

Министерство сельского хозяйства
Российской Федерации
Красноярский государственный аграрный университет

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

курс лекций

Для студентов факультета
пищевой и перерабатывающей промышленности

Красноярск 2004

Рецензент
доктор физико-математических наук, профессор
А.К. Шлепкин

Селиванов, А.П.

Начертательная геометрия: Курс лекций / А.П. Селиванов, Е.А. Колот; Краснояр. гос. аграр. ун-т. – Красноярск, 2004. – 50 с.

В курсе лекций по начертательной геометрии изложен материал о правилах изображения на плоскости объемных фигур. Он состоит из восьми лекций в которых объясняется как изображаются на эюре "Монжа" плоские фигуры (точка, прямая, плоскость), объемные фигуры (многогранники и поверхности вращения), их взаимное расположение. Даны приемы преобразования чертежа. Указаны правила и примеры решения метрических позиционных и других задач.

Предназначены для студентов факультета пищевой и перерабатывающей промышленности.

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Красноярского государственного аграрного университета

© Красноярский государственный аграрный университет,
2004

Предисловие

В число дисциплин, составляющих основу инженерного образования, входит *начертательная геометрия*.

Предметом начертательной геометрии является изложение и обоснование способов построения изображений пространственных форм на плоскости и способов решения задач геометрического характера по заданным изображениям этих форм.

Изображения, построенные по правилам, изучаемым в начертательной геометрии, позволяют представить мысленно форму предметов и их взаимное расположение в пространстве, определить их размеры, исследовать геометрические свойства, присущие изображаемому предмету.

Начертательная геометрия, вызывая усиленную работу пространственного воображения, развивает его.

Наконец, начертательная геометрия передает ряд своих выводов в практику выполнения технических чертежей, обеспечивая их выразительность и точность, а следовательно, и возможность осуществления изображенных предметов.

Лекция №1. Точка

Краткое содержание лекции

Сущность метода проекций. Проекции центральные и параллельные, косоугольные и ортогональные. Понятие однозначности и обратимости чертежа. Комплексный чертеж точки. Эпюр Монжа. Изображение на третью плоскость проекций. Натуральная система координат. Безосный комплексный чертеж точки.

Сущность метода проекций

Правила построения изображений, излагаемые в начертательной геометрии, основаны на *методе проекций*. В основе этого слова латинское *projectio* – бросание вперед, в даль (от *projicere* – бросить, выставить вперед).

Рассмотрение метода проекций начинают с построения проекций точки, так как при построении изображения любой пространственной формы рассматривается ряд точек, принадлежащих этой форме.

Проекции бывают центральные и параллельные, косоугольные и ортогональные.

Проекции центральные

Для получения центральных проекций (центральное проецирование) надо задаться плоскостью проекций и центром проекций – точкой, не лежащей в этой плоскости (рис. 1: плоскость Π_0 и точка S).

Взяв некоторую точку A и проведя через S и A прямую линию до пересечения ее с пл. Π_0 , получаем точку A_0 . Так же поступаем с точками B и C . Точки A_0 , B_0 , C_0 являются центральными проекциями точек A , B , C на пл. Π_0 : они получаются в пересечении проецирующих прямых (или, иначе, проецирующих лучей) SA , SB , SC , с плоскостью проекций.

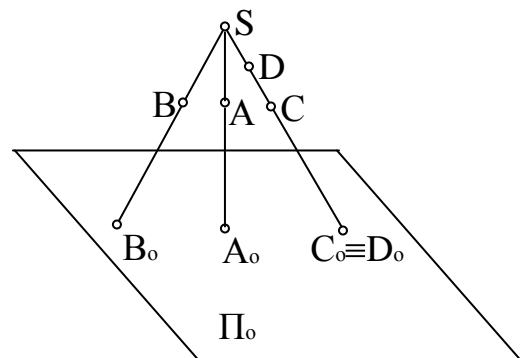


Рис. 1

Если взять еще одну точку D , лежащую на проецирующей прямой SC , то проекции C_0 и D_0 совпадут (знак \equiv означает совпадение).

Итак, при заданных плоскости проекций и центре проекций можно построить проекцию точки; но имея проекцию, нельзя по ней определить положение самой точки в пространстве, так как любая точка

проецирующей прямой проецируется в одну и ту же точку; для единственного решения, очевидно, необходимы дополнительные условия.

Проекции параллельные

Условимся считать все проецирующие прямые параллельными. Для их проведения должно быть указано некоторое направление (см. стрелку на рис. 2).

Так построенные проекции называются параллельными. Параллельное проецирование можно рассматривать как частный случай центрального, если принять, что центр проекций бесконечно удален.

Следовательно, параллельной проекцией точки будем называть точку пересечения проецирующей прямой, проведенной параллельно заданному направлению, с плоскостью проекций.

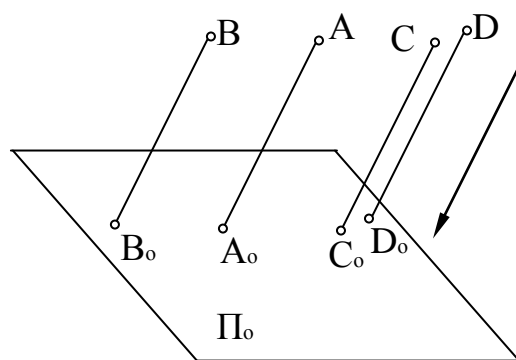


Рис. 2

Параллельные проекции делятся на косоугольные и ортогональные (прямоугольные). В первом случае направление проецирования составляет с плоскостью проекций угол, не равный 90° ; во втором случае проецирующие прямые перпендикулярны к плоскости проекций.

Метод Монжа

Сведения и приемы построений, обусловливаемые потребностью в плоских изображениях пространственных форм, накапливались постепенно еще с древних времен. В течении продолжительного периода плоские изображения выполнялись преимущественно как изображения наглядные. С развитием техники первостепенное значение приобрел вопрос о применении метода, обеспечивающего точность и удобоизмеримость изображения, т. е. возможность точно установить место каждой точки изображения относительно других точек или плоскостей и путем простых приемов определить размеры отрезков линий и фигур. Постепенно накопившиеся отдельные правила и приемы построений таких изображений были приведены в систему и развиты в труде французского ученого Монжа, изданном в 1799 г. под названием «Geometrie descriptive».

Гаспар Монж (1746 – 1818) вошел в историю как крупный французский геометр, инженер, общественный и государственный деятель в период революции 1789 – 1794 г.г. и правления Наполеона I, один из основателей знаменитой Политехнической школы в Париже, участник работы по введению метрической системы мер и весов. Изложенный Монжем метод параллельного ортогонального проецирования на взаимно

перпендикулярные плоскости проекций – обеспечивая точность, выразительность и удобоизмеримость изображений предметов на плоскости, был и остается основным методом составления чертежей.

Рассмотрим три взаимно перпендикулярные плоскости (рис. 3).

Π_1 – горизонтальная плоскость проекций;

Π_2 – фронтальная плоскость проекций;

Π_3 – профильная плоскость проекций.

Линии пересечения плоскостей будут осями проекций X, Y, Z. Возьмем в пространстве некоторую точку A и спроецируем ее перпендикулярно на каждую плоскость проекций. При этом точка A_1 является горизонтальной, A_2 – фронтальной и точка A_3 – профильной проекциями точки A, расположенной в пространстве.

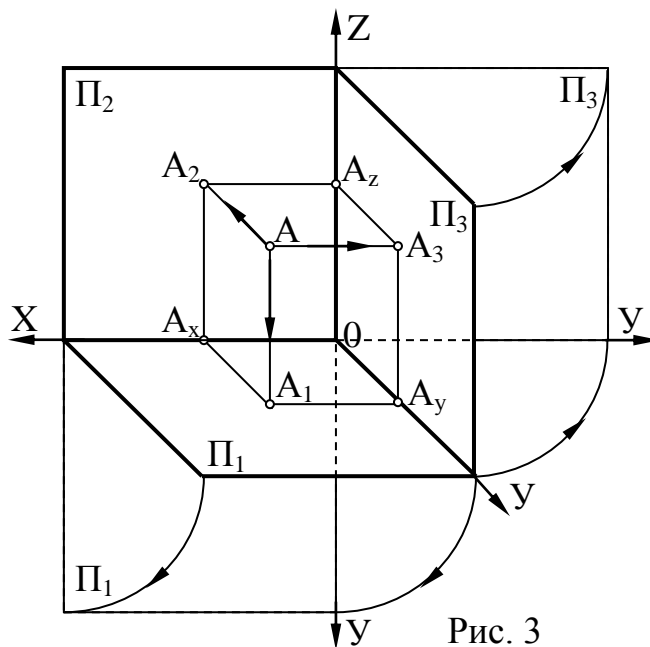


Рис. 3

Поскольку точка A спроецирована на каждую из плоскостей проекций под прямым углом, то отрезок AA_1 определяет положение точки A относительно плоскости Π_1 , отрезок AA_2 – относительно плоскости Π_2 , а отрезок AA_3 – относительно плоскости Π_3 . Если из точек A_1, A_2, A_3 провести перпендикуляры к осям проекций, то они пересекутся в точках A_x, A_y, A_z . Отметим, что отрезки $AA_1 = A_2A_x = A_z0 = A_3A_y$, $AA_2 = A_1A_x = A_y0 = A_3A_z$ и $AA_3 = A_1A_y = A_x0 = A_2A_z$.

Если мысленно разрезать полученную пространственную систему координат по оси Y и развернуть плоскость Π_1 вокруг оси X, а плоскость Π_3 вокруг оси Z, чтобы они совместились с плоскостью Π_2 , то тогда пространственный чертеж может быть представлен в плоском виде. В результате чертеж приобретает более простое начертание (рис. 4), получивший название комплексный чертеж или эпюр.

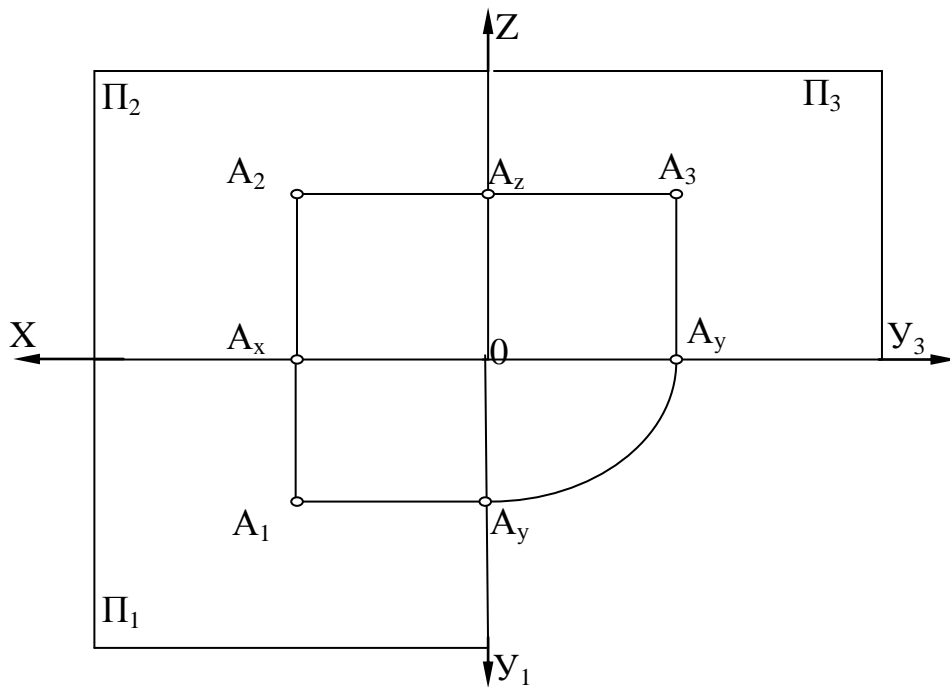


Рис. 4

Отрезок прямой A_1A_2 , соединяющий горизонтальную и фронтальную проекции точки A , на эпюре называется линией связи и проводится всегда перпендикулярно оси X , а фронтальная A_2 и профильная A_3 проекции точки расположены на линии связи перпендикулярной к оси Z . Таким образом, эпюр представляет собой комплексное ортогональное изображение геометрических тел или их элементов, выполненное с соблюдением проекционных связей между отдельными проекциями.

Согласно рис. 4, на эпюре утратилось изображение самой точки A и по сравнению с пространственным изображением уменьшилась наглядность чертежа. Но вместе с тем эпюр обеспечил большие возможности для точного измерения, а следовательно, и отображения. Для воссоздания по эпюру истинного положения точки в пространстве необходимо мысленно вернуть плоскости Π_1 и Π_3 в положение перпендикулярное к плоскости Π_2 и восставить перпендикуляры из проекций точек до их взаимного пересечения.

По двум проекциям всегда можно судить о положении точки в пространстве. Поэтому, для упрощения чертежа, при решении некоторых задач профильную проекцию не выполняют, вычерчивается

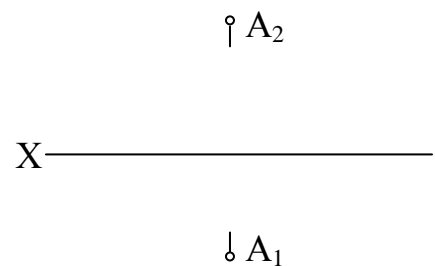


Рис. 5

только ось X, а оси Z и Y подразумевают. Сами плоскости проекций тоже подразумеваются (рис. 5). Линии связи можно заменять черточками. Координаты записываются в круглых скобках в миллиметрах через точку с запятой в следующем порядке X;Y;Z, например, A(10;15;20).

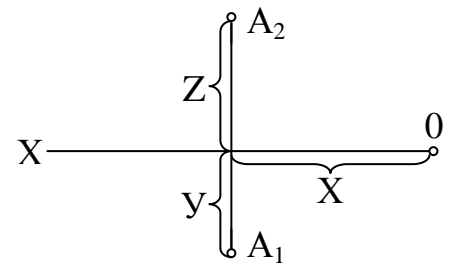


Рис. 5а

Задача. Определить координаты точки A (рис. 5а).

Решение. Координата X это расстояние от начала координат до линии связи между горизонтальной и фронтальной проекциями. Координата Y – расстояние от оси X до горизонтальной проекции A₁. Координата Z – расстояние от оси X до фронтальной проекции. Замерив эти расстояния запишем A(28;11;16).

Начертание эпюра может быть еще более упрощено (рис. 6), если не обозначать положение осей проекций. На практике это допустимо в случаях, когда не требуется фиксирование абсолютного положения точек в пространстве, а необходимо лишь правильно показать их взаимное положение.

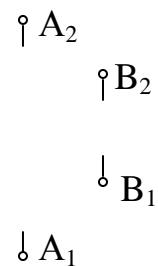


Рис. 6

Задача. Определить насколько левее или правее (рис. 6), ближе или дальше, выше или ниже находится точка A относительно точки B и записать ее координаты, если координаты точки B(0;0;0).

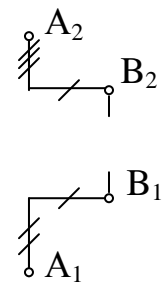


Рис. 6а

Решение. Точка A находится левее точки B (рис. 6а) на расстоянии, обозначенном одной чертой, равным 10 мм (координата X), ближе на расстоянии, обозначенном двумя чертами, равным 10 мм (координата Y), выше на расстоянии, обозначенном тремя чертами, равным 7 мм (координата Z). Координаты точки A(10;10;7).

Зная положение двух любых проекций точек, всегда можно построить третью. Существует несколько способов построения третьей проекции по двум существующим. Вот некоторые из них.

Есть горизонтальная и фронтальная проекции точки A (рис. 7). Необходимо построить профильную проекцию.

1. От фронтальной проекции A₂ поводится линия связи перпендикулярно оси Z (рис. 8). Замеряется координата Y – расстояние от оси до горизонтальной проекции A₁ (выделено фигурной скобкой) и

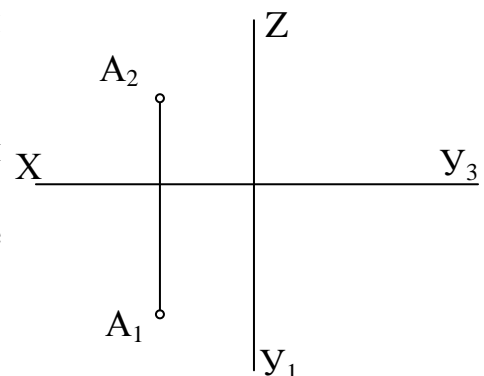


Рис. 7

откладывается по линии связи от оси Z. В этом месте и будет профильная проекция A_3 .

- От фронтальной проекции A_2 поводится линия связи перпендикулярно оси Z (рис. 9). От горизонтальной проекции A_1 вправо проводится линия связи до пересечения с линией проходящей через начало координат под углом 45° к оси Y. От точки пересечения вверх проводится линия связи. В месте пересечения линий связи будет фронтальная проекция A_3 .

- От фронтальной проекции A_2 поводится линия связи перпендикулярно оси Z (рис. 10). От горизонтальной проекции A_1 вправо проводится линия связи до пересечения с осью Y_1 . От точки пересечения проводится дуга окружности с центром в начале координат до пересечения с осью Y_3 . От точки пересечения вверх проводится линия связи. В месте пересечения линий связи будет фронтальная проекция A_3 .

