Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
ФГБОУ ВПО «Красноярский государственный аграрный университет»

В.В. Корниенко

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Рекомендовано научно-методическим советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Красноярский государственный аграрный университет» для внутривузовского использования в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по направлению подготовки 110800.62 «Агроинженерия»

Красноярск 2015

ББК 22.151
К 67

Рецензенты:
Астапкович И.И., канд. техн. наук, доцент, зав. кафедрой инженерной графики СибГТУ
Матвеева М.В., канд. пед. наук, доцент кафедры ПСЖ КрИЖДТ

К 67 **Корниенко, В.В.**
Начертательная геометрия: учеб. пособие / В.В. Корниенко; Краснояр. гос. аграр. ун-т. – Красноярск, 2015. – 227 с.

В пособии в соответствии с программой изложены основные методы проецирования, позволяющие строить изображения пространственных геометрических образов на плоскости, способы решения позиционных и метрических задач, имеющих практическое значение.

Приведены варианты заданий графических работ для самостоятельного выполнения студентами по 6 разделам. По каждой теме представлено 32 варианта заданий. Наличие контрольных вопросов и примеров выполнения графических работ позволит облегчить самостоятельную работу.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 110800.62 «Агроинженерия» всех форм обучения, а также может быть полезно студентам других специальностей машиностроительного профиля.

ББК 22.151

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 6
1. Основные правила оформления чертежей 7
1.1. Содержание графических работ 7
1.2. Последовательность выполнения работ 9
1.3. Общие рекомендации по выполнению чертежей 9
1.4. Основные правила выполнения чертежей. Единая система конструкторской документации (ЕСКД) 11
2. Геометрическое черчение 22
2.1. Геометрические построения, часто применяемые при выполнении чертежей 22
2.2. Сопряжения линий 29
2.3. Коробовые кривые 35
2.4. Лекальные кривые 37
Вопросы для самопроверки 40
3. Проецирование точки 41
3.1. Виды проецирования 41
3.2. Эпюр Монжа 43
3.3. Проецирование точки на три плоскости проекций 44
3.4. Взаимное расположение точек 45
Примеры решения задач 47
Вопросы для самопроверки 53
4. Прямая 54
4.1. Положение прямой относительно плоскостей проекций 54
4.2. Следы прямой 58
4.3. Взаимное расположение точки и прямой 59
4.4. Деление отрезка прямой в заданном соотношении 59
4.5. Определение длины отрезка и углов его наклона к плоскостям проекций 60
4.6. Взаимное положение двух прямых 62
4.7. Проекции плоских углов 64
Примеры решения задач 66
Вопросы для самопроверки 77
5. Плоскость 78
5.1. Плоскость. Способы графического задания плоскостей 78
5.2. Положение плоскости относительно плоскостей проекций 80
5.3. Следы плоскости 84
5.4. Главные линии в плоскости 85
5.5. Взаимное расположение прямой и плоскости 87

5.6. Взаимное расположение точки и плоскости 91
5.7. Взаимное расположение плоскостей. Параллельные плоскости 91
5.8. Пересекающиеся плоскости 92
5.9. Построение взаимно перпендикулярных плоскостей 94
Примеры решения задач 95
Вопросы для самопроверки 102
6. Кривые линии 103
6.1. Основные понятия и определения 103
6.2. Алгебраические и трансцендентные кривые линии 103
6.3. Свойства ортогональных проекций кривой линии 109
6.4. Пространственные кривые линии 109
Примеры решения задач 111
Вопросы для самопроверки 111
7. Способы преобразования комплексного чертежа 112
7.1. Задачи начертательной геометрии, решаемые преобразованием комплексного чертежа 112
7.2. Способ замены плоскостей проекций 113
7.3. Способ плоскопараллельного перемещения 116
7.4. Способ вращения вокруг проецирующей прямой 118
7.5. Способ вращения вокруг прямой уровня 118
Примеры решения задач 120
Вопросы для самопроверки 123
8. Поверхности 124
8.1. Формообразование поверхностей 124
8.2. Классификация поверхностей 124
8.3. Многогранники 126
8.4. Пересечение прямой линии с многогранником 131
8.5. Поверхности вращения 131
8.6. Винтовые поверхности 134
8.7. Линейчатые поверхности с плоскостью параллелизма 135
8.8. Поверхности параллельного переноса 136
8.9. Линия и точка, принадлежащие поверхности 136
8.10. Пересечение линии с поверхностью 138
8.11. Пересечение многогранника плоскостью 140
8.12. Пересечение кривой поверхности плоскостью 141
8.13. Цилиндрические и конические сечения 143
Примеры решения задач 145
Вопросы для самопроверки 156
9. Взаимное пересечение поверхностей 157

