 = (4 - x)^3,\ x = 0.$

4.3.17. $(y - x)^2 = x^3,\ x = 1.$

4.3.18. $y = 2 - |x|, y = x^2.$

4.3.19. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}, x = -\dfrac{3}{4}, x = 0, y = 1.$

4.3.20. $y = \sin|x|, y = |x| - \pi.$

4.3.21. $x^2 + y^2 = 16, y = 2, y = 2\sqrt{2}.$

4.3.22. $y = x^2 + 8x - 12, y = 18x - x^2.$

Вычисление длины дуги кривой

Пусть кривая на плоскости задана уравнением $y = f(x)$ или $x = \varphi(y)$.

На кривой выбраны точки A и B с координатами: $A(a;c)$, $B(b;d)$. Длина дуги кривой от точки A до точки B вычисляется по формулам

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\,dx. \qquad (25)$$

$$l = \int_c^d \sqrt{1 + (x')^2}\,dx. \qquad (26)$$

Если кривая задана *параметрическими уравнениями*

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

причем $t_1 \leq t \leq t_2$, то длина дуги вычисляется по формуле

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt. \qquad (27)$$

Если кривая задана уравнением в *полярных координатах* $r = r(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta$, то длина дуги кривой вычисляется по формуле

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi. \qquad (28)$$

4.3.23. Вычислить длину дуги кривой y = In sin x от $x_1 = \frac{\pi}{3}$ до $x_2 = \frac{2}{3}\pi$.

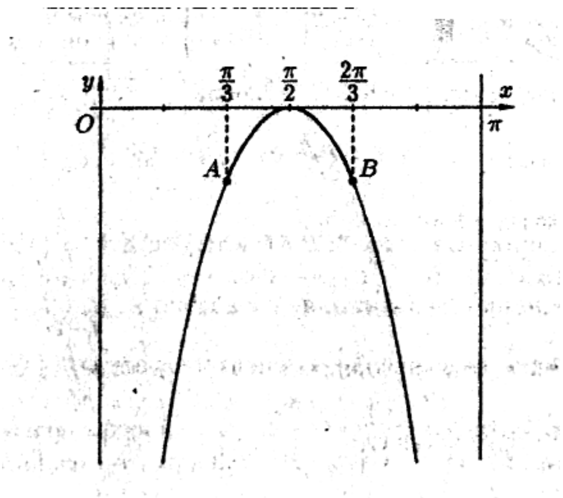

Рис. 18

Изобразим часть графика функций $y = ln\ sin\ x$ при $x \in (0;\pi)$, (см. рис. 18). Воспользуемся формулой (25), предварительно найдя выражение $\sqrt{1+(y')^2}$:

$$y = \ln \sin x, y' = \frac{\cos x}{\sin x}, \sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} = \frac{1}{\sin x},$$

так как $x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$. Находим длину l дуги AB:

$$l = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|td\, \frac{x}{2}\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} = \ln\sqrt{3} - \ln\frac{1}{\sqrt{3}} = 2\ln\sqrt{3}.$$

Найти длины дуг кривых

4.3.24. $y = - x^2 + 2x$ от вершины до точки с абсциссой $x = 2$.

4.3.25. $y^2 = \frac{x^3}{6}$ до точки с абсциссой $x = 6$.

4.3.26. $y = \ln x$ от $x = \sqrt{8}$ до $x = \sqrt{15}$.

4.3.27. $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{15}{2}$, отсечённой осью Ox.

4.3.28. $\frac{3}{2}x = y^{\frac{3}{2}}$ от точки $O(0;\ 0)$ до точки $A\{2\sqrt{3};3)$.

4.3.29. $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ между точками, абсциссы которых равны 0 и a.

Вычисление объемов тел

Вычисление объема тела по известным площадям поперечных сечений. Пусть в пространстве задано тело. Пусть построены его сечения плоскостями, перпендикулярными оси Ox и проходящими через точки $x \in [a;\ b]$ на ней (см. рис. 19), Площадь фигуры, образующейся в сечении, зависит от точки x, определяющей плоскость сечения. Пусть эта зависимость известна и задана непрерывной на $[a;b]$ функцией $S(x)$. Тогда объем части тела, находящейся между плоскостями $x = a$ и $x = b$, вычисляется по формуле

$$V = \int_a^b S(x)dx. \tag{29}$$

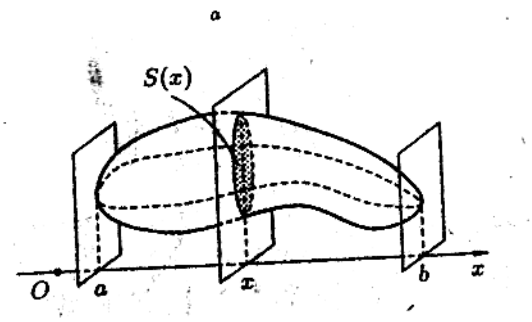

Рис. 19

Объемы тела вращения, образованного вращением вокруг оси Ox (или оси Oy) криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$ $(f(x) \geq 0)$ и прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$, вычисляются соответственно по формулам:

$$V_x = \pi\int_a^b y^2dx. \tag{30}$$

$$V_y = 2\pi\int_a^b xydx, a \geq 0. \tag{31}$$

Заметим, что если тело образуется при вращении вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной кривой $x=\varphi(y)$ $\left(\varphi(y)\geq 0\right)$ и прямыми $x = 0$, $y=c$, $y = d$, то объем тела вращения равен

$$V=\pi\int_c^d x^2dy. \qquad (32)$$

4.3.30. Найти объем V пирамиды с площадью основания Q и высотой H.

Направим ось Ox перпендикулярно основанию пирамиды, а начало координат совместим с вершиной O данной пирамиды (см. рис. 20). На расстоянии x от точки O проведем поперечное сечение пирамиды. Его площадь обозначим через S, она является функцией от x: $S=S(x)$. Как известно, площади сечения (параллельного основанию) и основания относятся как квадраты их расстояний от вершины, т.е. $\frac{S(x)}{Q}=\frac{x^2}{H^2}$.

Отсюда $S(x)=\frac{Q}{H^2}x^2$. По формуле (29) находим

$$V=\int_0^H \frac{Q}{H^2}x^2dx=\frac{Q}{H^2}*\frac{x^3}{3}\bigg|_0^H=\frac{1}{3}QH.$$

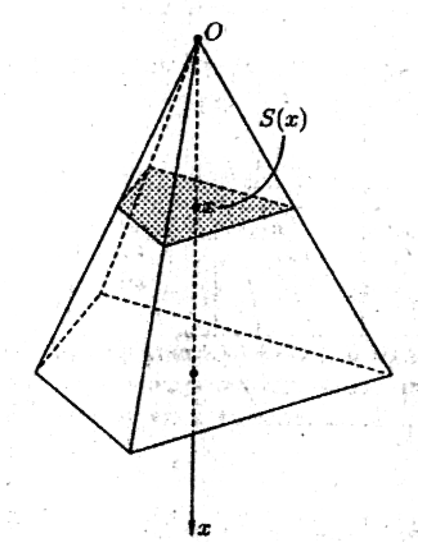

Рис. 20

4.3.31. Найти объем шара радиуса R.

4.3.32. Найти объем конуса с радиусом основания R и высотой H.

4.3.33**.** Найти объем тела, ограниченного параболическим цилиндром $z=x^2$, плоскостями $y = 0$, $y = 6$, $z = 1$.

4.3.34. Найти объем тела, ограниченного параболическим цилиндром $z=1-y^2$, плоскостями $y = 0$, $z = 0$, $x = 0$, $x = 12$.

4.3.35. Найти объем тела, ограниченного параболоидом $z = x^2 + y^2$ и плоскостью $z = 4$.

4.3.36. Найти объем эллипсоида $x^2 + y^2 + 4z^2 \le 4$.

4.3.37. $z = 9 - x^2 - y^2, z = 0.$

4.3.38. $x^2 + y^2 = 9, y + z = 3, z = 0.$

4.3.39. $y = x^2, z = 0, z + y = 6.$

Физические (механические) приложения определенного интеграла

1) Путь, пройденный телом, перемещающимся со скоростью $v=v(t)$, на промежуток времени $[t_1;t_2]$, выражается интегралом

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt. \qquad (33)$$

2) Работа переменной силы, заданной функцией $F = F(x)$ и направленной вдоль оси Ox на отрезке $[a; b]$, равна интегралу

$$A = \int_a^b F(x)dx. \qquad (34)$$

3) Давление жидкости на горизонтальную пластину равно весу столба этой жидкости («закон Паскаля»), т.е. $P = g\gamma Sh$, где g – ускорение свободного падения; γ – плотность жидкости; S – площадь пластинки; h – глубина ее погружения.

4) Давление жидкости на вертикальную пластину, ограниченную линиями $x = a$, $x = b$, $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ (см. рис. 21), вычисляется по формуле

$$P = g\gamma\int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)xdx. \qquad (35)$$

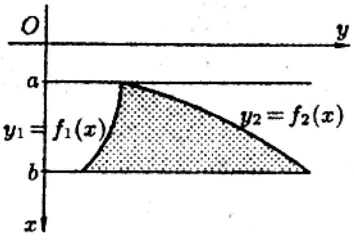

Рис. 21

5) Статические моменты, относительно координатных осей, моменты инерции и координаты центра тяжести плоской дуги $y=f(x)$, $a \le x \le b$ находятся соответственно по формулам

$$S_x = \int_a^b \gamma y dl, \qquad S_y = \int_a^b \gamma x dl, \qquad (36)$$

$$M_x=\int_a^b \gamma y^2 dl, \quad M_y=\int_a^b \gamma x^2 dl, \qquad (37)$$

где $dl=\sqrt{1+(y'_x)^2}dx \quad \left(\sqrt{(x'_y)^2+(y'_x)^2}dt, \sqrt{r^2+(r'_\varphi)^2}d\varphi\right)$ – дифференциал дуги;

$$x_c=\frac{S_y}{m}, y_c=\frac{S_x}{m}, m=\int_a^b \gamma\sqrt{1+(y'_x)^2}dx \qquad (38)$$

(здесь x_c, y_c – координаты центра тяжести, а m – масса кривой).

4.3.40. Автобус начинает двигаться с ускорением 1м/с^2. Какой путь пройдет автобус за 12 секунд от начала движения?

Скорость движения автобуса выражается формулой $v = t$ м/с. Согласно формуле (33), находим путь, пройденный автобусом за время от $t_1 = 0$ до $t_2 = 12$ с: $\int_0^{12} tdt=\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^{12}=72$м.

4.3.41. Скорость тела меняется по закону $u = 0{,}03\ t^2$ м/с. Какой путь пройдет тело за 10с? Чему равна средняя скорость движения?

4.3.42. Скорость автобуса при торможении изменяется по закону 15 - 3t м/с. Какой путь пройдет автобус от начала торможения до полной остановки?

4.3.43. Какую работу нужно совершить, чтобы растянуть пружину на 10см, если сила в 20Н растягивает пружину на 5см^2.

Согласно закону Гука, упругая сила, растягивающая пружину, пропорциональна этому растяжению x, т. е. $F(x) = kx$, где k – коэффициент пропорциональности. Согласно условию задачи, сила $F = 20$Н растягивает пружину на $x = 0{,}05$м. Следовательно, $20 = k*$ $0{,}05$, откуда $k= 400$, F=400x. Искомая работа на основании формулы (34) равна

$$A=\int_0^{0.1} 400xdx=\left.200x^2\right|_0^{0.1}=2\,\text{Дж}.$$

4.3.44. Найти работу, которую нужно затратить, чтобы выкачать жидкость плотности γ из цистерны, имеющей форму параболического цилиндра, размеры которого указаны на рисунке 22.

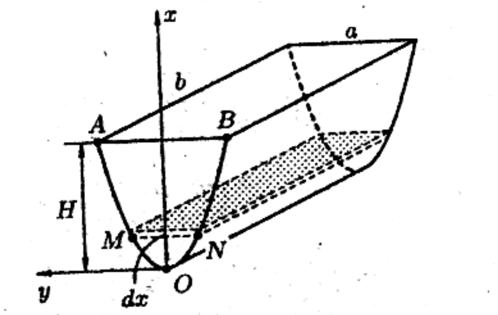

Рис. 22

Работа, затрачиваемая на поднятие тела весом *p* на высоту *h*, равна *ph*. Но различные слои жидкости в цистерне находятся на различных глубинах и высота поднятия до края цистерны различных слоев не одинакова. Для решения задачи применим так называемый «метод дифференциала». Введем систему координат так, как указано на рисунке.

1. Работа, затрачиваемая на выкачивание слоя жидкости толщиной $x\left(x\in[0;H]\right)$, есть функция от x, т.е. $A = A(x)$ $(A(0)=0,\ A(H)=A_0)$.

2. Находим главную часть приращения ΔA при изменении x на величину $\Delta x = dx$, т.е. находим дифференциал dA функции $A(x)$.

Ввиду малости dx считаем, что «элементарный слой» жидкости находится на одной глубине x от края цистерны (см. рис. 22). Тогда $dA ==dp*x$, где dp – вес этого слоя; он равен $g\gamma dv$, где g – ускорение свободного падения; γ – плотность жидкости, dv – объем «элементарного слоя» жидкости (на рисунке он выделен), т. е. $dp = g\gamma dv$. .Но $dv = b * MN * dx$. Найдем MN: $\frac{1}{2}MN$ – ордината точки $M(H – x;y)$, лежащей на параболе AOB, уравнение которой в выбранной системе координат $y^2 = 2px$. Параметр p найдем из условия, что точка A $(H;\frac{a}{2})$ принадлежит параболе, следовательно, $\frac{a^2}{4}=2pH,\ p=\frac{a^2}{8H}$, т.е. уравнение параболы есть $y^2 =\frac{a^2}{4H}x$. Точка $M(H – x;\ y)$ лежит на параболе. Следовательно, $y^2 = \frac{a^2}{4H}(M – x)$. Отсюда находим $y=\frac{a}{2\sqrt{H}}\sqrt{H-x}=\frac{1}{2}MN$, т.е. $MN = \frac{a\sqrt{H-x}}{\sqrt{H}}$. Следовательно, $dv = b\frac{a\sqrt{H-x}}{\sqrt{H}}dx,\ dp=g\gamma ba\frac{\sqrt{H-x}}{\sqrt{H}}dx$ и $dA=\gamma gab\frac{\sqrt{H-x}}{\sqrt{H}}xdx.$

3. Интегрируя это равенство в пределах от $x = 0$ до $x = H$, находим искомую работу:

$$A = \frac{\gamma gab}{\sqrt{H}}\int_0^H x\sqrt{H-x}dx = \left[\begin{matrix}\sqrt{H-x}=t, x=H-t^2,\\ dx=-2tdt\end{matrix}\right] = \frac{\gamma gab}{\sqrt{H}}\int_0^{\sqrt{H}} 2(Ht^2-t^4)dt =$$

$$= \frac{\gamma gab}{\sqrt{H}} * 2\left(\frac{Ht^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{H}} = \frac{\gamma gab}{\sqrt{H}} * \frac{4}{15}H^2\sqrt{H} = \frac{4}{15}\gamma gabH^2.$$

4.3.45. Какую работу надо затратить на преодоление силы тяжести при насыпании кучи песка (плотность γ) конической формы радиусом основания *R* и высотой *H?*

4.3.46. Для растяжения пружины на 4 см необходимо совершить работу 24 Дж. На какую длину можно растянуть пружину, совершив работу в 150 Дж?

4.3.47. Рессора прогибается под нагрузкой 2т на 1,5 см. Какую работу нужно затратить для деформации рессоры на 3см? (Сила деформаций пропорциональна величине деформации).

§4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНТЕГРАЛОВ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ

4.4.1**.** Определить объем продукции, произведенной рабочим за третий час рабочего дня, если производительность труда характеризуется функцией

$$f(t) = 3/(3t+1) + 4.$$

Решение. Если непрерывная функция *f(t)* характеризует производительность труда рабочего в зависимости от времени *t*, то объем продукции, произведенной рабочим за промежуток времени от t_1 до t_2, будет выражаться формулой

$$V = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt.$$

В нашем случае

$$V = \int_2^3 \left(\frac{3}{3t+1}+4\right)dt = (\ln(3t+1)+4t)\Big|_2^3 = \ln 10 + 12 - \ln 7 - 8 = \ln 10/7 + 4.$$

4.4.2. Определить запас товаров в магазине, образуемый за три дня, если поступление товаров характеризуется функцией *f(t)* = 2*t* + 5.

Решение. Имеем:

$$V = \int_0^3 (2t+5)dt = \left(\frac{2t^2}{2}+5t\right)\Big|_0^3 = 9+15=24.$$

4.4.3. Пусть сила роста описывается некоторой непрерывной функцией времени $\delta_t = f(t)$, тогда наращенная сумма находится как

$$S = P\, exp \int_0^n \delta_t\, dt,$$

а современная величина платежа $P = S\, exp(-\int_0^n \delta_t\, dt)$.

Если, в частности, δ_t является линейной функцией времени: $\delta_t = \delta_o + at$, где δ_o – величина силы роста для $t = 0$; a – годовой прирост, то

$$\int_0^n \delta_t\, dt = \int_0^n (\delta_o + at)dt = \delta_o n + a\, n^2/2;$$

множитель наращения $exp(\delta_o n + an^2/2)$. Если сила роста изменяется по геометрической прогрессии $\delta_t = \delta_o\, a^t$, где δ_o – начальное значение процентной ставки, а – годовой коэффициент роста, тогда

$$\int_0^n \delta_t\, dt = \int_0^n \delta_o\, a^t\, dt = \delta_o\, a^t /lna \Big|_0^n = \delta_o(a^n -1)/lna;$$

множитель наращения $exp(\delta_o(a^n -1) / lna)$.

Предположим, что начальный уровень силы роста равен 8%, процентная ставка ежегодно увеличивается на 20% (а=1,2), срок ссуды 5 лет. Множитель наращения в этом случае составит $exp\,(0{,}08\,(1{,}2^5-1) / ln1{,}2) \approx exp\, 0{,}653953 \approx 1{,}921397$.

4.4.4. Выше, при анализе непрерывных потоков платежей, предполагалось, что годовая сумма ренты R равномерно распределяется на протяжении года. На практике, особенно в инвестиционных процессах, этот поток может существенно изменяться во времени, следуя какому-либо закону. Если этот поток непрерывен и описывается некоторой функцией $R_t = f(t)$, то общая сумма поступлений за время n равна $\int_0^n f(t)dt$.

В этом случае наращенная по непрерывной ставке за период от 0 до n сумма составит:

$$S = \int_0^n f(t)e^{\delta(n-t)}dt.$$

Современная величина такого потока равна

$$A = \int_0^n f(t)e^{-\delta t}dt.$$

Пусть функция потока платежей является линейной: $R_t = R_o + at$, где R_o – начальная величина платежа, выплачиваемого за единицу времени, в которой измеряется срок ренты. Вычислим современную величину A, пользуясь правилами интегрирования определенного интеграла:

$$A = \int_0^n (R_0 + at)\, e^{-\delta t} dt = \int_0^n R_0\, e^{-\delta t} dt + \int_0^n at\, e^{-\delta t} dt.$$

Обозначим $A_1 = \int_0^n R_0\, e^{-\delta t} dt$, $A_2 = \int_0^n at\, e^{-\delta t} dt$.

Имеем: $A_1 = R_0 \int_0^n e^{-\delta t} dt = -R_o/\delta e^{-\delta t} \Big/_0^n = -R_o/\delta (e^{-\delta n} - e^o)\ \ -R_o/\delta (e^{-\delta n} - 1) =$ $= R_o(e^{-\delta n} - 1)/\delta$. $A_2 = a\int_0^n t\, e^{-\delta t} dt$. Вычислим неопределенный интеграл $\int t\, e^{-\delta t} dt$ по частям: $u = t$, $dv = e^{-\delta t} dt \Rightarrow du = dt$, $v = \int e^{-\delta t} dt = -e^{-\delta t}/\delta$, тогда $\int t\, e^{-\delta t} dt = -te^{-\delta t}/\delta + 1/\delta \int e^{-\delta t} dt = -te^{-\delta t}/\delta (t + 1/\delta) + C$. Следовательно,

$$A_2 = -a\, t e^{-\delta t}/\delta (t + 1/\delta) \Big/_0^n = ((1 - e^{-\delta n})/\delta - n e^{-\delta n})a/\delta.$$

Итак, исходный интеграл

$$A = A_1 + A_2 = R_o(e^{-\delta n} - 1)/\delta + ((1 - e^{-\delta n})/\delta - n e^{-\delta n})a/\delta.$$

ГЛАВА 5. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ГРАФИК И ЛИНИИ УРОВНЯ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Определение функции нескольких переменных

Переменная z называется *функцией двух переменных* x и y, если каждой упорядоченной паре $(x; y)$ значений двух независимых друг от друга переменных величин x и y из некоторой области $D \subseteq R^2$ соответствует единственное число z.

Обозначения: $z = f(x; y), z = F(x; y), z = z(x; y)$ и так далее.