Поскольку плоскости проекций являются бесконечными, то их можно на чертеже продолжить за линию взаимного пересечения (рис. 11). Тогда плоскости Π_1 и Π_2 разделят все пространство на четыре зоны, называемые четвертями. Нумерация четвертей принята в направлении против часовой стрелки. Проецируемые точки могут находиться в любой из четырех зон. Все высказанные ранее положения о построении эпюра в четверти I в равной степени относятся и к другим четвертям.

Поэтому несложно построить эпюры точек, находящихся в этих четвертях. Схема совмещения горизонтальной плоскости проекций Π_1 с вертикальной плоскостью сохраняется прежней. Но при этом нужно иметь в виду, что задняя половина плоскости (за осью X), при опускании передней половины вниз, поднимается

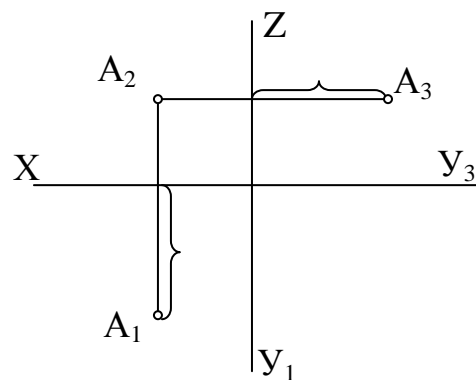


Рис. 8

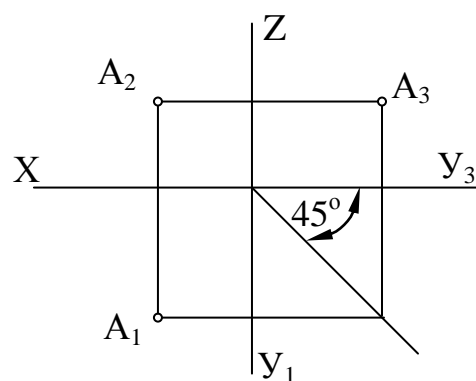


Рис. 9

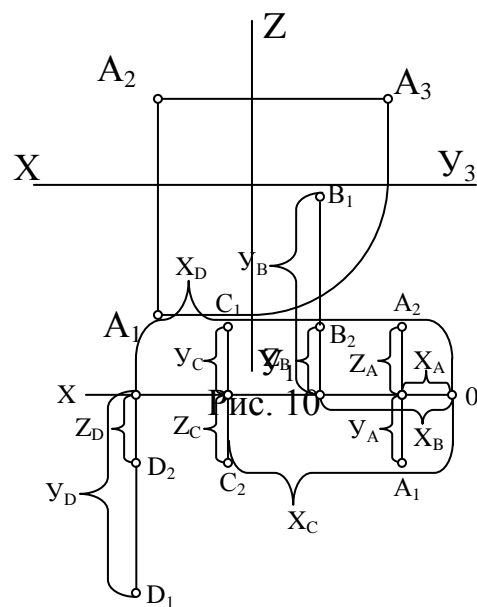


Рис. 12а

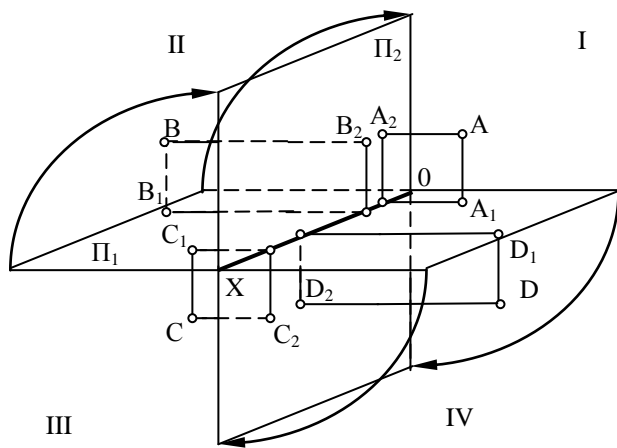


Рис. 11

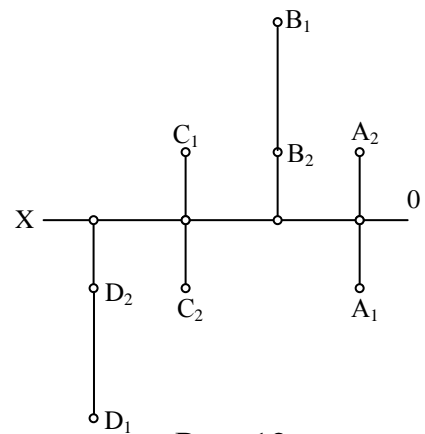


Рис. 12

вверх. Следовательно, проекции точек, расположенных на второй (задней) половине плоскости проекций, на эюре будут отображаться выше оси X (например B_1). Поэтому, при чтении чертежей, необходимо быть внимательным и определять фронтальная это или горизонтальная проекция точки по индексам.

Задача. Определить координаты точек A, B, C, D (рис. 12).

Решение. Замеряем координаты точек, отмеченные фигурными скобками (рис. 12a) и записываем их с учетом знака: $A(7;9;9)$; $B(19;-26;9)$; $C(31;-9;-9)$; $D(43;26;-9)$.

Все выше сказанное относится и к тому, что если будет осуществляться проецирование и на профильную плоскость проекций.

Лекция №3. Взаимное расположение двух прямых

Краткое содержание лекции

Параллельные, пересекающиеся и скрещивающиеся прямые. Определение видимости конкурирующих точек. О проекциях прямого угла.

Прямые линии в пространстве могут быть параллельными, пересекающимися и скрещивающимися.

Если прямые в пространстве **параллельны**, то их одноименные проекции тоже параллельны (рис. 1). Справедливо и обратное утверждение. Если одноименные проекции прямых параллельны, то прямые в пространстве тоже параллельны.

Исключение составляют профильные прямые (рис. 2). По горизонтальной и фронтальной проекциям нельзя определить взаимное положение профильных прямых, для этого необходимо обратиться к профильной проекции.

Если прямые в пространстве **пересекаются**, то их одноименные проекции тоже пересекаются и точки пересечения проекций лежат на одной линии связи (рис. 3).

Справедливо и обратное утверждение. Если одноименные проекции прямых пересекаются и точки пересечения лежат на одной линии связи, то прямые в пространстве пересекаются.

Если прямые в пространстве **скрещиваются**, то их одноименные проекции могут пересекаться (рис. 4), но точки пересечения проекций не лежат на одной линии связи. Справедливо и обратное

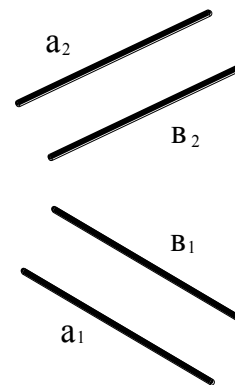


Рис. 1

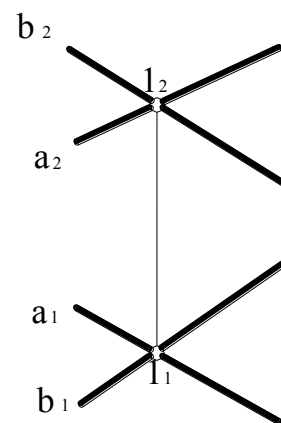
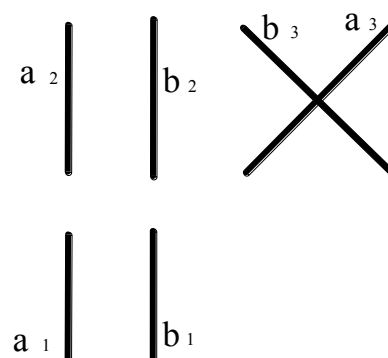
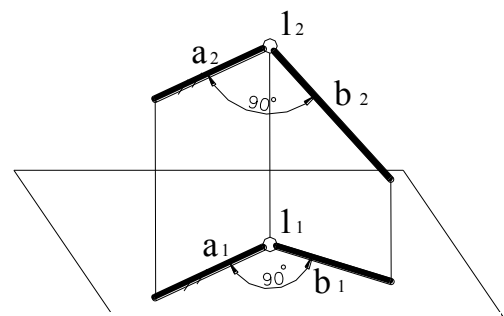
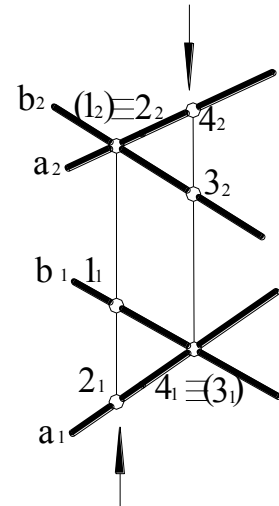


Рис. 3

утверждение. Если одноименные проекции прямых пересекаются, но точки пересечения не лежат на одной линии связи, то прямые в пространстве скрещиваются.

Места пересечения проекций скрещивающихся прямых (рис. 4) называются **конкурирующими точками** и необходимо определить какая точка видима, а какая нет. Видимость конкурирующих точек 1 и 2 на фронтальной проекции определяется по горизонтальной. Наблюдатель смотрит по стрелке, видима та точка, которая ближе к наблюдателю. Ближе точка 2, она видима, а точка 1 нет, ее заключаем в скобки. Видимость конкурирующих точек 3 и 4 на горизонтальной проекции определяется по фронтальной. Наблюдатель смотрит по стрелке, видима та точка, которая ближе к наблюдателю. Ближе точка 4, она видима, а точка 3 нет, ее заключаем в скобки.



Свойства прямого угла

Если две прямые общего положения в пространстве пересекаются под прямым углом, то их проекции образуют угол, не равный 90° . Прямой угол проецируется в истинную величину, если одна из его сторон параллельна плоскости проекций (рис. 5 – пространственное изображение; рис. 6 – комплексный чертеж).

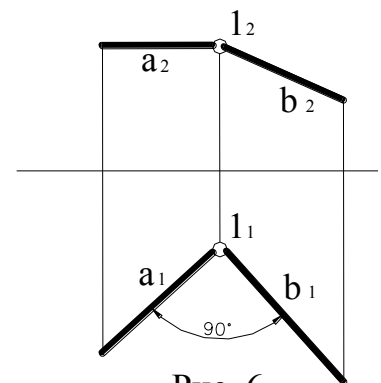


Рис. 6

Лекция №4. Плоскость

Тема и краткое содержание лекции

Задание плоскости общего положения на комплексном чертеже. Взаимное положение прямой и плоскости. О принадлежности точки плоскости. Прямые особого положения в плоскости. Плоскости проецирующие и уровня. Нахождение точки встречи прямой и плоскости.

Положение плоскости в пространстве можно задать пятью способами:

1. Тремя точками, не лежащими на одной прямой (рис. 1);

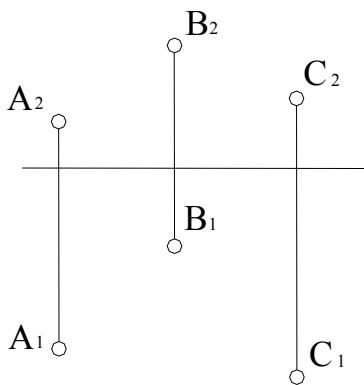


Рис. 1

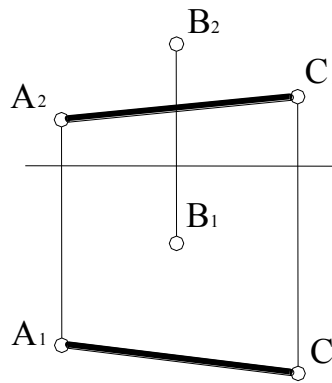


Рис. 2

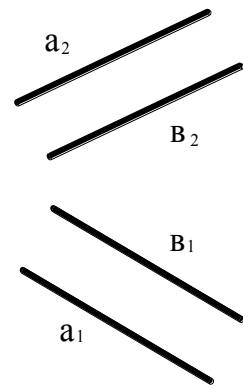


Рис. 3

2. Прямой и точкой лежащей вне ее (рис. 2);

3. Двумя параллельными прямыми (рис. 3);

4. Двумя пересекающимися прямыми (рис. 4);

5. Плоской фигурой (рис. 5).

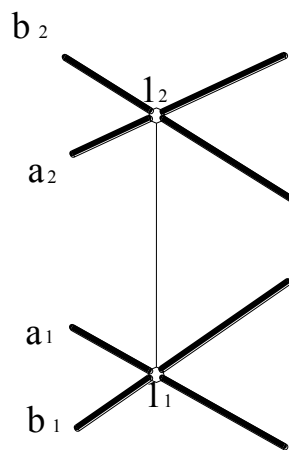


Рис. 4

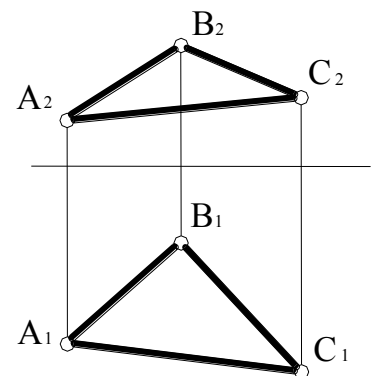


Рис. 5

Вполне очевидно, что каждый последующий вид задания плоскости может быть получен из предыдущего.

В зависимости от того, какое положение занимают плоскости относительно плоскостей проекций, можно выделить:

1. Плоскости общего положения – не перпендикулярные и не параллельные плоскостям проекций (см. рис. 1; 2; 3; 4; 5).

2. Плоскости проецирующие – перпендикулярные плоскостям проекций (рис. 6; 7; 8).

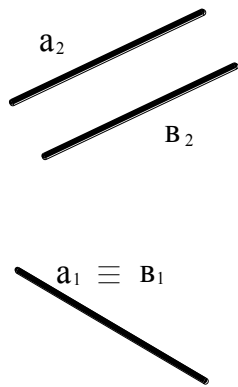


Рис. 6

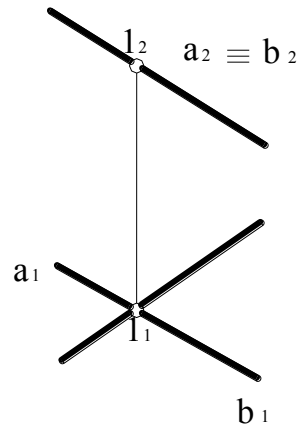


Рис. 7

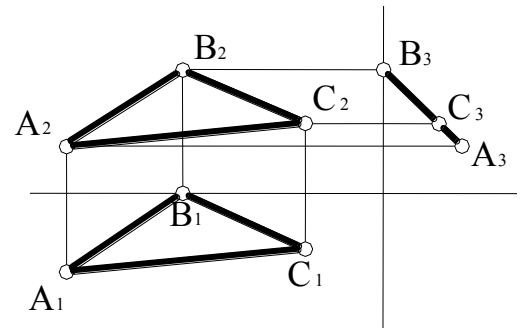


Рис. 8

- а) горизонтально-проецирующая плоскость б) фронтально-проецирующая плоскость в) профильно-проецирующая плоскость

Горизонтально-проецирующая плоскость – перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций Π_1 . Фронтально-проецирующая плоскость – перпендикулярна фронтальной плоскости проекций Π_2 . Профильно-проецирующая плоскость – перпендикулярна профильной плоскости проекций Π_3 .

3. Плоскости уровня – параллельные плоскостям проекций (рис. 9; 10; 11).

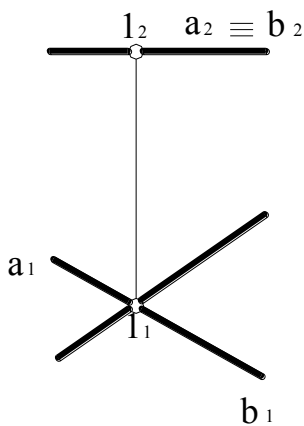


Рис. 9

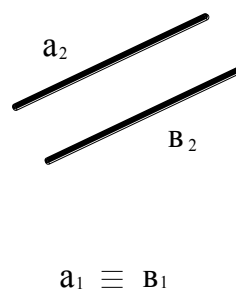


Рис. 10

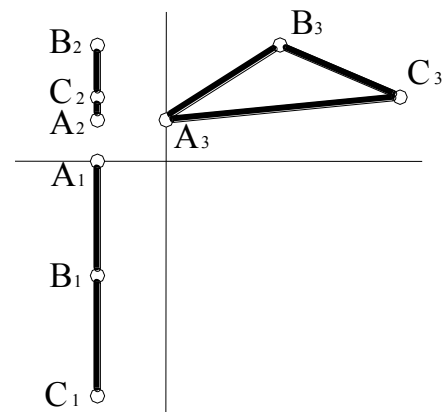


Рис. 11

- а) горизонтальная плоскость б) фронтальная плоскость в) профильная плоскость

Горизонтальная плоскость – параллельна горизонтальной плоскости проекций Π_1 . Фронтальная плоскость – параллельна фронтальной плоскости проекций Π_2 . Профильная плоскость – параллельна профильной плоскости проекций Π_3 .

Взаимное положение прямой и плоскости

Прямая и плоскость в пространстве могут совпадать, быть параллельными или пересекаться.

Прямая принадлежит плоскости, если она проходит через две точки принадлежащих плоскости, или проходит через одну точку принадлежащую плоскости и параллельна какой либо прямой лежащей в плоскости. Примеры приведены на рис. 12, прямая m принадлежит плоскости ABC ($m \in ABC$), потому что проходит через точки A и 1 принадлежащих плоскости. Прямая d принадлежит плоскости ABC ($d \in ABC$), потому что проходит через точку B принадлежащую плоскости и параллельна прямой AC ($d \parallel AC$).

