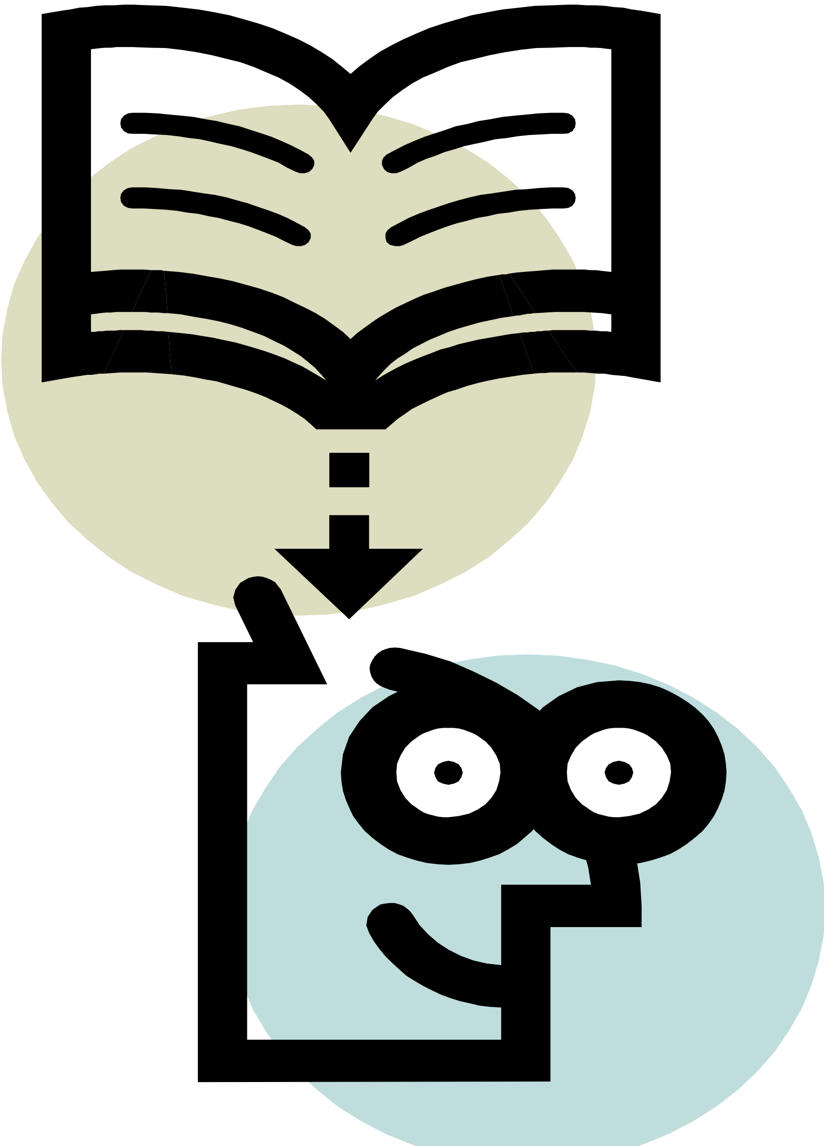
Красноярский государственный аграрный университет

МОДЕЛИ ТЕОРИИ ИГР

Методические указания
по изучению темы



Красноярск, 2018

Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
Красноярский государственный аграрный университет

МОДЕЛИ ТЕОРИИ ИГР

Методические указания

Красноярск, 2018

Рецензент
О.А. Шушерина, доцент, канд. пед. наук, доцент кафедры Высшей математики Сибирского государственного университета науки и техники им. академика М.Ф. Решетнева

Составитель
М.П. Свитачева

Предназначены для бакалавров дневного и заочного отделений института Экономики и управления АПК, обучающихся по направлениям подготовки 38.03.05 (5.38.03.05) «Бизнес-информатика», 09.03.03 (2.09.03.03) «Прикладная информатика», 01.03.02 (1.01.03.02) «Прикладная математика и информатика», 10.03.01 (2.10.03.01) «Информационная безопасность», 38.03.04 (5.38.03.04) «Государственное и муниципальное управление», 38.03.02 (5.38.03.02) «Менеджмент».

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Решение проблем рационального использования современных и перспективных методов и средств обработки информации в практической (профессиональной) деятельности людей приобретет первостепенное значение.

Современная экономическая теория и практика требует применения адекватных математических методов и моделей, использование которых позволяет получить количественные оценки различных экономических показателей и принять обоснованные экономические решения. Математический инструментарий, применяемый в экономике, огромен.

В экономике иногда приходится сталкиваться с ситуацией, когда при наличии многих участников эффективность решения одного из них зависит от того, какие решения приняли другие участники. Построением математических моделей конфликтных ситуаций и разработкой методов решения возникающих в этих ситуациях задач занимается теория игр.

Компьютерное моделирование является эффективным средством для принятия управленческих решений. Из множества вариантов решений в каждой конкретной ситуации экономико-математические модели позволяют без перебора всех возможных вариантов находить при заданных условиях оптимальный, то есть самый лучший вариант.

Его особенности в области маркетинга определяются задачами и функциями этой сферы деятельности предприятий и фирм в условиях рыночной экономики. Применение компьютеров ускоряет вычислительный процесс. Они быстро производят необходимые преобразования экономической информации, обеспечивая переработку огромных потоков информации.

Внедрение новых принципов управления на основе компьютерного моделирования приводит к радикальным изменения количества и содержания информации, представляемой руководству для принятия управленческих решений.

Модели теории игр нашли широкое применение в области экономики, в том числе в области маркетинга.

Целью настоящих методических уазаний является изложение основополагающих теоретических понятий моделей теории игр, а также их реализации с применением ПК для принятия эффективных управленческих решений. Даны примеры с решениями и задачи для самостоятельного решения студентов.

Рассматриваемые методические указания предназначены для студентов, обучающихся по специальностям 80801.65 «Прикладная информатика», 80111.65 «Маркетинг» и 80507.65 «Менеджмент организации» при изучении дисциплины «Компьютерное модлирование в маркетинге».

1. Основные понятия

Конфликтная ситуация – ситуация, в которой интересы отдельных лиц (или групп, сторон, …) прямо противоположны либо не совпадают.

Для конфликтных ситуаций характерно, что эффективность решений, принимаемых в ходе конфликта каждой из сторон, существенно зависит от действий другой стороны. При этом ни одна из сторон не может полностью контролировать положение, так как и той и другой стороне решения приходится принимать в условиях неопределенности. Например, в экономике: доход предприятия от продажи изделия зависит не только от установленной на него цены, но и от количества купленных покупателем изделий или при определении объема выпуска продукции на одном предприятии нельзя не учитывать объемы выпуска аналогичной продукции на других предприятиях и т.п.

Раздел математики, изучающий конфликтные ситуации на основе их математических моделей, называется *теорией игр*. Необходимо отметить, что методы и рекомендации теории игр разрабатываются применительно к таким специфическим конфликтным ситуациям, которые обладают свойством многократной повторяемости. Если конфликтная ситуация реализуется однократно или ограниченное число раз, то рекомендации теории игр теряют смысл.

Игра – это упрощенная математическая модель конфликтной ситуации. Суть игры в том, что каждый из участников принимает такие решения в развивающейся конфликтной ситуации, которые, как он полагает, могут обеспечить ему наилучший исход. От реального конфликта она отличается тем, что ведется по определенным правилам. Стороны, участвующие в конфликте, называются игроками.

Стратегия – это совокупность правил, однозначно определяющих последовательность действий игрока в каждой конкретной ситуации, складывающейся в процессе игры. Эти правила определяют:

- варианты действий игроков;
- объем информации каждого игрока о поведении партнеров;
- выигрыш (или проигрыш), к которому приводит каждая совокупность действий.

Стратегии бывают *чистыми* и *смешанными*. Чистая стратегия – это стратегия, ориентированная на определенное поведение игрока-противника. Смешанная стратегия – это стратегия, ориентированная на несколько возможных стратегий поведения игрока-противника.

Числовые характеристики, выражающие интересы игроков – это значения *платежной функции* (функции выигрыша или проигрыша), которая задается матрицей (таблично) или аналитически.

2. Классификация игр

Игры классифицируют по разным признакам:

- по числу игроков – парные и непарные;
- по числу стратегий – конечные и бесконечные;
- по объему имеющейся информации – полные и неполные;
- по характеру выигрышей – игры с нулевой суммой и ненулевой суммой;
- по виду функции выигрыша – матричные, биматричные, непрерывные, выпуклые, сепарабельные и др.;
- по характеру взаимоотношений игроков – безкоалиционные и коалиционные.

Парная игра называется игрой с нулевой суммой, или антагонистической, если выигрыш одного игрока равен проигрышу другого. Отсюда следует, что для полного задания игры с нулевой суммой достаточно указать величину выигрыша (проигрыша) одного из них. Парная матричная игра всегда имеет решение. В дальнейшем будем рассматривать только парные матричные игры с нулевой суммой.

3. Этапы построения моделей теории игр

Поэтапность работы с моделями теории игр:

1. Определение участников игры (игроков).
2. Определение стратегий игроков.