9.1. Общие положения 157
9.2. Взаимное пересечение многогранников 158
9.3. Способ вспомогательных секущих плоскостей 159
9.4. Способ концентрических сфер 161
9.5. Способ эксцентрических сфер 163
9.6. Особые случаи пересечения поверхностей второго порядка 164
Примеры решения задач 168
Вопросы для самопроверки 177
10. Развертки поверхностей 178
10.1. Развертка поверхности 178
10.2. Развертка поверхности многогранников 178
10.3. Развертка цилиндрической поверхности 183
10.4. Развертка конической поверхности 183
10.5. Условная развертка поверхностей 184
Вопросы для самопроверки 184
Заключение 185
Библиографический список 186
Приложения 187
Приложение А (обязательное) 187
Приложение Б (справочное) 217
Приложение В (справочное) 224

ВВЕДЕНИЕ

Начертательная геометрия – *область науки и техники, занимающаяся разработкой научных основ построения и исследования геометрических моделей проектируемых инженерных объектов и процессов и их графического отображения.* Задачи этой науки – создание оптимальных геометрических форм объектов машиностроения, архитектуры и строительства, разработка геометрических основ их воспроизведения в процессе производства, оптимизация технологических процессов на основе их геометрических моделей, разработка теории графического отображения объектов и процессов при их проектировании в промышленности и строительстве.

Начертательная геометрия является одним из разделов геометрии, в котором пространственные формы (совокупности точек, линий, поверхностей) с их геометрическими закономерностями изучаются в виде изображений на плоскости.

С освоением начертательной геометрии приходит умение изображать всевозможные сочетания геометрических форм на плоскости, решать позиционные и метрические задачи, проводить исследования геометрических образов по их изображениям.

Начертательную геометрию называют «грамматикой языка техники». Кроме того, она по своему содержанию и методам занимает особое положение среди других наук. Наглядность и простота решения многих задач не только обогащают точные науки, но помогают и творческим работникам.

Начертательная геометрия – наилучшее средство развития у человека пространственного воображения, без которого немыслимо никакое техническое творчество. Без силы воображения и наглядности мышления нельзя прийти и к абстрактной, математической формулировке проблемы, невозможно вывести понятия, а тем более осуществить практически экспериментальные исследования.

В математических науках вопросы теории геометрических форм и их сочетаний сопровождаются реальным и конкретным их представлением. Методы начертательной геометрии являются связующим звеном между прикладной математической наукой и профессиональными техническими дисциплинами.

1. ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ ЧЕРТЕЖЕЙ

1.1. Содержание графических работ

Учебное пособие включает в себя тридцать два варианта индивидуальных заданий. Каждый студент получает задание согласно своему варианту. Номер варианта определяет преподава-тель, ведущий практические занятия. Задание по начертательной геометрии состоит из шести графических работ без учета титульного листа. Титульный лист – это не просто обложка альбома работ, он является самостоятельной работой, призванной ознакомить студентов с основами работы с чертежными шрифтами. Задачи, входящие в задания, являются основными упражнениями для выработки практических навыков работы с чертежами и развития пространственного мышления, включают в себя все основные разделы дисциплины.

Задание 1 – точка и прямая. Согласно пунктам задания на трех плоскостях проекций необходимо последовательно выполнить все графические построения. Все проекции полученных в ходе построений точек обязательно соединить линиями связей, а конкурирующие точки обозначить с учетом их видимости. На свободном поле чертежа над основной надписью чертежным шрифтом № 7 выполнить поясняющие надписи, указанные в задании.

Задание 2 – пересечение прямой с плоскостью. Чертеж выполняется на двух плоскостях проекций, поэтому формат рекомендуется использовать вертикально. Согласно данным таблицы с координатами вычертить треугольник ABC, задающий плоскость общего положения, и отрезок DE, задающий положение прямой общего положения. Определить точку пересечения прямой с плоскостью, для чего одну из проекций прямой заключить во вспомогательную проецирующую плоскость, положение которой указывается ее следом. С помощью конкурирующих точек опреде-лить видимость участков прямой относительно точки пересечения.