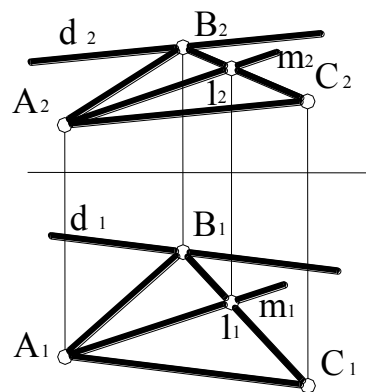


Рис. 12

Из числа прямых, лежащих в плоскости, выделяются **прямые особого положения**. К их числу относятся прямые уровня: горизонталь плоскости, фронталь плоскости (рис. 13). Эти прямые играют важную роль при решении некоторых задач.

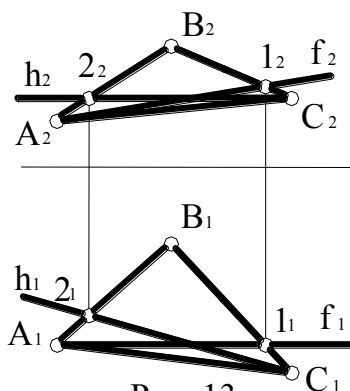


Рис. 13

Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит любой прямой лежащей в плоскости. Например: точки 1 рис. 12; 1 и 2 рис. 13.

Прямая параллельна плоскости, если она проходит через точку, не принадлежащую плоскости и параллельна любой прямой принадлежащей плоскости (рис. 14). Прямая d параллельна плоскости ABC , т.к. она проходит через точку 1 не принадлежащую плоскости и параллельна прямой AC принадлежащей плоскости.

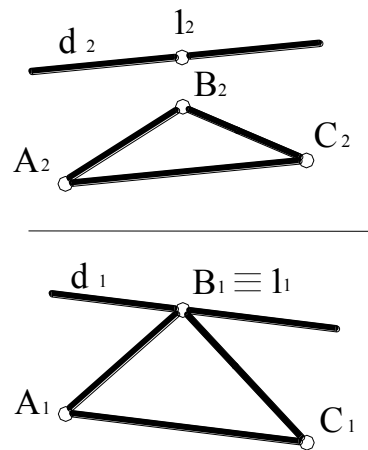


Рис. 14

Если прямая и плоскость не параллельны и не совпадают, то они пересекаются и задача сводится к нахождению точки пересечения и определению участков видимости прямой. Разберем это на примере (рис. 15).

Задача. Построить точку встречи прямой d с плоскостью, заданную ΔABC и определить участки видимости прямой.

Решение. Проведем фронтально-проецирующую плоскость Σ , совпадающую с прямой d . Можно было провести и горизонтально-проецирующую плоскость, совпадающую с прямой d . Пл. Σ пересекает ΔABC по прямой $1-2$. Фронтальная проекция прямой 1_2-2_2 , совпадает с фронтальной проекцией прямой d_2 . Построив горизонтальную проекцию прямой $1-2$, мы найдем, где она пересекается с прямой d . Это и будет точка встречи прямой d с плоскостью ABC . Точка 1 лежит на прямой AB , а точка 2 на прямой AC . Находим их горизонтальные проекции по линиям связи. Соединив, получаем горизонтальную проекцию точки встречи N_1 . Фронтальную проекцию N_2 находим по линии связи.

Участки видимости прямой d определяются с помощью конкурирующих точек. Это места пересечения проекций прямой d с проекциями сторон ΔABC . Участки видимости прямой d определяются отдельно для каждой плоскости проекций. На горизонтальной пл. проекций Π_1 выбираем пару конкурирующих точек $4_1 \equiv 5_1$. Принимаем условно что т. 4 лежит на прямой AC , а т. 5 на прямой d и по линиям связи строим их фронтальные проекции. Та точка, которая на фронтальной пл. проекций Π_2 будет лежать выше, та и будет ближе к наблюдателю и соответственно будет на горизонтальной пл. проекций Π_1 видимой. В нашем случае это т. 5, а т. 4 не видимая, её необходимо заключить в

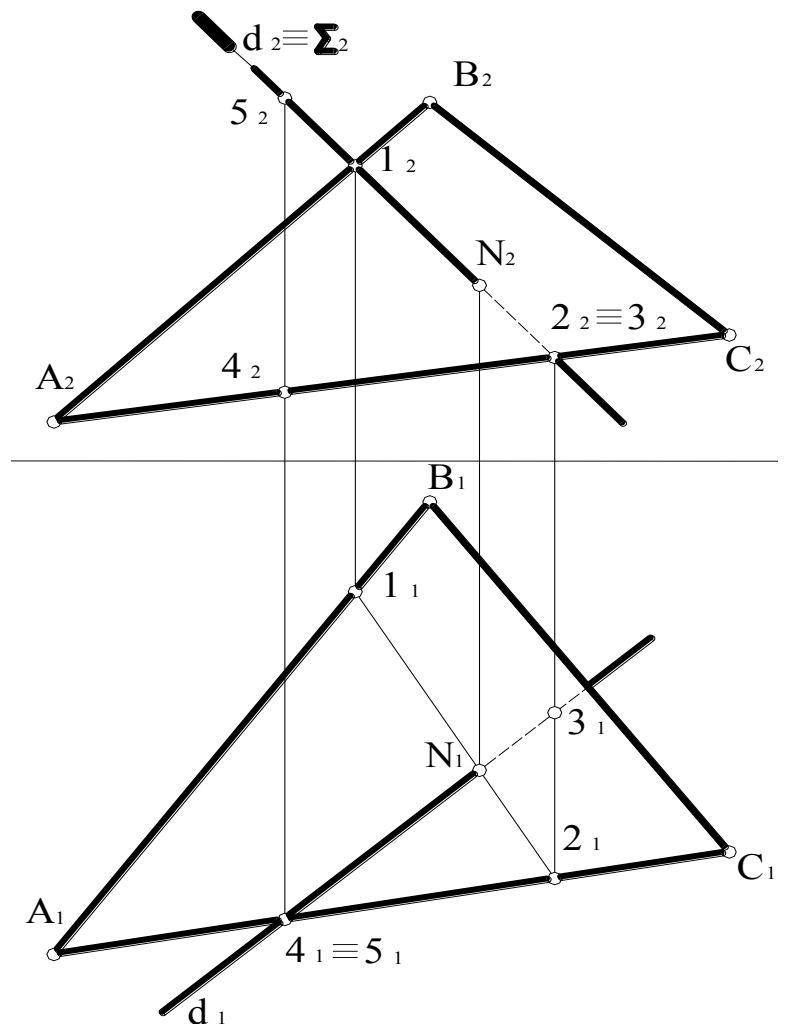


Рис. 15

скобки. Т. 5 принадлежит прямой d , значит прямая d до точки встречи с пл. ABC будет видимая, а после не видимая.

Аналогично участки видимости прямой d определяются на фронтальной проекции Π_2 . На фронтальной пл. проекций Π_2 выбираем пару конкурирующих точек $2_2 \equiv 3_2$. Т. 2 лежит на прямой AC, а т. 3 на прямой d и по линиям связи строим их горизонтальные проекции (т.2 уже построена ранее). Та точка, которая на горизонтальной пл. проекций Π_1 будет лежать ниже, та и будет ближе к наблюдателю и соответственно будет на фронтальной пл. проекций Π_2 видимой. В нашем случае это т. 2, а т. 3 не видимая, её необходимо заключить в скобки. Т. 3 принадлежит прямой d , значит прямая d до точки встречи с пл. ABC будет не видимая, а после видимая.

Лекция №5. Взаимное положение двух плоскостей

Краткое содержание лекции

Построение плоскости параллельной другой плоскости. Построение линии пересечения двух плоскостей.

Плоскости в пространстве могут быть параллельными и могут пересекаться.

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости то, эти плоскости параллельны (рис. 1), $a \parallel c$ и $b \parallel d$.

Для решения задачи построения плоскости проходящей через точку и параллельной другой плоскости необходимо в плоскости выделить или построить две пересекающиеся прямые и через точку провести две прямые параллельно выделенным или построенным прямым.

Если плоскости не параллельны, то они пересекаются по прямой линии и задача сводится к нахождению линии пересечения и определению участков видимости плоскостей. Разберем это на примере (рис. 2).

Задача. Построить линию пересечения двух непрозрачных пластин, определить видимость элементов чертежа.

Решение. Для того чтобы построить линию пересечения двух плоскостей необходимо найти две общие точки, принадлежащие обеим плоскостям. Для этого необходимо выбрать в плоскостях две любые прямые и найти точки их встречи с другой плоскостью, по методике описанной в предыдущей лекции. Для нахождения первой общей точки выбираем прямую BC и во фронтальной плоскости Π_2 проводим совпадающую с ней фронтально проецирующую плоскость Σ которая пересекает треугольник DEF по прямой 1-2. Плоскость Σ пересекает отрезок DE в точке 1 и отрезок DF в точке 2. По линиям связи переносим эти точки на соответствующие отрезки в горизонтальной плоскости проекций Π_1 и проводим через них горизонтальную проекцию прямой 1-2. Там где она пересекает B_1C_1 и будет первая общая точка N. Фронтальную проекцию точки N строим по линии связи на B_2C_2 .

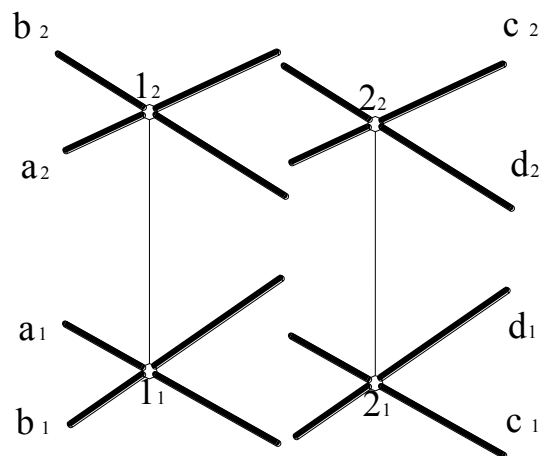


Рис. 1

Вторая общая точка находится аналогично. Выбираем прямую DE и в горизонтальной плоскости Π_1 проводим совпадающую с ней горизонтально проецирующую плоскость Q которая пересекает

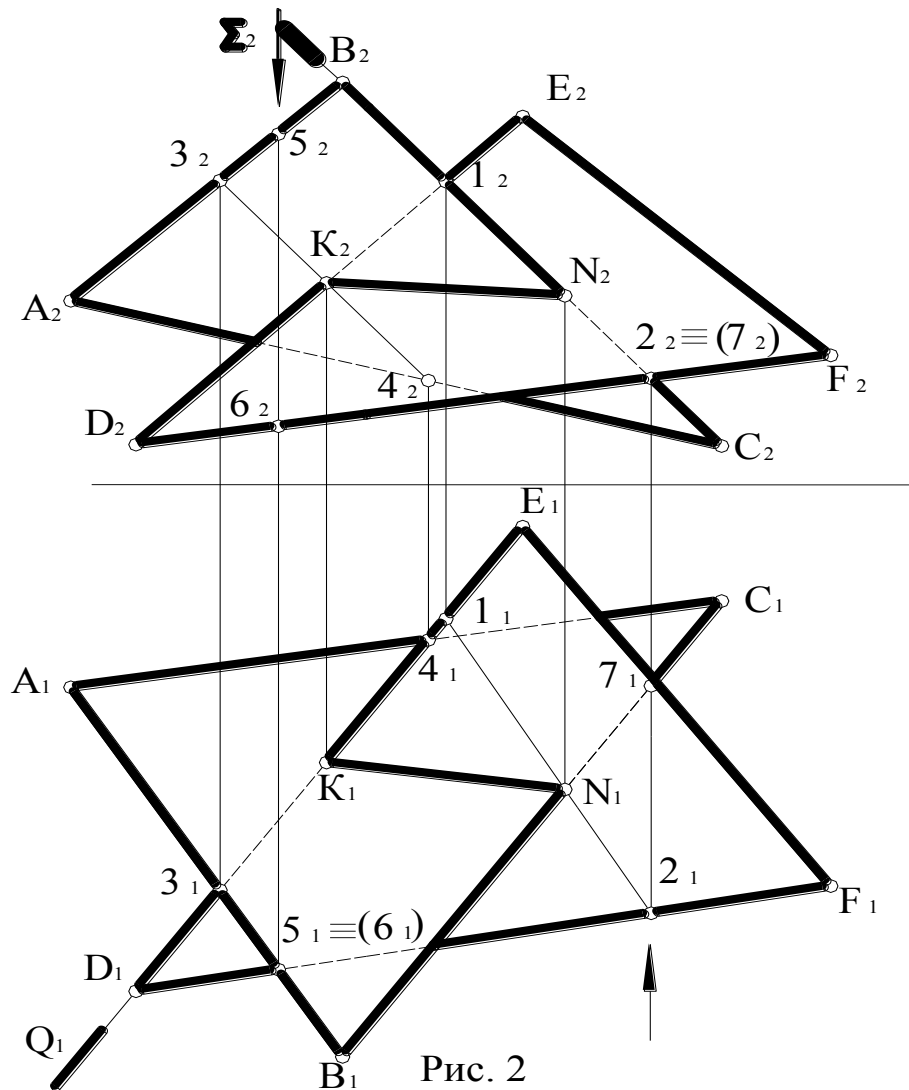


Рис. 2

треугольник ABC по прямой 3-4. Горизонтально проецирующая плоскость Q пересекает отрезок AB в точке 3 а отрезок AC в точке 4. По линиям связи переносим эти точки на соответствующие отрезки во фронтальной плоскости Π_2 и проводим через них фронтальную проекцию прямой 3-4. Там где она пересекает D_2E_2 и будет вторая общая точка K. Горизонтальную проекцию точки K строим по линии связи на D_1E_1 .

Видимость определяется для каждой проекции отдельно по паре конкурирующих точек. Конкурирующие точки находятся в местах пересечения проекций сторон треугольников. Находим сначала видимость сторон треугольников на фронтальной проекции. Выбираем любую пару конкурирующих точек, например точки 2 и 7 там, где пересекаются

фронтальные проекции отрезков DF и BC . Точка 2 принадлежит отрезку DF , по линии связи строим горизонтальную проекцию 2_1 на D_1F_1 (она уже была построена ранее). Точка 7 принадлежит отрезку BC , по линии связи строим горизонтальную проекцию 7_1 на B_1C_1 . Какая точка 2 или 7 видима на фронтальной проекции определяем по горизонтальной проекции. Видима та точка которая находится ближе к наблюдателю, направление его взгляда обозначено стрелкой. В данной ситуации ближе находится точка 2, значит на фронтальной проекции она будет видима, а точка 7 не видима. Точку 7 как не видимую заключаем в скобки. Точка 7 принадлежит прямой BC , значит прямая BC на этом участке во фронтальной проекции до линии пересечения не видима, выделяем ее пунктиром, а прямая DE видима, выделяем ее основной линией.

Далее видимость остальных отрезков во фронтальной проекции определяется по правилу многоугольника. Если проекция D_2F_2 видима, то проекция C_2B_2 не видима до линии пересечения. После линии пересечения она становится видимой. А раз она видима, то проекция E_2D_2 не видима до линии пересечения. После нее становится видимой и пересекает невидимую проекцию A_2C_2 .

Аналогичным образом определяется видимость на горизонтальной проекции. Выбирается пара конкурирующих точек, например 5 и 6. Точка 5 принадлежит отрезку AB , точка 6 отрезку DF . По линии связи находим фронтальные проекции этих точек. На горизонтальную проекцию наблюдатель смотрит сверху. Видима та точка, которая выше. Это видно на фронтальной проекции. Выше точка 5, она видима, а точка 6 не видима. Проекцию точки 6_1 заключаем в скобки. Проекция отрезка D_1F_1 , на которой лежит точка 6 в данном месте, не видима, следовательно, по правилу многоугольника проекция B_1C_1 видима до линии пересечения, после нее становится не видимой. Проекция F_1E_1 видима, проекция C_1A_1 не видима, проекция E_1D_1 видима до линии пересечения, после нее становится не видимой, проекция A_1B_1 видима.

На этом решение данной задачи заканчивается.

Общий способ построения линии пересечения двух плоскостей.

Построить линию пересечения плоскости P , заданной двумя пересекающимися прямыми AB и BC , и плоскости Q , заданной двумя параллельными прямыми l и m (рис. 3).

Для определения положения точек K и N , принадлежащих линии пересечения плоскостей P и Q , возьмем две вспомогательные горизонтальные плоскости T и H , пересекающие каждую из заданных плоскостей по горизонтали. Фронтальная проекция плоскости T (T_2) пересекает фронтальные проекции плоскостей P (P_2) и Q (Q_2) в точках 1_2-2_2

и 3_2-4_2 . По линии связи находим горизонтальные проекции этих точек 1_1-2_1 и 3_1-4_1 . Две прямые, полученные по этим четырем точкам, в пересечении определяют первую точку K (K_1), принадлежащую линии пересечения плоскостей P и Q . По линии связи находим фронтальную проекцию точки K (K_2).