3. Определение выигрышей игроков при использовании каждой стратегии.
4. Представление матрицы выигрышей в упрощенном виде методом доминирования.
5. Поиск оптимальных стратегий.

4. Решение матричных игр в чистых стратегиях

Конечную матричную игру в чистых стратегиях для 2-х игроков A и B со своими $A_1, A_2, ..., A_m$ и $B_1, B_2, ..., B_n$ стратегиями соответственно можно представить таблицей 1.

Таблица 1

B_j / A_i	B_1	B_2	…	B_n	α_i
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	α_1
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	α_2
…	…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	α_m
β_j	β_1	β_2	…	β_n	

где $\alpha_i = \min a_{ij} \ (i = 1,...,m)$; $\beta_j = \max a_{ij} \ (j = 1,...,n)$.

Платежная матрица $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ является табличной записью функции выигрыша игрока A (проигрыша игрока B). Игрок A выбирает одну из своих чистых стратегий – одну из строк платежной матрицы. Игрок B, не зная результата выбора игрока A, выбирает одну из своих чистых стратегий – один из столбцов платежной матрицы. Значения параметров a_{ij} могут быть и отрицательными числами. Это означает проигрыш игрока A и, соответственно, выигрыш игрока B.

Целью участников любой матричной игры является выбор наиболее выгодных стратегий, доставляющих игроку A максимальный выигрыш, а игроку B минимальный проигрыш. Наилучшим принципом выбора стратегий принято считать *принцип разумности*, при котором каждый игрок предполагает, что его противник не глупее. В результате этого рекомендуется в качестве наилучшей стратегии выбирать ту, которая обеспечивает наибольший гарантированный выигрыш, не зависящий от действий противника и который противник никак не может уменьшить. Элементы риска и ошибки игроков во внимание не принимаются. Стратегия игрока А называется оптимальной, если при ее применении выигрыш игрока А не уменьшается, какими бы стратегиями не пользовался игрок В. Оптимальной для игрока В является стратегия, при которой проигрыш игрока В не увеличивается, какими бы стратегиями не пользовался игрок А.

Нижняя чистая цена игры (максимин), вычисляется по формуле

$$\alpha = \max_{1 \le i \le m} \min_{1 \le j \le n} a_{ij} \qquad (1)$$

и показывает, какой минимальный выигрыш может получить игрок А правильно применяя свои чистые стратегии при любых действиях игрока В. Стратегия, соответствующая максимину, называется максиминной стратегией.

Верхняя чистая цена игры (минимакс) вычисляется по формуле

$$\beta = \min_{1 \le j \le n} \max_{1 \le i \le m} a_{ij} \qquad (2)$$

и показывает, какой максимальный проигрыш может быть у игрока В при правильном выборе им своих чистых стратегий, независимо от действий игрока А. Стратегия, соответствующая минимаксу, называется минимаксной стратегией.

В матричной игре нижняя чистая цена игры не превосходит верхней чистой цены игры, то есть $\alpha \le \beta$.

Если $\alpha = \beta$, то говорят о *чистой цене* игры ν: $\nu = \alpha = \beta$. Соответствующие этим значениям стратегии игроков А и В являются оптимальными, а элемент платёжной матрицы $a_{i^*j^*}$отвечающий этим стратегиям, называется *седловой точкой*. Если игра имеет седловую точку, то оптимальными будут максиминная и минимаксная стратегии, а ценой игры – седловая точка платежной матрицы. Если $\nu > 0$, игра выгодна игроку А. При $\nu < 0$ игра выгодна игроку В. В случае $\nu = 0$ игра выгодна обоим игрокам и называется *безобидной* или *справедливой*.

При отсутствии седловой точки в матричной игре в чистых стратегиях рассматривают решение матричной игры в смешанных стратегиях.

5. Метод доминирования

Оптимальные стратегии легко находятся для игр, имеющих небольшую размерность платежной матрицы, то есть для игр, в которых каждый из игроков имеет небольшое число стратегий. В то же время для игр, имеющих большую размерность, поиск решения становится достаточно сложным. Метод, используемый для уменьшения размерности матрицы, основан на одном из важнейших понятий в теории игр – понятии доминирования стратегий. Решение игры можно существенно упростить, если своевременно выявить имеющиеся в платежной матрице доминирование одних стратегий над другими, ибо это позволит предварительно сократить размерность матрицы.

Если в платежной матрице элементы k-й строки не меньше соответствующих элементов s-й строки, т.е. $a_{kj} \geq a_{sj} \quad (j=\overline{1,n})$, то выигрыш игрока A при стратегии A_k будет больше (не меньше), чем при стратегии A_s , какой бы стратегией B_j не пользовался игрок B. Поэтому для игрока A стратегия A_k будет более выгодной, чем стратегия A_s. В связи с этим говорят, что стратегия A_k доминирует над стратегий A_s, и называют стратегию A_k *доминирующей*, а стратегию A_s – *доминируемой*.

Аналогично, если элементы l-го столбца не превосходят соответствующих элементов r-го столбца, $a_{il} \geq a_{irj} \quad (j=\overline{1,m})$, то игроку B при любых условиях невыгодно применять стратегию B_r , так как в этом случае он будет проигрывать больше (не меньше), чем при использовании стратегии B_l. Поэтому говорят, что стратегия B_l доминирует над стратегией B_r , и называют их соответственно *доминирующей* и *доминируемой*.

Как первому, так и второму игроку нет смысла использовать доминируемую стратегию, поэтому все доминируемые стратегии могут быть отброшены (то есть фактически отброшены строки и столбцы исходной платежной матрицы, соответствующие этим стратегиям). Это преобразование уменьшает размерность исходной платежной матрицы. Найдя решение игры для упрощенной матрицы, его можно использовать для решения игры, представленной исходной матрицей, приписав исключенным строкам и столбцам нулевые вероятности.

6. Решение матричных игр в смешанных стратегиях

В соответствии с основной теоремой теории игр (теоремой Неймана) *каждая конечная игра имеет, по крайней мере, одно решение, возможно, в области смешанных стратегий.* Общий случай матричной игры в смешанных стратегиях можно представить таблицей 2.

Таблица 2

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	…	B_n	p_i
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	p_1
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	p_2
…	…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	p_m
g_j	g_1	g_2	…	g_n	

Здесь $p_1, p_2, \ldots, p_m$ – вероятности, с которыми игрок А использует в ходе игры свои чистые стратегии $A_1, A_2, \ldots, A_m$.

$$p_i \ge 0 \ (i = \overline{1,m}), \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1 .$$

Упорядоченное множество $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$, элементы которого удовлетворяют этим условиям, называется смешанной стратегией игрока А. Смешанные стратегии игрока А записываются в виде матрицы $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \ldots & A_i & \ldots & A_m \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_i & \ldots & p_m \end{pmatrix}$ или в виде строки $(p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots, p_m)$.

Любая чистая стратегия A_i, может рассматриваться как частный случай смешанной стратегии, i-ая компонента которой равна 1, а остальные равны 0, то есть $\overline{p} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$.

Аналогично, упорядоченное множество вероятностей $(q_1, q_2, \ldots, q_m)$, с которыми игрок В использует в ходе игры свои чистые стратегии $B_1, B_2, \ldots, B_m$, элементы которого удовлетворяют отношениям:

$$q_j \geq 0 \ \ (j=\overline{1,n}), \ \ \sum_{j=1}^{n} q_j = 1 ,$$

является смешанной стратегией игрока B. Смешанные стратегии игрока B записываются аналогично записи смешанных стратегий игрока A. Игрок B, как и игрок A, располагает бесконечным множеством смешанных решений.

Чистые стратегии игрока, входящие в его оптимальную смешанную стратегию с вероятностями, отличными от нуля, называются *активными стратегиями игрока*.

Функция

$$f(\overline{p},\overline{q}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j$$

называется платёжной функцией игры с матрицей, заданной таблицей 2.

Нижняя цена игры α определяется по формуле

$$\alpha = \max_{\overline{p}} \min_{\overline{q}} f(\overline{p},\overline{q}) ,$$

а верхняя цена игры β по формуле

$$\beta = \min_{\overline{q}} \max_{\overline{p}} f(\overline{p},\overline{q}) .$$

В смешанных стратегиях любая конечная матричная игра для платежной функции $f(\overline{p},\overline{q})$ имеет седловую точку $(\overline{p}^*,\overline{q}^*)$, удовлетворяющую равенству:

$$\max_{\overline{p}} \min_{\overline{q}} f(\overline{p}^*,\overline{q}^*) = \min_{\overline{q}} \max_{\overline{p}} f(\overline{p}^*,\overline{q}^*) = f(\overline{p}^*,\overline{q}^*) .$$

Величина $f(\overline{p}^*,\overline{q}^*)$ называется ценой игры и удовлетворяет неравенству

$$f(\overline{p},\overline{q}^*) \leq f(\overline{p}^*,\overline{q}^*) \leq f(\overline{p}^*,\overline{q}) .$$

Из этого неравенства следует, что в седловой точке $(\overline{p}^*,\overline{q}^*)$ платежная функция $f(\overline{p},\overline{q})$ достигает максимума по смешанным стратегиям $\overline{p}$ игрока A и минимума по смешанным стратегиям $\overline{q}$ игрока B.