Переменная величина u называется *функцией* от n переменных $x;y;z;...;t$, если каждому набору этих переменных соответствует единственное значение переменной u: $u = f(x; y; z,..,t)$.

Всякая функция нескольких переменных становится функцией меньшего числа переменных, если часть переменных (аргументов) зафиксировать.

Например, функции $u = f(x;y;z)$, $u = f(x;y;a)$, $u = f(x;b;a)$, где a и b – постоянные, являются функциями соответственно трех, двух и одной переменной.

В дальнейшем в основном будем рассматривать функции двух переменных $z = f(x; y)$ или $z = z(x;y)$. Под функцией $z = f(x;y)$ будем понимать также функцию точки $M(x;y)$ с координатами x и y.

Множество D всех точек $(x;y)$, при которых $z = f(x; y)$ имеет смысл, называется *областью определения,* а множество значений z, принимаемых функцией $z=f(x; y)$ при $(x; y) \in D$, называется *областью изменения* или *множеством значений* функции.

График функции двух переменных. Линии уровня

Множество точек пространства R^3 с координатами $(x;y;z) = (x;y;f(x,y))$ при всех $(x, y) \in D$ называется *графиком функции* $z = f(x; y)$.

Для наглядного геометрического представления используют *линии уровня* для функции двух переменных и *поверхности уровня* для функции трех переменных.

Линией уровня функции $z = f(x; y)$ называется множество всех точек плоскости Oxy, в которых функция z принимает постоянное значение, т.е. $f(x; y) = c$, где c – постоянная.

Поверхностью уровня функции трех переменных $u = f(x;y;z)$ называется множество всех точек пространства *Oxyz,* в которых функция *u* принимает постоянное значение, т. е. $f(x;\,y;z) = c$, где $c = \text{const}$.

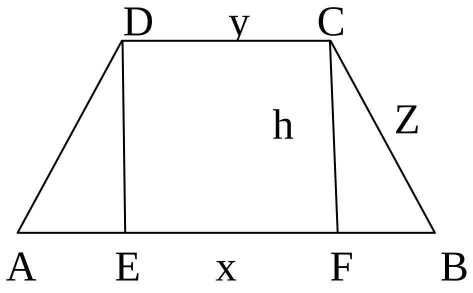

Рис. 23

5.1.1. Выразить площадь S равнобочной трапеции как функцию трех величин: длин оснований *x* и *y* и боковой стороны *z*.

Имеем $S = S_{трап} = \dfrac{1}{2}(x+y)h$ (см. рис. 23), а из ΔFCB имеем $h^2 = z^2 - BF^2$, где $BF = AE = \dfrac{1}{2}(x-y)$. Искомая функция имеет вид $S = \dfrac{1}{2}(x+y)\sqrt{z^2 - \dfrac{1}{4}(x-y)^2}$. Это функция трех переменных *x;y;z* с областью определения $0 \le x - y \le 2z$.

5.1.2. Выразить площадь треугольника как функцию длин двух его сторон *x* и *y* при условии, что известен полупериметр треугольника *p*.

5.1.3. Выразить объем *V* конуса как функцию его образующей *l* высоты *h.* Указать область определения этой функции.

5.1.4. Дано $f(x;\,y) = \dfrac{(x+y)^2}{2xy}$. Найти: а) $f(2;3)$; б) $f(1;\dfrac{y}{x})$; в) $f(x;-x)$; г) $f(0;y)$; д) $f\left(\dfrac{1}{x};\dfrac{1}{y}\right)$.

а) Чтобы найти $f(2;3)$, надо в выражении для $f(x;\,y)$ подставить $x=2$, $y = 3$ и выполнить указанные в *f* действия.

Имеем $f(2;3) = \dfrac{(2+3)^2}{2*2*3} = \dfrac{25}{12}$.

б) $f\left(1;\dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{\left(1+\dfrac{y}{x}\right)^2}{2*1*\dfrac{y}{x}} = \dfrac{(x+y)^2}{2xy} = f(x;y)$.

в) $f(x;-x)=\dfrac{(x+(-x))^2}{2x(-x)}=0$.

г) $f(0;y)=\dfrac{0+y}{2*0*y}$ – не существует.

д) $f\left(\dfrac{1}{x};\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)^2}{2*\dfrac{1}{x}*\dfrac{1}{y}}=\dfrac{(x+y)^2}{2xy}=f(x;y)$.

5.1.5. Для функции $f(x;y)=\dfrac{x^2-y^2}{2xy}$ найти: а) $f\left(\dfrac{1}{x};\dfrac{1}{y}\right)$; б) $f(-x;-y)$; в) $f(y;x)$; г) $\dfrac{1}{f(x;y)}$

5.1.6. Дано $f(x+y;x-y)=(x+y)^2y^2$. Найти $f(x;y)$.

Введем обозначения

$$\begin{cases}x+y=u\\x-y=v\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{u+v}{2}\\y=\dfrac{u-v}{2}\end{cases}.$$

Тогда

$$f(x+y,x-y)=f(u,v)=\left(\frac{u+v}{2}+\frac{u-v}{2}\right)^2*\left(\frac{u-v}{2}\right)^2=u^2*\frac{(u-v)^2}{4}.$$

Из $f(u,v)=u^2\dfrac{(u-v)^2}{4}$ следует, что $f(x;y)=x^2\dfrac{(x-y)^2}{4}$.

5.1.7. Найти $f(x)$, если $f\left(\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x},(x>0)$.

5.1.8. Найти $f(x;y)$, если $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$.

5.1.9. Пусть $z=x+y+f(x-y)$. Известно, что $z=x^2$ при $y=0$. Определить вид f и z.

5.1.10. Найти область определения и множество значений функции $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$. Построить график этой функции и линии уровня $z=c$

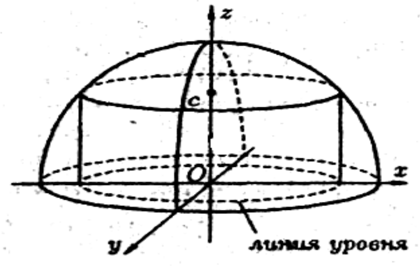

Рис. 24

Действие извлечения квадратного корня возможно при условии $R^2 - x^2 - y^2 \geq 0$. Это неравенство определяет замкнутый круг радиуса R с центром в начале координат $O(0;0)$. Данная функция определяется уравнением сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, а значит, ее графиком Γ является верхняя полусфера (рис. 24). Линиями уровня являются окружности $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 - c^2$ при условии $0 \leq c \leq R$. Отсюда, в частности, следует, что множество значений функции – отрезок $z \in [0, R]$.

Найти и изобразить области определения следующих функций:

5.1.11. $z = \sqrt{y \sin x}.$ 5.1.12. $z = \sqrt{1 + \sqrt{-(x+y)^2}}.$

5.1.13. $z = x + \arccos y.$ 5.1.14. $z = \dfrac{1}{\sqrt{y - \sqrt{x}}}.$

5.1.15. $z = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{4 - y^2}.$

5.1.16. Дано $f(x;y) = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} - \dfrac{x+y}{x-y}.$

Найти: а) $f(y;x)$; б) $f\left(\dfrac{1}{x};\dfrac{1}{y}\right)$; в) $f(-x;-y)$; г) $f(1;\dfrac{y}{x})$.

§2. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ И НА МНОЖЕСТВЕ

Предел функции в точке

Под *d-окрестностью* точки $M_0(x_0;y_0)$ будем понимать внутренность круга радиуса d с центром в точке $M_0(x_0;y_0)$, т.е. $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < d^2$.

Если из этого круга удалить его центр, то получим проколотую *d -окрестность* точки $M_0(x_0;y_0)$, т.е. $0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < d^2$.

Предположим, что функция двух переменных $z = f(x;y)$ определена в некоторой проколотой d -окрестности точки M_0.

Число A называется пределом функции $z = f(x;y)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ (сколь угодно малого) найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для всех $M(x;y)$, отличных от $M_0(x_0;y_0)$ и отстоящих от M_0 меньше, чем на δ, выполняется неравенство $|f(x,y) - A| < \varepsilon$.

Обозначения $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = A, \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(M) = A, \lim\limits_{\Delta r \to 0} f(x;y) = A, (\Delta r = |M_0 M|)$.

Очевидно, что процесс поиска предела функции двух переменных, а тогда и доказательство равенства

$$A = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x;y)$$

существенно сложнее случая одной переменной хотя бы потому, что условия

$$M \to M_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \to x_0 \\ y \to y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \Delta r \to 0$$

сложнее и разнообразнее: в них заложено произвольное приближение точки *M(x;y)* к точке $M_0\{x_0.,y_0)$.

Наряду с определением предела, приведенным выше, который также называется *двойным пределом,* имеет смысл рассматривать и так называемые *повторные пределы* $\lim\limits_{x \to x_0}\left(\lim\limits_{y \to y_0} f(x;y)\right)$ и $\lim\limits_{y \to y_0}\left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x;y)\right)$. При определенных условиях эти пределы могут оказаться равными и совпадающими с двойным. Но этот вопрос мы обсуждать не будем, отсылая к более полным руководствам (напр., Фихтенгольц Г.М. – Т 1).

Замечание. Данное определение двойного предела будем сохранять в том случае, когда функция *f*(*x*; *y*) определена только на некотором множестве *E,* имеющем предельную точку M_0. Точка M_0 называется предельной точкой (или точкой сгущения) множества *E,* если каждая окрестность M_0 содержит хотя бы одну точку множества *E*. В таком случае $x \to x_0, y \to y_0$ или $(x;y) \to (x_0;y_0)$ означает, что точка *M(x;y)* принадлежит только множеству *E*.

При вычислении двойных пределов можно и нужно истолковать известные теоремы о пределах для функции одной переменной. Для краткости будем писать *f (M)* вместо *f(x;y)*.

Теорема 5.1 (о пределах). Пусть *f (M)* и *g(M)* – две функции, определенные в некоторой проколотой окрестности точки M_0 и $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = A, \lim\limits_{M \to M_0} g(M) = B$. Тогда

1) $\lim\limits_{M \to M_0} (f \pm g)(M) = A \pm B;$

2) $\lim\limits_{M \to M_0} (f \cdot g)(M) = A \cdot B;$

3) $\lim\limits_{M \to M_0} \dfrac{f}{g}(M) = \dfrac{A}{B}(B \neq 0);$

4) $\lim\limits_{M \to M_0} (f(M))^{g(M)} = A^B (A > 0);$

Непрерывность функции в точке

Функция $z = f(M)$ называется непрерывной в точке M_0, если она удовлетворяет следующим трем условиям:

1) $f(M)$ определена в некоторой окрестности точки M_0;

2) имеет предел в этой точке: $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = A$;

3) этот предел равен значению функции в этой точке: $A = f(M)$.

Замечание. Данное определение непрерывности функции в точке M_0 будем сохранять и в том случае, когда $f(x;y)$ определена только на некотором множестве E, содержащем точку M_0. В этом случае условие 2) определения предела имеет вид $\lim\limits_{\substack{M \to M_0 \\ M \in E}} f(M) = A$. Если функция $f(x;y)$ не определена в точке $M_0\{x_0.,y_0)$ или $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x;y) \neq f(x_0;y_0)$, то $M_0\{x_0.,y_0)$ называется точкой разрыва.

Имеют место свойства, аналогичные свойствам непрерывных функций одной переменной.

Теорема 5.2 (о переходе к пределу). Если $f(M)$ непрерывна в точке M_0, то $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f\left(\lim\limits_{M \to M_0} M\right)$.

Теорема 5.3 (о сохранении знака). Если $f(M)$ непрерывна в точке M_0 и $f(M_0) > 0 (f(M_0) < 0)$, то найдется d – окрестность точки M_0, в которой $f(M) > 0 (f(M) < 0)$.

Теорема 5.4 (о непрерывных функциях). Пусть $f(M)$ и $g(M)$ – две функции, определенные в некоторой окрестности точки M_0 и непрерывные в этой точке. Тогда в этой точке непрерывны также функции $(f \pm g)(M), (f \cdot g)(M), \frac{f}{g}(M)$ при $g(M_0) \neq 0, (f(M))^{g(M)}$, при $f(M_0) > 0$.

Теорема 5.5 (о непрерывности сложной функции). Пусть $f(M)$ определена в некоторой окрестности точки M_0 и непрерывна в точке M_0, при этом значения $f(M)$ попадают в некоторую окрестность точки P_0, причем $f(M_0) = P_0$. Пусть $g(P)$ определена в окрестности точки P_0 и непрерывна в этой точке. Тогда сложная функция (суперпозиция) $g[f(M)] = \varphi(M)$ непрерывна в точке M_0.

Функции непрерывные на множестве

Функция, непрерывная в каждой точке некоторого множества точек E, называется *непрерывной на этом множестве.*

Для функций непрерывных на множестве имеют место аналоги теорем для функций одной переменной.

Множество E называется *связным,* если две любые его точки можно соединить некоторой непрерывной кривой, полностью принадлежащей этому множеству.

Теорема 5.6 (Коши – об обращении в ноль). Если $z = f(M)$ непрерывна на связном множестве E, в двух различных его точках принимает значения разных знаков, то в E найдется точка P, такая, что $f(P) = 0$.

Множество E называется *ограниченным,* если оно целиком принадлежит некоторому кругу $x^2 + y^2 \le R^2$.

Множество E называется *открытым,* если каждая точка принадлежит ему вместе с некоторой окрестностью.

Открытое связное множество называется областью. Если к точкам области D присоединить точки её границы, то такая область называется *замкнутой* и обозначается $\overline{D}$.

Под *граничной точкой* области D имеется в виду такая точка P, в каждой окрестности которой имеются как точки области D, так и точки, не принадлежащие D. Граница области обозначается ∂D. Следовательно, $\overline{D} = D \cup \partial D$.

Для функций непрерывных в замкнутых областях имеют место теоремы Вейерштрасса, которые объединены в одну.

Теорема 5.7 (Вейерштрасса). Если функция $z = f(x,y)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$, то она ограничена в ней. При этом непрерывная функция достигает в замкнутой области свои наибольшее и наименьшее значения.

5.2.1. Существует ли предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x-y}{x+y}$?

Функция $\dfrac{x-y}{x+y}$ определена в проколотой окрестности точки $O(0;0)$ вне прямой $x + y = 0$, поэтому условие $(x; y) \to (0; 0)$ означает, что $x + y \ne 0$.

Если применить здесь обычный метод «проб и ошибок», то можно получить такие результаты:

1) Обозначая $f(x;y)=\dfrac{x-y}{x+y}$ и устремляя $M(x;y)$ к $O(0;0)$ вдоль оси Ox, т.е. принимать $y=0$, а $x\to 0$, то $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-0}{x+0}=1$.

2) Если устремим $M(x;y)$ к $O(0;\,0)$ вдоль оси Oy, т. е. принимать $x=0,\ y\to 0$, то $\lim\limits_{\substack{x=0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{0-y}{0+y}=-1$.

Разные «предельные числа» означают, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x-y}{x+y}$ не существует (предел должен быть единственным).

Предлагаем самостоятельно получить еще некоторые предельные числа, рассматривая приближение $M(x;\,y)$ к $O(0;\,0)$ по разным направлениям, например, вдоль прямых $y=kx$ с различными k, вдоль парабол $y=kx^2$ или $x=ky^2$ и пр.

5.2.2. Найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{e^{y(x+y-2)}-1}{3(1+x)(x+y-2)}$.

Исходя из того, что $x+y-2\to 0$ при $x\to 0$ и $y\to 2$, используя известную формулу $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{e^{\alpha}-1}{\alpha}=1$ и теорему 5.1, легко заключаем, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{e^{y(x+y-2)}-1}{(x+y-2)y}\cdot\dfrac{y}{3(1+x)}=\dfrac{2}{3}$.

Вычислить пределы:

5.2.3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\cdot\cos\dfrac{1}{y}$.

5.2.4. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\dfrac{2(x-1)(y-2)}{(x-1)^2(y-2)^2}$.

5.2.5. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}}\dfrac{tg(x+y)\cdot e^{x-y}}{x^2-y^2}$.

5.2.6. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{\sin x(y^2+2y-4)}{x(y^2+2)}$.

5.2.7. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x^2+y^2}{x^4-y^4}$.

5.2.8. Непрерывна ли функция $f(x;y)=(x+y)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$ при $x\neq 0$, $y\neq 0$, $f(0;0)=0$.

Проверяем условия непрерывности функции в точке $O(0;\,0)$:

1) Функция $f(x;y)$ определена в окрестности этой точки.

2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x+y)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=0$, так как имеем $x+y\to 0$, а $\left|\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\right|$ ограничена.

3) Предел в точке равен значению функции в этой точке $f(0,0)=0$. Функция непрерывна в точке $O(0;\ 0)$.

Добавим, что эта функция непрерывна в каждой точке $(x;y)\in R^2$ как комбинация непрерывных элементарных функций.

Замечание. Если бы функция $f(x;y)$ была бы неопределенна в точке $O(0;0)$, то, доопределив ее в этой точке нулем, мы бы получили непрерывную функцию.

Исследовать на непрерывность данные функции в указанных точках:

5.2.9. $f(x;y)=\begin{cases}(x+y)\arccos\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{при } x\neq 0, y\neq 0,\\ 0, & \text{при } x=0, y=0,\end{cases}$ в точке $O(0;0)$.

5.2.10. $f(x;y)=\begin{cases}(x-y-3)\cos\dfrac{x+y-1}{x-y+3}, & \text{при } x\neq 4, y\neq 1,\\ 0, & \text{при } x=4, y=1,\end{cases}$ в точке $M_0(4;1)$.

5.2.11. $f(x;y)=\begin{cases}\dfrac{\ln\left(1+xy^2\right)}{3xy^2}, & \text{при } x\neq 0, y\neq 0,\\ \dfrac{1}{3} & \text{при } x=0, y=0,\end{cases}$ в точке $O(0;0)$.

5.2.12. $f(x;y)=e^{-\frac{3}{x^2+y^2}}$.

5.2.13. $f(x;y)=\dfrac{x^2+y^2+1}{(x-y)^4}$.

§3. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ. ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ

Определение частных производных

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x;y)$, определенную и непрерывную в некоторой области D. Считаем, что точки с координатами $(x;y),(x+\Delta x;y),(x;y+\Delta y),(x+\Delta x;y+\Delta y)$, где $\Delta x,\Delta y$ – приращения аргументов, также принадлежат области D.

Частными приращениями функции $z = f(x;\ y)$ по независимым переменным x и y называются разности

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x;y)-f(x;y),\Delta_y z = f(x;y+\Delta y)-f(x;y).$$

Полным приращением функций z = *f(x;y),* соответствующим приращениям аргументов $\Delta x, \Delta y$, называется разность $\Delta z = f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x;y)$.

Заметим, что в общем случае $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$.

Частной производной функции z = *f(x;y)* по переменным *x* и *y* называется предел отношения соответствующего частного приращения $\Delta_x z$ или $\Delta_y z$ к приращению данной переменной, при условии, что приращение переменной стремится к нулю:

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}, z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}.$$

Приняты также обозначения: $z'_x, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}(x;y), \frac{\partial}{\partial x} z, \frac{\partial}{\partial x} f, \frac{\partial}{\partial x} f(x;y)$ (аналогично по другой переменной).

Геометрический смысл частной производной

Исходим из рисунка 25, на котором изображен график *Г* функции z= *f(x;y);* $P_0(x_0;y_0;z_0)$ – точка на графике, $M_0(x_0;p_0)$ – проекция P_0 на плоскость *Oxy,* $z_0 = M_0 P_0$. Через прямую M_0P_0 проведены две плоскости p_1 *и* p_2: p_1 параллельна плоскости *Oxz,* p_2 параллельна плоскости *Oyz.*

Сечение Г с первой плоскостью представляет собой кривую $z = f(x; y_0) = \varphi(x)$ – функцию переменной *x*, а сечение Г с p_2 представляет кривую $z = f\{x_0;y) = g(y)$ – функцию переменной *y.* На чертеже изображены также касательные t_1 к $\varphi(x)$ в точке P_0 и t_2 - к $g(y)$ в точке P_0. Тогда $z'_x(x_0;y_0) = \varphi'(x_0) = k_1 = tg\alpha_1$ – угловой коэффициент t_1, α_1 – угол наклона t_1 к *Ox,* $z'_y(x_0;y_0) = g'(y_0) = k2 = tg\alpha_2$ – угловой коэффициент t_1, α_2 – угол наклона t_2 к *Oy.*

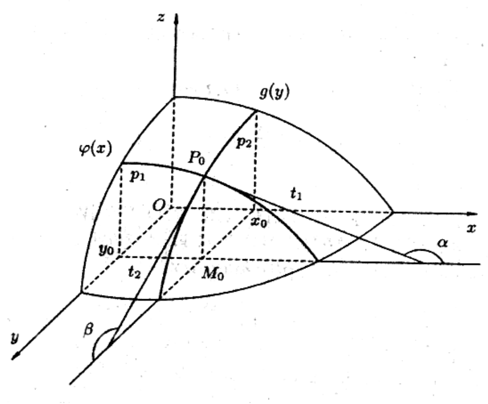

Рис. 25

Дифференциал функции. Линеаризация функций

Если функция *f{x; y)* обладает частными производными f'_x и f'_y, непрерывными в точке $M_0(x_0;y_0)$, то теорема Лагранжа (конечных приращений) для функции одной переменной позволяет получить следующее приближенное равенство (при $\Delta x \approx 0, \Delta y \approx 0$):

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y) - f(x_0; y_0) = f(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y) - f(x_0; y_0+\Delta y) +$$
$$+ f(x_0; y_0+\Delta y) - f(x_0; y_0) =$$
$$= f'_x(x \ + q_1\Delta x; y_0+\Delta y)\Delta x + f'_y(x_0; y_0+q_2\Delta y)\Delta y \approx f'_x(x_0; y_0)\Delta x + f'_y(x_0; y_0)\Delta y$$

$(0 < q_1 < 1, 0 < q_1 < 1 -$ некоторые числа, фигурирующие в теореме Лагранжа).