Взяв плоскость H , получим в ее пересечении с плоскостями P и Q горизонтали по точкам $5_2-6_2, 7_2-8_2$ и $5_1-6_1, 7_1-8_1$. По этим четырем точкам, расположенным в плоскости H , в пересечении двух прямых определяем вторую точку, общую для плоскостей P и Q – точку N с проекциями N_1 и N_2 .

Соединив проекции точек K и N (K_1-N_1 и K_2-N_2) получим линию пересечения плоскостей P и Q в двух проекциях.

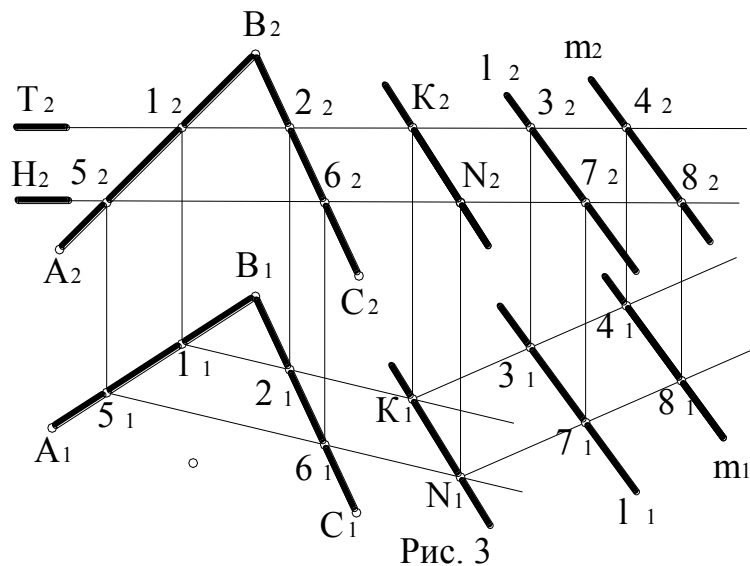


Рис. 3

Лекция №6. Преобразование комплексного чертежа. Многогранники

Краткое содержание лекции

Замена плоскостей проекций. Четыре основные задачи, решаемые заменой плоскостей проекций. Изображение многогранников. Точка на поверхности многогранников. Сечение многогранника плоскостью.

На чертеже геометрические тела или их элементы (отрезки прямых, углы, плоские фигуры) в общем случае проецируются с искажением размеров и формы. Для облегчения решения многих задач часто возникает необходимость преобразования такого эюра в более удобный для решения вид. При преобразовании объекту отображения чаще стремятся придать такое положение в пространстве, при котором его исследуемый элемент располагался бы перпендикулярно или параллельно одной из плоскостей проекций. В этом случае этот геометрический элемент отображается на плоскости проекций без искажения своей формы и размеров.

В принципе возможны следующие методы преобразования чертежа.

1. Перемещением проецируемого тела в пространстве до требуемого положения.
2. Изменением способа проецирования.
3. Изменением в пространстве положения плоскостей проекций относительно тела.

В связи с ограниченностью объема лекции будем изучать только третий метод.

Метод замены плоскостей проекций

Сущность замены плоскостей проекций состоит в том, что в систему плоскостей проекций Π_1, Π_2 вводится новая плоскость проекций, на которую и проецируются геометрические фигуры (рис. 1;2). Новая плоскость проекций должна быть перпендикулярна одной из первоначальных плоскостей проекций. Направление проецирования остается ортогональным, поэтому сохраняются все свойства ортогонального проецирования.

При замене фронтальной плоскости проекций Π_2 на Π_4 (рис. 1) новая проекция точки A_4 окажется на линии связи, перпендикулярной оси S_{14} . Высота точки в новой системе такая же, как и в исходной, т. е. $AA_1 = A_2A_{12} = A_4A_{14}$.

При замене горизонтальной плоскости проекций Π_1 на Π_4 (рис. 2) новая проекция точки A_4 окажется на линии связи, перпендикулярной оси

S_{24} . Глубина точки в новой системе такая же, как и в исходной, т. е.

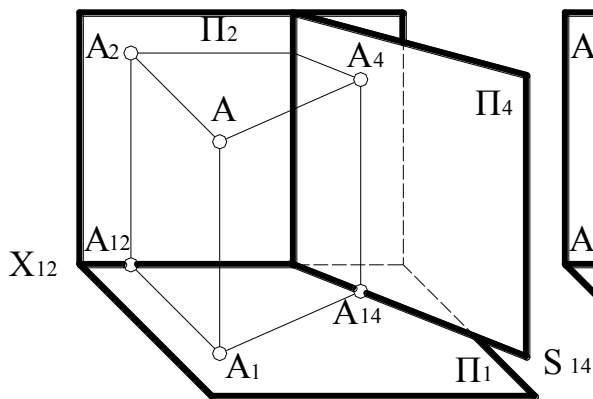


Рис. 1

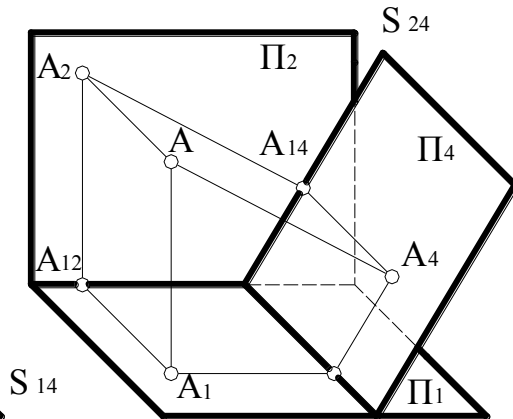


Рис. 2

27

$$AA_2 = A_1A_{12} = A_4A_{14}.$$

Заменой плоскостей проекций решают четыре основные задачи.

Задача 1. Прямую общего положения преобразовать в прямую уровня, что позволит определить ее размеры и углы наклона к плоскостям проекций.

Если будем заменять фронтальную плоскость проекций, то определим натуральную величину и угол наклона к Π_1 , а если горизонтальную, то натуральную величину и угол наклона к Π_2 .

Задача 1а. Определить натуральную величину отрезка АВ и угол наклона к горизонтальной плоскости проекций.

Решение. Заменяем плоскость Π_2 на Π_4 , для чего новую ось X_{14} проводим параллельно A_1B_1 (рис. 3). От горизонтальных проекций точек А и В проводим линии связи перпендикулярно новой оси и на них откладываем высоты точек взятые из Π_2 . На новой плоскости проекций отрезок АВ изобразится в натуральную величину. Одновременно определяем угол α наклона отрезка к плоскости Π_1 .

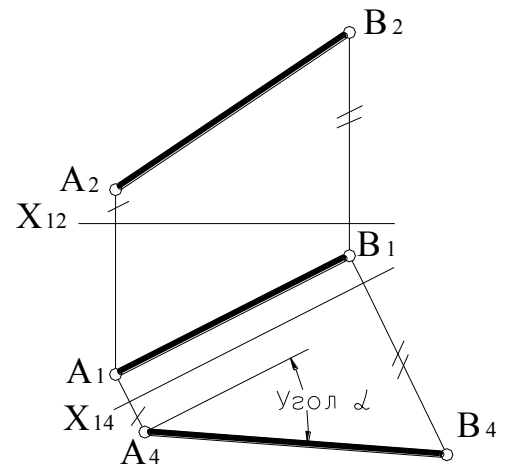


Рис. 3

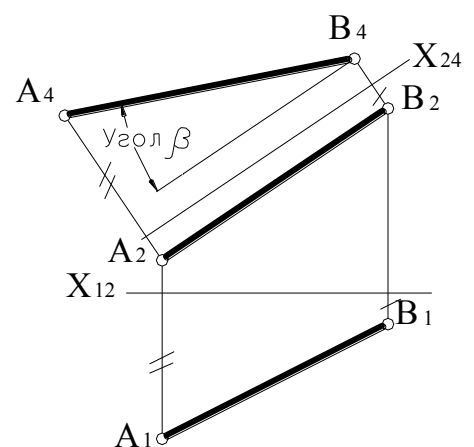


Рис. 4

Задача 16. Определить натуральную величину отрезка АВ и угол наклона к фронтальной плоскости проекций. ²⁸

Решение. Заменяем плоскость Π_1 на Π_4 , для чего новую ось X_{14} проводим параллельно A_2B_2 (рис. 4). От фронтальных проекций точек А и В проводим линии связи перпендикулярно новой оси и на них откладываем глубины точек взятые из Π_1 . На новой плоскости проекций отрезок АВ изобразится в натуральную величину. Одновременно определяем угол β наклона отрезка к плоскости Π_2 .

Задача 2. Прямую уровня сделать проецирующей прямой.

Решение этой задачи позволяет определить расстояние от точки до прямой, расстояние между параллельными и скрещивающимися прямыми, величину двугранного угла.

Решение задачи на (рис. 5). Вводим новую плоскость проекций Π_4 . Для этого проводим новую ось X_{14} перпендикулярно натуральной величине отрезка АВ. От A_1B_1 проводим линию связи перпендикулярно новой оси и откладываем высоту точек взятую из Π_2 . Так как высота точек А и В одинаковая то прямая спроецируется в точку.

Последовательно решая задачу 1 и 2 можно прямую общего положения преобразовать в проецирующую.

Пример. Прямую АВ общего положения сделать прямой уровня (рис. 6).

Решение. Заменяем плоскость Π_2 на Π_4 , для чего новую ось X_{14} проводим параллельно A_1B_1 . От горизонтальных проекций точек А и В проводим линии связи перпендикулярно новой оси и на них откладываем высоты точек взятые из Π_2 . Вводим новую плоскость проекций Π_5 . Для этого проводим новую ось X_{45} перпендикулярно натуральной величине отрезка A_4B_4 . От A_4B_4 проводим линию связи перпендикулярно новой оси и откладываем координаты точек взятые из Π_1 . Так как высота точек А и В одинаковая, то

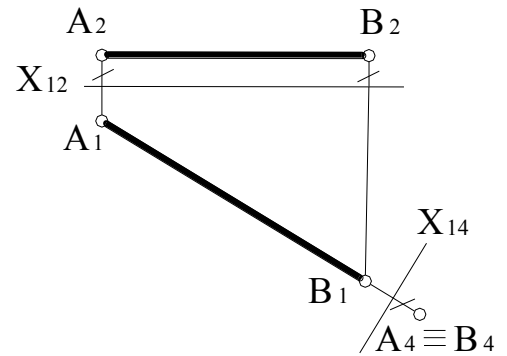


Рис. 5

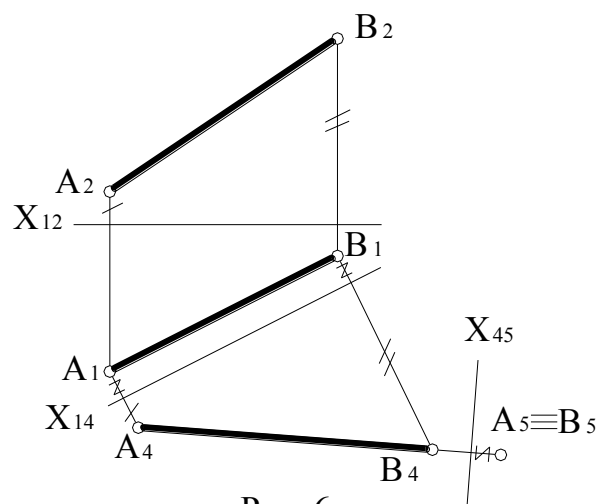


Рис. 6

прямая спроецируется в точку. Общее правило при неоднократной замене плоскостей проекций гласит, что координаты точек необходимо брать из той плоскости проекций, которую заменяешь.

Задача 3. Плоскость общего положения сделать проецирующей.

Решение этой задачи позволяет определить расстояние от точки до плоскости, расстояние между параллельными плоскостями, угол наклона плоскости к плоскостям проекций.

Решение. В плоскости ABC

(рис. 7) строим прямую уровня. В данном случае удобнее построить горизонталь. Для этого из A_2 проводим прямую параллельную оси X_{12} до пересечения с отрезком C_2B_2 . Точку пересечения 1_2 по линии связи строим на горизонтальной проекции и проводим прямую A_11_1 . Заменяем плоскость Π_2 на Π_4 , для чего новую ось X_{14} проводим перпендикулярно A_11_1 . От горизонтальных проекций точек A, B и C проводим линии связи перпендикулярно новой оси и

на них откладываем высоты точек взятые из Π_2 . Если все было построено точно, то плоскость ABC должна спроецироваться в прямую, т. е. стать проецирующей плоскостью.

Задача 4. Проецирующую плоскость сделать плоскостью уровня.

Решение этой задачи позволяет определить размеры плоских фигур и элементов, в них расположенных.

Решение. Заменяем плоскость Π_2 на Π_4 , для чего новую ось X_{14} проводим параллельно линии в которую спроецировалась плоскость ABC (рис. 8). От горизонтальных проекций точек A, B и C проводим линии связи

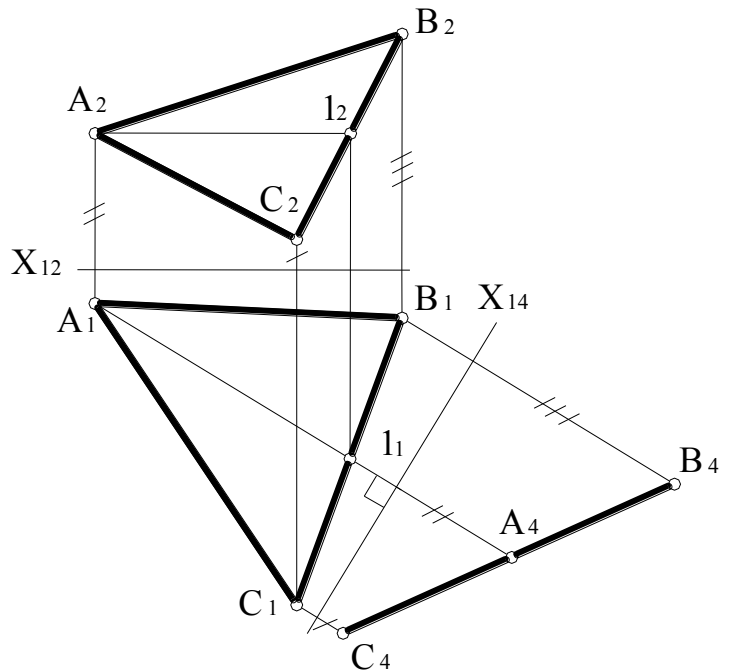


Рис. 7

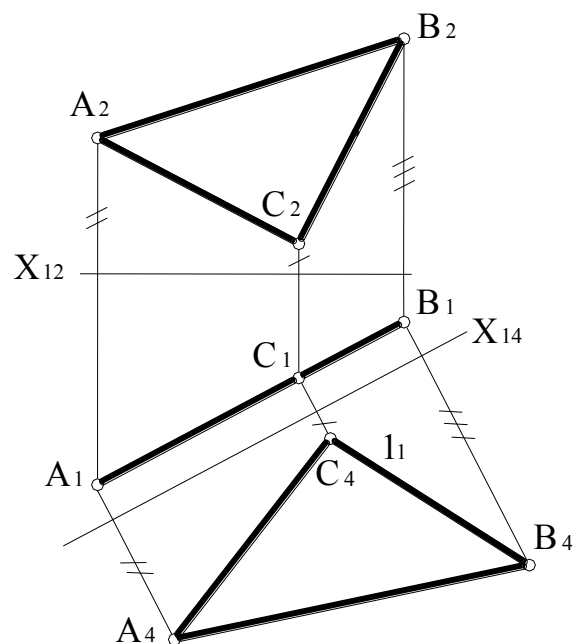


Рис. 8

перпендикулярно новой оси и на них откладываем высоты точек взятые из Π_2 . В новой плоскости проекций треугольник ABC выйдет в натуральную величину.

Последовательно решая задачу 3 и 4 можно плоскость общего положения сделать плоскостью уровня.

Пример. Плоскость ABC общего положения сделать плоскостью уровня.

Решение. Первый этап преобразования плоскости общего положения в проецирующую плоскость осуществляется так же, как и в задаче 3 (см. рис. 7).

Далее заменим плоскость Π_1 на Π_5 , для чего новую ось X_{45} проводим параллельно линии в которую спроецировалась плоскость ABC (рис. 9).

От горизонтальных проекций точек A, B и C

проводим линии связи перпендикулярно новой оси и на них откладываем высоты точек взятые из Π_1 . В новой плоскости проекций треугольник ABC выйдет в натуральную величину.