6.1. Непосредственное решение матричной игры

Решение игры, не имеющей седловой точки, может осуществляться различными методами. Принципиальная схема определения оптимальных смешанных стратегий для игр без седловых точек предусматривает решение системы $m + n$ линейных неравенств и уравнений при условии неотрицательности всех неизвестных p_i и g_j . Непосредственное определение оптимальных смешанных стратегий связано с большим объемом вычислений, заметно увеличивающимся с ростом числа чистых стратегий участников игры.

Так, для антагонистической игры размером 2×2, для которой отсутствует оптимальное решение в чистых стратегиях, можно определить оптимальное решение в смешанных стратегиях: (p_1^*, p_2^*) и (g_1^*, g_2^*) и цену игры ν.

Выигрыш игрока А (проигрыш игрока В) – случайная величина, математическое ожидание (среднее значение) которой является ценой игры. Поэтому средний выигрыш игрока А (оптимальная стратегия) будет равен ν и для первой, и для второй стратегии противника. Тогда, для определения оптимальной стратегии игрока А и цены игры ν необходимо составить систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}p_1^* + a_{21}p_2^* = \nu\,, \\ a_{12}p_1^* + a_{22}p_2^* = \nu\,, \\ p_1^* + p_2^* = 1\,, \end{cases} \tag{3}$$

где параметры системы уравнений – это числа платежной матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Решая эту систему, оптимальная стратегия определяется формулами:

$$p_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}\,,$$

$$p_2^* = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}\,, \tag{4}$$

а цена игры

$$\nu = \frac{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}\ . \tag{5}$$

При любой чистой стратегии игрока А средний проигрыш игрока В равен цене игры ν, то есть

$$\begin{cases} a_{11}g_1^* + a_{12}g_2^* = \nu, \\ a_{21}g_1^* + a_{22}g_2^* = \nu, \\ g_1^* + g_2^* = 1. \end{cases} \tag{6}$$

Тогда оптимальная стратегия игрока В определяется формулами:

$$g_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}},$$

$$g_2^* = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \tag{7}$$

6.2. Решение матричных игр сведением к ЗЛП

Решение любой конечной матричной игры в смешанных стратегиях может быть сведено к решению двух взаимно двойственных задач линейного программирования (ЗЛП), что значительно упрощает определение оптимальных смешанных стратегий. Следует отметить, что исключение доминируемых стратегий может привести к потере некоторых решений. Если же исключаются только строго доминируемые стратегии, то множество решений игры не изменится.

Все элементы a_{ij} платежной матрицы должны быть положительны. Этого можно добиться, добавив ко всем членам матрицы большое число M > 0. От этого цена игры (ν) увеличится на M, а оптимальное решение не изменится. При окончательном определении цены игры ее следует уменьшить на M. Если все $a_{ij} > 0$, то и цена игры $\nu > 0$. Необходимо найти решение игры, то есть две оптимальные смешанные стратегии $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ и $(q_1, q_2, \ldots, q_m)$, дающие каждому игроку ν – максимально возможный для него средний выигрыш (минимально возможный средний проигрыш).

Для первого игрока А линейная модель имеет вид:

$$f = \sum_{i=1}^{m} x_i \to \min ,$$
$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \ge 1 , \ (j = \overline{1,n}) , \qquad (8)$$
$$x_i \ge 0 , \ (i = \overline{1,m}) ,$$

решая которую с использованием модуля *Поиск решения*, находят оптимальный вектор $\overline{x}^* = (x_1^*,...,x_m^*)$ и $f^* = f_{min}$, а затем определяют цену игры

$$\nu = \frac{1}{f_{min}} \qquad (9)$$

и оптимальную смешанную стратегию $\overline{p}^* = (p_1^*,...,p_m^*)$ игрока А:

$$p_i^* = \nu x_i^* \ (i = \overline{1,m}), \qquad (10)$$

Для второго игрока модель записывается в виде

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} y_i \to \max ,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i \le 1 , \ (i = \overline{1,m}) , \qquad (11)$$
$$y_j \ge 0 , \ (j = \overline{1,n}) .$$

Реализация в Excel дает оптимальный вектор $\overline{y}^* = (y_1^*,...,y_m^*)$ и $\varphi^* = \varphi_{max}$. Затем можно определить цену игры

$$\nu = \frac{1}{\varphi_{max}} \qquad (12)$$

и компоненты оптимальной смешанной стратегии:

$$q_j^* = \nu y_j^* \quad (j = \overline{1,n}) \qquad (13)$$

то есть оптимальную смешанную стратегию игрока В.

Линейные оптимизационные модели для игроков А и В представляют собой пару двойственных задач. На основании теоремы двойственности $f_{min} = \varphi_{max}$, следовательно, значения формул (9) и (12) дадут один и тот же результат – цену игры, то есть седловую точку.

7. Решение матричных игр с «природой»

В экономической практике нередко приходится моделировать ситуации, придавая им игровую схему, в которых один из участников безразличен к результату игры.

Матричные игры, в которых одним из игроков является неопределенность, зависящая от объективной действительности (погода, покупательский спрос и так далее), называются играми с «*природой*» или *статистическими играми*. В этих случаях строки матрицы игры соответствуют стратегиям игрока, а столбцы – состояниям «природы». В таких играх сознательному игроку (*статистику*) приходится принимать решение и степень неопределенности для него возрастает. В статистических играх «природа», будучи индеферентной в отношении выигрыша инстанцией, может предпринимать и такие ответные действия, которые ей совсем не выгодны, а выгодны статистику.

Статистик может использовать несколько стратегий A_1 , A_2 , …, A_m . Природа также обладает множеством стратегий (состояний) $П_1$, $П_2$, …, $П_n$. Под состоянием природы понимают полную совокупность внешних условий, в которых статистику приходится выбирать свою стратегию. Из прежнего опыта статистику обычно известны возможные состояния природы, а иногда и вероятности g_j , с которыми природа реализует их. Эти вероятности называются априорными. При решении статистических игр достаточно найти наилучшие рекомендации только для статистика, так как природа в рекомендациях не нуждается. Перед тем, как переходить к выбору оптимальной стратегии, необходимо сравнить нижнюю и верхнюю чистые цены и в случае их неравенства, если это возможно, упростить платежную матрицу (уменьшить ее размерность), учитывая отношение доминирования стратегий статистика. Отбрасывать те или иные состояния природы нельзя, так как она может реализовать любое свое состояние независимо от того, выгодно оно статистику или нет.

После упрощения платежной матрицы иногда выгодно перейти от нее к матрице рисков, которая позволит более четко выявить преимущество одной стратегии по сравнению с другой при данном состоянии природы. Так, если в платежной матрице $a_{kl} > a_{st}$, то отсюда еще не следует с неизбежностью, что стратегия A_k лучше стратегии A_s . Возможно состояние природы $П_l$ более благоприятно для статистика, чем состояние $П_s$. Положение может проясниться при анализе матрицы рисков.

Риском r_{ij} статистика, когда он пользуется чистой стратегией A_i при состоянии природы $П_j$, называется разность между максимальным выигрышем $\max\limits_{1 \le i \le m} a_{ij}$, который он мог бы получить, зная достоверно, что природой будет реализовано именно состояние $П_j$, и тем выигрышем a_{ij}, который он получит, используя стратегию A_i, не зная, какое из состояний $П_j$ природа реализует. Итак, матрица риска $R=(r_{ij})_{m*n}$, где $r_{ij}=\beta_j - a_{ij}$; $\beta_j = \max\limits_{1 \le i \le m} a_{ij}$ при заданном j.

Учитывая специфику статистических игр, при поиске оптимальных решений применяют различные критерии, дающие некоторую логическую схему принятия решений. Поскольку критерии формулируются на основе здравого смысла, интуиции и практической целесообразности, то они помогают оценить принимаемое решение с различных позиций, что позволяет избежать грубых ошибок в хозяйственной деятельности.

В случае, когда по принятому критерию рекомендуется использование нескольких стратегий, тогда выбор между ними может делаться по дополнительному критерию. Например, в расчет могут приниматься среднеквадратические отклонения от средних выигрышей при каждой стратегии. Стандартного подхода в выборе решения не существует. Выбор может зависеть от склонности к риску лица, принимающего решение.

Для решения статистических игр – для выбора оптимальной стратегии статистика существуют *две группы критериев*, использующих и не использующих априорные вероятности g_j состояний «природы».

К *первой группе критериев* относят критерии Байеса и Лапласа, которые используют априорные вероятности g_j состояний природы. Статистическая игра представляется таблицей 3.