Таким образом, полное приращение функции приближенно равно $f'_x(x_0; y_0)\Delta x + f'_y(x_0; y_0)\Delta y$.

Это выражение представляет собой главную, линейную часть приращения функции и называется *дифференциалом* этой функции в данной точке.

Обозначение: $dz = z'_x dx + z'_y dy$ (здесь $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ – произвольные приращения аргументов). Приняты также обозначения: $d_x z = z'_x dx$, $d_y z = z'_y dy$ – частные дифференциалы функции z. Тогда $dz = d_x z + d_y z$ – полный дифференциал функции z.

Как правило, под дифференциалом функции будем понимать полный дифференциал.

Если полное приращение Δz функции $z = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$ можно представить в виде $\Delta z = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + \varepsilon_1\cdot\Delta x + \varepsilon_2\cdot\Delta y$, где A и B не зависят от Δx и Δy, а $(\varepsilon_1;\varepsilon_2)\to(0,0)$ при $(\Delta x;\ \Delta y)\to(0;\ 0)$, то функция *f{x; y)* называется дифференцируемой в точке M_0.

Теорема 5.8. Для того чтобы функция $z = f(x;y)$ была дифференцируемой в данной точке, достаточно, чтобы она обладала частными производными, непрерывными в этой точке.

Сравнивая и Δz и dz, заключаем, что они являются величинами одинакового порядка малости при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, т.е. $\Delta z \approx dz(\Delta x \approx 0, \Delta y \approx 0)$. Это приближенное равенство (тем точнее, чем меньше Δx и Δy), записанное в виде

$$f(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y) \approx f(x_0; y_0) + f'_x(x_0; y_0)\Delta x + f'_y(x_0; y_0)\Delta y$$

называется *линеаризацией* функций $z = f(x; y)$ в окрестности точки $M_0(x_0;y_0)$.

Это соотношение применяется в приближенных вычислениях: дифференцируемую функцию можно заменить линейной функцией в окрестности рассматриваемой точки.

Замечание. Понятие частных производных, дифференциала, линеаризации распространяется на функции трех и более переменных.

5.3.1. Найти частные и полное приращения функции $z = xy^2 \frac{x}{y}$ в точке $M_0(3; -2)$ при приращениях аргументов $\Delta x = 0{,}1$ и $\Delta y = -0{,}05$.

Принимаем $x_0 = 3$, $y_0 = -2$,

$$x_0 + \Delta x = x = 3.1, y_0 + \Delta y = y = -2.05; M_1(3.1;-2.05).$$

Сначала определим $z(M_0) = z(3;-2) = 3(-2)^2 + \frac{3}{2} = 13.5$.

Далее

$$z(x_0 + \Delta x; y_0) = z(3.1;-2) = 3.1 \cdot (-2)^2 + \frac{3.1}{2} = 13.95;$$

$$z(x_0; y_0 + \Delta y) = z(3;-2.05) = 3 \cdot (-2.05)^2 + \frac{3}{2.05} = 14.07;$$

$$z(M_1) = z(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) = z(3.1;-2.05) = 3.1 \cdot (-2.05)^2 + \frac{3.1}{2.05} = 14.54.$$

Таким образом,

$$\Delta_x z = z(x_0 + \Delta x; y_0) - z(x_0; y_0) = 0.45;$$

$$\Delta_y z = z(x_0; y_0 + \Delta y) - z(x_0; y_0) = 0.57;$$

$$\Delta z = z(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - z(x_0; y_0) = 14.54 - 13.5 = 1.04.$$

Очевидно, что $\Delta z = 1.04 \neq 0.45 + 0.57 = 1.02 = \Delta_x z + \Delta_y z.$

Найти частные и полное приращения данной функции в данной точке и при указанных приращениях аргументов:

5.3.2. $z = x^2 y; M_0(1;2); \Delta x = 0.1; \Delta y = -0.2.$

5.3.3. $z = \dfrac{x^2 y^2}{x^2 y^2 - (x-y)^2}; M_0(2;2); \Delta x = -0.2; \Delta y = 0.1.$

5.3.4. $z = \left(\dfrac{x^2 + y^2}{xy}\right)^2; M_0(1;1); \Delta x = -0.1; \Delta y = -0.1.$

Найти полные приращения данных функций в данных точках (или при переходе от точки M_0 к точке M_1):

5.3.5. $z = 3x^2 + xy - y^2 + 1; M_0(2;1); \Delta x = 0.1; \Delta y = 0.2.$

5.3.6. $z = 3x^2 + xy - y^2 + 1; M_0(2;1); \Delta x = 0.01; \Delta y = 0.02.$

5.3.7. $z = x^2 - xy + y^2; M_0(2;1), M_1(2.1;1.2).$

5.3.8. $z = \lg(x^2 - y^2); M_0(2;1), M_1(2.1;0.9).$

5.3.9. Найти частные производные функции $z = \frac{x}{y^3} + \frac{y}{x^3} - \frac{1}{6x^2 y}.$

Частные производные функции двух и более переменных определяются по тем же формулам и правилам, что и функции одной переменной. Следует помнить только одно правило: если по одной переменной дифференцируем, то остальные считаются постоянными.

Имеем (напомним, что $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$):

$$z'_x = \frac{1}{y^3}(x)' + y\left(\frac{1}{x^3}\right)' - \frac{1}{6y}\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{1}{y^3} - \frac{3y}{x^4} + \frac{1}{3x^3 y}.$$

$$z'_x = x\left(\frac{1}{y^3}\right)' + \frac{1}{x^3}(y)' - \frac{1}{6x^2}\left(\frac{1}{y}\right)' = \frac{1}{x^3} - \frac{3x}{y^4} + \frac{1}{6x^2 y^2}.$$

5.3.10. Найти частные производные функции $z = \frac{x^2 - 2xy}{y^2 + 2xy + 1}.$

Здесь используем правило дифференцирования дроби.

$$z'_x = \frac{(2x - 2y)(y^2 + 2xy + 1) - (x^2 - 2xy)2y}{(y^2 + 2xy + 1)^2};$$

$$z'_y = \frac{-2x(y^2 + 2xy + 1) - (2y + 2x)(x^2 - 2xy)}{(y^2 + 2xy + 1)^2}.$$

Найти частные производные данных функций:

5.3.11. $z = e^{x^2 + y^2}$.

5.3.12. $u = t^5 \sin^3 z$.

5.3.13. $v = x^4 \cos^2 y - y^4 \sin^3 x^5$.

5.3.14. $z = x^2 \cos 2xy - y^2 \sin(x + y)$.

5.3.15. $u = x^y + (xy)^z + z^{xy}$.

5.3.16. Найти частные производные, частные дифференциалы и полный дифференциал функции $z = \cos\frac{x^2 y^2}{x^3 + y^3}.$

Здесь имеем дело с производными сложной функции и дроби.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\sin\frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3} \cdot \left(\frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}\right)'_x = -\sin\frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3} \cdot \frac{2x(x^3 + y^3) - 3x^2(x^2 + y^2)}{(x^3 + y^3)^2}.$$

Ввиду симметрии выражения $\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}$ относительно x и y можно писать сразу

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\sin\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\cdot\frac{2y(x^3+y^3)-3y^2(x^2+y^2)}{(x^3+y^3)^2}.$$

После преобразований получаем ответы:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\sin\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\cdot\frac{-x^4-3x^2y^2+2xy^3}{(x^3+y^3)^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\sin\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\cdot\frac{-y^4-3x^2y^2+2x^3y}{(x^3+y^3)^2};$$

$$d_x z = \frac{x^4+3x^2y^2-2xy^3}{(x^3+y^3)^2}\cdot\sin\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}dx;$$

$$d_y z = \frac{y^4+3x^2y^2-2yx^3}{(x^3+y^3)^2}\cdot\sin\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}dy;$$

$$dz = \frac{1}{(x^3+y^3)^2}\cdot\sin\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\cdot\left[x\left(x^3+3xy^2-2y^2\right)dx+y\left(y^3+3x^3y-2x^3\right)dy\right].$$

5.3.17. Найти полный дифференциал функции $u=\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}$.

Так как

$$u'_x=\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}, u'_y=\frac{-xy}{\sqrt{(y^2+z^2)^3}}, u'_z=\frac{-xz}{\sqrt{(y^2+z^2)^3}},$$

то полный дифференциал имеет вид

$$du=\frac{dx}{\sqrt{y^2+z^2}}-\frac{xydy+xzdz}{\sqrt{\left(y^2+z^2\right)^3}}.$$

5.3.18. Вычислить приближённо $1{,}07^{3{,}97}$.

Число $1{,}07^{3{,}97}$ есть частное значение функции $f(x;\,y)=x^y$ при x = 1,07, y = 3,97. Известно, что $f(1;4)=1$. Поэтому принимаем $x_0=1$, $y_0=4$. Тогда $\Delta x = x-x_0 = 0{,}07$, $\Delta y = y-y_0 = -0{,}03$. Значение $f(x+\Delta x;y+\Delta y)$ вычислим при помощи формулы линеаризации: $f(x_0;y_0)+df(x_0\ y_0)$. Имеем:

$$f'_x=yx^{y-1},\ f'_y=x^y\ln x,\ f'_x(1;4)=4,\ f'_y(1;4)=0,$$
$$df(1;4)=4\cdot 0.07+0\cdot(-.0.03)=0.28.$$

Таким образом, $1.07^{3.97} \approx 1+0.28$.
Вычислить приближенно:
5.3.19. $1{,}04^{2.03}$. 5.3.20. $\sqrt{(1{,}04)^2+(3{,}01)^2}$. 5.3.21. sin28°*cos61°.
5.3.22.Вычислить приближенно $\sqrt{(\sin^2 1.55+8e^{0.015})^5}$.

I) Принимаем $f(x;y)=(\sin^2 1.55+8e^{0.015})^{\frac{5}{2}}; x_0=1.571=\dfrac{\pi}{2};$
$y_0=0, x=1.55, \Delta x=x-x_0=1.55-1.571=-0.021;\ y=0.015;\ \Delta y=0.015.$

2) $f(x_0;y_0)=(\sin^2\dfrac{\pi}{2}+8e^0)^{\frac{5}{2}}=243.$

3) $f'_x=\dfrac{5}{2}(\sin^2 x+8e^y)^{\frac{3}{2}}\cdot\sin 2x,\ f'_y=\dfrac{5}{2}(\sin^2 x+8e^y)^{\frac{3}{2}}\cdot 8e^y,\ f'_x(x_0;y_0)=0,$ так как $2x_0=\sin\pi=0,\ f'_y(x_0;y_0)=20(1+8)^{\frac{3}{2}}=540, df(x_0;y_0)=540\cdot 0.015=8.1.$
Окончательно

$$\sqrt{(\sin^2 1.55+8e^{0.015})^5}\approx 243+8.1=251.1.$$

Вычислить приближенно:
5.3.23. $arctg\dfrac{1.02}{0.95}$. 5.3.24. $\sqrt{5e^{0.02}+2.03^2}$. 5.3.25. $\ln(0.09^3+0.99^3)$.

§4. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ И НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ. КАСАТЕЛЬНАЯ И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ

Случай одной независимой переменной

Предположим, что $z = f(x;y)$ – дифференцируемая функция двух переменных x и y в некоторой области D, а аргументы x и y являются дифференцируемыми функциями некоторой переменной t, т.е. $x = x(t)$, $y = y(t)$. Тогда $z = f[x(t); y(t)] = \varphi(t)$ – функция одной переменной t.

Теорема 5.9. Имеет место равенство

$$z'=\frac{dx}{dt}=\frac{d\varphi}{dt}=\frac{dz}{dx}\frac{dx}{dt}+\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dt}.$$

Если t совпадает с одним из аргументов, скажем, $t = x$, то

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dx}+\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

и $\frac{dz}{dx}$ называется полной производной функции z по x.

Случай нескольких независимых переменных

Если аргументы x и y функции $z = f(x;y)$ являются функциями двух переменных, скажем, $x = x(u;v)$, $y = y(u;v)$, то $z = f[x(u;v);y(u;v)]$ также является функцией двух переменных u и v.

Теорема 5.10. Пусть $z = f(x;y)$, $x = x(u;v)$, $y = y(u;v)$ – дифференцируемые функции своих аргументов. Имеют место формулы

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \text{ и } \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Структура этих формул сохраняется и при большем числе переменных.

Дифференциал сложной функции

Дифференциал сложной функции $z = z(x;y)$, где $x = x(u;v)$, $y = y(u;v)$, можно получить, если в формуле дифференциала

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

заменить $dx=\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv$ и $dy=\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv.$

В результате подстановки и перегруппировки членов при du и dv приходим к формуле

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv,$$

показывающей, что форма (вид) дифференциала не зависит от того, являются ли x и y независимыми переменными или функциями других независимых переменных. Это свойство называется *инвариантностью* формы первого дифференциала.

Неявная функция одной переменной

Функция $y = y(x)$ называется неявной функцией переменных, если она определяется уравнением $F(x;y) = 0$, неразрешенным относительно y.

Это значит, что при каждом значении x_0 , при котором неявная функция определена, она принимает единственное значение y_0 так, что $F(x_0;y_0) = 0$.

Теорема 5.11. Если $F(x; y)$ – дифференцируемая функция переменных x и y в некоторой области D и $F'_y(x;y) \neq 0$, то уравнение $F(x;y) = 0$ определяет однозначно неявную функцию $y(x)$, также дифференцируемую, и ее производная находится по формуле

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x;y)}{F'_y(x;y)}.$$

В частности,

$$y'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0;y_0)}{F'_y(x_0;y_0)}.$$

Неявная функция двух переменных

Функция $z = z(x;y)$ называется неявной функцией переменных x и y, если она определяется уравнением $F(x;y;z) = 0$, неразрешенным относительно z.

Теорема 5.12. Если функция $F(x; y;z)$ дифференцируема по переменным x,y,z в в некоторой пространственной области D и $F'_x(x;y;z) \neq 0$, то уравнение $F(x;y;z) = 0$ определяет однозначно неявную функцию $z(x;y)$, также дифференцируемую, и

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x;y;z)}{F'_z(x;y;z)}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x;y;z)}{F'_z(x;y;z)}.$$

Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть $P_0(x_0;y_0;z_0)$ – фиксированная точка на поверхности Г, заданной функцией $z = f(x;y)$ или уравнением $F(x;y; z) = 0$.

Касательной плоскостью к Г в точке P_0 называется плоскость t, проходящая через точку P_0 и такая, что угол между этой плоскостью и секущей, проходящей через P_0 и любую точку P поверхности Г, стремится к нулю, когда P стремится к P_0 вдоль Г. *Нормалью* называется прямая n, проходящая через P_0 перпендикулярно t.

Из определения t и n следует, что нормальный вектор касательной плоскости t и направляющий вектор прямой n совпадают.

Уравнения t и n имеют вид:

а) если Г задана явно функцией $z = f(x;y)$, то:

$$(t):\quad z-z_0=z'_x(x_0;y_0)(x-x_0)+z'_y(x_0;y_0)(y-y_0),$$

$$(n):\quad \frac{x-x_0}{z'_x(x_0;y_0)}=\frac{y-y_0}{z'_y(x_0;y_0)}=\frac{z-z_0}{-1};$$

б) если Г задана уравнением $F(x;y;z) = 0$, то:

$$(t):\quad F'_x(x_0;y_0;z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0;y_0;z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0;y_0;z_0)(z-z_0)=0,$$

$$(n):\quad \frac{x-x_0}{F'_x(x_0;y_0;z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0;y_0;z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0;y_0;z_0)}.$$

5.4.1. Найти производную $\frac{dz}{dt}$ функции $z=e^{x^2+y^2}$, если $x = a \cos f$, $y=ac\sin t$.

В этом примере подстановка x и y в z приводит к $z(t)$ = $e^{a(\cos^2 t+\sin^2 t)}=e^a$. Следовательно, $\frac{dz}{dt}$ =0.

5.4.2. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z=x^5+2xy-y^3$, и $x = \cos 2t$, $y = \operatorname{arctg} t$.

Непосредственная подстановка, очевидно, не упрощает функцию z. Действуем согласно теореме 5.9.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=5x^4+2y,\frac{\partial z}{\partial y}=2x-3y^2,\frac{dx}{dt}=-2\sin 2t,\frac{dy}{dt}=\frac{1}{1+t^2}.$$

В результате можно как сохранить переменные x и y, так и заменить их через t (в зависимости от того, что проще). Ответ оставим в таком виде:

$$\frac{dz}{dt}=-2(5x^4+2y)\sin 2t+(2x-3y^2)\frac{1}{1+t^2}.$$

Найти производные $y'(x)$ неявных функций, заданных уравнениями:

5.4.3. $xe^{2y}-y\ln x=8$.

5.4.4. $e^y+9x^2e^{-y}-26x=0$.

5.4.5. $\ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}=arctg\frac{y}{x}$.

5.4.6. $x^2\ln y-y^2\ln x=0$.

5.4.7. $1+xy-\ln(e^{xy}+e^{-xy})=0$.

§5. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Определение частных производных второго порядка

Если задана функция $z = f(x;y)$ и вычислены ее частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)$, то они, вообще говоря, могут быть также дифференцируемыми функциями двух независимых переменных x и у.

Приняты обозначения:

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ – вторая частная производная по x;

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ – смешанные частные производные второго порядка;

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ – вторая частная производная по y.

Теорема 5.13 (Шварца). Если смешанные частные производные второго порядка непрерывны, то они равны между собой. Другими словами, результат смешанного дифференцирования не зависит от порядка.

Дифференциал второго порядка

Выражение $d^2 z = d(dz) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$ называется *вторым дифференциалом* или дифференциалом второго порядка для функции z.

Производные и дифференциалы высших порядков

По аналогии можно определить частные и смешанные производные высших порядков, часть которых, согласно теореме Шварца, равны между собой.

Таким образом, имеем три различных производных второго порядка, четыре различных производных третьего порядка:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$

и так далее.

Число разных частных производных порядка n от функции двух переменных равно $n + 1$:

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n}, \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}, \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2}\partial y^2}, \ldots, \frac{\partial^n z}{\partial x^2 \partial y^{n-2}}, \frac{\partial^n z}{\partial x \partial y^{n-1}}, \frac{\partial^n z}{\partial y^n}.$$

Дифференциалы высших порядков определяются по аналогии:

$$d^3 z = d(d^2 z) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3.$$

Выражение для $d^n z$ формально можно записать в виде

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n (z),$$

напоминающем формулу бинома Ньютона.

5.5.1**.** Найти все частные производные первого, второго и третьего порядка для функции $z = x^3 - x^2 y - y^3$.

1) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 2xy; \dfrac{\partial z}{\partial y} = -x^2 - 3y^2.$

2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}(3x^2 - 2xy) = 6x - 2y.$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 - 2xy) = -2x;$$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}(-x^2 - 3y^2) = -2x$ (видим, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$);

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - 3y^2) = -6y.$$

3) $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}(6x - 2y) = 6.$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(6x - 2y) = -2.$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(-2y) = 0.$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y}(-6y) = -6.$$

Очевидно, все последующие частные производные четвертого порядка равны нулю

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^i \partial y^j} = 0 \quad (i + j = 4).$$

Для данных функций найти требуемую частную производную или дифференциал:

5.5.2. $z = 4x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 - y^3, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$

5.5.3. $z = xy + \sin(x + y), \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$

5.5.4. $z = \ln tg(x + y), \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$

5.5.5. $z = arctg \frac{x + y}{1 - xy}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$

5.5.6. $z = x \sin xy + y \cos xy, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$

§6. ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ. ГРАДИЕНТ

Определение производной по направлению

Частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ представляют собой производные от функции $z = f(x;y)$ по двум частным направлениям осей Ox и Oy.

Пусть $z = f(x;y)$ – дифференцируемая функция в некоторой области D, $M(x_0;y_0) \in D$. Пусть $\bar{l}$ – некоторое направление (вектор с началом в точке M_0), а $\bar{e}$= (cos α; sin α) – ОРТ (единичный вектор) этого направления. Пусть $M(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$– точка в направлении $\bar{l}$ от M_0. Обозначим $\Delta p = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Тогда $\frac{\Delta x}{\Delta p} = \cos\alpha, \frac{\Delta y}{\Delta p} = \sin\alpha$.