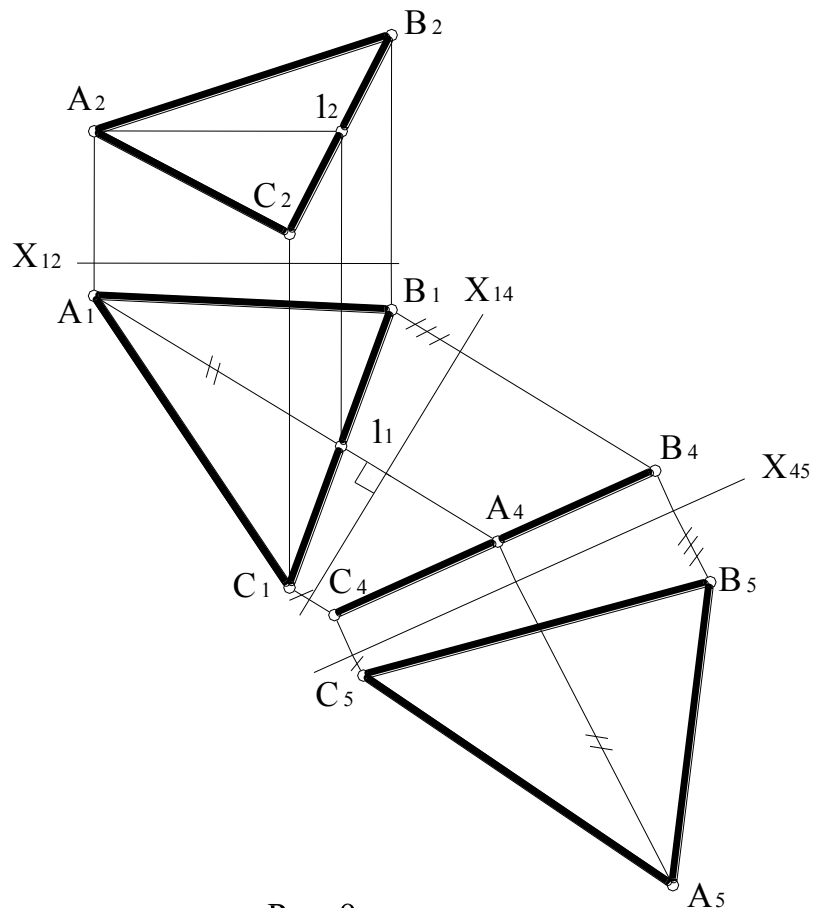


Рис. 9

Многогранники

Многогранниками называются геометрические тела, ограниченные со всех сторон плоскими многоугольниками (гранями). Стороны граней называются ребрами, а концы ребер – вершинами многогранника.

Наиболее распространенными многогранниками являются призмы и пирамиды. Призма – многогранник, у которого основаниями служат равные многоугольники, а боковые грани – прямоугольники или параллелограммы (рис. 10, 11).

Боковые ребра призмы всегда параллельны между собой.

Пирамида – многогранник, который основанием имеет многоугольник, а боковые грани – треугольники, имеющие общую вершину (рис. 12, 13).

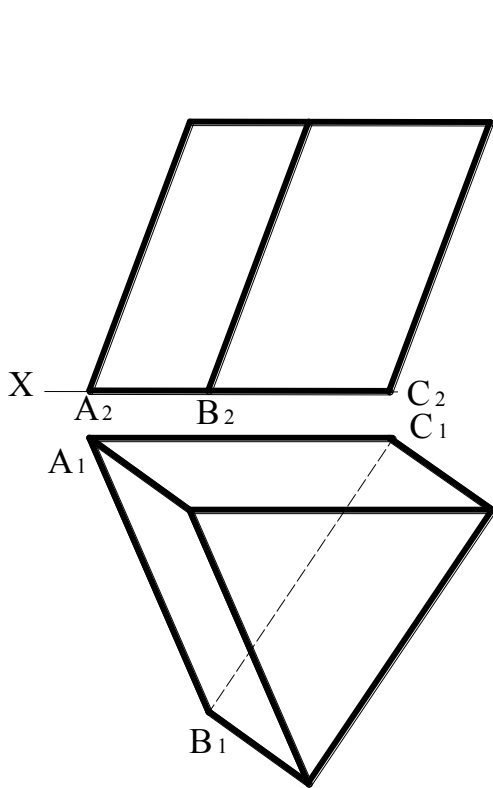


Рис. 10

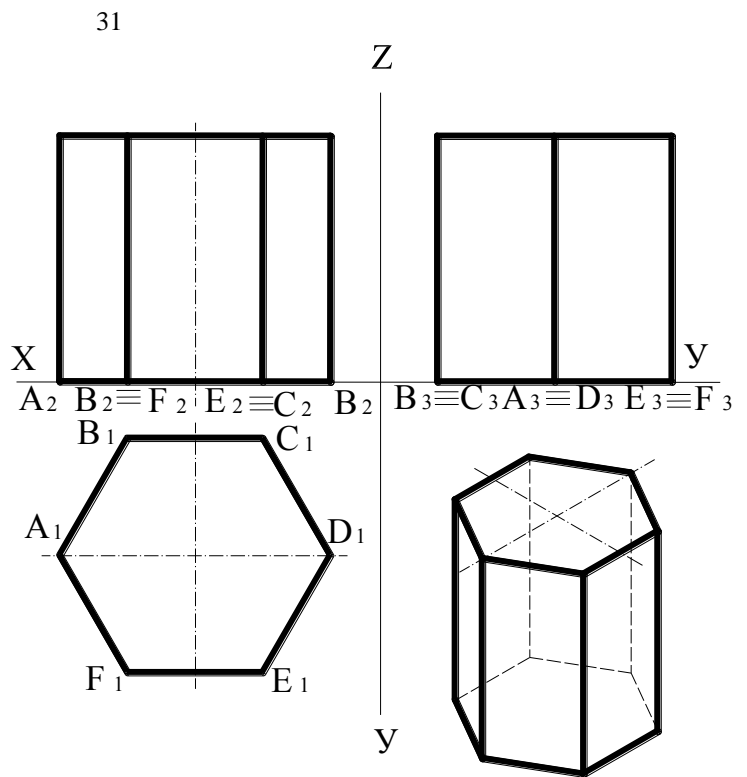


Рис. 11

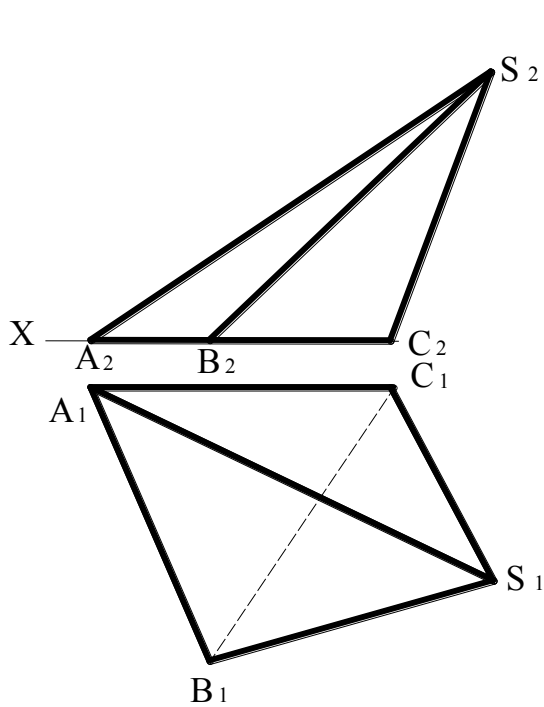


Рис. 12

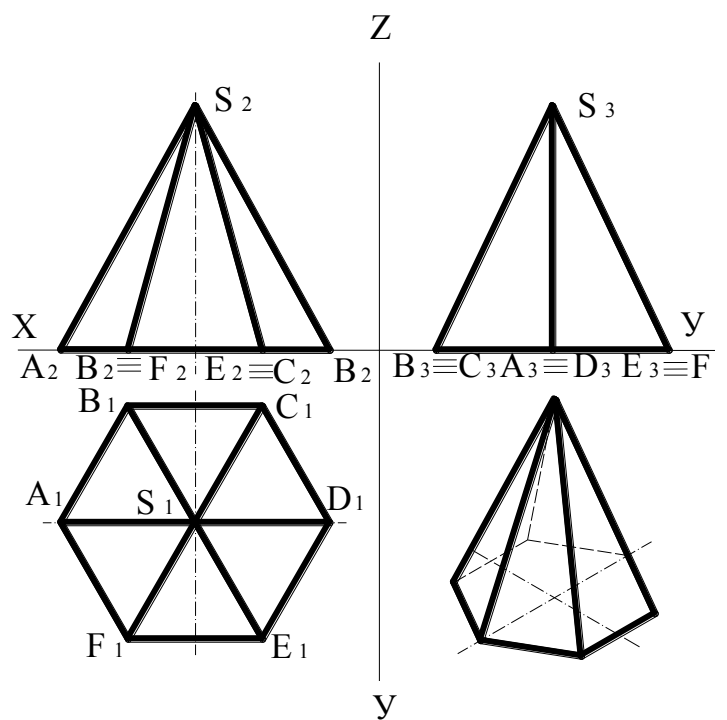


Рис. 13

На чертеже многогранники изображаются проекциями своих вершин и ребер.

Построение проекций точек, принадлежащих поверхности многогранника

Точки могут лежать на ребрах и в гранях многогранника. Недостающие проекции точек, лежащих на ребрах, можно строить по линиям связи. Если ребро не является отрезком профильной прямой, то для нахождения недостающей проекции точки достаточно использовать только горизонтальную и фронтальную проекции ребра. Если же ребро является отрезком профильной прямой, то для нахождения недостающей проекции точки необходима еще и профильная проекция.

Чтобы построить на чертеже проекции точек, принадлежащих грани многогранника, необходимо предварительно построить какую-либо линию на заданной поверхности, а затем на проекциях этой линии взять проекции искомых точек.

Рассмотрим некоторые примеры. Условимся, что проекции точек являются видимыми.

Пример 1. Построить недостающие проекции точек принадлежащих поверхности наклонной призмы с основанием ABC (рис. 14).

Решение. Недостающие проекции точек E, M и N строятся по линиям связи на соответствующих ребрах (рис. 15). Недостающие проекции точек D и K строятся с помощью вспомогательных прямых 1-В и 2-3. Вспомогательные прямые проводятся таким образом, чтобы они проходили через известную проекцию точки и через 2 точки, которые есть в другой проекции или их можно было бы построить.

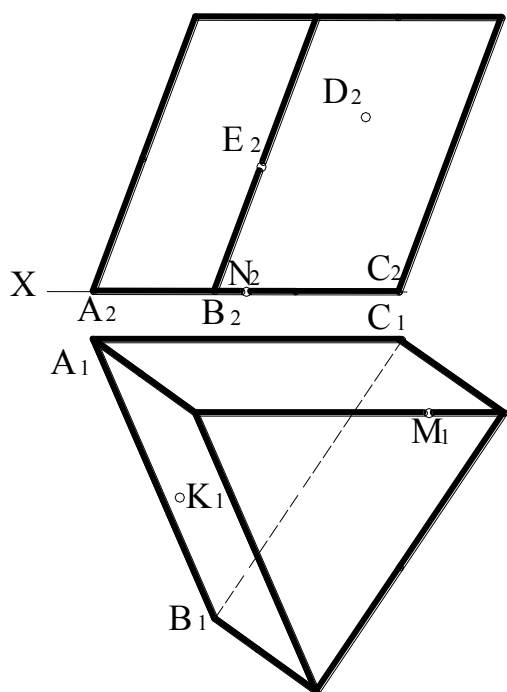


Рис. 14

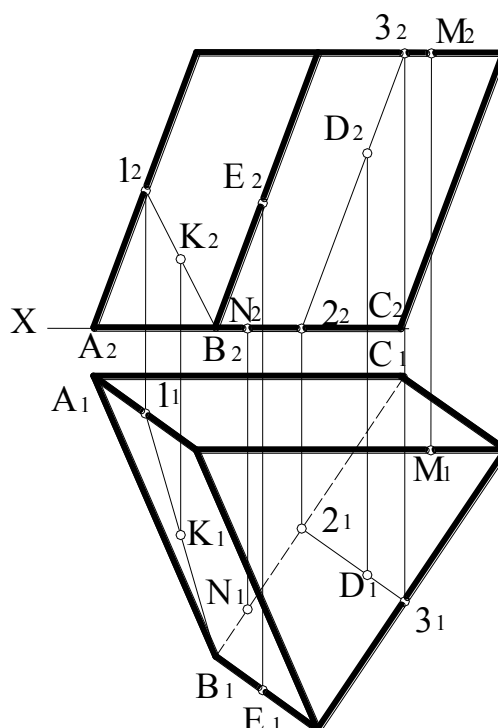


Рис. 15

Пример 2. Построить три проекции призмы с основанием ABCDEF и недостающие проекции точек (рис. 16).

Решение. Вначале строится профильная проекция призмы (рис. 17).

Так как грани призмы проецирующие, то проекции точек переносим по линиям связи на соответствующие грани с учетом того что, т. М и L видимые на горизонтальной проекции, а т. К не видимая. Профильные проекции точек находим одним из способов описанных в лекции №1.

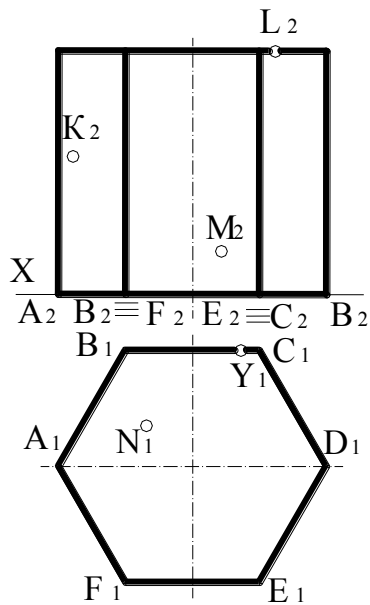


Рис. 16

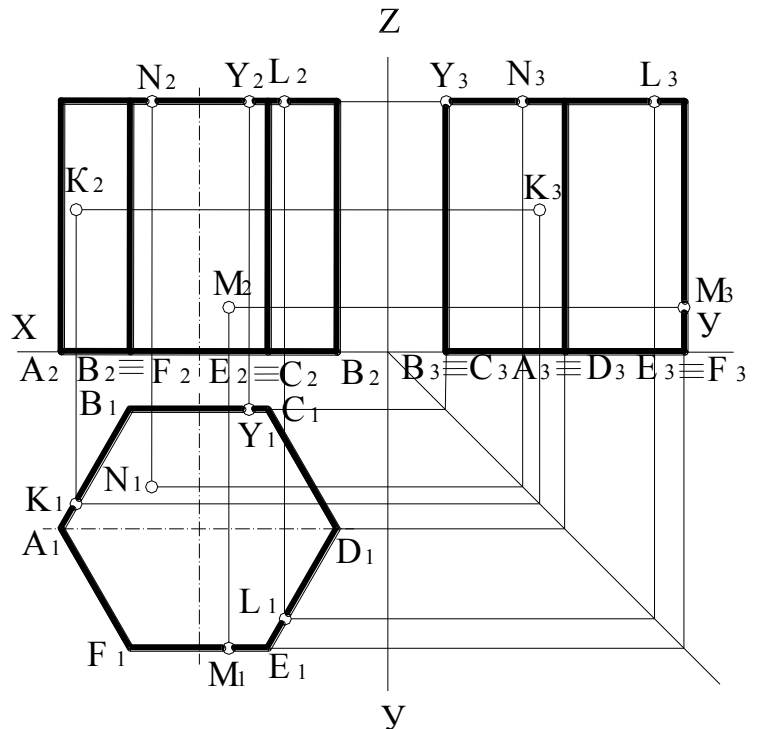


Рис. 17

Пример 3. Найти недостающие проекции точек, принадлежащих поверхности пирамиды (рис. 18).

Решение. Вначале строится профильная проекция пирамиды (рис. 19).

Возможны три варианта расположения точек на поверхности пирамиды. Первый - точка лежит на наклонном ребре (т. К). Второй - точка лежит в грани (т. М). Третий - точка лежит на профильном ребре (т. F).

Недостающие проекции точки К, лежащей на наклонном ребре SA, можно найти проведя линии связи. Для того чтобы, построить горизонтальную проекцию т. М, лежащую в грани SCD, необходимо провести вспомогательную прямую, проходящую через проекцию M₂ и через две точки лежащих на ребрах многогранника. Например, вершину S и точку, принадлежащую ребру основания пирамиды CD. Затем построить горизонтальную проекцию этой прямой и перенести на нее по линии связи горизонтальную проекцию M₁. Профильную проекцию M₃ строим по известной методике. Точку F, лежащую на профильном ребре SE, можно

найти, используя профильную проекцию пирамиды. F_3 строим по линии связи, затем строим горизонтальную проекцию этой точки по известной методике.

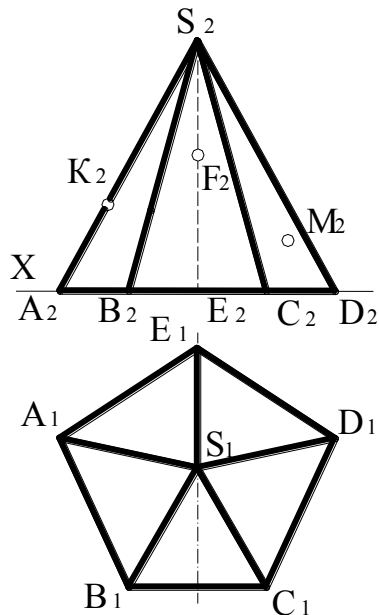


Рис. 18

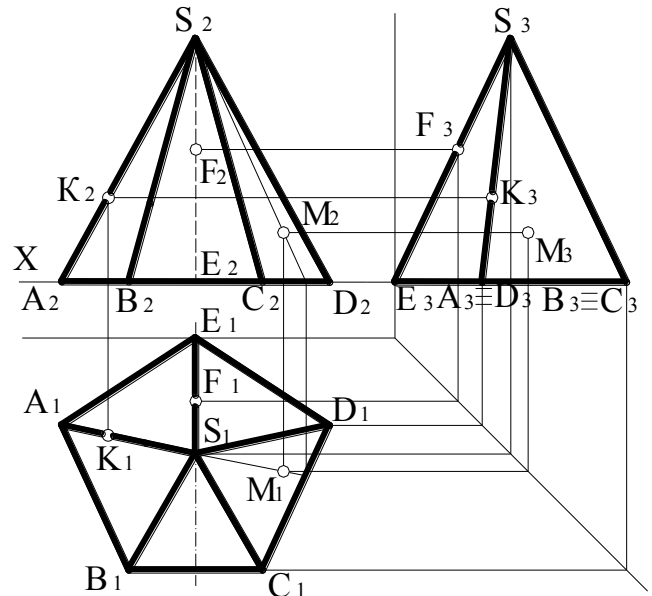


Рис. 19

Построение линии пересечения многогранника проецирующей плоскостью

В общем случае построение линии пересечения многогранника проецирующей плоскостью осуществляется по следующей схеме. Отмечается каждая точка пересечения плоскости с ребрами многогранника. Затем по изложенной выше методике строятся остальные проекции этих точек и затем по прямым линиям с учетом видимости соединяются точки, принадлежащие одной грани. Пример построения линии пересечения многогранника проецирующей плоскостью дан на рис. 20.