Таблица 3

A_i \ $П_j$	$П_1$	$П_2$		$П_i$		$П_n$	$\overline{a_i}$
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1j}	…	a_{1n}	$\overline{a_1}$
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2j}	…	a_{2n}	$\overline{a_2}$
…	…	…	…	…	…	…	…
A_i	a_{i1}	a_{i2}	…	a_{ij}	…	a_{in}	$\overline{a_i}$
…	…	…	…	…	…	…	…
A_m	a_{n1}	a_{n1}	…	a_{nj}	…	a_{mn}	$\overline{a_m}$
g_j	g_1	g_2	…	g_j	…	g_n	

где $\overline{a_i}$ – среднее значение выигрыша:

$$\overline{a_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} g_j \quad i = \overline{1,m} \qquad (14)$$

которое определяется для каждой чистой стратегии A_i статистика;

g_j – априорные вероятности «природы».

Критерий Байеса. Он использует как среднее значение выигрыша $\overline{a_i}$, так и среднее значение риска:

$$\overline{r_i} = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} g_j \quad i = \overline{1,m}. \qquad (15)$$

В качестве оптимальной стратегии по критерию Байеса принимают чистую стратегию A_i, для которой выполняется одно из условий:

- максимизируется средний выигрыш $\overline{a_i}$ статистика;
- минимизируется средний риск $\overline{r_{ij}}$.

Причем, стратегия, максимизирующая средний выигрыш, совпадает со стратегией, минимизирующей средний риск.

Критерий Лапласа. Если статистик не располагает объективной информацией об априорных вероятностях g_j состояний природы $П_i$ и считает в равной мере правдоподобными все состояния, то их вероятности полагают одинаковыми: $g_1 = g_2 = \ldots = g_n = 1/n$. Этот прием называют *принципом недостаточного основания Лапласа*. Оптимальной по критерию Лапласа считается чистая стратегия, обеспечивающая максимальный средний выигрыш $\overline{a_i}$ статистика при равенстве всех априорных вероятностей.

Если статистик может оценить состояния природы по степени их правдоподобности, то вероятности реализации состояний считают пропорциональными членами убывающей арифметической прогрессии $g_1 : g_2 : \ldots : g_n = n : (n-1) : \ldots : 1$, а для расчетов пользуются формулой

$$g_j = 2(n + 1 - j) : n(n + 1) \text{, где } j = 1, 2, \ldots, n .$$

Замечание. В критериях Байеса и Лапласа речь шла о выборе оптимальной стратегии статистика из множества его чистых стратегий. Можно, оказывается доказать, что если известны априорные вероятности состояний природы, то статистику нет смысла пользоваться смешанными стратегиями, так как при этом его средний выигрыш не увеличивается.

Ко *второй группе критериев* выбора оптимальной стратегии статистика, применяемых при неизвестных априорных вероятностях состояний природы относятся критерии максимакса, Вальда, Сэвиджа и Гурвица.

Критерий максимакса – это критерий крайнего оптимизма, считается, что «природа» будет наиболее благоприятна для человека. Наилучшим признается решение

$$M = \max_{1 \le i \le m} \max_{1 \le j \le n} a_{ij}\,.$$

Критерий Вальда – максиминный критерий. С позиций этого критерия природа рассматривается как агрессивно настроенный и сознательно действующий соперник. Критерий является пессимистическим. Решение находится по формуле

$$W = \max_{1 \le i \le m} \min_{1 \le j \le n} a_{ij}\,.$$

Этот критерий применяют, когда игрок не столь заинтересован в крупной удаче, сколько хочет себя застраховать от неожиданных проигрышей. Выбор такой стратегии выбирается отношением игрока к риску. Оптимальной по критерию Вальда будет его максиминная чистая стратегия, а максимальным выигрышем – нижняя чистая цена игры α.

Критерий Сэвиджа – критерий минимаксного риска. Как и критерий Вальда, является критерием крайнего пессимизма, так как и здесь статистик исходит из предположения, что природа реализует самые неблагоприятные для него состояния. Критерий Сэвиджа рекомендует выбирать в качестве оптимальной ту чистую стратегию A_i , при которой минимизируется величина максимального риска. Решение находят по формуле

$$S = \min_{1 \le i \le m} \max_{1 \le j \le n} r_{ij}\,.$$

Отличие от критерия Вальда заключается в том, что игрок руководствуется не матрицей выигрыша, а матрицей риска.

Критерий Гурвица – критерий пессимизма – оптимизма. Этот критерий при выборе решений рекомендует руководствоваться некоторым средним результатом:

$$H_A = \max_{1 \le i \le m} \left\{ p \min_{1 \le j \le n} a_{ij} + (1-p) \max_{1 \le j \le n} a_{ij} \right\},$$

где $0 \le p \le 1$ – коэффициент оптимизма и выбирается на основании субъективных соображений. Чем больше желание подстраховаться в данной ситуации, тем ближе к единице значение р. При р = 0 получается критерий максимакса; при р = 1 – критерий Вальда.

8. Реализация на ПК моделей теории игр

При решении матричных игр следует:

- проверить, не содержит ли матрица седловой точки;
- если седловой точки нет, то нужно сравнить между собой элементы строк и столбцов для исключения дублирующих и доминирующих стратегий;
- рассмотреть решение матричной игры в смешанных стратегиях.

Для компьютерной реализации моделей теории игр достаточно применения функций **МАКС**, **МИН**, **ЕСЛИ,** при необходимости, и элементарных пользовательских функций.

8.1. Лабораторная работа № 1 «Составление платежных матриц»

Пример 8.1.1. Каждый из двух игроков А и В может записать независимо от другого цифры 1, 2, и 3. Если разность между цифрами, записанными игроками, положительна, то первый игрок выигрывает количество очков, равное разности между цифрами, и, наоборот, если разность отрицательна, то выигрывает второй игрок. Если разность равна нулю, то игра заканчивается вничью.

Решение. У первого игрока три стратегии (варианта действия):

A_1 – записать цифру 1;

A_2 – записать цифру 2;

A_3 - записать цифру 3.

У второго игрока, по аналогии, также три стратегии – B_1, B_2, B_3 . Задача первого игрока – максимизировать свой выигрыш. Задача второго игрока – минимизировать свой проигрыш или минимизировать выигрыш первого игрока.

Игру можно представить в виде платежной матрицы, в которой строки – стратегии первого игрока, столбцы – стратегии второго игрока, а элементы матрицы – выигрыши первого игрока. Для наглядности при составлении платежной матрицы для записи чистых стратегий игроков будем указывать в скобках цифры, которые они записывают.

Заполнение платежной матрицы можно начинать с любого элемента a_{ij} . Так, элементы, стоящие на главной диагонали будут равны нулю, так как при выборе стратегий с одной и той же нумерацией игроки будут записывать одинаковые цифры, их разность будет равна нулю и, по условию примера, игра заканчивается вничью.

Для ситуации (A_1, B_2) игрок A записывает цифру 1, а игрок B – цифру 2, их разность равна –1, значит выигрывает игрок B и элемент a_{12} = –1.

В ситуации (A_2, B_1) игрок A записывает цифру 2, а игрок B – цифру 1, их разность равна 1, значит выигрывает игрок A и элемент a_{21} = 1. Аналогично вычисляются все остальные элементы платежной матрицы. В результате будет получена платежная матрица, представленная в Excel таблицей 4 следующим образом:

Таблица 4

	A	B	C	D
1	B_j / A_i	B_1 (1)	B_2 (2)	B_3 (3)
2	A_1 (1)	0	-1	-2
3	A_2 (.2)	1	0	-1
4	A_3 (3)	2	1	0

Пример 8.1.2. Одним из видов продукции компании «Российский сыр», выпускаемой на экспорт, является сырная масса. Маркетинговые исследования показали, что спрос на сырную пасту в течение месяца может составлять 6, 7 или 8 ящиков. Затраты на производство одного ящика равны 30$. Компания продает каждый ящик по цене 70$. Если ящик с сырной пастой не продается в течение месяца, то она портится и компания не получает дохода. Используя исходные данные, получить платежную матрицу игры, представляющую прибыль компании от всевозможных сочетаний спроса и предложений.

Решение. Стратегиями игрока A (компания «Российский сыр») являются различные показатели числа ящиков с сырной пастой, которые ему можно производить в течение месяца: A_1 – производство шести ящиков, A_2 – производство семи ящиков, A_3 – производство восьми ящиков. Стратегиями S_1, S_2, S_3 (состояниями) «природы» выступают величины спроса на аналогичное число ящиков (6, 7, и 8 ящиков).

Каждый элемент платежной матрицы будет вычисляться как разница между выручкой от продажи ящиков и затрат на их производство. При этом необходимо помнить: продать больше ящиков, чем произведено, невозможно, не смотря на их спрос. В таблице 7.5 на Листе 1 в Excel расположить исходные данные в ячейках A1:B2. Для удобства вычислений в таблицу 7.5 внести данные по числу ящиков и расчет выручки от их продаж и затраты на их производство. В пятой строке произвести вычисление выручки от продаж 6, 7 и 8 ящиков соответственно. Для этого в ячейку B5 таблицы 7.5 ввести формулу = B4*$B$2 и скопировать ее в диапазон ячеек C5:D5. Для вычисления затрат на производство 6, 7 и 8 ящиков в ячейку B6 ввести формулу = B4*$B$1 и скопировать ее в диапазон C6:D6.