Задание 3 – задачи метрические. Задание состоит из двух задач, выполняемых на одном формате. Для этого расположенный горизонтально формат мысленно условно разбивают на две части. В одной части по заданным в таблице координатам точек построить проекции прямых AB и CS. Способом замены плоскостей проекций определить кратчайшее расстояние между прямыми. В другой части формата построить две проекции плоскости, заданной координатами точек A, B, C.

Способом прямоугольного треугольника определить расстояние от плоскости до точки S. Координаты одноименных точек в обеих задачах одинаковы. Все точки и прямые, используемые в ходе решения задач, обязательно должны быть обозначены.

Задание 4 – точки на поверхностях. По указанным в задании размерам начертить изображенные в задании две проекции поверхности вращения и многогранника, построить профильные проекции поверхностей. Определить положение проекций указанных в задании точек на трех плоскостях проекций с учетом видимости. Все построения, необходимые для решения задач, сохранять на чертеже. Указанные в задании размеры поверхностей наносить на чертеж не нужно.

Задание 5 – сечение поверхности плоскостью и тело с вырезом. По указанным в задании размерам начертить изображенные в задании две проекции поверхности вращения и поверхности многогранника, построить профильные проекции поверхностей. На горизонтальной и профильной проекциях построить форму сечения поверхности, указанной плоскостью, и форму сквозного выреза поверхности сочетанием нескольких плоскостей с учетом видимости. Способом вращения вокруг проецирующей прямой определить натуральную величину сечения поверхности плоскостью. Все построения, необходимые для решения задач, сохранять на чертеже. Базовые точки сечения и выреза на чертеже обозначать обязательно, промежуточные точки обозначают по необходимости, если они не затемняют чертеж. Допускается обозначение вершин многогранника, однако это не является обязательным условием выполнения чертежа. Указанные в задании размеры поверхностей наносить на чертеж не нужно.

Задание 6 – пересечение поверхностей. По указанным в задании размерам начертить изображенные в задании две проекции пересекающихся поверхности вращения и поверхности многогранника и двух пересекающихся многогранников, построить профильные проекции поверхностей. На горизонтальной и профильной проекциях построить линию пересечения поверхностей с учетом видимости. Все построения, необходимые для решения задач, сохранять на чертеже. Секущие плоскости-посредники и базовые точки линии пересечения поверхностей на чертеже обозначать обязательно, промежуточные точки обозначают по необходимости, если они не затемняют чертеж. Допускается обозначение вершин многогранников, однако это не является обязательным условием выполнения чертежа. Указанные в задании размеры поверхностей наносить на чертеж не нужно.

1.2. Последовательность выполнения работ

1. Изучить теоретический материал, относящийся к работе.
2. Внимательно ознакомиться с заданием, определить форму и размеры изображенного на чертеже геометрического тела.
3. На поле формата выделить места для каждого изображения, учитывая их расположение в проекционной связи, размещение обозначений и элементов промежуточных построений. Наметить место для основной надписи. Вычертить рамку чертежа.
4. Выполнение чертежа следует начинать с проведения осевых и центровых линий.
5. Перечертить заданные проекции и построить третью. Все построения предварительно выполняются в тонких линиях.
6. Выполнить необходимые геометрические построения для решения поставленной задачи.
7. Вычертить лекальные кривые линии и ломаные линии сечений с учетом их видимости. Удалить вспомогательные построения, затемняющие чертеж.
8. Нанести необходимые обозначения, проверить их полноту и отсутствие повторяемости.
9. Обвести чертеж линиями требуемой толщины в соответствии с требованиями ГОСТ 2.303-68.
10. Вычертить и заполнить основную надпись.

1.3. Общие рекомендации по выполнению чертежей

Все чертежи должны выполняться в соответствии с государственными стандартами (ГОСТ) ЕСКД и отличаться четким и аккуратным выполнением. Чертежи выполняют на листах чертежной бумаги. Для этого необходимо иметь следующие инструменты и принадлежности: чертежную доску, рейсшину, готовальню, два треугольника (один – с углами 45˚, 45˚ и 90˚, другой − 30˚, 60˚, 90˚ и длиной катетов 130…200 мм), линейку длиной 250…300 мм, набор лекал разных типов, транспортир, чертежные карандаши (для построения чертежа рекомендуются карандаши марки Т(Н) или 2Т (2Н), для обводки чертежа – марки ТМ (НВ или F) или М(В), мягкий ластик для удаления карандашных линий. При выполнении чертежа деревянными инструментами сохраняется чистота фона готовой работы. Инструменты из металла и пластмассы способствуют переносу графита с линий чертежа на свободное поле.