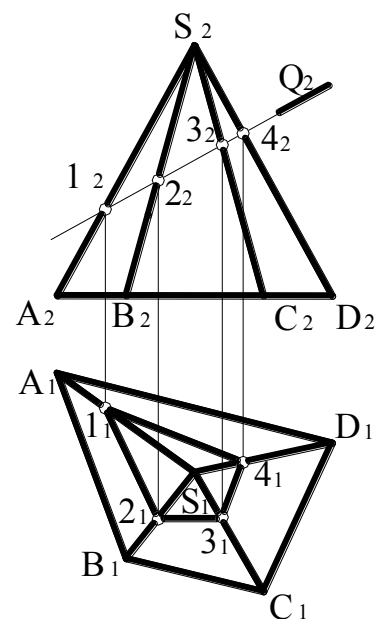


Рис. 20

Построение точек встречи прямой с многогранником и определение участков видимости прямой

В общем случае построение точек встречи прямой с многогранником и определение участков видимости прямой осуществляется следующим способом. Прямая заключается в проецирующую плоскость. По методике изложенной выше строится линия пересечения многогранника этой плоскостью. Те точки, в которых прямая пересекает эту линию, и есть точки встречи прямой и многогранника. Участок прямой, находящийся внутри многогранника, и те участки которые тело многогранника закрывает, будут невидимыми. Остальные части прямой - видимые. Пример построения точек встречи прямой m с пирамидой и определение участков видимости дан на рис. 21.

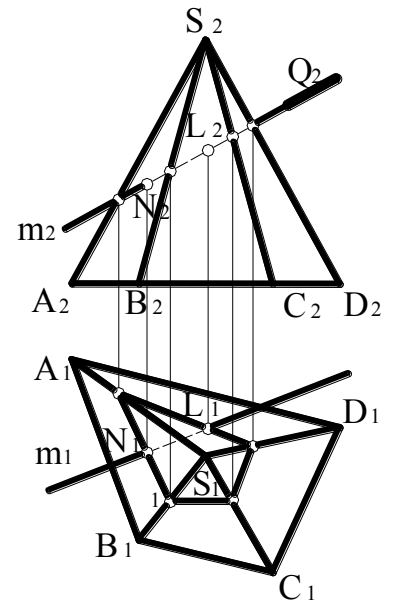


Рис. 21

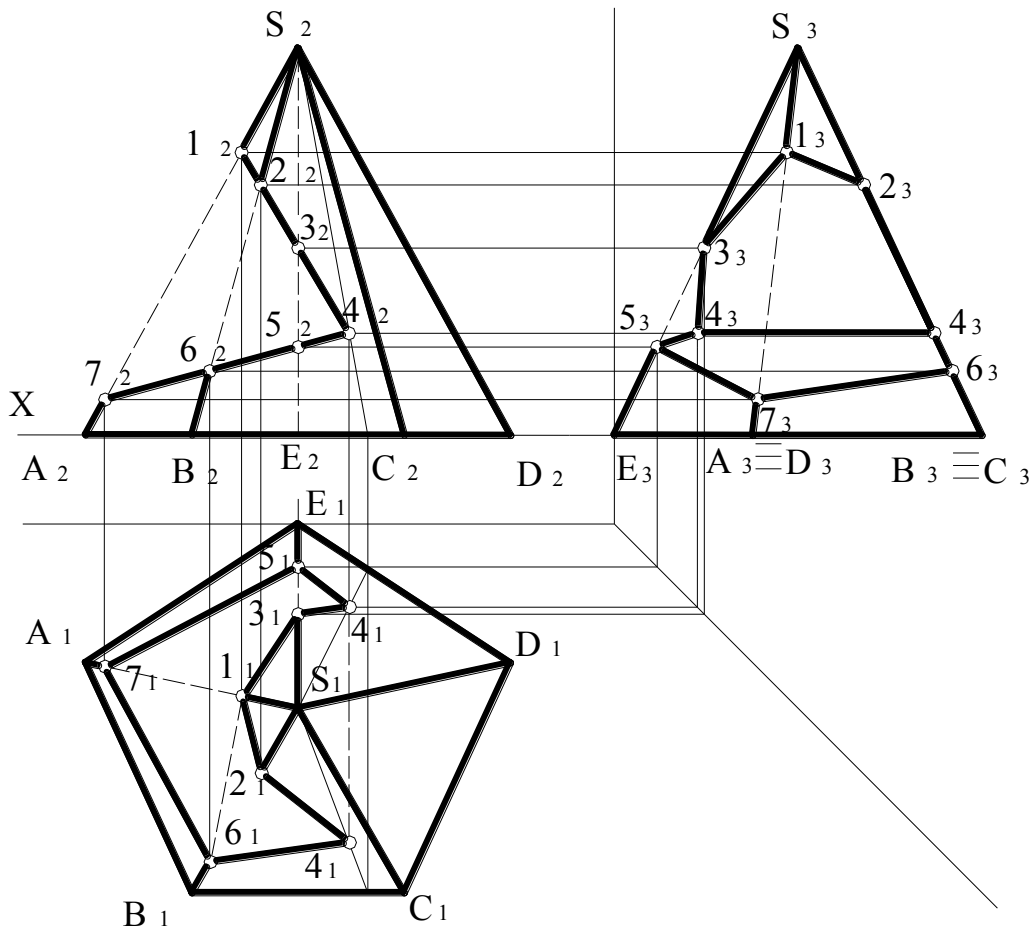


Рис. 22

Построение многогранника с вырезом

В общем случае построение многогранника с вырезом осуществляется по следующей схеме. Внимательно выделяется каждая точка пересечения плоскостей выреза с ребрами многогранника и точки встречи линий пересечения плоскостей выреза с гранями многогранника. Затем, по изложенной выше методике, строятся остальные проекции этих точек. Далее по прямым линиям с учетом видимости соединяются точки, принадлежащие одной грани и одной плоскости выреза. Также вычерчиваются линии пересечения плоскостей выреза. Пример построения пирамиды с вырезом дан на рис. 22.

Лекция №7. Поверхности вращения

Краткое содержание лекции

Возможные случаи положения секущей плоскости относительно некоторых поверхностей вращения. Фигуры, ожидаемые в сечении. Сечение поверхностей плоскостью. Опорные точки: а) экстремальные; б) точки границ видимости. Построение линий среза. Нахождение точек встречи прямой и поверхности вращения

Поверхностью вращения называется поверхность, образованная вращением линии (образующей), вокруг неподвижной прямой – оси вращения (рис. 1). Окружности, по которым перемещаются все точки образующей, называются параллелями; наибольшую параллель называют экватором, наименьшую – горловиной. Если ось поверхности вертикальна, то все параллели проецируются на горизонтальной проекции без искажения.

Вид поверхности вращения зависит от формы образующей и ее положения относительно оси вращения. Рассмотрим наиболее часто встречающиеся поверхности.

Цилиндр – поверхность вращения, образуемая вращением прямой линии вокруг параллельной ей оси (рис. 2).

Конус – поверхность вращения, образуемая вращением прямой линии вокруг пересекающейся с ней оси (рис. 3).

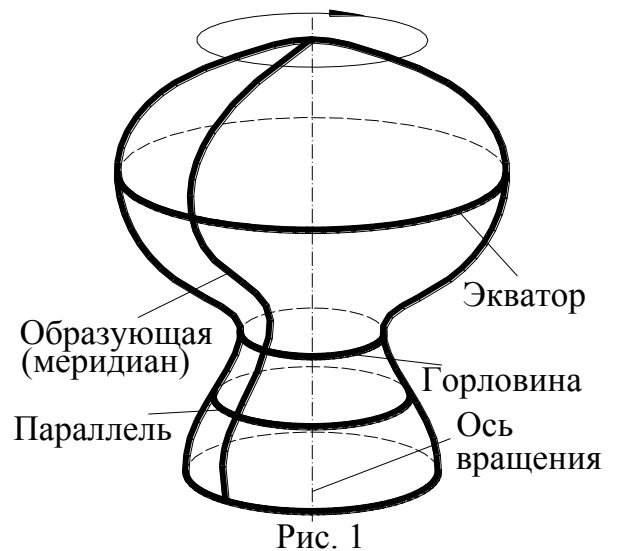


Рис. 1

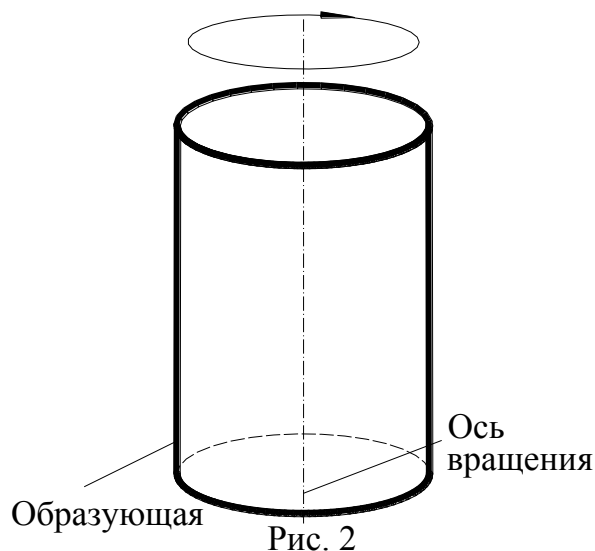


Рис. 2

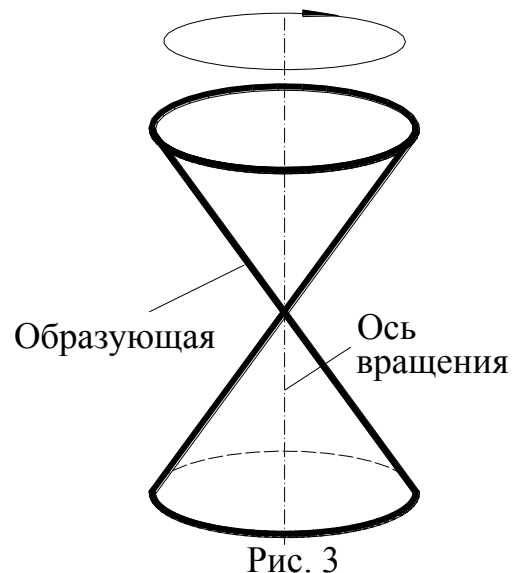


Рис. 3

Сфера – поверхность вращения, образуемая вращением окружности вокруг своего диаметра (рис. 4).

Тор – поверхность вращения, образуемая вращением окружности вокруг прямой линии, параллельной диаметру. Различают открытый тор – когда ось вращения находится за пределами окружности (рис. 5) и закрытый тор – когда ось вращения находится внутри окружности (рис. 6).

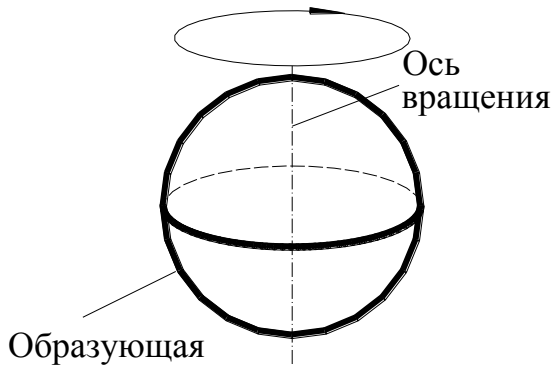


Рис. 4

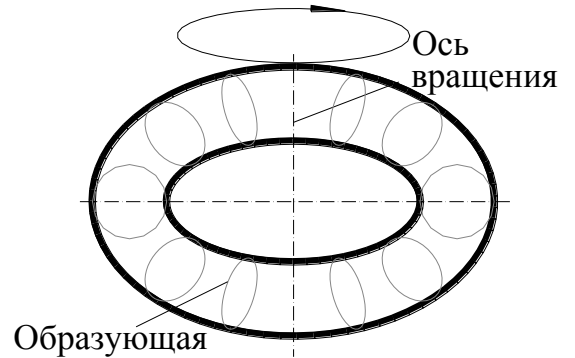


Рис. 5

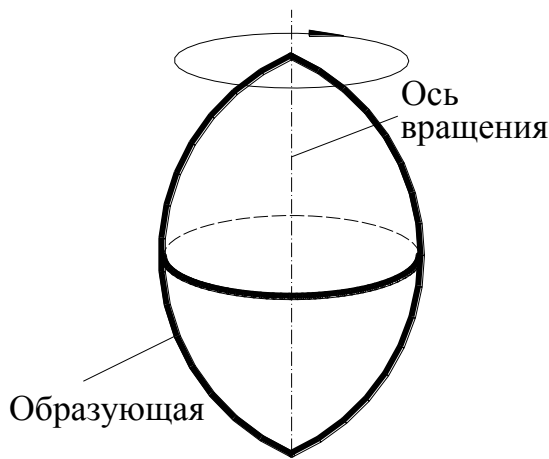


Рис. 6

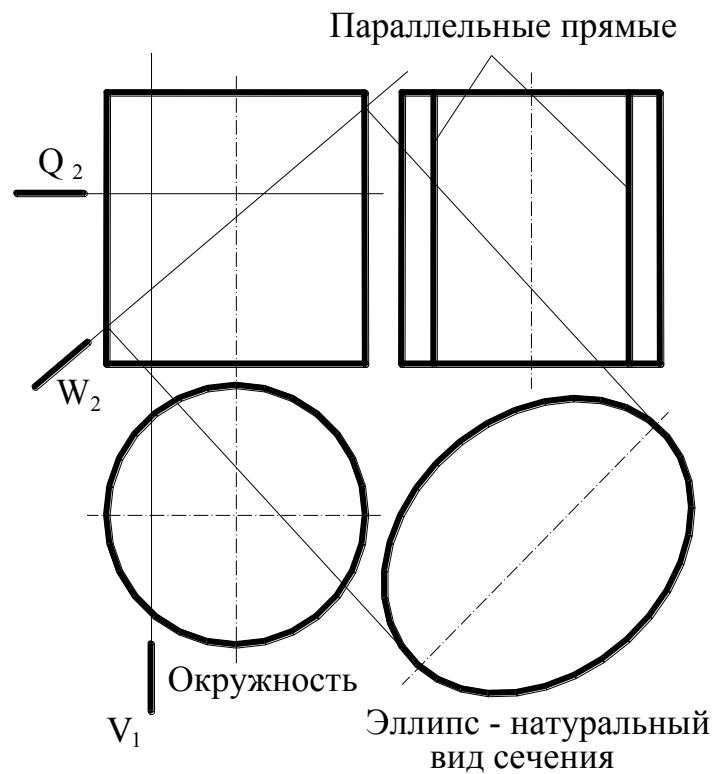


Рис. 7

Рассмотрим некоторые случаи пересечения поверхностей вращения с секущими плоскостями.

Цилиндр, с фронтально проецирующей плоскостью W , имеет в пересечении эллипс. С горизонтальной плоскостью Q – окружность. С профильной плоскостью V – две параллельные прямые.

Конус, с фронтально проецирующей плоскостью W , пересекающей обе образующие, имеет в пересечении эллипс. С фронтально проецирующей плоскостью Y , пересекающей одну

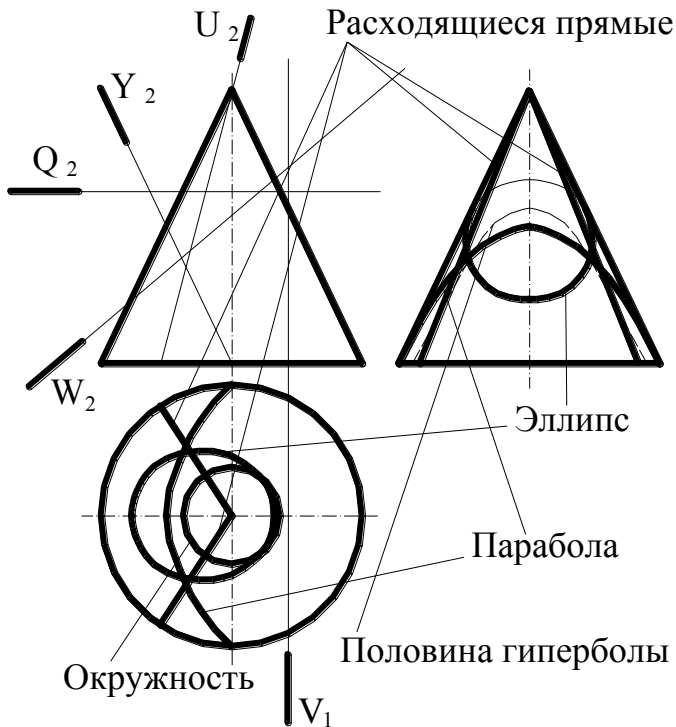


Рис. 8

образующую, имеет в пересечении параболу. С горизонтальной плоскостью Q – окружность. С профильной плоскостью V – гиперболу. С фронтально проецирующей плоскостью U , проходящую через вершину, имеет в пересечении две расходящиеся прямые.