Расчет элементов платежной матрицы производится по разности между выручкой и затратами. Так, все элементы первой строки платежной матрицы будут зависеть от шести произведенных ящиков, несмотря на различный спрос (стратегии S_1, S_2, S_3). В ячейку B9 следует ввести формулу = $B$5-$B$6 и скопировать ее в диапазон ячеек C9:D9. Для всех элементов второй строки необходимо учитывать, что выручка зависит от семи произведенных ящиков. В ячейку B10 ввести формулу = B5-$C$6 , скопировать ее в ячейку C10, а в D10 – формулу = C5 - C6. Элементы третьей строки платежной матрицы зависят от восьми произведенных ящиков и различного спроса на них. В ячейку B11 ввести формулу = B5-$D$6 и скопировать ее в диапазон ячеек C11:D11.

Результатом будет платежная матрица, расположенная в ячейках B9:D11 таблицы 5.

Таблица 5

	A	B	C	D
1	Производство одного ящика, $	30		
2	Продажа одного ящика, $	70		
3		Число ящиков		

4		6	7	8
5	Выручка от продаж ящиков, $	420	490	560
6	Затраты на производство ящиков, $	180	210	240
7	**Платежная матрица**			
8	Спрос на ящики / Компания «Российский сыр»	S_1 (6)	S_2 (7)	S_3 (8)
9	A_1 (6)	240	240	240
10	A_2 (7)	210	280	280
11	A_3 (8)	180	250	320

Пример 8.1.3. В новом жилом районе создается ателье для ремонта в стационарных условиях не более 8 тыс. телевизоров в год. Для упрощения примем, что поток заявок на ремонт выражается числами 2, 4, 6 и 8 тыс. заявок в год. Накопленный опыт работы аналогичных предприятий показывает, что прибыль от ремонта одного телевизора в условиях ателье (ремонт телевизоров на дому здесь не рассматривается) составляет 9 ден. ед.; потери, вызванные отказом в ремонте ввиду недостатка мощностей – 5 ден. ед.; а убытки от простоя специалистов и оборудования при отсутствии заявок – 6 ден. ед. Используя игровой подход, составить платежную матрицу.

Решение. В рассматриваемой ситуации в качестве сознательного игрока А (статистика) выступает орган, принимающий решение о мощности создаваемого ателье. Его чистыми стратегиями будут:

A_1 – решение об открытии ателье для ремонта 2 тыс. телевизоров в год в стационарных условиях;

A_2 – решение об открытии ателье для ремонта 4 тыс. телевизоров в год в стационарных условиях;

A_3 - решение об открытии ателье для ремонта 6 тыс. телевизоров в год в стационарных условиях;

A_4 - решение об открытии ателье для ремонта 8 тыс. телевизоров в год в стационарных условиях.

В качестве второго игрока будем рассматривать совокупность всех внешних обстоятельств, в которых формируется поток заявок на ремонт телевизоров в условиях ателье, – природу П. В данном случае природа может реализовать любое из четырех состояний:

$П_1$ - поток состоит из 2 тыс. заявок;

$П_2$ – поток состоит из из 4 тыс. заявок;

$П_3$ – поток состоит из из 6 тыс. заявок;

$П_4$ - поток состоит из из 8 тыс. заявок.

Итак, описанная в примере ситуация формализуется в статистическую игру размерности 4х4. Составим платежную матрицу. Для этого вычислим выигрыши a_{ij} игрока А – значения совокупного показателя эффективности работы создаваемого ателье при любом стечении обстоятельств $(A_i\ ;\ П_j)$, (i, j = 1, 2, …, 4).

Наиболее благоприятными будут комбинации $(A_1;\ П_1)$, $(A_2;\ П_2)$, $(A_3;\ П_3)$ и $(A_4;\ П_4)$, когда количество поступивших заявок в точности совпадает с возможностями ателье: все заявки будут удовлетворены и прибыль $a_{11} = 2·9 = 18$ тыс. ден. ед., $a_{22} = 4·9 = 36$, $a_{33} = 54$, $a_{44} = 72$. В ситуации $(A_1;\ П_2)$ в ателье можно отремонтировать 2 тыс. телевизоров из 4 тыс. заявленных. За это ателье получит $2·9 = 18$ тыс. ден. ед. прибыли, а 2 тыс. заявок останутся без удовлетворения. Рассматриваемая экономическая система несет потери, вызванные отказом в ремонте. Они составят $2·5 = 10$ тыс. ден. ед. Таким образом, показатель эффективности работы ателье в этом случае $a_{12} = 2·9 - 2·5 = 8$ тыс. ден. ед. Вычислим еще один элемента, например, a_{31}, соответствующий комбинации $(A_3;\ П_1)$, когда ателье может отремонтировать 6 тыс. телевизоров, а заявок поступило всего 2 тыс. В этом случае за 2 тыс. отремонтированных телевизоров ателье получит $2·9 = 18$ тыс. ден. ед. прибыли. Вместе с этим система несет убытки от простоя специалистов и оборудования в размере $6\ (6 - 2) = 24$ тыс. ден. ед., так что совокупный показатель эффективности $a_{31} = 18 - 24 = - 6$ тыс. ден. ед. Аналогично вычисляются и остальные элементы платежной матрицы. В результате будет составлена платежная матрица, указанная в таблице 6.

Таблица 6

	A	B	C	D	E
1		$П_1$ (2)	$П_2$ (4)	$П_3$ (6)	$П_4$ (8)
2	A_1 (2)	18	8	-2	-12

3	A_2 (4)	6	36	26	16
4	A_3 (6)	-6	24	54	44
5	A_4 (8)	-18	12	42	72

Задачи для самостоятельного решения

Задача 8.1.1. Игрок А записывает одно из двух чисел: 1 или 2, игрок В – одно из трех чисел: 1, 2 или 3. Если оба числа одинаковой четности, то А выигрывает и выигрыш равен сумме этих чисел, если четности выбранных игроками чисел не совпадают, то В выигрывает, причем выигрыш равен сумме этих чисел. Построить платежную матрицу игры, определить решение в чистых стратегиях.

Задача 8.1.2. Игроки А и В записывают цифры 1 и 2, игра состоит в том что кроме цифры 1 или 2 каждый игрок записывает еще и ту цифру, которую, по его мнению, записал партнер. Если оба игрока угадали или оба ошиблись, то партия заканчивается в ничью! Если же угадал только один, то он получает столько очков, какова сумма записанных им цифр. Составить платежную матрицу игры.

Задача 8.1.3. Для отопления коттеджа используется уголь цена на который зависит от сезона. Летом тонна угля стоит 7,5 д.е., в мягкую зиму 8,5, в обычную 9, а в холодную 9,5. Расход угля в отопительный сезон полностью определяется характером зимы. В мягкую зиму достаточно 6 тонн, обычная – 7 тонн, холодная зима – 8 тонн. Понятно что затраты домовладельца зависят от количества запасенного им с лета угля, при анализе возможных вариантов уровня запаса следует иметь в виду, что при необходимости недостающее кол-во угля можно приобрести зимой. Кроме того, надо учесть что, продать не потребовавшийся уголь возможности не будет. Используя игровой подход, составить платежную матрицу.

Задача 8.1.4. Фирмы $Ф_1$ и $Ф_2$ производят однородный сезонный товар, пользующийся спросом в течение n единиц времени. Доход от продажи товара в единицу времени составляет C ден.ед. Фирма $Ф_2$, будучи более состоятельной, в ходе конкурентной борьбы стремится вытеснить фирму $Ф_1$ с рынка сбыта, способствуя своими действиями минимизации ее дохода, не считаясь при этом с временными потерями части своего дохода в надежде наверстать упущенное в будущем. Действующее законодательство не позволяет злоупотреблять для этого заведомым занижением цены на товар (прибегать к демпинговым ценам). Единственным допустимым способом достижения своей цели для фирмы $Ф_2$ (как и для фирмы $Ф_1$ в целях защиты своих интересов на рынке сбыта) остаются повышение качества товара и надлежащий выбор момента времени поставки его на рынок сбыта. Уровень спроса на товар зависит от его качества, и в данный момент реализуется тот товар, качество которого выше. Повышение же качества требует дополнительных затрат времени на совершенствование технологии его изготовления и переналадки оборудования. В связи с этим будем предполагать, что качество товара тем выше, чем позже он поступает на рынок. Построить платежную матрицу.

8.2. Лабораторная работа № 2 «Метод доминирования. Решение игр в чистых стратегиях»

Пример 8.2.1. Выполнить возможные упрощения платежной матрицы

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 8 & 6 & 5 \\ 5 & 4 & 6 & 1 & 5 \\ 7 & 4 & 8 & 6 & 5 \\ 9 & 6 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Решение. Элементы первой и третьей строк соответственно равны, поэтому одну из них (например, третью) можно опустить. Элементы второй строки не превышают соответствующих элементов первой, поэтому ее опускаем и приходим к матрице

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 8 & 6 & 5 \\ 9 & 6 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Элементы первого столбца данной матрицы превышают соответствующие элементы второго столбца, элементы третьего – элементы четвертого, а элементы пятого – элементы второго. Поэтому доминируемые первый, третий и пятый столбцы опускаем. В результате получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Если полученную матрицу вновь проанализировать с позиций игрока А, то никаких дальнейших упрощений сделать уже невозможно.