Предел отношения

$$\lim_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta_l f}{\Delta p} = \lim_{\Delta p \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)}{\Delta p} = \frac{\partial f}{\partial l}(x_0; y_0)$$

называется производной функции f по направлению $\bar{\bar{l}}$.

Существование этого предела и выражение его через $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\cos\alpha, \sin\alpha$ вытекает из следующего соотношения:

$$\frac{\Delta_l f}{\Delta p} = \frac{f(x_0 + \Delta p \cos\alpha; y_0 + \Delta p \sin\alpha) - f(x_0; y_0 + \Delta p \sin\alpha)}{\Delta p \cos\alpha} \cos\alpha +$$

$$\frac{f(x_0;y_0+\Delta p\sin\alpha)-f(x_0;y_0)}{\Delta p\sin\alpha}\sin\alpha \to \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha, \Delta p\to 0.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha .$$

Теорема 5.14. Производная по направлению, касательному к линии уровня поверхности *z = f(x;y)*, равна нулю.

Случай нескольких переменных

По аналогии со случаем функции двух переменных можно определить производную по направлению для функции трех переменных *u = f(x;y; z)*. Окончательная формула такова:

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma,$$

где $\bar{e}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ – орт направления $\bar{l}$ или $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ – направляющие косинусы направления $\bar{l}$.

Теорема 5.15. Производная по направлению, касательному к поверхности уровня функции *u = f(x;y;z)*, равна нулю.

Градиент

Градиентом функции *z = f(x; y)* (скалярного поля) называется вектор с координатами $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$. Обозначение $\overrightarrow{\text{grad z}}=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)$.

Теорема 5.16. Имеет место равенство $\frac{\partial f}{\partial l}=\overrightarrow{gradz}\cdot\bar{e}$, т. е. производная по направлению $\bar{l}$ равна скалярному произведению векторов градиента и орта направления $\bar{l}$.

Следствие. Вектор $\overrightarrow{\text{gradz}}$ в каждой точке направлен по нормали к линии уровня, проходящей через данную точку в сторону возрастания функции. При этом

$$\max_{\{l\}}\frac{\partial f}{\partial l}=\left|\overrightarrow{\text{gradz}}\right|=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} .$$

Теорема 5.17. Скорость изменения функции *f* по некоторому направлению $\bar{l}$ равна проекции вектора градиента на это направление, т.е. $\frac{\partial f}{\partial l}=np_i\,\overrightarrow{grad}\,f$.

5.6.1. Найти производную функции $z = 2.5x^2 - 5xy + 3y^2 + 5y$ в точке *A(1;* 2) в направлении, составляющем с осью *Ox* угол 30°. Определить направление максимального роста данной функции в данной точке.

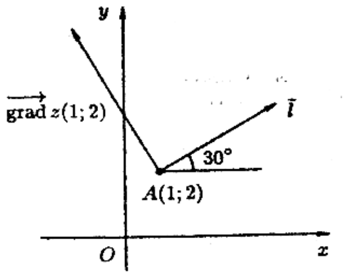

Рис. 26

Имеем $z'_x = 5x - 5y, z'_y = -5x + 6y + 5, z'_x(1;2) = -5, z'_y(1;2) = 12$. Следовательно, если через $\bar{l}$ обозначим данное направление, то $\frac{\partial f}{\partial l} = -5\cos 30° + 12\sin 30° = -\frac{5\sqrt{3}}{2} + 6$. Градиент функции поля в данной точке имеет вид $\overrightarrow{\text{grad}} z(1;2) = (-5;12) = -5\bar{i} + 12\bar{j}$. Этот вектор указывает направление, в котором функция растет быстрее, чем по другим направлениям. На рисунке 26 схематически изображены точка $A(1;2)$, направление $\bar{l}$ с $\alpha = 30°$ и направление $\overline{\text{grad}}\,z$. Максимальное значение производной в точке $A(1;2)$ равно модулю градиента: $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$.

5.6.2. Найти производную функции $z = f(x;y) = 3x^2 + 5y^2$ в точке $A(1;-1)$ по направлению к точке $B(2;1)$.

Имеем $\overline{AB} = \bar{l} = (2-1;1+1) = (1;2), |\bar{l}| = \sqrt{5}, \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Тогда $\bar{e} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ – орт направления $\bar{l}$. Далее, имеем $z'_x = 6x, z'_y = 10y, z'_x(1;-1) = 6, z'_y(1;-1) = -10$,

а значит $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(1;-1)} = 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{10 \cdot 2}{\sqrt{5}} = -\frac{14}{\sqrt{5}}$. Отрицательность $\frac{\partial z}{\partial l}$ означает, что функция в этом направлении убывает.

5.6.3. Даны функция $z = x^2 + 3y^3 - xy$, точка $A(1;\ 1)$ и вектор $\bar{a} = (-5;12)$. Найти

а) $\overline{\text{grad}}\, z\ (A)$;

б) производную в точке A по направлению $\bar{a}$.

а) Имеем $z'_x = 2x - y$; $z'_y = 9y - x$, $z'_x(1;1) = 1$, $z'_y(1;1)=8$; значит, $\overline{\text{grad}}\, z(1;1) = (1;8)$.

б) Найдем направляющие косинусы вектора $\bar{a}$, $|\bar{a}| = 13$, $\cos\alpha = -\frac{5}{13}, \sin\alpha = \frac{12}{13}$. Следовательно, $\frac{\partial z}{\partial a} = -1\cdot\frac{5}{13} + 8\cdot\frac{12}{13} = 7.$

Максимальная производная в точке $A(1;\ 1)$ равна $\left|\overline{\operatorname{grad}}\, z(1;1)\right| = \sqrt{1^2+8^2} = \sqrt{65}$, а по направлению $\bar{a}$ величина производной равна 7.

5.6.4**.** Найти градиент функции $u = x^2 + y^2. + z^2$ и ее производную в точке А(1; 1;1) в направлении $\bar{l} = (\cos 45°, \cos 60°, \cos 60°)$. Построить поверхность уровня через A.

5.6.5**.** Построить поверхности уровня функции $u = x^2 + y^2 - 2z$, а также найти и построить $\overline{\operatorname{grad}}\, u$ в точках пересечения поверхности u=4 с осью Ox.

§7. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Формула Тейлора для функций двух переменных

Пусть $z = f(x;\ y)$ – функция, непрерывная вместе со всеми частными производными до (n + 1)-го порядка включительно в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$. Тогда для любой точки $M(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y)$ этой окрестности имеет место равенство

$$f(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y) = f(x_0;y_0) + df(x_0;y_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0;y_0) + \ldots.$$

$$\ldots. + \frac{1}{n!}d^n f(x_0;y_0) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1} f(x_0+q\Delta x; y_0+q\Delta y), 0<q<1,$$

которое называется *формулой Тейлора,* а первые (n +1) слагаемых в правой части – *многочленом Тейлора степени n.* При $(x_0;y_0)$= (0;0) имеем формулу и многочлен Маклорена.

Определение экстремума функции двух переменных в точке

Рассмотрим функцию $z = f(x;y)$ двух переменных, определенную в некоторой области D.

Функция $f(x;y)$ имеет строгий локальный *максимум (минимум)* в точке $M_0(x_0;y_0)$, если неравенство $f(x_0;y_0) > f(x;y)\left(f(x_0;y_0) < f(x;y)\right)$ имеет место во всех точках $M(x;y) \neq M_0$ из некоторой достаточно малой окрестности точки M_0.

Вопрос определения экстремумов (максимумов или минимумов) в некоторых случаях решается просто, если $f(x;y)$ – дифференцируемая функция в окрестности точек экстремума.

Теорема 5.18 (необходимые условия экстремума). Если *f(x;y)* дифференцируема в точке $(x_0;y_0)$ и имеет экстремум в этой точке, то ее дифференциал равен нулю:

$$df(x_0;y_0)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'_x(x_0;y_0)=0 \\ f'_y(x_0;y_0)=0. \end{cases}$$

Точка $(x_0;y_0)$ называется *стационарной* точкой функции *f(x;y)*, если $df(x_0;y_0)=0$.

Пусть $(x_0;y_0)$ – стационарная точка функции *f(x;y)*. Обозначим

$$A=\frac{\partial^2 f(x_0;y_0)}{\partial x^2}, B=\frac{\partial^2 f(x_0;y_0)}{\partial x \partial y}, C=\frac{\partial^2 f(x_0;y_0)}{\partial y^2}.$$

Теорема 5.19 (достаточные условия экстремума).
1. Если $AC-B^2>0$ и $A<0$, то $(x_0;y_0)$ – точка максимума.
2. Если $AC-B^2>0$ и $A>0$, то $(x_0;y_0)$ – точка минимума.
3. Если $AC-B^2<0$, то $(x_0;y_0)$ не является точкой экстремума.
4. Если $AC-B^2=0$, то точка $M_0(x_0;y_0)$ может как быть, так и не быть точкой экстремума, поэтому требуется дополнительное исследование.

Экстремум функции в области

Речь идет о нахождении наибольшего и (или) наименьшего значения данной функции $z=f(x;y)$ в замкнутой области *D*. Для этого следует найти сначала все локальные экстремумы внутри области *D*, а затем также наибольшее и наименьшее значения на ее границе ∂D. В результате сравниваем полученные величины, и задача завершена.

Добавим, что, как правило, граница ∂D состоит из совокупности отдельных участков, на каждом из которых задача сводится к исследованию на экстремум функции одной переменной $z=\varphi_i(t)$, где *i* – номер участка, а *t* – независимая переменная на этом участке, которая может совпасть с *x* или *y* или быть отдельным параметром.

Условный экстремум

Под условным экстремумом имеется в виду поиск экстремума некоторой функции $z=f(x;y)$ при условии, что *(x;y)* удовлетворяют еще некоторым условиям, например, уравнению $\varphi(x;y)=0$.

Такая задача сводится к задаче на обычный экстремум для новой функции

$$F(x;y;\lambda) = f(x;y) + \lambda\varphi(x;y),$$

которая называется функцией Лагранжа, а λ – множитель Лагранжа. Заметим, что $F(x;y;\lambda)$ – функция трех переменных, а для таких функций или функций большего числа переменных достаточные условия формулируются в терминах знакоопределенности квадратичной формы, совпадающей со вторым дифференциалом рассматриваемой функции в испытуемой точке. Теорема 5.19 является частным случаем, выражающим знакоопределенность квадратичной формы с двумя переменными dx и dy.

Метод наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов является непосредственным результатом применения исследования на экстремум функции нескольких переменных и заключается в следующем. На плоскости Oxy имеется система из n точек $(x_1;y_1),(x_2.,y_2),...,$ $(x_n;y_n)$. Требуется подобрать некоторую функцию $y = f(x)$, которая «сглаживала» бы все точки этой системы, т.е. величина

$$\delta^2(f) = \sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i) - y_i\right)^2$$

была бы минимальной $\left(f(x_i) - y_i\right)^2$ – квадрат отклонения ординаты функций f в точке x_i от ординаты данной точки.

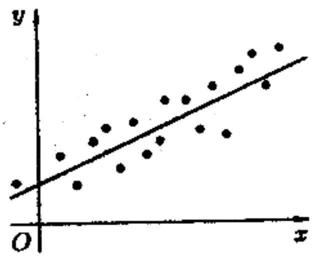

Рис. 27

В случае, если $f(x) = ax + b$, речь идет о поиске прямой, квадратическое отклонение которой (рис. 27)

$$\delta^2(a,b) = \sum_{i=1}^{n}\left(ax_i + b - y_i\right)^2$$

от данной системы точек было бы минимальным.

Существование минимума указанной функции очевидно, поэтому соответствующие коэффициенты a и b прямой можно найти, используя только необходимые условия экстремума для функции двух переменных a и b:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial a}\delta^2(a,b) = 2\sum\limits_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i) * x_i = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial b}\delta^2(a,b) = 2\sum\limits_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i) = 0, \end{cases}$$

которые сводятся к системе линейных уравнений

$$\begin{cases} A_1 a + B_1 b = C_1, \\ A_2 a + B_2 b = C_2, \end{cases}$$

где $A_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$; $B_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$; $C_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$; $A_2 = B_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$; $B_2 = n$; $C_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i$.

5.7.1. $f(x;y) = 2x^3 + x^2 y - 4xy^2 - 4x^2 + 4y^2 - 18xy - 14x + 17y + 16, x_0 = 1, y_0 = -2.$

5.7.2. $f(x;y) = x^2 + 2y^2 y - 3xy + 3y + 4, x_0 = -1, y_0 = -1.$

5.7.3. Вычислить приближенно функцию $f(x;y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ в точке (11,8;5,3), используя формулу Тейлора с $n = 2$.

Принимаем $x_0 = 12, \Delta x = -0.2, y_0 = 5, \Delta y = 0.3.$ Имеем $f(12;5) = 13,$

$$df(12;5) = \left.\frac{x\Delta x + y\Delta y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right|_{(12;5)} = \frac{-12 * 0.2 + 5 * 0.3}{13} \approx -0.0692,$$

$$d^2 f(12;5) = \left.\frac{y^2 \Delta x^2 - 2xy\Delta x\Delta y + x^2 \Delta y^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}\right|_{(12;5)} \approx 0.0096.$$

Таким образом, $\sqrt{11.8^2 + 5.3^2} \approx 13 - 0.0692 + \dfrac{1}{2} * 0.0096 = 12.9356.$

Вычислить приближенные значения данных функций в точке (x_0,y_0), используя формулу Тейлора с $n = 2$.

5.7.4. $f(x;y) = \sqrt[3]{x^2 - y^2}, x_0 = 5.8, y_0 = 3.2.$

5.7.5. $f(x;y) = tgx \cdot \sin y, x_0 = 47°, y_0 = 28°.$

5.7.6. Исследовать на экстремум функцию $f(x;y) = 4x^2 y + 24xy + y^2 + 32y - 6$. Область определения $D(f)$ – вся плоскость $0xy$, $f\{x;y)$ – дифференцируема в каждой точке $M(x;y) \in D(f)$.

1. Определим стационарные точки (применим теорему 5.18).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 8xy + 24y = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4x^2 + 24x + 2y + 32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(x+3) = 0, \\ 2x^2 + 12x + y + 16 = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\left[\begin{array}{l} y=0: x^2+6x+8=0 \Rightarrow x_1=-4, x_2=-2, \\ \qquad\qquad x=-3, y=2. \end{array}\right.$$

Получили три стационарные точки: $M_1(-4,0)$, $M_2(-2;0)$, $M_3(-3;2)$.

2. Эти точки исследуем, согласно теореме 5.19, на достаточность условий экстремума. Сначала определим отдельно

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=8y, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=8x+24, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2.$$

А теперь для каждой точки вычислим соответствующие (см. теорему 5.19) A, B, C, определим знаки величин $\Delta = AC - B^2$ и A.

а) $M_1(-4;0): A_1=0, B_1=-32+24=-8, C_1=2, A_1C_1-B_1^2=-64<0$, т.е. $M_1(-4;0)$ не является точкой экстремума;

б) $M_2(-2;0): A_2=0, B_2=-16+24=8, C_2=2, A_2C_2-B_2^2<0$, т.е. $M_2(-2;0)$ не является точкой экстремума.

в) $M_3(-3;2): A_3=16, B_3=0, C_3=2, A_3C_3-B_3^2=32>0$. При этом $A > 0$. Вывод:

$M_3(-3;2)$ – точка локального минимума функции $f(x;y)$ с $f_{min}= f(-3;2)=-10$.

Ответ: $\min f(x;y)=f(-3;2)=-10$.

Исследовать на экстремум следующие функции:

5.7.7. $f(x;y)=x^2+xy+y^2-2x-3y+5\frac{2}{3}$.

5.7.8. $f(x;y)=-x^2+xy+y^2-9x+3y-20$.

5.7.9. Исследовать на экстремум функцию $f(x;y)=\sin x+\sin y+\cos(x+y)$ внутри квадрата $\{(x;y): 0<x<\pi, 0<y<\pi\}$

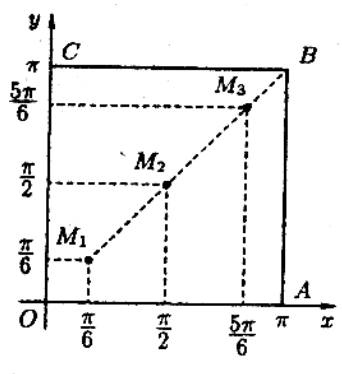

Рис.28

Область D определения функции есть вся плоскость R^2, но нас интересует только открытый квадрат $O\,ABC$ (см.рис. 28).

1. Стационарные точки определим из системы

$$\begin{cases} f'_x = \cos x - \sin(x+y) = 0, \\ f'_y = \cos y - \sin(x+y) = 0. \end{cases}$$

После вычитания друг из друга этих уравнений получаем

$$\cos x - \cos y = 2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2} = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x-y = 2\pi n, n \in Z, \\ x+y = 2\pi m, m \in Z. \end{array}\right.$$

В нашем квадрате может иметь место только условие *x – y = 0 (n=0)*, а тогда, присоединив к этому уравнению первое уравнение системы, получаем равносильную систему

$$\begin{cases} y = x, \\ \cos x - \sin 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x, \\ x = \frac{\pi}{6}; x = \frac{\pi}{2}; x = \frac{5\pi}{6}. \end{cases}$$

Тем самым получили три стационарные точки

$$M_1\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right), M_2\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right), M_3\left(\frac{5\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right).$$

2. Достаточные условия.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin x - \cos(x+y), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\cos(x+y), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\sin y - \cos(x+y).$$

Для точек $M_1\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right)$ и $M_3\left(\frac{5\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right)$:

$$A_1 = -1, B_1 = -\frac{1}{2}, C_1 = -1, A_1C_1 - B_1^2 > 0, A_1 < 0.$$

Поэтому M_1 и M_3 – точки максимума с $f_{\max} = f\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{5\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$.

Для точки $M_2\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$:

$$A_2 = 0, \quad B_2 = 1, \quad C_2 = 0, \quad A_2C_2 - B_2^2 < 0.$$

Поэтому M_2 не является точкой экстремума.

Таким образом, в данном квадрате данная функция имеет две точки максимума $\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right)$ и $\left(\frac{5\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right)$ с $f_{\max} = \frac{3}{2}$.

5.7.10. Исследовать на экстремум функцию $f(x;y) = \sin x + \sin y + \cos(x+y)$ в квадрате $\{(x;y): 0 < x < 2\pi, 0 < y < 2\pi\}$.

5.7.11. Исследовать на экстремум функцию $f(x;y) = \sin x \sin y \sin(x+y)$ в открытом квадрате $\{(x;y): 0 < x < \pi, 0 < y < \pi\}$.

Найти наибольшее и наименьшее значение данных функций *z = f(x;y)* в данных замкнутых областях D:

5.7.12. $z = x^2 + y^2, D: ромб\, 3|x| + 4|y| \le 12.$

5.7.13. $z = xy + x + y, D: квадрат\, 1 \le x \le 2, 2 \le y \le 3.$

5.7.14. $z = 1 - x^2 - y^2, \overline{D}: круг\, (x-1)^2 + (y-1)^2 \le 1.$

5.7.15. Дана система точек, координаты которых указаны в таблице, число точек *n* = 6.

x	-1	0	1	2	3	4
y	0	2	3	3,5	3	4,5

Требуется построить прямую с уравнением *y = ax+b* так, чтобы она отличалась как можно меньше от данной системы точек в смысле наименьших квадратов.

Очевидно, что точки с данными координатами не могут быть расположены на одной прямой, а построить прямую, как бы «сглаживающую» эти точки, можно. Для этого достаточно решить систему уравнений, приведенную в соответствующей теоретической части. Для удобства расчетов строим рабочую таблицу.

№	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	$ax_i + b$	$ax_i + b - y_i$	$(ax_i + b - y_i)^2$
1	-1	0	1	0	0,81	0,81	0,6561
2	0	2	0	0	1,55	-0,45	0,2025
3	1	3	1	3	2,29	-0,71	0,5041
4	2	3,5	4	7	3,03	-0,47	0,2209
5	3	3	9	9	3,77	0,77	0,5929
6	4	4,5	6	18	4,51	0,01	0,001
$\sum$	9 A_2, B_1	16 C_2	1 A_1	37 C_1			2,1766

Первый столбец обозначает номер по порядку записи точек (координат). Из сумм столбцов при $x_i, y_i, x_i^2, x_i y_i$ составляются коэффициенты системы для определения параметров *a* и *b* прямой *y=ax + b*. Система имеет вид:

$$\begin{cases} 31a + 9b = 37, \\ 9a + 6b = 16. \end{cases}$$

Решим ее методом определителей:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 31 & 9 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = 105, \Delta_1 = \begin{vmatrix} 37 & 9 \\ 16 & 6 \end{vmatrix} = 78, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 31 & 37 \\ 9 & 16 \end{vmatrix} = 163, a = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{78}{105} = 0.74, b = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{163}{105} = 1.55.$$

Искомое уравнение *$y = 0,74x + 1,55$*.