Сфера, с любой плоскостью, имеет в пересечении окружность. Если секущая плоскость параллельна плоскости проекций, то окружность проецируется на нее без искажения, если нет, то в проекции сечения получается эллипс.

Тор, с фронтальной плоскостью W , имеет в пересечении две окружности (рис. 9).

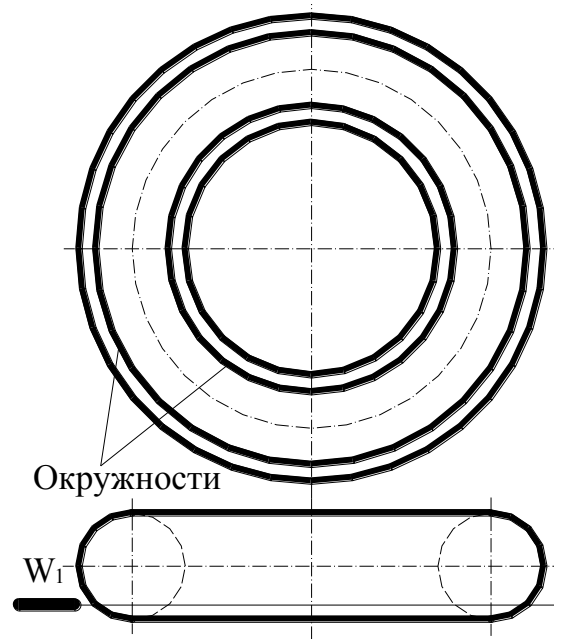


Рис. 9

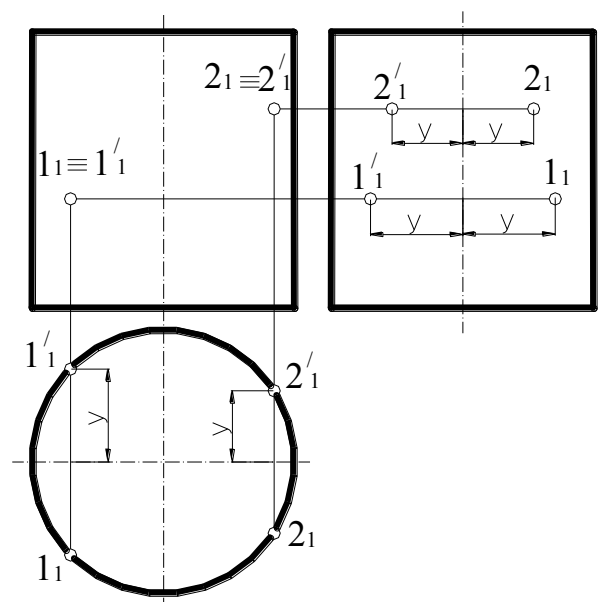


Рис. 10

Нахождение недостающих проекций точек, лежащих на поверхностях вращения

На поверхности цилиндра (рис. 10), во фронтальной проекции, расположены точки $1, 1'$ и $2, 2'$, точки со штрихами невидимые. Для того чтобы найти их горизонтальные проекции, необходимо провести вниз линии связи до пересечения с окружностью цилиндра. Профильные проекции можно построить одним из любых методов, перечисленных в лекции 1. Например, измерить расстояние Y от оси цилиндра и по линии связи отложить на профильной проекции в одну и другую сторону от оси. Причем точки 2 и $2'$ на профильной проекции будут невидимыми.

На поверхности конуса (рис. 11), во фронтальной проекции, расположены точки A, B, C и U . Не видимые точки B', C' и U' мы не будем обозначать (мало места), а будем подразумевать.

Находить их недостающие проекции можно несколькими способами. Точка A лежит на образующей конуса, следовательно на горизонтальной и профильной проекциях она будет находиться по линиям связи на осевой.

Точки B и B' лежат на оси, поэтому на профильной проекции они будут лежать на образующей конуса. На горизонтальную проекцию мы их переносим по линии связи, отложив от осевой координату Y в одну и другую сторону. Недостающие проекции точек C и C' можно построить с помощью вспомогательной прямой, проходящей через вершину конуса и фронтальные проекции точек. Так как точек две, то и прямых будет две. Они на фронтальной проекции совпадают. Эти прямые

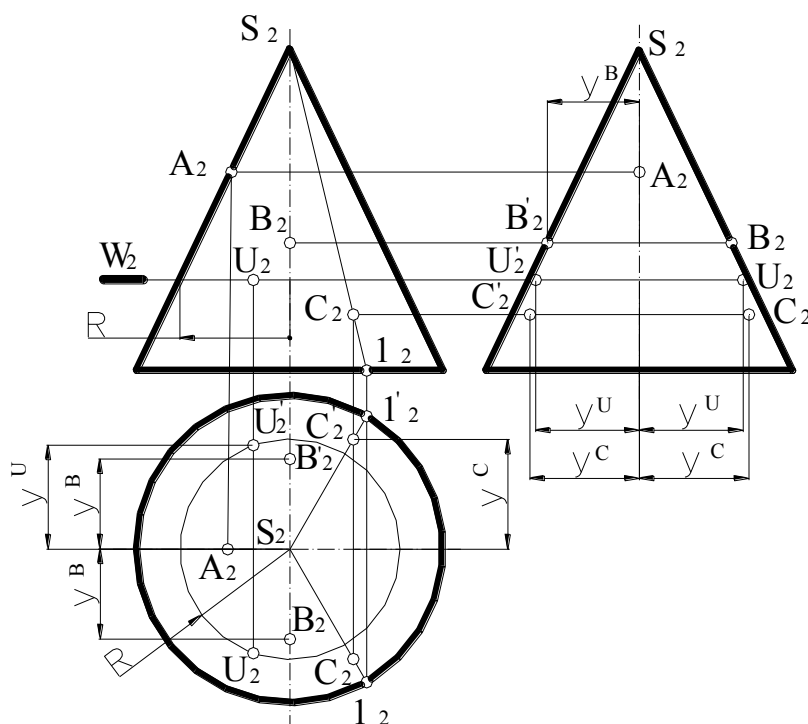


Рис. 11

пересекают основание в точках 1 и $1'$. Построив эти точки на горизонтальной проекции и проведя там вспомогательные прямые, точки C и C' переносим на них по линии связи. Профильные проекции этих точек находим так же как и у точек B и B' .

Недостающие проекции всех этих точек так же можно находить с помощью метода вспомогательных секущих плоскостей. Этот метод основной, он универсальный и широко применяется для решения различных задач. Суть его состоит в том, что необходимо так проводить секущие плоскости, чтобы на другой проекции в сечении получались простые линии, окружности или прямые. Покажем на примере т. U и U' .

Проведем вспомогательную секущую плоскость W , проходящую через фронтальные проекции точек U и U' . Конус при этом рассекается этой плоскостью по окружности радиусом R (расстояние от оси до образующей). Горизонтальные проекции искомых точек будут находиться на пересечении этой окружности и линий связи. Профильные проекции этих точек находим так же как и у точек B и B' .

Нахождение неизвестных проекций точек на поверхности сферы осуществляется аналогично, приведем лишь некоторое разнообразие применения метода вспомогательных секущих плоскостей (рис. 12).

Задача. На поверхности сферы даны проекции т. 1_2 , 2_1 и 3_3 (все проекции видимые). Найти недостающие проекции точек.

Решение. Через проекцию 1_2 проводим вспомогательную секущую плоскость W , как показано на рис. 12. В сечении сферы плоскостью

получается окружность, радиус ее – расстояние от оси до образующей сферы. Эта окружность на горизонтальной проекции выглядит в натуральную величину. Проекция 1_1 находится на пересечении окружности и линии связи.

Через проекцию 2_1 проводим вспомогательную

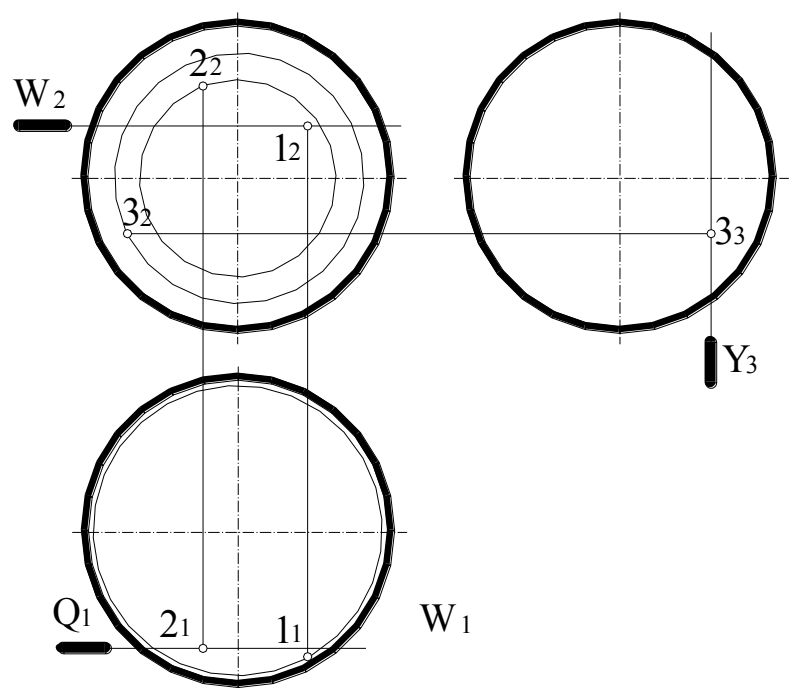


Рис. 12

секущую плоскость Q , как показано на рис. 12. В сечении сферы плоскостью получается окружность, радиус ее – расстояние от оси до образующей сферы. Эта окружность на фронтальной проекции выглядит в натуральную величину. Проекция 2_2 находится на пересечении окружности и линии связи.

Через проекцию 3_3 проводим вспомогательную секущую плоскость Y , как показано на рис. 12. В сечении сферы плоскостью получается окружность, радиус ее – расстояние от оси до образующей сферы. Эта окружность на фронтальной проекции выглядит в натуральную величину. Проекция 3_2 находится на пересечении окружности и линии связи. Остальные проекции построить самостоятельно, используя методику, изложенную ранее.

Пример нахождения недостающих проекций точек на поверхности тора приведен на рис. 13. Даны проекции точек 1_1 (видимая), 2_2 (не видимая) и 3_2 (видимая). Для нахождения фронтальной проекции 1_2 через 1_1 проводим вспомогательную секущую плоскость W . Тор этой плоскостью рассекается по двум окружностям но, так как т. 1_1 видимая то нас интересует окружность радиусом R (расстояние от оси тора до внешней стороны образующей). На фронтальной плоскости проекций эта окружность выглядит без искажения и т. 1_2 будет находиться на пересечении этой окружности и линии связи.

Для построения т. 2_1 решаем обратную задачу. Из т. 2_2 проводим дугу с центром в т. O до пересечения с образующей тора. По линии связи определяем место, где должна находиться секущая плоскость (с учетом видимости) и проводим горизонтальную линию до пересечения с линией связи. В этом месте и будет находиться т. 2_1 .

Т. 3_1 находится аналогично т. 2_1 , только необходимо учитывать, что у них разная видимость.

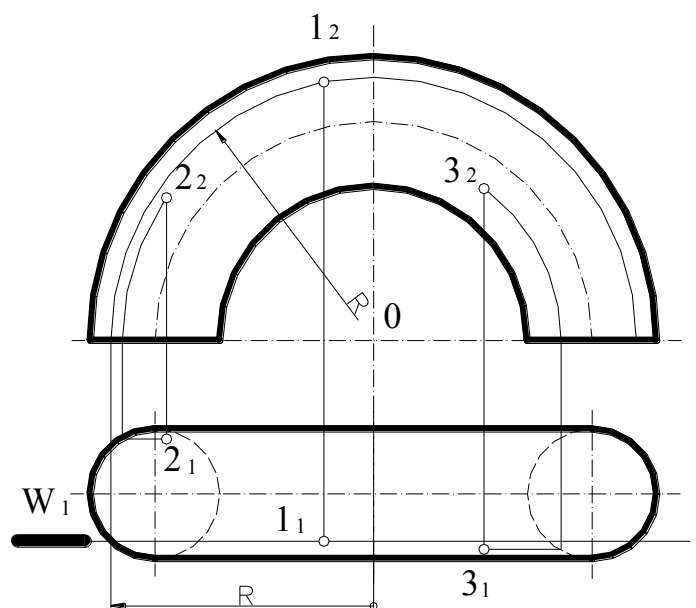


Рис. 13

Построение линии пересечения поверхности вращения с плоскостью

Построение линии пересечения поверхности вращения с плоскостью осуществляется с помощью вспомогательных секущих плоскостей. Рассмотрим на примере пересечения сферы с плоскостью (рис. 14). Построение пересечения начинается с определения опорных точек. Опорными точками являются:

крайние точки;

точки видимости (где происходит переход видимой линии в невидимую или наоборот);

точки которые можно легко построить.

Для примера на рис. 14 опорными точками являются:

1, 2, 5 и 5' - крайние точки;

3 и 3' - точки видимости для горизонтальной проекции (они лежат на горизонтальной осевой линии);

4 и 4' - точки видимости для профильной проекции (они лежат на вертикальной осевой линии).

Точки 1 и 2 на фронтальной проекции лежат на образующей сферы, то на горизонтальной и профильной проекциях они будут находиться по линиям связи на осевых линиях. Точки 3 и 3' на фронтальной проекции лежат на горизонтальной осевой линии, то на горизонтальной проекции они будут лежать на образующей.

Точки
линии
обра

плоск
6', 7'
всп

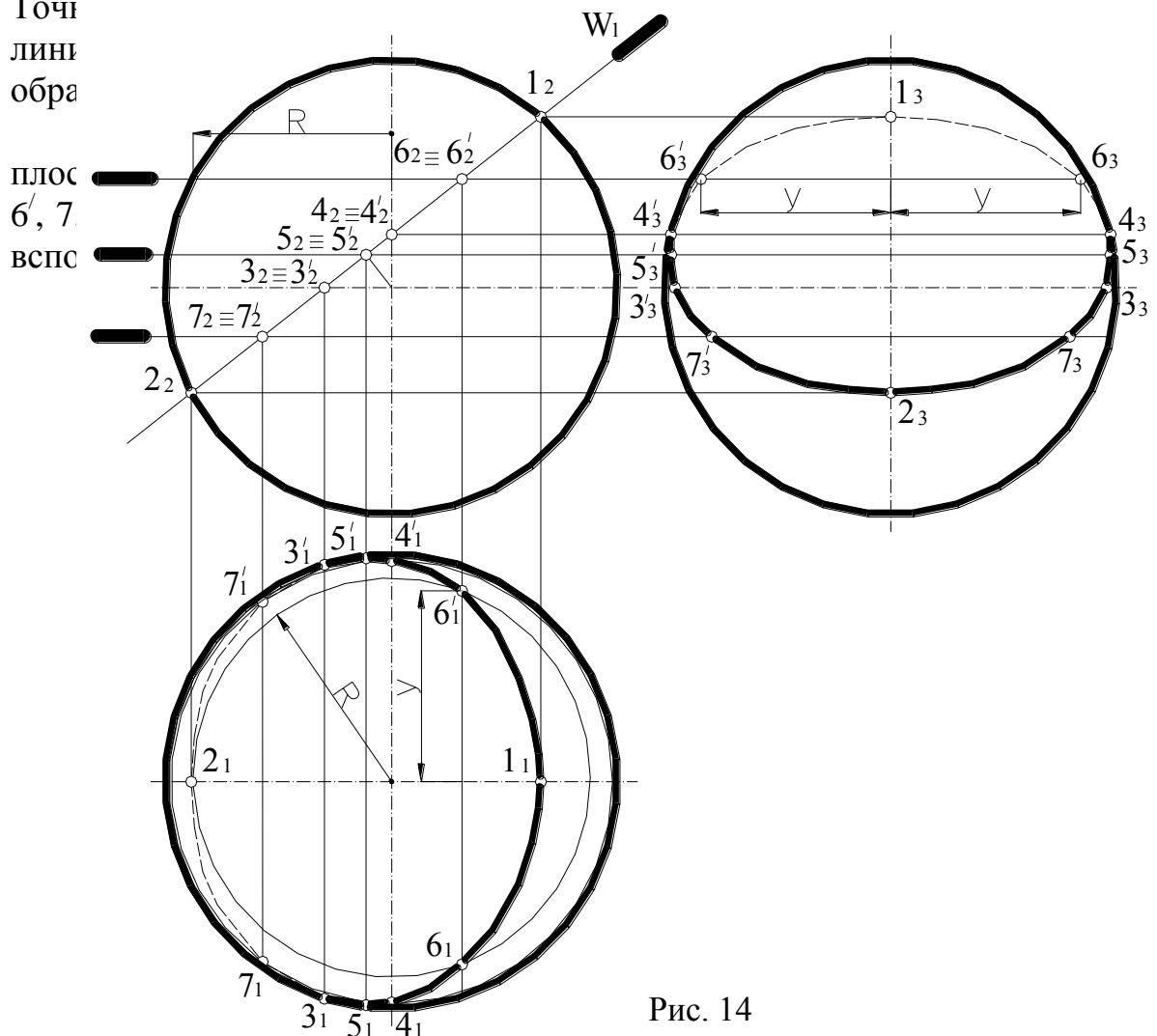


Рис. 14

В нашем случае если мы будем рассекать сферу вспомогательными горизонтальными секущими плоскостями, то на горизонтальной плоскости проекций ни будут рассекать сферу по окружностям с радиусом, который является расстоянием от оси сферы до образующей. Например, для точек 6 и 6' это радиус R. На пересечении окружности с линией связи и будут находиться горизонтальные проекции искомых точек. На профильную проекцию точки переносятся способами, которые изложены в первой лекции. Например, замерив координату У и отложив ее от оси по линии связи.