Итак, вместо того, чтобы искать решение игры с матрицей размерности 4×5, достаточно решить игру размерности 2×2.

Пример 8.2.2. Для следующих платежных матриц найти нижнюю и верхнюю чистые цены игры, максиминную и минимаксную стратегии игроков. Указать седловую точку и оптимальные чистые стратегии, если они существуют.

1. $A = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 7 \\ 8 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, 2. $B = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 6 & 9 \\ 4 & 3 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

Решение. 1. Упрощению данная матрица не подлежит. На Лист 1 Excel в диапазон A2:C4 внести исходные данные матрицы А. В ячейку D2 ввести формулу **=МИН(A2:C4)** (использовать функцию **МИН** категории **Статистические**). Скопировать эту формулу из ячейки D2 в ячейки D3:D4. В ячейку А6 ввести текст «Нижняя цена игры». К ячейкам А6:С6 применить пиктограмму *Объединить и поместить в центре*. Для нахождения нижней цены игру в ячейку D6 ввести формулу **=МАКС (D2:D4)**. В результате, в ячейке D6 будет находится нижняя цена игры α = 7. Для нахождения верхней цены игры в ячейку А5 поместить формулу **=МАКС (А2:А4)**. Скопировать эту формулу в ячейки В5:С5. В ячейку А7 ввести текст «Верхняя цена игры». К ячейкам А5:С5 применить пиктограмму *Объединить и поместить в центре*. В ячейку D7 ввести формулу **=МИН (А5:С5)**. Тогда ячейка D5 будет содержать верхнюю цену игры β = 7. В ячейку А8 ввести текст «Чистая цена игры». К ячейкам А8:С8 применить пиктограмму *Объединить и поместить в центре*. В ячейку D8 ввести формулу **=ЕСЛИ(D6=D7; D6; "отсутствует")** из категории **Логические**. Описанное решение представлено в таблице7:

Таблица 7

	A	B	C	D
1	**ПЛАТЕЖНАЯ МАТРИЦА**			
2	8	9	7	7
3	4	6	7	4
4	8	3	4	3
5	8	9	7	
6	Нижняя цена игры			7
7	Верхняя цена игры			7
8	Чистая цена игры			7

В итоге будет получено, что $\alpha = \beta = 7$, то есть можно говорить о чистой цене игры $\nu = 7$. Седловым элементом платежной матрицы будет элемент $a_{13} = 7$, а оптимальными чистыми стратегиями – пара чистых стратегий (A_1, B_3).

2. На Лист 2 Excel в диапазон A2:D4 внести исходные данные матрицы B. Так как все элементы второй строки матрицы равны или не превышают соответствующих элементов первой строки матрицы, то ее можно опустить. Для этого следует в Excel выделить третью строку Excel и применить команду меню *Правка, Удалить*. Так как все элементы четвертого столбца матрицы превышают соответствующие элементы предыдущих столбцов матрицы, то его также необходимо опустить – выделить столбец D и удалить. Останется матрица $\begin{pmatrix} 4 & 8 & 6 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, занимающая ячейки A2:C3. Далее, действуя по аналогии с первым пунктом решения задачи и применяя соответствующее форматирование ячеек, на Листе 2 будет получено следующее решение, представленное в таблице 8.

Таблица 8

	A	B	C	D	E
1	Платежная матрица				
2	4	8	6	4	
3	6	3	2	2	
4	6	8	6		
5	Нижняя цена игры			4	
6	Верхняя цена игры			6	
7	Чистая цена игры			отсутствует	
8					

Итак, оптимального решения в чистых стратегиях не существует, чистая цена игры отсутствует, седловой точки нет.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 8.2.1. Упростить платежную матрицу:

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 6 & 3 & 5 \\ 2 & & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Задача 8.2.2. Рассмотреть решение игр в чистых стратегиях для платежных матриц, полученных при решении задач 8.1.1, 8.1.2. Ответить на вопросы:

1. Чему раны нижняя и верхняя цена игры?
2. Существует ли чистая цена игры. Если «да», то что является седловой точкой и какие оптимальные стратегии для игроков А и В.

Задача 8.2.3. Определить нижнюю и верхнюю цены для игр, заданных платежными матрицами A_1 и A_2 :

а) $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, б) $A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Задача 8.2.4. Для следующих платежных матриц определить нижнюю и верхнюю цену игры, минимаксные стратегии игроков; найти оптимальное решение игры, если существует седловая точка:

а) $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 6 & 7 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, б) $A = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 9 & 4 \\ 6 & 5 & 8 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$,

в) $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 & 9 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 6 \\ 7 & 6 & 10 & 8 & 11 \\ 8 & 5 & 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

8.3. Лабораторная работа № 3 «Непосредственное решение матричных игр»

Пример 8.3.1. Фирма «Раунд» выпускает скоропортящуюся продукцию, которую может сразу отправить потребителю, отправить на склад для хранения или подвергнуть дополнительной обработке для длительного хранения. В первом случае возможны убытки из-за порчи продукции в случае ее несвоевременной реализации. В остальных двух случаях фирма должна нести дополнительные затраты на хранение и обработку продукции. Потребитель может приобрести продукцию немедленно, в течение небольшого времени, после длительного периода времени. Определить оптимальные пропорции продукции для применения указанных стратегий фирмы, руководствуясь «минимаксным критерием» (гарантированный средний уровень убытка) при матрице затрат $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 7 & 6 & 10 \\ 12 & 10 & 8 \end{pmatrix}$.

Решение. Игроком А здесь выступает фирма «Раунд», игроком В – потребитель. Стратегиями игрока А будут:

- A_1 – моментальное отправление продукции потребителю;
- A_2 – отправление продукции на склад для хранения;
- A_3 – дополнительная обработка продукции для длительного хранения.

Для игрока В стратегиями будут:

- B_1 – немедленное приобретение продукции;
- B_2 –приобретение продукции в течение небольшого времени;
- B_3 – приобретение продукции после длительного периода времени.

В новой книге Excel на Лист 1 в диапазон ячеек A1:C3 ввести данные платежной матрицы. Решение в чистых стратегиях отсутствует (проверить самостоятельно). В исходной платежной матрице первую строку следует отбросить, так как ее элементы меньше соответствующих элементов второй строки. Для этого выделить первую строку листа Excel и удалить. Далее, в полученной матрице $\begin{pmatrix} 7 & 6 & 10 \\ 12 & 10 & 8 \end{pmatrix}$ элементы первого столбца больше соответствующих элементов второго столбца, значит, его также следует отбросить. В результате, в диапазоне ячеек A1:B2, упрощенная платежная матрица примет вид $\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$. Если можно найти решение для игры с полученной платежной матрицей, то его можно использовать для решения игры с исходной платежной матрицей, просто приписав исключенным строкам и столбцам нулевые вероятности. Отсюда $p_1^* = 0$. Для нахождения оставшихся вероятностей игрока А и цены игры достаточно произвести вычисления по формулам (4), (25). Для вычислений можно использовать пользовательские функции. Так как знаменатель в этих формулах один и тот же, то лучше его вычислить отдельно. Допустим в ячейку A4 поместить формулу для его вычисления, а именно **=A1+B2-B1-**A2. Для определения p_2^* в ячейку A5 ввести формулу **=(B2-A2)/A4**, для определения p_3^* – в ячейку A6 ввести формулу **=(A1-B1)/A4**. Цену игры можно поместить в ячейку A7, вводя туда формулу **=(B2*A1-B1*A2)/A4**. Результатами вычислений будут значения ячеек:

A5 — 0,33; A6 — 0,67; A7 — 8,67.

Оптимальная стратегия фирмы «Раунд» будет (0; 0,33; 0,67). Это означает, что моментальное отправление продукции потребителю (стратегия A_1) отвергается, 0,33 продукции отправляется на склад (стратегия A_2) и 0,67 продукции идет на дополнительную обработку для длительного хранения. При этом цена игры равна 8,67.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 8.3.1. Методом «непосредственное решение матричных игр» найти решения игр, заданных матрицами:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, г) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$,

д) $\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -3 & 15 \end{pmatrix}$

8.4. Лабораторная работа № 4 «Решение игр сведением к ЗЛП»

Пример 8.4.1.Торговая фирма разработала несколько вариантов плана продажи товаров на предстоящей ярмарке с учётом меняющейся конъюнктуры рынка и спроса покупателей. Получающиеся от их возможных сочетаний показатели дохода представлены в таблице 9.

Таблица 9

	A	B	C	D
1	План продажи	Величина дохода, ден. ед.		
2		$К_1$	$К_2$	$К_3$
3	$П_1$	8	4	2
4	$П_2$	2	8	4
5	$П_3$	1	2	8

Определить оптимальный план продажи товаров, применяя метод сведения модели теории игр к задачам линейного программирования.

Решение. Пусть игрок А – это торговая фирма, игрок В – величина дохода.