Замечание: В столбце $ax_i + b$ вычислены ординаты точек полученной прямой при данных значениях абсцисс. Сравнение этого столбца со столбцом значений y_i показывает, что часть данных точек находится под прямой, другая часть – над ней. Разность ax_i+b-y_i называется отклонением ординаты данной от ординаты данной точки, а $(ax_i + b - y_i)^2$ – квадрат этого отклонения. Это обозначено в последнем столбце. Сумма квадратов отклонения обозначена в последней строке последнего столбца δ_2^2 = 2,1766, а если эту сумму поделить на n = 6, то получим «среднее квадратическое отклонение» прямой от системы точек, т.е. среднее отклонение, которое приходится на одну точку:

$$\delta_{cp}^2 = \frac{\delta^2}{6} = \frac{2,1766}{6} \approx 0,36, \delta_{cp} = \sqrt{\frac{\delta^2}{6}} = 0,6.$$

Извлечение корня означает, что среднее отклонение должно измеряться в единицах длины.

Построить по методу наименьших квадратов прямую $y = ax + b$ для данной системы точек и оценить ее среднее квадратическое отклонение от этой системы:

5.7.16.

x	0,5	0,1	2,0	2,5	3,0
y	0,62	1,64	3,7	5,02	6,04

5.7.17.

x	1	2	3	5
y	3	4	2,5	0,5

ГЛАВА 6. РЯДЫ

§1. ПОНЯТИЕ РЯДА. РЯДЫ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Ряд. Сходимость ряда. Сумма ряда

Пусть задана бесконечная последовательность чисел

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$$

Числовым рядом называется выражение вида

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

Сокращенно ряд обозначают следующим образом: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. При этом числа $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ называются *членами* ряда, а число a_n – *общим членом* ряда. Суммы вида $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, …, $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$, … называются *частичными суммами* ряда. Числовой ряд называется *сходящимся*, если существует конечный предел последовательности $\{S_n\}$ его частичных сумм: $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. В этом случае указанный предел называется *суммой ряда*.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует или равен бесконечности, то числовой ряд называется *расходящимся* и суммы не имеет.

Простейшие свойства рядов. Необходимый признак сходимости

Теорема 1. Если у сходящегося ряда отбросить конечное число его членов, то полученный ряд также будет сходиться. Верно и обратное: если сходится ряд, полученный отбрасыванием конечного числа членов у данного ряда, то и данный ряд также сходится.

Таким образом, сходимость ряда не меняется при отбрасывании любого конечного числа его членов.

Теорема 2. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, и его сумма равна S. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha a_1 + \alpha a_2 + ... + \alpha a_n + ...$, где α – произвольное число, также сходится, причем его сумма равна αS.

Теорема 3. Пусть ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, и их суммы соответственно равны S_1 и S_2. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + ...$ также сходится, причем его сумма равна $S_1 + S_2$.

Необходимый признак сходимости

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то общий член ряда a_n стремится к нулю при $n \to \infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Таким образом, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Ряд $a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots$, составленный из членов бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем q и первым членом $a \neq 0$, называется *геометрическим рядом*. Если $|q| \geq 1$, то геометрический ряд расходится, если $|q| < 1$ – сходится (при этом сумма S находится по формуле $S = \dfrac{a}{1-q}$).

Ряд $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} + \ldots$, или, что то же самое, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$, называется *гармоническим*. Гармонический ряд расходится. Ряд $1 + \dfrac{1}{2^p} + \dfrac{1}{3^p} + \ldots + \dfrac{1}{n^p} + \ldots$, где $p > 0$, называется *рядом Дирихле*. Этот ряд сходится при $p > 1$ и расходится при $0 < p \leq 1$. Частным случаем ряда Дирихле (при $p = 1$) является гармонический ряд.

Признаки сходимости рядов с положительными членами

1-й признак сравнения

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ – ряды с положительными членами, причем $a_n \leq b_n$ для всех номеров n, начиная с некоторого. Тогда:

если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$;

если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

2-й признак сравнения

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ – ряды с положительными членами, причем существует конечный и отличный от нуля предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$.

Тогда ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

При использовании 1-го или 2-го признака сравнения, как правило, сравнивают исходный ряд с соответствующим рядом Дирихле. При этом часто используют эквивалентность следующих бесконечно малых последовательностей (при $n \to \infty$):

$$\sin\frac{1}{n} \approx tg\frac{1}{n} \approx \arcsin\frac{1}{n} \approx arctg\frac{1}{n} \approx \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \approx \frac{1}{n}.$$

Признак Даламбера

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – ряд с положительными членами, и существует конечный предел $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$.

Тогда, если $l<1$, то данный ряд сходится; если же $l>1$, то – расходится.

Если $l=1$, то ряд может сходиться или расходиться; в этом случае требуется исследовать ряд с помощью других методов.

Признак Коши

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – ряд с положительными членами, и существует конечный предел $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$.

Тогда, если $l<1$, то данный ряд сходится; если же $l>1$, то – расходится.

Если $l=1$, то ряд может сходиться или расходиться; в этом случае требуется исследовать ряд с помощью других методов.

Интегральный признак сходимости

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – ряд с положительными членами, для которого существует положительная, непрерывная и монотонно убывающая на промежутке $[1;+\infty)$ функция $f(x)$, такая, что $f(n)=a_n$, $n=1,2,\ldots$.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

6.1.1. Для каждого ряда написать формулу частичной суммы S_n; найти $\lim_{n\to\infty} S_n$ или доказать, что этот предел не существует; сделать вывод о сходимости или расходимости ряда:

а) $1+2+3+\ldots+n+\ldots$;

б) $\frac{1}{1*2}+\frac{1}{2*3}+\frac{1}{3*4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$.

а) Так как члены ряда $1+2+3+\ldots+n+\ldots$ представляют собой арифметическую прогрессию с первым членом, равным 1, и разностью, равной 1, то по формуле для суммы первых n членов арифметической прогрессии получим:

$$S_n=\frac{1+n}{2}*n.$$

Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+n}{2} * n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(n+n^2\right) = +\infty$. Следовательно, ряд расходится.

б) Так как $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, то

$$S_n = \frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + \frac{1}{3*4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 + 0 + 0 + \ldots + 0 - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1$. Значит, ряд сходится, и его сумма равна 1.

Окончательно: $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$; $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$; ряд сходится.

Для каждого ряда в задачах 6.1.2 – 6.1.8: написать формулу частичной суммы S_n; найти $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ или доказать, что этот предел не существует; сделать вывод о сходимости или расходимости ряда.

6.1.2. $1-1+1-1+\ldots+(-1)^{n-1}+\ldots$.

6.1.3. $1+3+5+\ldots+(2n-1)+\ldots$.

6.1.4. $2-4+6-8+\ldots+(-1)^{n+1}*2n+\ldots$.

6.1.5. $1+2+4+\ldots+2^{n-1}+\ldots$.

6.1.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3} * \frac{1}{2^{n-1}}$.

6.1.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

6.1.8. $\ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \ldots + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ldots$.

6.1.9. Найти предел при $n \to \infty$ общего члена ряда a_n. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то, применяя необходимый знак сходимости, установить, что ряд расходится.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{\ln(n+1)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+2}$.

а) Найдем предел общего члена ряда:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} =$ [Разделим числитель и знаменатель дроби на n]

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{2} \neq 0$$, значит, ряд расходится.

Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$; ряд расходится.

б) Так как при $n\to\infty$ имеем $(n+2)\to\infty$ и $\ln(n+1)\to\infty$, то для нахождения предела $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{\ln(x+1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{(x+2)'}{(\ln(x+1))'} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{(x+1)}} = \lim_{x\to\infty}(x+1) = \infty.$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{\ln(n+1)} = \infty \neq 0$, и ряд расходится.

в) Найдем предел общего члена ряда:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3+2} =$ [Разделим числитель и знаменатель на n^3]

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2/n^3}{(n^3+2)/n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n^3}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n^3}\right)} = \frac{0}{1} = 0.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то данный ряд может сходиться, а может и расходиться.

На самом деле, данный ряд, как будет показано ниже, расходится, однако, используя только необходимый признак сходимости, доказать этого нельзя.

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$; ряд может сходиться или расходиться.

В задачах 6.1.10 – 6.1.17 найти предел при $n\to\infty$ общего члена ряда a_n. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то, применяя необходимый признак сходимости, установить, что ряд расходится.

6.1.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{2n-3}$.

6.1.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{(n+2)^3}$.

6.1.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n+1}$.

6.1.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} arctg\,\frac{n^2+1}{n+3}$.

6.1.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$.

6.1.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1} * n}{\ln(n+1)}$.

6.1.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2+(-1)^n\right)^n}$.

6.1.17. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n$.

6.1.18. Исследовать ряды на сходимость, применяя признак Даламбера:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{3^{n+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$.

а) Преобразуем выражение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^5}{3^{(n+1)+1}}/\frac{n^5}{3^{n+1}}=\frac{(n+1)^5}{n^5}*\frac{3^{n+1}}{3^{n+2}}=\frac{1}{3}*\left(1+\frac{1}{n}\right)^5.$$

Так как $\frac{1}{n}\to 0$ при $n\to\infty$, то $\left(1+\frac{1}{n}\right)\to 1$ и $\left(1+\frac{1}{n}\right)^5\to 1$ при $n\to\infty$.

Значит, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^5=\frac{1}{3}<1$, и исходный ряд сходится по признаку Даламбера.

б) Поскольку

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}/\frac{n^n}{n!}=\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}*\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{(n+1)^n(n+1)}{n^n}*\frac{1*2*3*...*n}{1*2*3*...*n*(n+1)}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e>1$ (2-й замечательный предел), и, значит, исходный ряд расходится.

Исследовать ряд на сходимость, применяя признак Даламбера. Указать $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

6.1.19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$.

6.1.20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$.

6.1.21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!2^n}$.

6.1.22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}$.

6.1.23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

6.1.24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1*4*...*(3n-2)}{n!2^n}$.

6.1.25. Исследовать ряды на сходимость, применяя признак Коши:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^{3n+1}$. б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n*\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

а) Учитывая, что $\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^{3n+1}}=\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^{\frac{3n+1}{n}}=\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^{3+\frac{1}{n}}$, а $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{2n+1}=\frac{1}{2}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right)=3$, получим $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^{3+\frac{1}{n}}=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}<1$. Исходный ряд сходится по признаку Коши.

б) Так как $\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{n*\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=n^{\frac{1}{n}}*\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2}{n}}=n^{\frac{1}{n}}*\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$, то остается найти пределы $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

1) Поскольку $n^{\frac{1}{n}}=e^{\ln\left(n^{\frac{1}{n}}\right)}$, где $\ln\left(n^{\frac{1}{n}}\right)=\frac{1}{n}\ln n$, то по правилу Лопиталя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\ln n)'}{(n)'}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1}=0$, откуда $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}\ln n}=e^0=1$.

2) Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n=e^{\alpha}$ (следствие из 2-го замечательного предела), то $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=e^{-1}$. Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}*\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}*\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=e^{-1}=\frac{1}{e}<1$, и, значит, исходный ряд сходится.

Исследовать ряд на сходимость, применяя признак Коши. Указать $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$.

6.1.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

6.1.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^{n}$.

6.1.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$.

6.1.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{1}{n}\right)^{n}$.

6.1.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n*\left(\frac{3n+2}{2n+1}\right)^{n}$.

§2. ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

Знакочередующиеся ряды

Знакочередующимся называется ряд, в котором любые два соседних члена имеют разные знаки. Таким образом, знакочередующийся ряд – это ряд вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \qquad (39)$$

или

$$-a_1 + a_2 - a_3 + a_n + \ldots + (-1)^n a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n , \qquad (40)$$

где все a_n – положительные действительные числа $(a_n > 0, n = 1,2,\ldots)$.

Признак Лейбница

Пусть дан знакочередующийся ряд (вида (39) или(40)). Если выполнены два условия:

1) $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > \ldots$ (абсолютные величины членов ряда монотонно убывают);

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (общий член ряда стремится к нулю при $n \to \infty$), то ряд сходится.

Ряд, содержащий и положительные, и отрицательные члены, называется *знакопеременным*. В частности, всякий знакочередующийся ряд является знакопеременным.

Теорема 4. Пусть дан знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где a_n – произвольные числа (действительные или комплексные). Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, составленный из абсолютных величин его членов, сходится, то данный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.

В этом случае знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *абсолютно сходящимся*.

Если же знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, то данный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *условно сходящимся*.

Для ответа на вопрос об абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ к ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ можно применять все признаки, используемые при исследовании рядов с положительными членами.

Из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, вообще говоря, не следует. Однако, если, применяя к ряду $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ признак Даламбера (или признак Коши), получаем предел $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l > 1$ (или $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = l > 1$), то в этом случае оба ряда – $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ и $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ – расходятся.

Пусть $\{a_n\}$ – последовательность комплексных чисел $a_n = b_n + ic_n$, где b_n и c_n – действительные числа для любого $n = 1,2,\ldots$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ (т.е. ряд $\sum(b_n + ic_n)$) сходится тогда и только тогда, когда сходятся два ряда – $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$, причем в этом случае $\sum_{n=1}^{\infty}a_n = \sum_{n=1}^{\infty}b_n + i\sum_{n=1}^{\infty}c_n$.

6.2.1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2\sqrt{n}-1}$.

1. Исследуем на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ из абсолютных величин членов данного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}-1}.$$

Сравним этот ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}$. Так как $2\sqrt{n}-1 < 2\sqrt{n}$, то $\frac{1}{2\sqrt{n}-1} > \frac{1}{2\sqrt{n}}$ для всех n. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}$ расходится, так как расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ (как ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ при $p = \frac{1}{2} < 1$). Значит, по 1-му признаку сравнения расходится, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}-1}$.

Итак, исходный ряд не является абсолютно сходящимся.

2. Выясним, сходится ли данный знакочередующийся ряд, применяя признак Лейбница.

а) Проверим, выполняется ли неравенство $a_n > a_{n+1}$ для абсолютных величин членов данного ряда:

$$a_n = \frac{1}{2\sqrt{n}-1} > \frac{1}{2\sqrt{n+1}-1} = a_{n+1}.$$

Данное неравенство эквивалентно неравенству $2\sqrt{n}-1<2\sqrt{n+1}-1$, которое верно для любого $n=1,2,\ldots$. Значит, $a_n>a_{n+1}$ для всех номеров $n=1,2,\ldots$.

б) Найдем предел общего члена ряда:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}+1}=0.$$

Таким образом, для данного знакочередующегося ряда выполнены оба условия, содержащиеся в признаке Лейбница, откуда следует, что исходный ряд сходится. Однако он не является абсолютно сходящимся, поэтому данный ряд сходится условно.

6.2.2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-\ln n}$.

1. Исследуем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ из абсолютных величин членов данного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-\ln n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4-\ln 2}+\frac{1}{6-\ln 3}+\ldots.$$

Применяя 2-й признак сравнения, сравним этот ряд с расходящимся гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n-\ln n}/\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2-\frac{\ln n}{n}}=\frac{1}{2}\neq 0.$$

Следовательно, знакопостоянный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится, а значит, исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ не является абсолютно сходящимся.

2. Теперь выясним, является ли данный знакопеременный ряд сходящимся, используя признак Лейбница.

а) Проверим, выполняется ли неравенство $a_n>a_{n+1}$ для всех номеров n, начиная с некоторого:

$$a_n=\frac{1}{2n-\ln n}>\frac{1}{2(n+1)-\ln(n+1)}=a_{n+1}.$$

Запишем последовательность неравенств, эквивалентных данному:

$$2n-\ln n<2(n+1)-\ln(n+1);\ \ln(n+1)-\ln n<2(n+1)-2n;$$

$$\ln\frac{n+1}{n}<2;\ \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<2.$$

Так как $1+\frac{1}{n}\le 2<e$, то $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\ln e=1<2$ для любого $n=1,2,\ldots$. Значит, неравенство $a_n>a_{n+1}$ выполняется для всех $n=1,2,\ldots$.

б) Найдем предел общего члена ряда:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{2n-\ln n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{2-\frac{\ln n}{n}}=\frac{0}{2}=0.$$

Итак, для данного знакочередующегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-\ln n}$ выполнены оба условия, содержащиеся в признаке Лейбница, значит, этот ряд сходится. Из этого и из того, что ряд не является абсолютно сходящимся, окончательно следует, что ряд сходится условно.

6.2.3. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{3^n}$.

Исследуем на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ из абсолютных величин членов данного ряда, т.е. ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n},$$

используя признак Даламбера. Для этого сначала преобразуем выражение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{3^{n+1}}/\frac{n}{3^n}=\frac{n+1}{n}*\frac{3^n}{3^{n+1}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)*\frac{1}{3}.$$

Найдем предел этого выражения:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)*\frac{1}{3}=\frac{1}{3}<1.$$

По признаку Даламбера отсюда следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$ сходится, а значит, исходный ряд сходится абсолютно.

Доказать, что ряд сходится условно:

6.2.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$.

6.2.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{n(n+2)}$.

6.2.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n\sqrt{\ln\ln n}}$.

6.2.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-\sqrt{n}}$.

Доказать, что ряд сходится абсолютно:

6.2.8. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$.

6.2.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3n-2)!}$.

6.2.10. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}*\frac{1}{n\ln^2 n}$.

6.2.11. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n!}{3*5*7*...*(2n+1)}$.

Доказать, что ряд расходится:

6.2.12. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n*n$.

6.2.13. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3*7*...*(4n-1)}{5*8*...*(3n+2)}$.

6.2.14. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n^2-1}{5+2n^2}$.

§3. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Выражение вида

$$a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+..., \tag{41}$$

где $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ – постоянные числа (действительные или комплексные), а x – переменная величина (также действительная или комплексная), называется *степенным рядом*. Числа $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ называются *коэффициентами степенного ряда*. Сокращенно степенной ряд обозначают так: $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$.

Будем называть степенной ряд *действительным* (соответственно, *комплексным*) *степенным рядом*, если его коэффициенты – действительные (соответственно, комплексные) числа, а переменная x принимает действительные (соответственно, комплексные) значения.

Часто рассматривают степенные ряды более общего вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+...+a_n(x-a)^n+..., \tag{42}$$

частным случаем которых при $a=0$ являются обычные степенные ряды (41). С другой стороны, каждый степенной ряд вида (42) с помощью замены переменной $y=x-a$ сводится к ряду $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ вида (41).

Придавая переменной x в степенном ряде конкретное числовое значение $x=x_0$, получим числовой ряд, который сходится или расходится. Множество всех тех значений переменной, при которых данный степенной ряд сходится, называется *областью сходимости* этого ряда.

При $x=0$ (соответственно, при $x=a$) всякий степенной ряд вида (41) (соответственно, вида (42)) сходится, поэтому область сходимости степенного ряда содержит по крайней мере одну точку.

Теорема 5 (Абеля). Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится в точке x_0, то он абсолютно сходится в каждой точке x, для которой $|x| < |x_0|$.

Теорема 6. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ расходится при некотором значении $x = x_1$, то он расходится и при всех значениях x, для которых $|x| > |x_1|$.

Интервалом сходимости действительного степенного ряда вида (41) (соответственно, вида (42)) называется такой интервал $(-R;R)$ (соответственно, $(a_0 - R, a_0 + R)$), что в каждой его точке ряд сходится абсолютно, а в каждой точке, лежащей вне отрезка $[-R;R]$ (соответственно, $[x_0 - R; x_0 + R]$), ряд расходится. На границах интервала сходимости, т.е. в точках $x = \pm R$ (соответственно, в точках $x = x_0 \pm R$), ряд может как сходиться, так и расходиться. Число R называется *радиусом сходимости* действительного степенного ряда.

В частности, R может равняться нулю – в этом случае область сходимости ряда состоит из одной точки 0 (соответственно, x_0), или $+\infty$ – в этом случае областью сходимости является вся числовая прямая (такой ряд называется еще *всюду сходящимся*).

Кругом сходимости комплексного степенного ряда вида (41) (соответственно, вида (42)) называется такой открытый круг $|x| < R$ (соответственно, $|x - a| < R$), что в каждой его точке ряд сходится абсолютно, а в каждой точке, лежащей вне замкнутого круга $|x| \le R$ (соответственно, вне замкнутого круга $|x - a| \le R$), ряд расходится.

В граничных точках круга сходимости – т.е. на окружности $|x| = R$ (соответственно, $|x - a| = R$) – ряд может как сходиться, так и расходиться. Число R называется *радиусом сходимости* комплексного степенного ряда. В частности, R может быть равно 0 – в этом случае вся область сходимости ряда состоит из одной точки 0 (соответственно, a), или $+\infty$ – в этом случае областью сходимости является вся комплексная плоскость C.