Найденные точки необходимо соединить плавной линией с учетом видимости. Видимую часть основной линией, невидимую пунктиром.

Построение точек встречи прямой и поверхности вращения

Методику построения точек встречи прямой и поверхности вращения покажем на примере пересечения прямой и сферы (рис. 15).

Прямую m заключаем в секущую проецирующую плоскость W . Затем строим линию пересечения сферы этой плоскостью по методике изложенной выше. Там где линия пересечения сферы плоскостью W и прямая m_1 пересекаются и будут точки встречи прямой и сферы. На фронтальную плоскость проекций их переносим по линии связи.

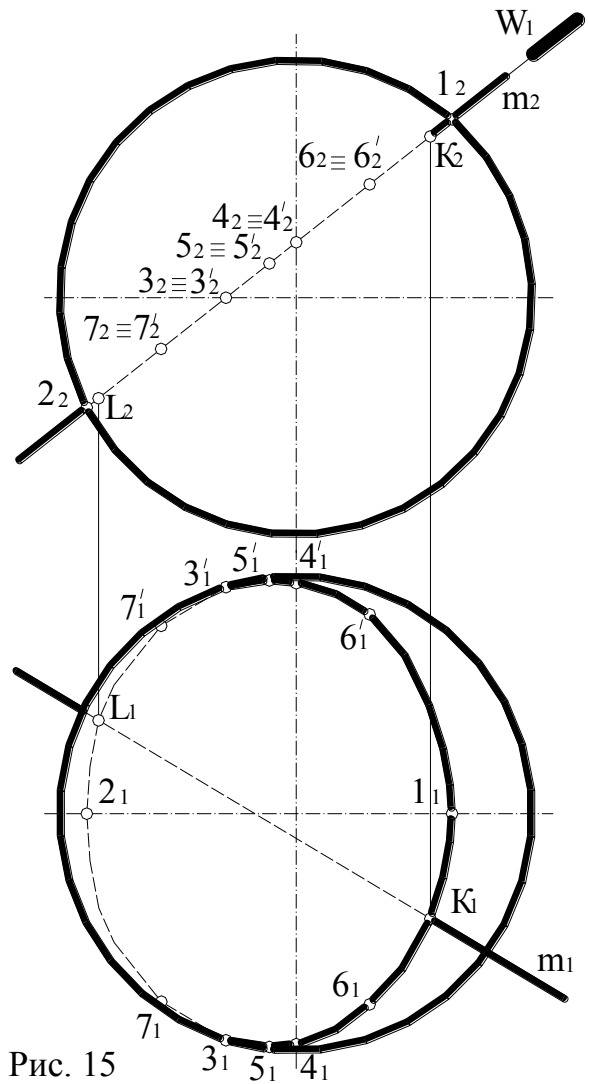


Рис. 15

Лекция №8. Взаимное пересечение поверхностей

Краткое содержание лекции

Способ посредников (плоскость, сфера). Опорные точки.

Возможные сочетания поверхностей или приемы определения линий пересечения. Порядок допуска к экзамену.

Содержание экзаменационных билетов

Общим способом построения линии пересечения одной поверхности другою является нахождение точек этой линии при помощи некоторых секущих поверхностей. Для линии пересечения применяется так же название «линии перехода», особенно в тех случаях, когда при переходе от одной поверхности к другой нет ярко выраженного пересечения.

Применяя указанный общий способ для построения линии пересечения двух кривых поверхностей, мы можем:

1. Пересекать поверхности вспомогательными плоскостями.
2. Пересекать поверхности вспомогательными кривыми поверхностями, например: концентрическими и эксцентрическими сферами.

В некоторых случаях при решении задач комбинируют применение вспомогательных плоскостей и кривых поверхностей. Следует по возможности подбирать такие вспомогательные поверхности, которые в пересечении с данными поверхностями дают простые для построения линии (например, прямые или окружности). Итак, для построения точек линии, получающейся на одной поверхности при пересечении ее другой поверхностью, пользуются вспомогательными секущими плоскостями частного положения, криволинейными поверхностями, прямолинейными образующими кривых линейчатых поверхностей и так далее.

Способ вспомогательных секущих плоскостей является наиболее универсальным. Построение линии пересечения поверхностей плоскостями частного положения рекомендуется вести в следующем порядке:

1. Сделать анализ задачи. Выбрать секущие плоскости, которые дают простейшие сечения. Определить характер линии пересечения.
2. Построить опорные точки. Это точки, которые отделяют видимую часть линии пересечения от невидимой, точки пересечения очерковых линий поверхности от другой и так далее. В каждой задаче может быть перечень опорных точек.

3. Построить необходимое число промежуточных точек при помощи способа вспомогательных секущих плоскостей.
4. Соединить полученные точки, учитывая видимость.

46

Построение линии пересечения поверхностей вращения покажем на нескольких примерах.

Задача. Построить линию пересечения конуса вращения с цилиндром вращения (рис. 1). Оси поверхностей вращения – взаимно перпендикулярные проецирующие скрещивающиеся прямые.

Решение задачи начинаем с опорных точек.

Опорными являются точки 1 и 2, лежащие на образующей конуса во фронтальной проекции. На горизонтальной проекции они лежат по линии связи на осевой конуса. Точками видимости являются точки 3 и 3', лежащие на горизонтальной оси цилиндра во фронтальной проекции. Горизонтальные проекции этих точек находим с помощью метода вспомогательных секущих плоскостей.

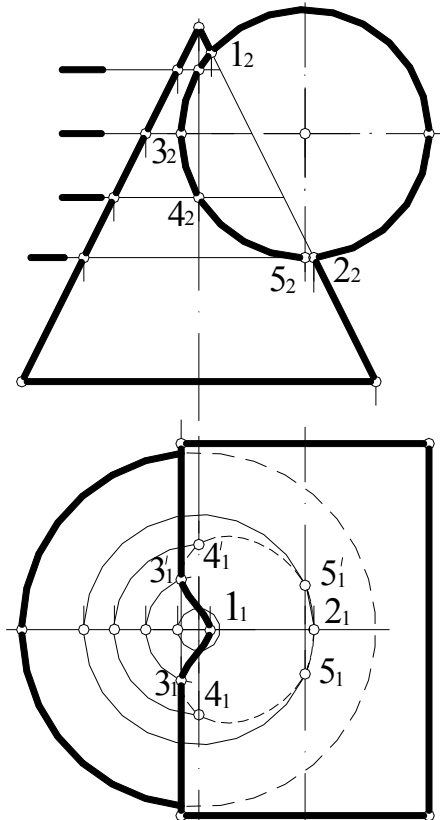


Рис. 1

Проведем горизонтальную плоскость (параллельную горизонтальной плоскости проекций) проходящую через точки 3 и 3'. Конус пересекается этой плоскостью по окружности радиусом от оси до образующей. Цилиндр пересекается по двум прямым, совпадающими с образующими. В месте пересечения этой окружности и одной из прямых будет находиться горизонтальные проекции точек 3 и 3'. Точки 4 и 5 находятся аналогично.

Все точки находящиеся ниже оси цилиндра (ниже точки 3, точки видимости) будут невидимыми. С учетом видимости точки пересечения поверхностей на горизонтальной проекции соединяются плавной кривой, видимая часть основной (жирной) линией, невидимая штриховой тонкой.

Задача. Построить линию пересечения фронтально-проецирующего цилиндра вращения с поверхностью открытого тора (кольцо) (рис. 2).

Решение. Построение начинается с опорных точек (крайних и точек видимости). Точки 1 и 2 во фронтальной проекции лежат на

осевой линии тора. Их можно на горизонтальной проекции найти по линиям связи на контуре тора, это проекции $1_1, 2_1$ и симметрично им расположенные $1'_1, 2'_1$. Так же крайними являются точки $3, 4, 5, 8$. Точки 3 и 4 лежат на прямой, соединяющей центры тора и цилиндра. Через точку 3 проводим вспомогательную секущую плоскость параллельную фронтальной плоскости проекций. Тор этой плоскостью пересекается по окружности радиусом равным расстоянию от центра тора до 3_2 . Проводим эту окружность до пересечения с основанием тора. Из полученной точки опускаем на линию связи до пересечения с горизонтальной проекцией основания тора. В горизонтальной проекции вспомогательная секущая плоскость выглядит как прямая, параллельная оси X . На пересечении этой плоскости и линии связи от проекции 3_2 будет находиться проекция 3_1 . Остальные опорные точки строим аналогично.

Для большей точности построим еще пару промежуточных точек 9 и 10 . Методика построения та же самая. Количество промежуточных точек зависит от того какая требуется точность построения. Чем больше их тем точнее чертеж, но при этом больше требуется времени. Поэтому для определения числа промежуточных точек необходим разумный компромисс.

С учетом видимости точки соединяем плавной кривой. Точки 5 и 2 лежат на осевых линиях тора и цилиндра, поэтому они являются точками видимости. Все точки лежащие выше осевых линий будут видимы, ниже – невидимы.

Задача. Построить три проекции линии пересечения конуса и сферы.

Решение задачи начинаем с опорных точек (рис. 3).

Опорными являются точки 1 и 2 , лежащие на образующей конуса и сферы во фронтальной проекции. На горизонтальной проекции они лежат по линии связи на осевой конуса и сферы.

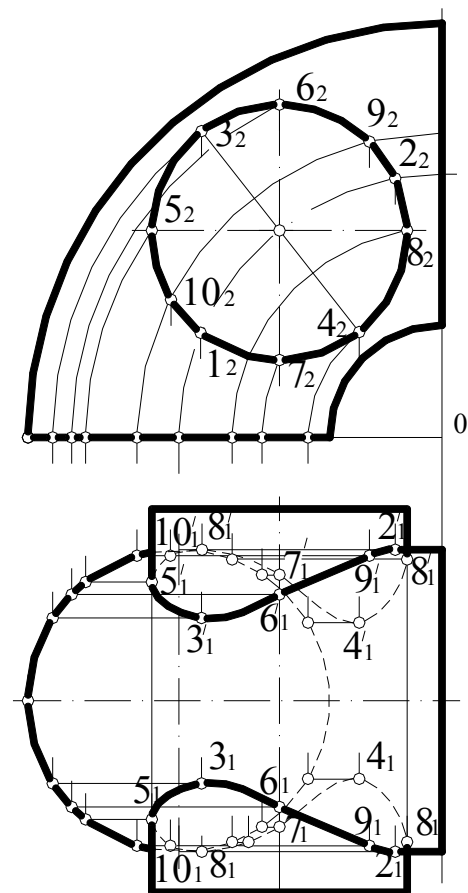


Рис. 2

Точками видимости для горизонтальной проекции являются точки 3 и 3', лежащие на горизонтальной оси сферы во фронтальной проекции. Горизонтальные проекции этих точек находим с помощью метода вспомогательных секущих плоскостей.

Проведем горизонтальную плоскость (параллельную горизонтальной плоскости проекций) проходящую через точки 3 и 3'. Конус рассекается этой плоскостью по окружности радиусом от оси до образующей, сфера рассекается по экватору. В месте пересечения этой окружности и экватора сферы будут находиться горизонтальные проекции точек 3 и 3'. Промежуточные точки 4, 5, 6 и 7 находим с помощью вспомогательных секущих плоскостей.

Все точки находящиеся ниже оси цилиндра (ниже точки 3, точки видимости) будут невидимыми. С учетом видимости точки пересечения поверхностей на горизонтальной проекции соединяются плавной кривой, видимая часть основной линией, невидимая штриховой тонкой.

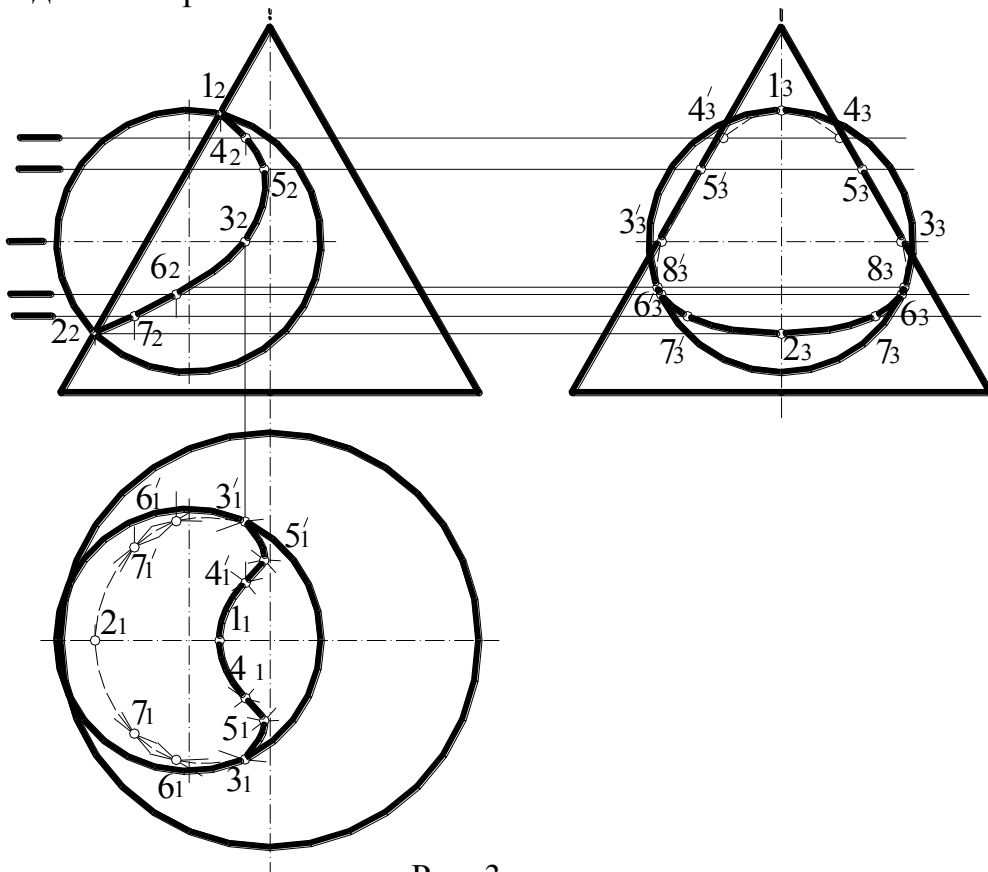


Рис. 3

После построения двух проекций точек линии пересечения строим третью проекцию любым из способов изложенных в первой лекции.

Порядок допуска к экзамену.
Содержание экзаменационных билетов

Для допуска к экзамену студент должен выполнить следующее:

1. Решить задачи в рабочей тетради и защитить их.
2. Выполнить восемь индивидуальных заданий.

В экзаменационный билет входят три задачи. Первая задача на темы: точка, прямая, плоскость, их взаимное положение, а также задачи на преобразование чертежа. Вторая и третья задачи на объемные фигуры, как то многогранники и поверхности вращения. Пересечение их плоскостью, определение точек встречи с прямой, фигуры с вырезами, их взаимное пересечение.

Оглавление

Предисловие.	3
1. Лекция №1. Точка.	3
2. Лекция №2. Прямая.	10
3. Лекция №3. Взаимное расположение двух прямых.	15
4. Лекция №4. Плоскость.	17
5. Лекция №5. Взаимное положение двух плоскостей.	22
6. Лекция №6. Преобразование комплексного чертежа. Многогранники	26
7. Лекция №7. Поверхности вращения.	37
8. Лекция №8. Взаимное пересечение поверхностей.	45

Литература

1. *Лагерь, А.И.* Инженерная графика / *А.И. Лагерь.* – М.: Высш. шк., 2002. – 456 с.
2. *Чекмарев, А.А.* Начертательная геометрия и черчение / *А.А. Чекмарев.* – М.: ВЛАДОС, 2003. – 472 с.
3. *Фролов, С.А.* Начертательная геометрия: Учеб. втузов / *С.А. Фролов.* – М.: Машиностроение, 1978. – 240 с.
4. *Гордон, В.О.* Курс начертательной геометрии: Учеб. пособие / *В.О. Гордон и др.* – М.: Наука, 1988. – 272 с.

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Курс лекций

Селиванов А.П.
Колот Е.А.

Редактор-корректор: З.В. Попова

Санитарно-эпидемиологическое заключение № 24.49.04.953.П. 000381.09.03 от
25.09.2003 г.

Подписано в печать 09.11.2004 г. Формат 60x84/16. Бумага тип. № 1.

Офсетная печать. Объем *п.л. Тираж 110 экз. Заказ №*

Издательство
Красноярского государственного аграрного университета
660017, Красноярск, ул. Ленина, 117