Обозначим: вероятности применения торговой фирмой стратегий $П_1 – p_1$, $П_2$ – p_2, $П_3$ – p_3. Вероятности использования стратегий $К_1 – q_1$, $К_2 – q_2$, $К_1 – q_1$.

Для игрока А математическая модель задачи (см. формулу 8) имеет вид:

$$f = x_1 + x_2 + x_3 \to \min \quad ,$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 1 \quad , \\ 4x_1 + 8x_2 + 2x_3 \ge 1 \quad , \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 \ge 1 \quad , \\ x_i \ge 0 \, , \quad i = \overline{1,3} \ , \end{cases}$$

где $\quad p_i = x_i v$.

Для игрока В математическая модель задачи имеет вид

$$\varphi = y_1 + y_2 + y_3 \to \max \quad ,$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 8y_1 + 4y_2 + 2y_3 \le 1 \ , \\ 2y_1 + 8y_2 + 4y_3 \le 1 \ , \\ y_1 + 2y_2 + 8y_3 \le 1 , \\ y_j \ge 0 \, , \quad j = \overline{1,3} \ . \end{cases}$$

На Лист 3 программы Excel последовательно расположить числовые матрицы построенных линейных моделей (см. таблица 10, стр. 29).

Для получения оптимальных решений построенных моделей необходимо применить модуль *Поиск решения*. Так, для получения оптимального решения для игрока В — выполнить команду меню *Сервис, Поиск Решения*. В появившемся диалоговом окне *Поиск решения* заполнить следующие поля:

- **Установить целевую** – $F$5.
- Переключатель **Равной** установить на **максимальному значению**.
- Изменяя ячейки - $C$4:$E$4.

Для ввода ограничений нажать кнопку Добавить и в появившемся диалоговом окне *Добавление ограничения* заполнить поля:

- **Ссылка на ячейку** – $F$6:$F$8.
- Из списка **Тип ограничения** выбрать знак “<=”.
- **Ограничение** – $H$6:$H$8.
- Нажать кнопку OK. Произойдет возврат в диалоговое окно *Поиск решения.*

Нажать кнопку Параметры и, в появившемся окне *Параметры поиска решения*, установить флажки **Линейная модель** и **Неотрицательные значения**, нажать кнопку OK. Произойдёт возврат в окно *Поиск решения*.

Таблица 10

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		**Оптимальное решение для игрока В**						
2		План продажи	Величина дохода, ден.ед.			левое ограничение	тип ограничения	правое ограничение
3			Доход 1	Доход 2	Доход 3			
4		значения переменных						
5		Целевая функция	1	1	1	=СУММПРОИЗВ($C$4:$E$4;C5:E5)	max	
6		План 1	8	4	2	=СУММПРОИЗВ($C$4:$E$4;C6:E6)	<=	1
7		План 2	2	8	4	=СУММПРОИЗВ($C$4:$E$4;C7:E7)	<=	1
8		План 3	1	2	8	=СУММПРОИЗВ($C$4:$E$4;C8:E8)	<=	1
9								
10		цена игры	=1/F5					
11								
12		**Оптимальное решение для игрока А**						
13		План продажи	Величина дохода, ден.ед.			левое ограничение	тип ограничения	правое ограничение
14			Доход 1	Доход 2	Доход 3			
15		значения переменных						
16		Целевая функция	1	1	1	=СУММПРОИЗВ($C$15:$E$15;C16:E16)	min	
17		План 1	8	2	1	=СУММПРОИЗВ($C$15:$E$15;C17:E17)	>=	1
18		План 2	4	8	2	=СУММПРОИЗВ($C$15:$E$15;C18:E18)	>=	1
19		План 3	2	4	8	=СУММПРОИЗВ($C$15:$E$15;C19:E19)	>=	1
20								
21		цена игры	=1/F16					

..

Нажать кнопку $\boxed{\text{Выполнить}}$. Появится окно *Результаты поиска решения*. Если там указано, что решение найдено, то нажать кнопку $\boxed{\text{OK}}$. Если будет указано “Решение не найдено“, то следует найти возможные ошибки и повторить работу с модулем решения. Максимальное значение целевой функции будет находиться в ячейке F5: $\varphi_{max} = 0{,}229$, а ячейки C4:E4 дадут оптимальное решение для второй модели:

$$y_{опт} = (0{,}071;\ 0{,}056;\ 0{,}102)\ .$$

Цена игры рассчитана в ячейке C10: ν = 4,355. Тогда $q_1^* = 0{,}311$; $q_2^* = 0{,}244$; $q_3^* = 0{,}444$, что дает оптимальную стратегию игрока B:

(0,311; 0,244; 0,444).

Оптимальное решение для игрока A находится аналогичным образом, с тем отличием, что целевая функция направлена на минимум, а ограничения представлены знаком ”>=”. Целевой станет ячейка $F$16, в ограничения войдут диапазоны ячеек $F$17:$F$19 и $H$17:$H$19. Оптимальное решение модели будет находится в диапазоне ячеек C15:E15. Тогда можно получить оптимальную стратегию для торговой фирмы (игрока A). Она будет представлена вектором (0,444; 0,244; 0,311). При этом фирма получит доход не менее 4,355 ден. ед.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 8.4.1. Сведением к ЗЛП найти решение игры, заданной платежной матрицей

$$а)\ \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad б)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 8.4.5. В условиях задачи 8.1.4 функция выигрыша (платежная матрица) при n = 5 имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 2{,}5C & C & 2C & 3C & 4C \\ 4C & 2C & C1 & 2C & 3C \\ 3C & 3C & 1{,}5C & 1C & 2C \\ 2C & 2C & 2C & C1 & C1 \\ C & C & C & C & 0{,}5C \end{pmatrix}.$$

Дать рекомендации фирмам $Ф_1$ и $Ф_2$ по оптимальным срокам поставки товара на рынок сбыта, обеспечивающие фирме $Ф_1$ наибольший средний доход, а фирме $Ф_2$ – наименьшие потери.

Указание. Решение в чистых стратегиях отсутствует (проверить!). Упростить платежную матрицу, прежде всего умножив ее на 1/C, а затем применить метод доминирования. Для получения оптимального решения в смешанных стратегиях применить метод сведения к ЗЛП.

8.5. Лабораторная работа № 5. «Решение матричных игр «с природой»

Пример 8.5.1. В условиях примера 8.4.1 определить оптимальные стратегии, применяя критерии статистических игр «с природой». Параметр Гурвица взять равным 0,6.

Решение. Для решения задачи необходимо заполнить исходными данными ячейки A1:D5 на Листе MS Excel (см. таблица 11). Решение в чистых стратегиях отсутствует.

В ячейки B6:D6 вести формулы для нахождения максимальных значений величин доходов по каждому плану. В ячейках B9:D11 составить матрицу рисков – см. таблицу 11.

Таблица 11

	A	B	C	D
1		Величина дохода		
2		Доход 1	Доход 2	Доход 3
3	План 1	8	4	2
4	План 2	2	8	4
5	План 3	1	2	8
6		=МАКС(B3:B5)	=МАКС(C3:C5)	=МАКС(D3:D5)
7				
8		Матрица рисков		
9		=\$B\$6-B3	=\$C\$6-C3	=\$D\$6-D3
10	Rij=	=\$B\$6-B4	=\$C\$6-C4	=\$D\$6-D4
11		=\$B\$6-B5	=\$C\$6-C5	=\$D\$6-D5
12				

Действия по применению критериев максимакса, Вальда, Гурвица выполнять согласно таблице 12, расположенной на следующей странице. В соответствии с полученными данными принимается решение о выборе оптимальной стратегии:

- по критерию максимакса фирме можно использовать любой план продажи товаров $П_1$, $П_2$ или $П_3$;
- по критерию Вальда фирме целесообразно использовать план продажи товаров $П_1$, или $П_2$;
- по критерию Гурвица фирме целесообразно использовать план продажи товаров $П_1$, или $П_2$;
- по критерию Сэвиджа фирме целесообразно использовать план продажи товаров $П_1$, или $П_2$;
- В результате, фирме можно принять решение о целесообразности применения плана продажи товаров $П_1$, или $П_2$.

Таблица 12

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Величина дохода				Критерий максимакса	Критерий Вальда	Критерий Гурвица
2		Доход 1	Доход 2	Доход 3				
3	План 1	8	4	2		=МАКС(A2:C2)	=МИН(A2:C2)	=МИН(A2:C2)*$H$7+МАКС(A2:C2)*(1-$H$7)
4	План 2	2	8	4		=МАКС(A3:C3)	=МИН(A3:C3)	=МИН(A3:C3)*$H$7+МАКС(A3:C3)*(1-$H$7)
5	План 3	1	2	8		=МАКС(A4:C4)	=МИН(A4:C4)	=МИН(A4:C4)*$H$7+МАКС(A4:C4)*(1-$H$7)
6		8	8	8		=МАКС(E2:E4)	=МАКС(F2:F4)	=МАКС(G2:G4)
7								0,6
8		Матрица рисков				Критерий Сэвиджа		
9		0	4	6		=МАКС(A8:C8)		
10	Rij =	6	0	4		=МАКС(A9:C9)		
11		7	6	0		=МАКС(A10:C10)		
12						=MIN(E8:E10)		

Пример 8.5.2. В условиях примера 8.1.3 дать рекомендации о мощности создаваемого ателье.