Интервал и круг сходимости ряда, как правило, определяют с помощью признака Даламбера или признака Коши, примененных к знакоположительному ряду $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ (соответственно, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n (x-a)^n|$), составленному из абсолютных величин членов исходного степенного ряда.

Для вычисления радиуса сходимости R степенного ряда применяются также формулы:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \text{ и } R = \frac{1}{\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

в тех случаях, когда указанные пределы существуют.

6.3.1. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(x-3)^{n-1}}{2^{n+1}}$.

Применим признак Даламбера. Поскольку

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{(n+1)!(x-3)^{(n+1)-1}}{2^{(n+1)+1}}\Big/\frac{n!(x-3)^{n-1}}{2^{n+1}}\right|=\left|\frac{(n+1)!}{n!}*\frac{(x-3)^n}{(x-3)^{n-1}}*\frac{2^{n+1}}{2^{n+2}}\right|=$$

$$=\left|(n+1)(x-3)\frac{1}{2}\right|=\frac{|x-3|}{2}(n+1),\text{ то}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x-3|}{2}(n+1)=\begin{cases}+\infty \quad \textit{при} \quad x-3\neq 0, x\neq 3;\\ 0 \quad \textit{при} \quad x-3=0, x=3.\end{cases}$$

Таким образом, ряд сходится (абсолютно) только при $x=3$, в остальных точках числовой прямой ряд расходится.

6.3.2. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}(x+1)^n}{n^n}$.

Воспользуемся признаком Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{3^{n-1}(x+1)^n}{n^n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x+1|}{n}*3^{\frac{n-1}{n}}=|x+1|\lim_{n\to\infty}\frac{3^{1-\frac{1}{n}}}{n}=|x+1|*0=0<1 \text{ при}$$

всех $x\in(-\infty;+\infty)$.

Следовательно, ряд сходится абсолютно в каждой точке числовой прямой $(-\infty;+\infty)$.

6.3.3. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}x^n$.

Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}|x|=|x|.$$

(Этот же результат можно получить, применяя признак Коши: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x^n|}=\lim_{n\to\infty}|x|=|x|$.) Отсюда следует, что при $|x|<1$ (т.е. при $x\in(-1;1)$) ряд сходится абсолютно, при $|x|>1$ расходится. Таким образом, интервал $(-1;1)$ – интервал сходимости данного ряда. Исследуем ряд на сходимость в граничных точках этого интервала, т.е. в точках $x=-1$ и $x=1$.

При $x=-1$ получим знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n=-1+1-1+1-...+(-1)^n+....$$

Этот ряд расходится, так как не выполнен необходимый признак сходимости ($a_n \not\to 0$ при $n \to \infty$).

При $x = 1$ получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1^n = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots$. Этот ряд расходится по той же причине, так как $\lim_{n=1} a_n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0$.

Итак, область сходимости данного ряда – интервал $(-1;1)$.

Найти область сходимости ряда. Указать применяемые признаки. Дополнительно указать: для необходимого признака – $\lim_{n\to\infty} a_n$; для 1-го и 2-го признаков сравнения – общий член ряда, с которым сравнивается данный ряд;

для признака Даламбера – $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$;

для признака Коши – $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$;

для интегрального признака – первообразную для $f(x)$ и $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

В задачах 6.3.4–6.3.11 для определения интервала сходимости использовать признак Даламбера. В задачах 6.3.12–6.3.14 для определения интервала сходимости использовать признак Коши.

6.3.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

6.3.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{n-1}}{(n+1)!}$.

6.3.6. $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$.

6.3.7. $\sum_{n=1}^{\infty} (n+2)!(x+1)^n$.

6.3.8. $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$.

6.3.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-x)^{2n}}{\sqrt{n}}$.

6.3.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

6.3.11. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n+1}$.

6.3.12. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$.

6.3.13. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{n+1} (x-3)^n$.

6.3.14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$.

ГЛАВА 7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Уравнение

$$F(x, y, y') = 0, \tag{43}$$

связывающее между собой независимую переменную, искомую (неизвестную) функцию $y(x)$ и ее производную $y'(x)$, называется *дифференциальным уравнением первого порядка*.

Если уравнение (43) можно записать в виде $y' = f(x, y)$, то говорят, что оно разрешимо относительно производной. Это уравнение иногда записывают в виде $dy = f(x, y)dx$ или, более общее $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ (дифференциальная форма).

Решением (или *интегралом*) дифференциального уравнения первого порядка называется любая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в это уравнение обращает его в тождество. График функции $y = \varphi(x)$ в этом случае называется *интегральной кривой*. Процесс нахождения решений данного дифференциального уравнения называется *интегрированием* этого уравнения.

Задача отыскания решения дифференциального уравнения первого порядка (43), удовлетворяющего заданному *начальному условию* $y(x_0) = y_0$, называется *задачей Коши*.

Геометрически это равносильно следующему: требуется найти интегральную кривую уравнения (43), проходящую через точку $M_0(x_0, y_0)$.

Общим решением уравнения (43) называется такая функция

$$y = \varphi(x, C), \tag{44}$$

где C – произвольная постоянная, что:

1) при любом конкретном значении C она является решением этого уравнения;

2) для любого допустимого начального условия $y(x_0) = y_0$ найдется такое значение постоянной $C = C_0$, что $\varphi(x_0, C_0) = y_0$.

В некоторых случаях общее решение дифференциального уравнения приходится записывать в неявном виде: $\varphi(x, y, C) = 0$. Тогда соотношение $\varphi(x, y, C) = 0$ называется *общим интегралом* этого уравнения.

Геометрически общее решение (общий интеграл) представляет собой семейство интегральных кривых на плоскости Oxy.

Частным решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y=\varphi(x,C_0)$, получаемая из общего решения (44) при конкретном значении постоянной $C=C_0$.

Частным интегралом уравнения (43) называется равенство $\varphi(x,y,C_0)=0$, полученное из общего интеграла при фиксированном значении $C=C_0$.

Теорема 1. Пусть в дифференциальном уравнении $y'=f(x,y)$ функция $f(x,y)$ и ее частная производная $f'_y(x,y)$ непрерывны в некоторой области D плоскости Oxy. Тогда для любой точки $M(x_0,y_0)\in D$ существует и притом единственное решение $y=y(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0)=y_0$.

В каждой точке $(x_0,y_0)\in D$ число $f(x_0,y_0)$ выражает угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$. Поэтому каждой точке области D уравнение $y'=f(x,y)$ ставит в соответствие некоторое направление – геометрически его можно изобразить черточкой (стрелкой), проходящей через эту точку. Тем самым уравнение $y'=f(x,y)$, $(x_0,y_0)\in D$ определяет *поле направлений* на плоскости.

Множество точек $(x_0,y_0)\in D$, в которых $y'=k$, где k – постоянная, или, что то же самое, $f(x,y)=k$ (линия уровня функции $f(x,y)$), называется *изоклиной* дифференциального уравнения. В точках изоклины направление поля одинаково, т.е. направления касательных в точках изоклины (или соответствующие черточки) параллельны.

Придавая k близкие числовые значения, можно построить достаточную густую сеть изоклин, а с их помощью – приближенно нарисовать вид интегральных кривых, т.е. решений дифференциального уравнения. Этот метод, *метод изоклин*, или графический (геометрический) метод решения дифференциальных уравнений, особенно ценен в том случае, когда решение, общее или частное, уравнения не выражается в элементарных функциях – интеграл не берется.

Некоторые дифференциальные уравнения могут иметь такие решения, которые не получаются из общего ни при каких значениях произвольной постоянной. Эти решения не являются частными и поэтому называются *особыми*. Особые решения могут иметь только те уравнения, для которых нарушаются условия теоремы существования и единственности решения.

Уравнение вида

$$P_1(x)*Q_1(y)dx + P_2(x)*Q_2(y)dy = 0 \qquad (45)$$

называется *дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными*.

Уравнение (45) путем деления на произведение $Q_1(y)*P_2(x)$ приводится к уравнению с *разделенными переменными*

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = 0 \qquad (46)$$

(коэффициент при dx зависит только от x, а при dy – только от y).

Общий интеграл полученного уравнения находится почленным интегрированием:

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = C.$$

Заметим, что уравнению (45) могут удовлетворять решения, потерянные при делении на $Q_1(y)*P_2(x)$, т.е. получаемые из уравнения $Q_1(y)*P_2(x) = 0$. Если эти решения не входят в найденный общий интеграл, то они являются особыми решениями уравнения (45).

Уравнение $y' = f_1(x)* f_2(y)$ сводится к уравнению (46). Для этого достаточно положить $y' = \frac{dy}{dx}$ и разделить переменные.

7.1.1. Показать, что данная функция является решением данного дифференциального уравнения.

а) $y = (x + C)e^x$, $y' - y = e^x$; б) $y = -\frac{2}{x^2}$, $xy^2dx - dy = 0$;

в) $x^2 - xy + y^2 = C$, $(x - 2y)y' - 2x + y = 0$.

а) Находим производную данной функции: $y' = e^x + (x + C)e^x$. Теперь подставим значения y и y' в заданное уравнение: $e^x + (x + C)e^x - (x + C)e^x = e^x$. Получили тождество $e^x = e^x$. Следовательно, функция $y = (x + C)e^x$ является решением уравнения $y' - y = e^x$.

б) Сначала находим dy: $dy = \left(-\frac{2}{x^2}\right)' dx = \frac{4}{x^3}dx$. Подставив значения y и dy в данное уравнение, получим тождество:

$x*\left(-\frac{2}{x^2}\right)^2 dx-\frac{4}{x^3}dx=0$, т.е. $0=0$. Значит, функция $y=-\frac{2}{x^2}$ – действительно решение исходного уравнения.

в) Найдем производную неявной функции, для чего продифференцируем обе части уравнения $x^2-xy+y^2=C$ по x: $2x-y-xy'+2yy'=0$, откуда $y'=\frac{y-2x}{2y-x}$, $x\neq 2y$. Подставим полученное выражение для y' в данное дифференциальное уравнение: $(x-2y)\frac{y-2x}{2y-x}-2x+y=0$. Уравнение обращается в тождество, т.е. функция $x^2-xy+y^2=C$ является интегралом исходного уравнения.

7.1.2. Показать, что заданные функции являются решениями соответствующих дифференциальных уравнений:

а) $y=\ln\cos x$, $y'=-tgx$; б) $x^2+2xy=C$, $(x+y)dx+xdy=0$;

в) $y=C*\sin x$, $y'tgx-y=0$; г) $y=Ce^{-3x}$, $y'+3y=0$;

д) $y-x=Ce^y$, $(x-y+1)y'=1$; е) $y=Ce^{x^3}$, $dy-3x^2ydx=0$.

7.1.3. Проверить, являются ли решениями данных дифференциальных уравнений указанные функции:

а) $y=\frac{1}{3(x+1)}$, $y'=3y^2$; б) $\upsilon=\frac{c}{b}\left(1-e^{-\frac{bt}{a}}\right)$, $a\frac{d\upsilon}{dt}+b\upsilon-c=0$;

в) $y=3-e^{-x^2}$, $xy'+2y=e^{-x^2}$; г) $x^2+t^2-2t=C$, $x\frac{dx}{dt}+t=1$.

7.1.4. Решить задачу Коши:

а) $y'=\sin 5x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$; б) $\frac{dx}{dt}=3$, $x=1$ при $t=-1$.

а) Проинтегрируем обе части уравнения:

$$y=\int\sin 5xdx=-\frac{1}{5}\cos 5x+C.$$

Теперь найдем частное решение уравнения. Подставив $x=\frac{\pi}{2}$ и $y=1$ в найденное решение, получим искомое значение C: $1=-\frac{1}{5}\cos\frac{5\pi}{2}+C$, откуда $C=1$. Таким образом, решением задачи Коши является функция $y=-\frac{1}{5}\cos 5x+1$.

б) Интегрируя, находим: $x = 3t + C$, откуда, с учетом начального условия, имеем: $1 = 3*(-1) + C$, $C = 4$. Искомое частное решение есть функция $x = 3t + 4$.

7.1.5. Решить задачу Коши:

а) $y' = 2x + 1$, $y(2) = 5$; б) $y' = e^{-3x}$, $y(0) = \dfrac{2}{3}$.

Решить дифференциальные уравнения:

7.1.6. $(1+y)dx - (1-x)dy = 0$. 7.1.7. $\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0$.

7.1.8. $xyy' = 1 - x^2$. 7.1.9. $y'(1+y) = xy\sin x$.

7.1.10. $e^y(1+y') = 1$. 7.1.11. $y' - xy^2 = 0$;

7.1.12. Найти частное решение уравнения

$$ydx + ctgxdy = 0,\ y\Big|_{x=\frac{\pi}{3}} = -1.$$

Это уравнение имеет вид (45). Разделяя переменные и интегрируя, находим общее решение заданного уравнения: $tgxdx + \dfrac{1}{y}dy = 0$, $\int tgxdx + \int \dfrac{dy}{y} = \ln|C_1|$, $C_1 \neq 0$, откуда $\ln|y| - \ln|\cos x| = \ln|C_1|$, $|y| = |C_1 \cos x|$, т.е. $y = \pm C_1 \cos x$, или $y = C\cos x$ (положили $C = \pm C_1$).

Подставляя в найденное общее решение $y = -1$ и $x = \dfrac{\pi}{3}$ (используем начальное условие), находим постоянную C. А именно:

$$-1 = C\cos\frac{\pi}{3},\ C = -2.$$

Следовательно, искомое частное решение имеет вид: $y = -2\cos x$.

Найти частные решения дифференциальных уравнений:

7.1.13. $2\sqrt{y}dx - dy = 0$, $y(0) = 1$. 7.1.14. $y'\sin x - y\ln y = 0$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

7.1.15. $(1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0$, $y(1) = 2$.

7.1.16. Определить численность населения России через 20 лет, считая, что скорость прироста населения пропорциональна его наличному количеству, и зная, что население России в 2000 году составляло 145 млн человек, а прирост населения за 2000 год был равен α%. (Вычислить при α=2%, α=-1%).

Обозначим численность населения России в момент времени t через $N = N(t)$. Дифференциальное уравнение исследуемого процесса (скорость «прироста» численности населения) имеет вид $\frac{dN}{dt} = kN$, где $k > 0$ – коэффициент пропорциональности (см. задачу 2.1.9). Отсюда находим, что $\frac{dN}{N} = kdt$, откуда $\ln|N| - \ln|C| = kt$, т.е. $\left|\ln \frac{N}{C}\right| = kt$, т.е., учитывая, что $N > 0$, имеем $N = Ce^{kt}$ – общее решение уравнения. Согласно условию задачи, $N = 145$ при $t = 0$. Находим частное решение: $145 = Ce^0$, т.е. $C = 145$, $N = 145e^{kt}$. Найдем значение коэффициента k, зная, что в конце 2000 года, т.е. при $t = 1$, население России равно $N = 145 + \frac{\alpha}{100} * 145$ млн человек: $145 + \frac{\alpha}{100} * 145 = 145e^k$. Отсюда $e^k = 1 + \frac{\alpha}{100}$, т.е. $k = \ln\left(1 + \frac{\alpha}{100}\right)$. Равенство $N = 145e^{kt}$ теперь можно переписать так: $N = 145\left(1 + \frac{\alpha}{100}\right)^t$. Таким образом, через 20 лет численность населения составит:

при α =2%: $N = 145 * (1{,}02)^{20} \approx 215$ (млн человек);

при $\alpha = -1\%$: $N = 145 * (0{,}99)^{20} \approx 119$ (млн человек).

7.1.17**.** Тело движется со скоростью, пропорциональной пройденному пути. Какой путь пройдет тело за 5 секунд от начала движения, если известно, что за 1 секунду оно проходит путь 8 м, а за 3 секунды – 40 м?

7.1.18. Известно, что тело охлаждается в течение 15 мин от 100° до 80°. Через сколько минут температура тела понизится до 40°, если температура окружающей среды составляет 10°? (Скорость охлаждения тела и окружающей среды пропорциональна разности температур тела и окружающей среды.)

§ 2. ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Функция $f(x, y)$ называется *однородной функцией степени* n, где n – целое, если при любом α имеет место тождество $f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^n f(x, y)$.

В частности, функция $f(x, y)$ – однородная нулевой степени, если $f(\alpha x, \alpha y) = f(x, y)$.

Дифференциальное уравнение вида

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{47}$$
называется *однородным*, если $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – однородные функции одинаковой степени.

Уравнение (47) может быть приведено к виду
$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{48}$$

Однородное уравнение преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными при помощи замены переменной
$$\frac{y}{x} = u, \text{ т.е. } y = ux,$$
где $u = u(x)$ – новая неизвестная функция (можно также применять подстановку $\frac{x}{y} = u$).

Замечание. Уравнение вида $y' = \frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}$ приводится к однородному с помощью замен $x = u+\alpha, y = v+\beta$, где α и β – числа, которые подбирают соответствующим образом. Этот же прием используется при решении уравнений вида $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$.

7.2.1. Проинтегрировать следующие дифференциальные уравнения:
а) $(y^2+xy)dx - x^2dy = 0$;
б) $y' = \frac{xy^2-yx^2}{x^3}, y(-1) = 1$;
в) $xy' - y + xe^{\frac{y}{x}} = 0$.

а) Заданное уравнение имеет вид (47). Коэффициенты при dx и dy, т.е. $P(x,y) = y^2+xy$ и $Q(x,y) = -x^2$, являются однородными функциями одной и той же степени (второй). Действительно,
$$P(\alpha x,\alpha y) = (\alpha y)^2 + (\alpha x\cdot\alpha y) = \alpha^2(y^2+xy) = \alpha^2 P(x,y),$$
$$Q(\alpha x,\alpha y) = -(\alpha x)^2 = \alpha^2 Q(x,y), n = 2.$$

Следовательно, данное уравнение однородное. Положим $y = ux$. Тогда $dy = xdu + udx$, и данное уравнение принимает вид $(u^2x^2 + x^2u)\, dx - x^2(xdu + udx) = 0$. После упрощений получим: $u^2dx - xdu = 0$ или $\frac{dx}{x} - \frac{du}{u^2} = 0$. Интегрируя последнее уравнение, получим $\ln|x| + \frac{1}{u} = C$.

Вспоминая, что $u = \frac{y}{x}$, находим общий интеграл исходного уравнения: $\ln|x| + \frac{x}{y} = C$.

Отметим, что заданное уравнение можно было сначала привести к виду (48): $y^2+xy-x^2\dfrac{dy}{dx}=0$, т.е. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2+xy}{x^2}$, или $y'=\left(\dfrac{y}{x}\right)^2+\dfrac{y}{x}$. Полагая $y=ux$, находим далее $y'=u'x+u$ и т.д. (см. б)).

б) Преобразуем уравнение к виду (48): $y'=\left(\dfrac{y}{x}\right)^2-\dfrac{y}{x}$. Полагая $y=ux$, находим $y'=u'x+u$. Подставим значения y и y' в данное уравнение: $u'x+u=u^2-u$. Преобразовывая, получим уравнение с разделяющимися переменными: $\dfrac{du}{dx}\cdot x=u^2-2u$. Разделяя переменные и интегрируя, имеем: $\int\dfrac{du}{u^2-2u}=\int\dfrac{dx}{x}$, откуда $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{u-2}{u}\right|=\ln|x|+\dfrac{1}{2}\ln|C_1|$, т.е. $\left|\dfrac{u-2}{u}\right|=|C_1|x^2$. Подставляя $u=\dfrac{y}{x}$, получаем $\left|\dfrac{y-2x}{y}\right|=|C_1|x^2$, т.е. $\dfrac{y-2x}{y}=\pm C_1x^2$, или $\dfrac{y-2x}{y}=Cx^2$, где $C=\pm C_1$. Теперь найдем значение постоянной C, используя начальное условие: $\dfrac{1+2}{1}=C\cdot 1$, т.е. $C=3$. Отсюда: $\dfrac{y-2x}{y}=3x^2$, т.е. $y(3x^2-1)=-2x$, откуда окончательно: $y=\dfrac{2x}{1-3x^2}$ – частное решение заданного уравнения.

в) Преобразуем уравнение к виду (48): $y'-\dfrac{y}{x}+e^{\frac{y}{x}}=0$. Сделав подстановку $\dfrac{y}{x}=u$, т.е. $y=ux$, получим $u'x+u-u+e^u=0$, или $\dfrac{du}{e^u}+\dfrac{dx}{x}=0$. Интегрируя, имеем: $\int e^{-u}du=-\int\dfrac{dx}{x}$, т.е. $-e^{-u}=-\ln|x|-\ln|C|, C\neq 0$. Отсюда $\ln|Cx|=e^{-u}$, т.е. $-u=\ln\ln|Cx|, C\neq 0$. Учитывая, что $u=\dfrac{y}{x}$, получаем общее решение заданного уравнения $y=-x\ln\ln|Cx|, C\neq 0$.

Решить уравнения:

7.2.2. $ydx+(x+y)\,dy=0$.

7.2.3. $y'=\dfrac{xy+y^2}{2x^2+xy}$.

7.2.4. $xy'=y+x\sin\dfrac{y}{x}, y(1)=\dfrac{\pi}{2}$.