Решение. Выявление оптимальной стратегии начинается с нахождения оптимального решения в чистых стратегиях. Здесь нижняя чистая цена игры $\alpha = \max\alpha_i = 6$, $(i = 1, 2, 3)$, а верхняя чистая цена $\beta = \min \beta_j = 18$, $(j = 1, 2, 3, 4)$, то есть $\alpha \neq \beta$ – игра не содержит седловой точки. Можно заметить, что в платежной матрице у статистика доминируемых стратегий нет. Предположим, что вероятности g_j состояний природы $П_j$ известны (см. нижнюю строку в таблице 13):

Таблица 13

	A	B	C	D	E	F
1	$П_j$ \ A_i	$П_1$ (2)	$П_2$ (4)	$П_3$ (6)	$П_4$ (8)	$\overline{a_i}$
2	A_1 (2)	18	8	-2	-12	3,5
3	A_2(4)	6	36	26	16	23,5
4	A_3 (6)	-6	24	54	44	29,5
5	A_4 (8)	-18	12	42	72	25,5
6	g_j	0,20	0,35	0,25	0,20	

Тогда по формуле (14) находим значения средних выигрышей $\overline{a_i}$ для каждой чистой стратегии (см. столбец $\overline{a_i}$) и устанавливаем, что максимальный средний выигрыш, равный 29,5 , достигается при стратегии A_3 (открывать ателье на 6 тыс. ремонтов в год), которая и будет оптимальной по Байесу.

Аналогично можно найти оптимальную по Байесу стратегию, используя формулу (15) и матрицу рисков:

	A	B	C	D	E	F
1	$П_j$ \ A_i	$П_1$ (2)	$П_2$ (4)	$П_3$ (6)	$П_4$ (8)	max $\overline{r_{ij}}$
2	A_1 (2)	0	28	56	84	84
3	A_2(4)	12	0	28	56	2356,5
4	A_3 (6)	24	12	0	28	29,528
5	A_4 (8)	36	24	12	0	25,536
6	g_j	0,20	0,35	0,25	0,20	

В этом случае средний r_i риск следует минимизировать (выполнить самостоятельно). При этом, стратегия, максимизирующая средний выигрыш, совпадает со стратегией, минимизирующей средний риск.

Пример 8.5.3. Возможно строительство четырех типов электростанций: A_1 (тепловых), A_2 (приплотинных), A_3 (бесшлюзовых) и A_4 (шлюзовых). Эффективность каждого из типов зависит от различных факторов: режима рек, стоимости топлива и его перевозки и т.п. Предположим, что выделено четыре различных состояния, каждое из которых означает определенное сочетание факторов, влияющих на эффективность энергетических объектов. Состояния природы обозначим через $П_1$, $П_2$, $П_3$ и $П_4$. Экономическая эффективность строительства отдельных типов электростанций изменяется в зависимости от состояний природы и задана матрицей

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Решение. По **критерию максимакса** по строкам платежной матрицы необходимо найти максимальные элементы – 8, 12, 10, 8. После чего

$$M = \max\{8, 12, 10, 8\} = 12,$$

то есть оптимальной является стратегия A_2, то есть предлагается строительство приплотинных ГЭС.

Согласно **критерию Вальда** по строкам платежной матрицы необходимо найти минимальные элементы – 2, 2, 3, 1, тогда

$$W = \max\{2, 2, 3, 1\} = 3.$$

Оптимальной является стратегия A_3, то есть следует предусмотреть строительство бесшлюзового ГЭС.

Критерий Сэвиджа требует построения матрицы рисков:

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 8 \\ 6 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 7 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Покажем, например, как были получены элементы первого столбца матрицы R. Максимальный элемент первого столбца платежной матрицы $\beta_1 = 8$, поэтому

$$r_{11} = \beta_1 - a_{11} = 8 - 5 = 3.$$

$r_{21} = \beta_1 - a_{21} = 8 - 2 = 6.$

$r_{31} = \beta_1 - a_{31} = 8 - 8 = 0.$

$r_{41} = \beta_1 - a_{41} = 8 - 1 = 7.$

По аналогии рассчитываются остальные элементы матрицы риска R (произвести расчеты самостоятельно). Анализ матрицы рисков R показывает, что:

1. При состоянии природы $П_1$ статистик будет более всего рисковать, применяя стратегию A_4 (строительство шлюзовых электростанций).
2. При состоянии природы $П_2$ статистик будет более всего рисковать, применяя стратегию A_1 (строительство тепловых электростанций).
3. При состоянии природы $П_3$ статистик будет более всего рисковать, применяя стратегию A_4 (строительство шлюзовых электростанций).
4. При состоянии природы $П_4$ статистик будет более всего рисковать, применяя стратегию A_1 (строительство тепловых электростанций).

В итого получается, что рискованным является строительство шлюзовых и тепловых электростанций.

Согласно критерию Сэвиджа, определяя максимум в каждой строке матрицы рисков – 8, 6, 5, 7, будет

$S = \min\{8, 6, 5, 7\} = 5.$

В соответствии с этим решением также предполагается оптимальная стратегия A_3, то есть следует предусмотреть строительство бесшлюзового ГЭС.

В соответствии с **критерием Гурвица** при $\lambda = 0{,}5$ после промежуточных расчетов будем иметь

$$H = \max\{5; 7; 6; 5; 4{,}5\} = 7.$$

Оптимальной является стратегия A_4 то есть следует принять решение о строительстве шлюзовых ГЭС.

Критерий Байеса и критерий Лапласа рассмотреть самостоятельно. Для критерия Лапласа взять состояния природы равновероятными ($g_1 = g_2 = g_3 = g_4 = 1/4$).

Окончательное решение принимает статист. Учитывая анализ матрицы рисков, и полученные решения по каждому из рассмотренных критериев можно остановится на принятии оптимальной стратегии A_3, то есть предусмотреть строительство бесшлюзового ГЭС.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 8.5.1. Для «игры с природой» определить оптимальную стратегию по критерию Сэвиджа для p = 0,3 и p = 0,7 и проанализировать результаты для платежной матрицы:

A_i \ $П_j$	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$
A_1	100	200	150	70	80
A_2	90	300	140	100	50
A_3	80	150	90	200	100
A_4	70	250	300	100	60

Задача 8.5.2. Определить оптимальную стратегию для игры «с природой», заданной следующей платежной матрицей

A_i \ $П_j$	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	8	7	5	10
A_2	6	4	3	12
A_3	10	5	7	9
A_4	4	8	15	2

Задача 8.5.3. Для платежной матрицы

$$\begin{pmatrix} -45 & -54 & -64 \\ -52{,}5 & -52{,}5 & -62 \\ -60 & -60 & -60 \end{pmatrix}$$

в условиях задачи 8.1.3 найти оптимальное решение, применяя все критерии для определения оптимальных стратегий статистических игр «с природой».

Задача 8.5.4. Одно из транспортных предприятий должно определить уровень своих провозных возможностей так, чтобы удовлетворить спрос клиентов на транспортные услуги на планируемый период. Спрос на транспортные услуги не известен, но ожидается (прогнозируется), что он может принять одно из четырех значений: 10, 15, 20 или 25 тыс. т. (состояния «природы» – стратегии S_1, S_2, S_3, S_4). Для каждого уровня спроса существует наилучший уровень провозных возможностей транспортного предприятия с точки зрения возможных затрат (R_1, R_2, R_3, R_4 – стратегии развития провозных возможностей транспортного предприятия). Отклонения от этих уровней приводят к дополнительным затратам либо из-за превышения провозных возможностей над спросом (из-за простоя подвижного состава), либо из-за неполного удовлетворения спроса на транспортные услуги. Платежная матрица, определяющая возможные прогнозируемые затраты на развитие провозных возможностей задана таблицей:

	A	B	C	D	E
1	$R_i \backslash S_j$	S_1	S_2	S_3	S_4
2	R_1	6	12	30	24
3	R_2	9	7	9	28
4	R_3	23	18	15	19
5	R_4	27	24	21	15

Необходимо выбрать оптимальную стратегию, используя критерий Лапласа и критерий Вальда.

Задача 8.5.5. В условиях примера 8.1.2 Определить оптимальную стратегию компании (сколько ящиков следует производить в течение месяца»?), применяя все критерии для определения оптимальных стратегий матричных игр «с природой»**.**

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования эономических систем: Учеб. Пособие. – М.: Финансы и статистика, 2001. – 368 с.
2. Федосеев В.В., Эриашвили Н.Д. Экономико-математические методы и модели в маркетинге. М.: ЮНИТИ, 2000. – 391 с.
3. М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: Учеб. М.: Дело, 2001.- 688 с.
4. Н.И. Холод, А.В. Кузнецов, Я.Н. Жихар и др. Под общ. Ред. А.В. Кузнецова. Экономико – математические методы и модели. Мн.: БГЭУ, 2000.–412 с. М.: Дело, 2001.-688 с.