§ 3. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ. УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ

Дифференциальное уравнение вида

$$y' + p(x)y = g(x)\ , \qquad (49)$$

где $p(x)$ и $g(x)$ – непрерывные функции (в частности – постоянные), называется *линейным уравнением первого порядка*.

Уравнение

$$x' + p(y)x = g(y) \qquad (50)$$

является *линейным относительно* x *и* x'.

Если $g(x)=0$, то уравнение (49) принимает вид $y' + p(x)y = 0$ и называется *линейным однородным*. Оно является уравнением с разделяющимися переменными. В случае $g(x)\neq 0$ уравнение (49) называется *линейным неоднородным уравнением*.

Решение уравнения (49) ищется в виде $y=uv$, где $u=u(x)$ и $v=v(x)$ – неизвестные функции от x (метод Бернулли). При этом одну из этих функций (например, $v(x)$) можно выбрать произвольно (из соображений удобства), тогда вторая определится из уравнения (49). В обоих случаях они находятся из уравнений с разделяющимися переменными.

Кроме того, уравнение (49) можно решить методом вариации произвольной постоянной (*метод Лагранжа*); в этом случае его общее решение ищется в виде $C(x)e^{-\int p(x)dx}$.

Уравнения вида $y' + p(x)y = g(x)y^n$, где $n\in R$, $n\neq 0$, $n\neq 1$, а $p(x)$ и $g(x)$ – непрерывные функции, называется *уравнением Бернулли.*

Оно приводится к линейному уравнению с помощью подстановки $z=y^{-n+1}$. Уравнение Бернулли можно, не сводя к линейному, проинтегрировать с помощью подстановки $y=uv$ (т.е. методом Бернулли) или применив метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа).

7.3.1. Решить дифференциальные уравнения:

а) $y' + tgx\cdot y = \dfrac{1}{\cos}$; б) $y' = \dfrac{y}{x+y^2}$;

в) $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$.

а) Данное уравнение имеет вид (49) и, стало быть, является линейным. Здесь $p(x)=tgx, g(x)=\frac{1}{\cos x}$. Решим уравнения двумя способами.

Метод Бернулли

Полагаем $y=ux$,где $u=u(x), v=v(x)$ – некоторые функции от x, тогда $y'=u'v+uv'$. Данное уравнение принимает вид:

$$u'v+uv'+tgxuv=\frac{1}{\cos x},$$

или

$$u'v+u(v'+vtgx)=\frac{1}{\cos x}.$$

Подберем функцию $v=v(x)$ так, чтобы выражение в скобках было равно нулю, т.е. решим первое дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными $v'+vtgx=0$. Отсюда $\frac{dv}{dx}+vtgx=0$,т.е. $\frac{dv}{v}+tgxdx=0, \ln|v|-\ln|\cos x|=\ln|C|, C\neq 0$, откуда $v=C\cos x, C\neq 0$. Поскольку нам достаточно какого-нибудь одного ненулевого решения уравнения, то возьмем $v=\cos x$(положили $C=1$). Подставляя $v=\cos x$ в уравнение (50), получим второе дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, из которого найдем функцию $u(x): u'\cos x=\frac{1}{\cos x}$, т.е. $du=\frac{dx}{\cos^2 x}$, и, следовательно, $u=tgx+C$. Таким образом, $y=uv=(tgx+C)\cos x,$ или $y=C\cos x+\sin x$ – общее решение исходного уравнения.

Метод Лагранжа

Найдем сначала общее решение соответствующего однородного уравнения $y'+tgx\cdot y=0$, т.е. $\frac{dy}{dx}=-tgx\cdot y$. Разделяя переменные, имеем $\frac{dy}{y}=-tgxdx$, $\ln|y|=\ln|\cos x|+\ln|C|$, $C\neq 0$, т.е. $y=C\cos x$. Общее решение заданного уравнения ищем в виде $y=C(x)\cos x$ (букву C заменили неизвестной функцией $C(x)$). Подставляя y и $y'=C'(x)\cos x-C(x)\sin x$в данное уравнение, получим $C'(x)\cos x - C(x)\sin + tgxC(x)\cos x = \frac{1}{\cos x}$, т.е. $C'(x)\cos x = \frac{1}{\cos x}$ (второе и третье слагаемое взаимно уничтожились). Отсюда $\frac{dC(x)}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$, $dC(x) = \frac{dx}{\cos^2 x}$, $C(x) = tgx + C$. Следовательно, общее решение заданного уравнения есть $y = (tgx + C)\cos x$, т.е. $y = C\cos x + \sin x$, как и в первом случае.

б) Данное уравнение не является линейным относительно y и y', но является таковым относительно x и x'. Учитывая, что $y' = \frac{1}{x'}$, приведем уравнение к виду (50):

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{y}{x + y^2}, \text{ т.е. } x' = \frac{x + y^2}{y}, \text{ или } x' - \frac{1}{y}x = y.$$

Решая методом Бернулли, полагаем $x = uv$, где $u = u(y), v = v(y)$ – функции от y. Тогда $x' = u'v + uv'$ и

$$u'v + uv' - \frac{1}{y}uv = y, \text{ или}$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{1}{y}v\right) = y. \qquad (51)$$

Решаем уравнение с разделяющимися переменными $v' - \frac{1}{y}v = 0$: $\frac{dv}{dy} = \frac{v}{y}$, т.е. $\frac{dv}{v} = \frac{dy}{y}$, откуда $\ln|v| = \ln|Cy|, C \neq 0$.

Выбирая одно из возможных решений (самое простое), имеем: $v = y$, подставляя в уравнение (51), получим $u'y = y$, т.е. $u' = 1$, и, значит, $u = y + C$. Следовательно, $x = uv = (y + C)y = y^2 + Cy$, т.е. $x = y^2 + Cy$ – общее решение заданного уравнения; $y = 0$ – особое решение.

в) Уравнение приводится к виду (50), т.е. это уравнение Бернулли: $y' - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y}$. Снова полагаем $y = uv$. Получаем уравнение $u'v + uv' - \frac{4}{x}uv = x\sqrt{uv}$. Решаем первое уравнение $v' - \frac{4}{x}v = 0$, разделяя переменные: $\frac{dv}{v} = \frac{4}{x}dx$, т.е. $\ln|v| = 4\ln|x| + C$. Выбирая простейшее решение (при $C = 0$), находим $v = x^4$. Решаем второе уравнение с разделяющимися переменными: $u'x^4 = x\sqrt{u}\cdot x^2$, т.е. $\frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{dx}{x}$, откуда $2\sqrt{u} = \ln|x| + \ln|C|,\ C \neq 0$. Таким образом, $u = \frac{1}{4}\ln^2|xC|,\ C \neq 0$, и, следовательно, $y = uv = \frac{1}{4}x^4\ln^2|xC|$, где $C \neq 0$, – общее решение заданного уравнения, $y = 0$ – особое решение.

Решить уравнения:

7.3.2. $y' - 2xy = e^{x^2}$.

7.3.3. $xy' + y - 3x^2 = 0$.

7.3.4. $y^2dx + (x+2)dy = 0$.

7.3.5. $(x+1)y' - 2y = y^2(x+1)^5$.

7.3.6. $y' + 2y = 3e^x$.

7.3.7. $(1+x^2)y' + 2xy = 3x^2$.

7.3.8. $2(x+y^4)y' - y = 0$.

7.3.9. $y^2dx + (xy-1)dy = 0$.

7.3.10. $xy' + y = \frac{y^2}{2}\ln x$.

7.3.11. $y' + 2xy = 2xy^3$.

7.3.12. $y' + y\cos x = \sin 2x$.

7.3.13. $x\frac{dy}{dx} + y = 4x^3$.

§ 4. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

Предварительные сведения

Линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение вида

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)\ , \qquad (52)$$

где функции $p(x), q(x)$ и $f(x)$ непрерывны на некотором отрезке $[a,b]$.

При этих условиях существует единственное решение уравнения (52), удовлетворяющее заданным начальным условиям: $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$ где $x_0 \in [a,b]$.

Функция $f(x)$ называется *правой частью уравнения (52)*, а соответствующее уравнение называется также линейным дифференциальным уравнением второго порядка с правой частью. При $f(x)=0$ приходим к линейному однородному дифференциальному уравнению второго порядка (или уравнению правой части)

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \qquad (53)$$

Линейно независимые функции

Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются *линейно независимыми* на отрезке $[a,b]$, если тождество

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \equiv 0,\ x \in [a,b], \qquad (54)$$

имеет место тогда и только тогда, когда $C_1 = C_2 = 0$.

Если же существуют такие числа C_1 и C_2, из которых хотя бы одно отлично от нуля, что для всех $x \in [a,b]$ имеет место тождество (54), то функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются *линейно зависимыми* на отрезке $[a,b]$.

Данные определения равносильны следующим: функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются линейно независимыми (зависимыми) на отрезке $[a,b]$, если

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \not\equiv const \quad \left(\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \equiv const \right),\ \ x \in [a,b].$$

О линейной зависимости или независимости функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ можно судить по определителю

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix},$$

который называется *определителем Вронского* (или просто *вронскианом*).

Теорема 3. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно зависимы на отрезке $[a,b]$, то $W[y_1, y_2] = 0$ для всех x из $[a,b]$.

Теорема 4. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимые на отрезке $[a,b]$ решения дифференциального уравнения (53), то определитель Вронского этих функций отличен от нуля во всех точках отрезка $[a,b]$.

Структура общего решения линейного дифференциального уравнения

Теорема 5. Общее решение $y_{оо}$ линейного однородного дифференциального уравнения (53) имеет вид

$$y_{оо} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

где $y_1(x)$, $y_2(x)$ – линейно независимые решения этого уравнения.

Таким образом, для того, чтобы получить общее решение однородного дифференциального уравнения (53), достаточно найти любые два линейно независимых частных решения этого уравнения (в этом случае говорят, что они образуют фундаментальную систему решений уравнения (53)).

В некоторых случаях удается тем или иным способом найти только одно частное решение $y_1(x)$. Тогда другое частное решение $y_2(x)$ можно найти по формуле

$$y_2(x) = y_1(x) \cdot \int \frac{1}{y_1^2(x)} \cdot \exp\left[-\int_{x_0}^{x} p(x) dx \right] dx,$$

где $x_0 \in [a,b]$. Оба решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ при этом линейно независимы.

Теорема 6. Общее решение $y_{он}$ линейного неоднородного дифференциального уравнения (52) представляется в виде суммы

$$y_{он} = y_{оо} + y_{ч},$$

где $y_{оо}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения (53), а $y_{ч}$ – некоторое частное решение неоднородного уравнения (52).

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение (ЛОДУ) второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{55}$$

Квадратное уравнение

$$k^2 + pk + q = 0 \tag{56}$$

называется *характеристическим уравнением* для уравнения (55).

Для составления общего решения y_{oo} дифференциального уравнения (55), необходимо найти корни k_1 и k_2 соответствующего характеристического уравнения (56) и применить следующую теорему:

Теорема 7. Пусть k_1 и k_2 – корни характеристического уравнения (55). Тогда общее решение уравнения (55) находится по одной из следующих трех формул:

Если k_1 и k_2 – действительные и $k_1 \neq k_2$, то

$$y_{oo} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x};$$

если $k_1 = k_2$, то

$$y_{oo} = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x);$$

если $k_{1,2} = \alpha \pm \beta * i$ – комплексно-сопряженные корни, то

$$y_{oo} = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения (ЛНДУ) второго порядка с постоянными коэффициентами

Поскольку общее решение y_{oo} линейного однородного уравнения (55) легко находится по теореме 7, то в силу теоремы 6 для нахождения общего решения линейного неоднородного уравнения

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{57}$$

остается найти какое-нибудь одно его частное решение $y_ч$. В тех случаях, когда правая часть $f(x)$ имеет специальный вид, частное решение $y_ч$ неоднородного уравнения находится *методом неопределенных коэффициентов*. Этот метод называется также методом подбора частного решения неоднородного уравнения и сводится к следующим двум случаям.

Случай 1. $f(x)=e^{\alpha x}P_n(x)$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n.

а) Если α не является корнем уравнения (56), то частное решение $y_ч$ можно искать в виде

$$y_ч=e^{\alpha x}Q_n(x),$$

где $Q_n(x)$ – многочлен степени n с неизвестными коэффициентами.

б) Если α – корень уравнения (56) кратности k, то частное решение $y_ч$ можно искать в виде

$$y_ч=x^k e^{\alpha x}Q_n(x).$$

В частности, если $f(x)=P_n(x)$, т.е. $\alpha=0$, то $y_ч$ имеется в виде $y_ч=$ $Q_n(x)$ (если $\alpha=0$ не является корнем характеристического уравнения) или в виде $y_ч=x^k.Q_n(x)$ (если $\alpha=0$ – корень кратности k характеристического уравнения).

Случай 2. $f(x)=e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x]$, где $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ – многочлены степени n и m соответственно. Положим, $N=\max(n,m)$.

а) Если $\alpha\pm\beta_i$ не являются корнями уравнения (56), то

$$y=e^{\alpha x}[U_N(x)\cos\beta x+V_N(x)\sin\beta x].$$

б) Если $\alpha\pm\beta_i$ – корни уравнения (56) кратности k, то

$$y=x^k e^{\alpha x}[U_N(x)\cos\beta x+V_N(x)\sin\beta x].$$

В частности, если $f(x)=a\cos\beta x+b\sin\beta x$,т.е. $\alpha=m=n=0$, то частное решение ищется в виде $y_ч=A\cos\beta x+B\sin\beta x$ (если числа $\pm\beta * i$ не являются корнями характеристического уравнения).

Теорема 8. Если $y_{ч1}$ и $y_{ч2}$ – частные решения соответственно уравнений $y''+py'+qy=f_1(x)$ и $y''+py'+qy=f_2(x)$, то функция $y_ч=y_{ч1}+y_{ч2}$ – частное решение уравнения $y''+py'+qy=f_1(x)+f_2(x)$.

Метод вариации произвольных постоянных для определения частного решения неоднородного уравнения

В общем случае, в том числе тогда, когда правая часть ЛНДУ имеет вид, не предусмотренный предыдущим пунктом, для отыскания частного решения используют *метод вариации* (т.е. изменения) *произвольных постоянных* (или *метод Лагранжа*). Суть его в следующем. Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – фундаментальная система решений однородного уравнения (55). Тогда частное решение можно представить в виде $y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$, где функции $C_1(x)$ и C_2 находятся из системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x). \end{cases}$$

Разумеется, метод вариации произвольных постоянных можно применять и в случае, когда правая часть ЛНДУ имеет вид, рассмотренный в предыдущем пункте.

7.4.1. Установить линейную зависимость или независимость данных пар функций на областях их определения.

а) $x, \cos x$; б) $x, 2x$; в) $tgx, ctgx$

а) Функции $y_1(x) = x$ и $y_2(x) = \cos x$ определены на всей прямой, т.е. при $x \in (-\infty, +\infty)$. Тождество $C_1x + C_2\cos x \equiv 0$ имеет место только при $C_1 = C_2 = 0$. В самом деле, если предположить противное, т.е. что это тождество имеет место, например, при $C_2 \neq 0$, то после его дифференцирования получим новое тождество $C_1 - C_2 \sin x = 0$, откуда $\sin x = \frac{C_1}{C_2}$, $x \in (-\infty, +\infty)$, что неверно. Если же предположить, что $C_2 = 0$, то получим $C_1 x \equiv 0$, что также невозможно при $C_1 \neq 0$. Таким образом, тождество $C_1x + C_2\cos x \equiv 0$ имеет место только при $C_1 = C_2 = 0$, и, стало быть, функции x и $\cos x$ линейно независимы на действительной прямой.

Заметим, что $\frac{\cos x}{x} \not\equiv const$ и $\frac{x}{\cos x} \not\equiv const$, т.е. функции x и $\cos x$ удовлетворяют и другому определению линейной независимости.

б) Имеем $\frac{2x}{x} \equiv 2$ при $x \neq 0$ (тождество можно доопределить по непрерывности и при $x = 0$), поэтому функции $y_1 = 2x$ и $y_2 = x$ – линейно зависимы.

в) Ввиду периодичности функций $y_1 = tgx$ и $y_2 = ctgx$ с периодом $T = \pi$ достаточно установить их линейную независимость в интервале $x \in (0, \pi)\left(x \neq \frac{\pi}{2}\right)$. Имеем $\frac{y_1}{y_2} = \frac{tgx}{ctgx} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = tg^2 x \neq const$ $x \in (0, \pi)$, $x \neq \frac{\pi}{2}$.

Таким образом, функции tgx и $ctgx$ линейно независимы в области их определения $\left(x \neq n \cdot \dfrac{\pi}{2}, n \in Z\right)$.

Установить, какие из следующих пар функций линейно независимы, какие – линейно зависимы:

7.4.2. $\arcsin x$ и $\arccos x$.

7.4.3. $\sin x, \sin 2x$.

7.4.4. e^x, e^{x^2}.

7.4.5. $1, x$.

7.4.6. $\sin x, \sin^2 x$.

7.4.7. $\sin x \cos x, \sin 2x$.

7.4.8. $1 - \cos 2x, \sin^2 x$.

7.4.9. $1 + \cos 2x, \cos^2 x$.

Найти общие решения уравнений:

7.4.10. $y'' - 5y' + 6y = 0$.

7.4.11. $2y'' + 5y' - 7y = 0$.

7.4.12. $y'' + 4y' - 3y = 0$.

7.4.13. $3y'' + y' - 2y = 0$.

7.4.14. $y'' + 25y' = 0$.

7.4.15. $4y'' - 9y' = 0$.

7.4.16. Найти общее решение уравнения $4y'' + 4y' + y = 0$.

Характеристическое уравнение $4k^2 + 4k + 1 = 0$ имеет два одинаковых корня $k_1 = k_2 = -\dfrac{1}{2}$. В таком случае (см. теорему 2.8) $y_{он} = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{1}{2}x}$, или $y_{он} = (C_1 + C_2 x) e^{-\frac{1}{2}x}$.

Найти общие решения уравнений:

7.4.17. $y'' - 6y' + 9y = 0$.

7.4.18. $y'' - 4y' + 4y = 0$.

7.4.19. $4y'' - 12y' + 9y = 0$.

7.4.20. $9y'' + 12y' + 4y = 0$.

7.4.21. Найти частное решение уравнения $3y'' + 7y' + 4y = 0$, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(0) = 1,\ y'(0) = -\dfrac{2}{3}$.

Характеристическое уравнение $3k^2 + 7k + 4 = 0$ имеет корни $k_1 = -1,\ k_2 = -\dfrac{4}{3}$. Следовательно, общее решение имеет вид $y_{оо} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-\frac{4}{3}x}$. Находим $y'_{оо} = -C_1 e^{-x} - \dfrac{4}{3} C_2 e^{-\frac{4}{3}x}$. Подставляя в последних двух равенствах $x = 0,\ y = 1,\ y' = -\dfrac{2}{3}$, получаем систему уравнений относительно C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ -C_1 - \dfrac{4}{3} C_2 = -\dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = -1 \end{cases}$$

Найденные константы подставляем в выражение для общего решения. Получаем искомое частное решение

$$y_ч = 2e^{-x} - e^{-\frac{4}{3}x}.$$

Найти частные решения данных дифференциальных уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

7.4.22. $y'' - 4y' + 3y = 0,\ y(0) = 6,\ y'(0) = 10.$

7.4.23. $y'' + 4y' = 0,\ y(0) = 7,\ y'(0) = 8.$

7.4.24. $y'' - 6y' + 9y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2.$

7.4.25. $4y'' + 4y' + y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 0.$

7.4.26. $y'' - 4y' + 3y = 0,\ y(0) = 6,\ y'(0) = 10.$

7.4.27. Найти общее решение уравнения $y'' - 7y' = 5xe^x$, подбирая частное решение методом неопределенных коэффициентов.

Характеристическое уравнение $k^2 - 7k = 0$ имеет два действительных корня $k_1 = 0$ и $k_2 = 7$, поэтому общее решение однородного уравнения $y'' - 7y' = 0$ имеет вид $y_{оо} = C_1 + C_2 e^{7x}$. Правая часть неоднородного уравнения имеет вид $f(x) = P_1(x)e^{kx}$, где $P_1(x) = 5x$ – многочлен первой степени, а $k = 1$– не является корнем характеристического уравнения. Значит, частное решение ищем в таком же виде: $y_ч = (Ax + B)e^x$ ($Ax + B = Q_1(x)$ – многочлен первой степени с неизвестными коэффициентами. Для определения коэффициентов A и B находим

$$y'_ч = Ae^x + (Ax + B)e^x = (A + Ax + B)e^x, \quad y''_ч = (2A + Ax + B)e^x \ ,$$

после чего подставляем выражения для $y_ч, y'_ч$ и $y''_ч$ в исходное дифференциальное уравнение:

$$(2A + Ax + B)e^x - 7(A + Ax + B)e^x = 5xe^x.$$

После сокращения обеих частей на e^x и приравнивания коэффициентов при соответствующих степенях x в левой и правой части полученного равенства приходим к системе уравнений относительно неизвестных A и B:

$$\begin{aligned} x:&\quad A - 7A = 5 \\ x^0:&\quad 2A + B - 7A - 7B = 0, \end{aligned} \quad \text{т.е.} \begin{cases} -6A = 5 \\ -5A - 6B = 0. \end{cases}$$

Отсюда $A = -\dfrac{5}{6}, B = \dfrac{25}{36}$, а $y_ч = \left(-\dfrac{5}{6}x + \dfrac{25}{36}\right)e^x$. Теперь в силу теоремы 2.6 общее решение исходного уравнения имеет вид $y_{он} = C_1 + C_2 e^{7x} + \left(-\dfrac{5}{6}x + \dfrac{25}{36}\right)e^x$.

Найти общие решения уравнений, находя их частные решения методом неопределенных коэффициентов.

7.4.28. $y'' - 3y' + 2y = 10e^{-x}$.

7.4.29. $y'' - 6y' + 9y = 2x - x + 3.$

7.4.30. $y'' - 3y' + 2y = 2x^3 - 30.$

7.4.31. $y'' - 2y' + 2y = 2x$.

7.4.32. $y'' + 4y' - 5y = 1$.

7.4.33. $2y'' - y' - y = 4xe^{2x}$.

ГЛАВА 8. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА, ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ. ФОРМЫ ЗАПИСИ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Комплексным числом z называется упорядоченная пара действительных чисел *(x;y),* первое из которых x называется его *действительной частью,* а второе число *y – мнимой частью.* Обозначение: $z = x+iy$. Символ i называется *мнимой единицей.*

Если $x = 0$, то число $0 + iy = iy$ называется *чисто мнимым,* если $y = 0$, то число $x + i \bullet 0 = x$ отождествляется с действительным числом x, а это означает, что множество R действительных чисел является подмножеством множества C всех комплексных чисел, т.е. $R \subset C$.

Число x называется действительной частью комплексного числа z и обозначается $x = \operatorname{Re} z$, а y – мнимой частью, $y = lmz$.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ называются *равными* тогда и только тогда, когда равны их действительные части и равны их мнимые части, т. е.

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2. \end{cases}$$

Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, отличающиеся только знаком мнимой части, называются *сопряженными.*

Всякое комплексное число $z = x + iy$ *можно изобразить точкой M(x;y)* плоскости *Oxy*, такой, что $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. И наоборот.

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной* плоскостью (ее также обозначают C). Ось абсцисс называется *действительной осью,* а ось ординат – *мнимой.*

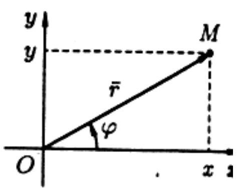

Рис. 29

Комплексное число $z = x+iy$ можно изображать и с помощью радиус-вектора $\bar{r} = \overline{OM} = (x; y)$.

Длина вектора $\bar{r}$, изображающего комплексное число z (см. рис. 29), называется *модулем* этого числа и обозначается $|z|$ или r. Модуль $r = |z|$ однозначно определяется по формуле

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{58}$$

Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором $\bar{r}$, изображающим комплексное число, называется *аргументом* этого числа, обозначается Arg z.

Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ величина многозначная: Arg z = arg z + $2k\pi$, k = 0, ±1, ±, 2,..., где arg z = φ – *главное значение аргумента,* заключенное в промежутке $(-\pi; \pi]$, то есть $-\pi <$ arg $z \leq \pi$. Аргумент комплексного числа $z = 0 + i0$ не определен.

Замечание. В качестве значения аргумента можно брать величину, принадлежащую промежутку $[0; 2\pi)$.

Запись числа z в виде $z = x + iy$ называют *алгебраической формой* комплексного числа. Запись числа z в виде

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{59}$$

называется *тригонометрической формой.*

Аргумент φ определяется из формул $\cos\varphi = \dfrac{x}{r}, \sin\varphi = \dfrac{y}{r}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Аргумент z можно найти, используя формулу $tg\varphi = \dfrac{y}{x}$, так как $-\pi < \arg z \leq \pi$, то из формулы $tg\varphi = \dfrac{y}{x}$ находим

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, при\ x > 0; \\ arctg\dfrac{y}{x} + \pi, при\ x < 0, y > 0; \\ arctg\dfrac{y}{x} - \pi, при\ x < 0, y < 0. \end{cases} \tag{60}$$

Запись числа z в виде

$$z = re^{i\varphi}, z = |z|e^{i\arg z} \tag{61}$$

называют *показательной формой* (или экспоненциальной) комплексного числа.

8.1.1. Следующие комплексные числа изобразить векторами и записать в тригонометрической и показательной формах:

а) $z = 2 + 2i$; б) $z = -1 + i\sqrt{3}$; в) $z = -5i$; г) $z = -3 - 2i$;
д) $z = -3\left(\cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5}\right)$.

Используем формулы (58) – (61).

а) Находим модуль и аргумент комплексного числа $z = 2 + 2i$. Здесь $x = 2 > 0$, $y = 2 > 0$, $|z| = r = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}, \varphi = \arg z = arctg\frac{2}{2} = \frac{\pi}{4}$. Значит,

$$2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}^{i\frac{\pi}{4}}.$$

б) Для $z = -1 + i\sqrt{3}$ имеем $r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2, \varphi = arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) + \pi = \frac{2}{3}\pi$.

Значит,

$$-1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right) = 2e^{i\cdot\frac{2}{3}\pi}.$$

в) Имеем: $r = \sqrt{0 + 25} = 5, \varphi = -\frac{\pi}{2}$. Значит,

$$-5i = 5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 5e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

г) Имеем: $r = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}, \varphi = arctg\left(\frac{-2}{-3}\right) - \pi = arctg\frac{2}{5} - \pi$. Значит,

$$-3 - 2i = \sqrt{13}\left(\cos\left(arctg\frac{2}{5} - \pi\right) + i\sin\left(arctg\frac{2}{5} - \pi\right)\right) = \sqrt{13}^{i\left(arctg\frac{2}{5} - \pi\right)}.$$

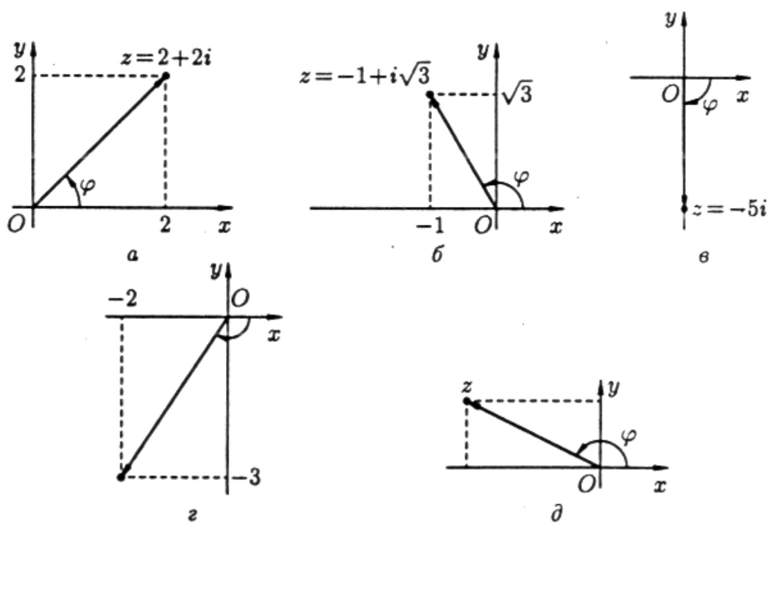

Рис. 30

д) Запись $z=-3\left(\cos\frac{\pi}{5}-i\sin\frac{\pi}{5}\right)$ не является тригонометрической формой записи комплексного числа (см. формулу (59)).

Перепишем z в виде $z=3\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)$. Надо найти такой угол φ, что $\cos\varphi=-\cos\frac{\pi}{5}, \sin\varphi=\frac{\pi}{5}$. Таким углом является $\pi-\frac{\pi}{5}=\frac{4}{5}\pi,$ т.е. $\varphi=\frac{4}{5}\pi$. Значит,

$$z=3\left(\cos\frac{4}{5}\pi+i\sin\frac{4}{5}\pi\right)=3\cdot e^{i\cdot\frac{4}{5}\pi}.$$

Изображения чисел представлены на рис. 30.

8.1.2. Построить на комплексной плоскости C векторы, соответствующие комплексным числам *z*. Найти $|z|$ и arg *z*:

а) z = -5; б) z = 2,3i; в) z = -1 - i; г) z = 3 - i.

8.1.3. Дана точка z = 2 + 3i. Построить на этой же плоскости точки:

$$-2+3i, -2-3i, 2-3i, 2+0i, 0+3i, -2+0i, 0-3i.$$

8.1.4. Представить в алгебраической форме числа:

а) $2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$; б) $-\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

8.1.5. Даны комплексные числа

а) z = 5 - 5i; б) z = 2.

Найти Re *z*, Im *z*, ,$|z|$ arg *z*.

8.1.6. Представить в тригонометрической форме комплексные числа:

а) 2 + 4i; б) $\sqrt{3}-i$; в) 2001; г) $2\cos\frac{\pi}{3}-2i\sin\frac{\pi}{3}$.

8.1.7. Представить в показательной форме комплексные числа:

а) 12 i; б) $1-\sqrt{3}$; в) $-4-3i$; г) $\sin\frac{\pi}{3}+i\cos\frac{\pi}{3}$.

8.1.8. Изобразить на комплексной плоскости C множества точек, удовлетворяющих следующим условиям:

а) $|z|$ = 2; б) arg z = $\frac{\pi}{3}$; в) $0\le \operatorname{Im} z<1.5$; г) Re z >1; д) $\begin{cases}|z|\le 1;\\ \frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{3}{4}\pi\end{cases}$.

а) Согласно формуле (58), имеем $\sqrt{x^2+y^2}=2$, т. е. $x^2+y^2=4$. Множество точек, удовлетворяющих условию $|z|=2$, т.е. $x^2+y^2=4$, представляет собой окружность радиуса $R=2$ с центром в начале координат.

б) Точки z лежат на луче, выходящем из точки O(0; 0) под углом $\frac{\pi}{3}$ к действительной оси.

в) Неравенство $0 \le \operatorname{Im} z < 1.5$ можно переписать так: $0 \le y < 1.5$.

г) Условие Re $z > 1$ или $x > 1$ определяет множество всех точек, расположенных справа от прямой $x = 1$.

д) Множества точек, расположенных внутри и на границе круга $|z| \le 1$, заключенных между лучами $\varphi=\frac{\pi}{4}, \varphi=\frac{3\pi}{4}$, удовлетворяют условию $\begin{cases} |z| \le 1; \\ \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3}{4}\pi. \end{cases}$

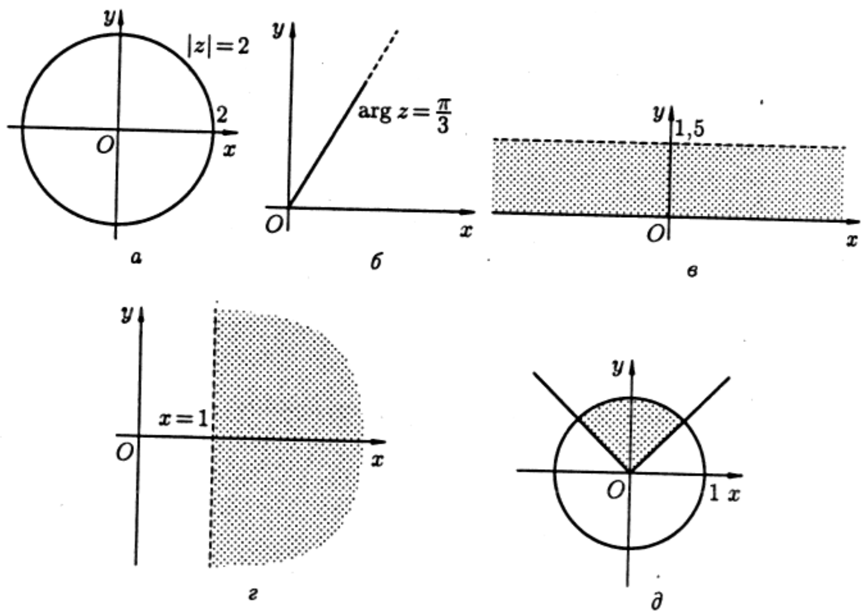

Рис. 31

Множества точек а–д изображены на рис. 31.

8.1.9. Найти все значения аргумента комплексного числа:

а) -6; б) $\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{3}$.

8.1.10. Найти главное значение аргумента комплексного числа $z(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, если:

а) $\sin\varphi$ = -0,5; б) $\sin\varphi$ = -0,5, $\cos\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

8.1.11. Представить в тригонометрической и алгебраической формах числа:

а) $5e^{-\frac{\pi}{2}i}$; б) $-2(\cos 30° + i\sin 30°)$.

8.1.12. Представить в тригонометрической и показательной формах числа:

а) $-3+4i$; б) $3(\cos 10° + i\sin 10°)$; в) $1 + i$*tg 1.

8.1.13. Представить в тригонометрической форме комплексные числа:

а) $1+\cos 22° + i\sin 22°$; б) $\sin\varphi + i\cos\varphi$; в) 1 - i tg a, если $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$;

г) $5\left(\cos\frac{4}{3}\pi - i\sin\frac{4}{3}\pi\right)$.

8.1.14. Найти наибольшее и наименьшее значения $|z|$, если z=2sin$a$+$i$cos$a$.

8.1.15. При каких значениях x и y комплексные числа $z = x + 2i$ и $z = 4+\sqrt{3}yi$?

а) Равны. б) Сопряжены.

8.1.16. Могут ли быть сопряженными: два действительных числа; два чисто мнимых; действительное и мнимое число?

8.1.17. Пусть arg z = $\frac{3}{7}\pi$. Чему равен arg $\bar{z}$?

8.1.18. Какое из чисел больше: $z = 2 - i$ или $z = -2 + i$?

§2. ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

Основные действия над комплексными числами $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$, заданные в *алгебраической форме,* определяются следующими равенствами:

$$(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2), \tag{62}$$

$$(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2), \tag{63}$$

$$(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2), \tag{64}$$

$$\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}, \tag{65}$$

(при $z_2 \neq 0$).

Из равенства (63) следует, что

$$|z_1-z_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2-(y_1-y_2)^2}, \tag{66}$$

т. е. модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию между точками, изображающими эти числа на плоскости. Из равенства (64) следует, что

$$i^2 = -1.$$

При умножении комплексных чисел $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), z_2 = = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, заданных в *тригонометрической форме,* их модули перемножаются, а аргументы складываются, т. е.

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big).$$

Отсюда следует *формула Муавра для возведения комплексных чисел* в натуральную степень:

$$z^n = \big(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\big)^n = r^n \cdot (\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \tag{67}$$

Деление комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, осуществляется по формуле

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \big(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\big).$$

Корень n-й степени из комплексного числа имеет n различных значений, которые находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \text{где } k=0,1,2,3,..,n\text{-l}. \tag{68}$$

8.2.1. Найти $z_1+z_2, z_1-z_2, z_1\cdot z_2, \frac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 2 - i$.

Используя формулы (62)-(65), находим:

$$z_1 + z_2 = (1+2i) + (2-i) = 3+i;$$
$$z_1 - z_2 = (1+2i) - (2-i) = -1+3i;$$
$$z_1 \cdot z_2 = (1+2i)\cdot(2-i) = 2 - i + 4i - 2i^2 = 4+3i;$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(1+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{5i}{5} = i.$$

8.2.2. Найти $\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{15}$.

Запишем число z = $-1-i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме:

$$|z| = r = \sqrt{1+3} = 2, \arg z = \varphi = tg\frac{\left(-\sqrt{3}\right)}{(-1)} - \pi = -\frac{2}{3}\pi, \text{ т.е.}$$

$$-1-i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right).$$

По формуле Муавра (67) имеем

$$(-1-i\sqrt{3})^{15}=\left[2\left(\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right)\right]^{15}=2^{15}\cdot(\cos(-10\pi)+i\sin(-10\pi))=$$

$$=2^{15}(1+0i)=2^{15}=32768.$$

8.2.3. Вычислить:

а) $(1-i)\cdot(-3+2i)$; б) $\dfrac{1+2i}{3-i}+(1-i)^2$.

8.2.4. Вычислить:

а) $\dfrac{2+3i}{4-2i}+\dfrac{1-3i}{2i}$; б) $i^2+i^3+i^4+i^5$.

8.2.5. Найти:

а) $\left(\dfrac{i^{16}+3}{i\ \ +3}\right)^5$; б) $(1+i)^{10}$.

8.2.6. Найти:

а) $\dfrac{1+i}{\left(\sqrt{3}+i\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)}$; б) $(-1+i)^5$.

8.2.7. Доказать, что:

а) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$; б) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$.

8.2.8. Доказать, что:

а) $\operatorname{Re} z=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$; б) $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$.

8.2.9. Вычислить: $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot .....i^{100}$.

8.2.10. Вычислить: $i^4+i^{14}+i^{24}+i^{34}+i^{44}+i^{54}+i^{64}+i^{74}+i^{84}$.

8.2.11. Найти Re z и Im z, если

а) $z=(2-i)^2\cdot(3+4i)$; б) $z=i^8+\dfrac{5+i}{1+3i}$.

8.2.12. Решить уравнения:

а) $z^2+\overline{z}=0;$; б) |z| - 3z = -12i.

8.2.13. Вычислить:

а) $\left(\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{9}+i\sin\dfrac{\pi}{9}\right)\right)^{12}$; б) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right)^{100}$.

8.2.14. Доказать справедливость тождеств:

а) $\cos 3\varphi=4\cos^3\varphi-3\cos\varphi;$; б) $\sin 3\varphi=4\sin\varphi-4\sin^3\varphi$.

Указание. Использовать формулу Муавра: $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^3=\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi$.

8.2.15. Найти все значения корня:

а) $\sqrt[3]{-i}$; б) $\sqrt[4]{8-8\sqrt{3}\cdot i}$; в) $\sqrt[4]{-16}$; г) $\sqrt[5]{1+i}$.

8.2.16. Найти расстояние между точками:

а) $1-6i$ и $2i$; б) $1+4i$ и $3-2i$.

8.2.17. Найти комплексные числа, каждое из которых сопряжено со своим квадратом.

8.2.18. Решить уравнение $(x \in C)$:

а) $x^2 - 4x + 8 = 0$; б) $3x^2 - x + 2 = 0.$

8.2.19. Выполнить действия:

а) $\dfrac{8(\cos 40° + i\sin 40°)}{16\left(\cos(-50°) + i\sin(-50°)\right)}$; б) $\sqrt{2}\cdot(1-i)(1+i\sqrt{3})(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi).$

8.2.20. Выполнить действия. Результат предоставить в алгебраической форме:

а) $\left(\sqrt{2}\cdot e^{\frac{2\pi}{9}i}\right)^3$; б) $3\cdot e^{\frac{\pi}{5}i}\cdot 4e^{\frac{4}{5}\pi i}.$

8.2.21. На плоскости С нарисовать область, заданную неравенствами:

а) $|z+i| < 1, |z+i| \geq 1$; б) $|z-2-i| \geq 1{,}1 \leq \operatorname{Re} z < 3{,}0 < lmz \leq 3$;

в) $|z| < 2, \operatorname{Re} z \geq 1, \arg z < \dfrac{\pi}{4}.$

8.2.22. Дано: $z = \dfrac{1}{\sqrt{2}(1-i)} - \dfrac{1}{2e^{i\frac{\pi}{4}}}$. Найти: $\bar{z}$ и $\dfrac{1}{z}$.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: в 2 т. / Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1985. – Т. 1-2.
2. Смирнов, В.И. Курс высшей математики: в 4т. / В.И. Смирнов. – М.: Наука, 1967. – Т.1. – 480 с.; Т. 2. – 656 с.
3. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2ч. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевников. – М.: Высш. шк., 1986. – Ч.1-2.
4. Шипачев, В.С. Высшая математика / В.С. Шипачев. – М.: Высш. шк., 1990.

ОГЛАВЛЕНИЕ

НЕПРЕРЫВНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Составители:
Городов А.А., Кузнецов А.А., Миронов Г.В., Паршуков Д.В.,
Середа В.А., Кодитя Е.В., Бородина Е.В., Толмачев И.В.,
Шлепкин А.А., Тухватуллина Л.Р., Усенко Н.В., Филиппов К.А.,
Ширяева Т.А., Шлепкин А.К.

Редактор Т.М. Мастрич

Санитарно-эпидемиологическое заключение № 24.49.04.953.П. 000381.09.03 от 25.09.2003 г.
Подписано в печать 02.07.2009. Формат 60х84/16. Бумага тип. № 1962
Печать – ризограф. Объем 10,75 п.л. Тираж 110 экз. Заказ № 2218
Издательство Красноярского государственного аграрного университета
660017, Красноярск, ул. Ленина, 117