При выполнении чертежей источник света должен находиться слева и сверху от чертежной доски, так как в этом случае тень от правой руки и кромки треугольника не будет мешать проводить линию.

Каждое задание выполняется на отдельном листе формата А3 в рекомендуемом масштабе 1:1. Допускается изображение аксонометрической проекции в масштабе, отличном от основных изображений.

Все чертежи должны сопровождаться заполненной основной надписью по форме 1 ГОСТ 2.104-2006. Все надписи на работах следует выполнять чертежным шрифтом в соответствии с указаниями ГОСТ 2.304-81, а линии чертежа – ГОСТ 2.303-68.

В заданиях даны две проекции геометрического тела, на которых нанесены все его размеры. При выполнении задания переносить их на чертеж не следует, это сложный вопрос, изучаемый в разделе инженерной графики «Проекционное черчение» в соответствии с требованиями ГОСТ 2.307-68.

Черчение – трудоемкий предмет. Поэтому надо так организовать свою работу по черчению, чтобы при наименьшей затрате времени выполнять задания строго по учебному графику. Хорошо продуманные подготовительные операции в значительной мере предопределяют успех изучения курса.

Прежде чем приступить к выполнению задания, необходимо совершенно четко представить пространственные формы фигур, входящих в заданный к исполнению вариант, а также формы элементарных составляющих геометрических тел, их проекции, основные положения проецирования точек, линий, плоскостей, геометрических тел и их элементов.

Затем рекомендуется построить основные изображения на черновике «от руки», проверить полученное изображение и только после этого приступать к работе на формате. После выбора масштаба изображений производится разбивка листа бумаги необходимого формата для равномерного расположения изображаемых проекций с учетом нанесения обозначений и различных надписей.

В случае если представление пространственной формы той или иной геометрической фигуры или поверхности вызывает затруднения, рекомендуется выполнить макет из любого подручного легко обрабатываемого материала. Это значительно поможет правильно решить поставленную задачу. Не чертите то, что вами не понято. Это приводит к непроизвольной трате времени, к некачественной работе и возможной переделке чертежей. Необходимо сначала полностью построить нужные изображения, а затем уже выполнять требуемые построения.

Следует отметить имеющиеся в некоторых заданиях отступления от рекомендаций ГОСТов о нанесении размеров, о расположении элементов штрихпунктирных и штриховых линий и т.п., так как все варианты заданий выполнены в уменьшенном масштабе в двух или одной проекциях на формате, затрудняющем выполнение этих рекомендаций. Форма геометрических фигур в задании не обязательно четко соответствует получаемому при построении изображению по указанным размерам. Действительные изображения могут быть сжаты, вытянуты или смещены.

Перечисленные отступления при выполнении работы должны быть исключены. Одновременно следует указать на характерные ошибки, допускаемые студентами при выполнении заданий: ставятся поясняющие надписи, тогда как они не нужны при наличии трех проекций; наносятся размеры; линии невидимого контура берут начало не от сплошных линий; не делается пересечение осевых линий; не обозначаются проекции точек и следы вспомогательных плоскостей; не указывается видимость конкурирующих точек и др. Все эти ошибки также не должны иметь место.

1.4. Основные правила выполнения чертежей. Единая система конструкторской документации (ЕСКД)

Единая система стандартов обеспечивает единство оформления и обозначения чертежей, правила учета и хранения чертежей, внесения в них изменений с обязательным распространением этих правил на все виды изделий и все отрасли промышленности.

Характерным для этой системы является то, что она охватывает не только графическую часть, но и включает все элементы, связанные с использованием иной технической документации.

Требования правил оформления чертежей и выполнения чертежей изделий машиностроения изучаются отдельными дисциплинами курса инженерной графики, однако с выполнением чертежей по начертательной геометрии студент должен привыкать к жестким правилам оформления конструкторской документации и соблюдать элементарные требования этих правил.

1.4.1. Форматы

Чертежи и другие конструкторские документы всех отраслей промышленности и строительства должны выполняться на листах определенных форматов стандартных размеров.

Форматы листов чертежей определяются размерами внешней рамки, выполняемой тонкой линией. Каждый чертеж оформляется рамкой поля чертежа, проведенной с трех сторон на расстоянии 5 мм от границы формата, а с четвертой (левой) стороны – на расстоянии 20 мм для брошюровки в альбом (рис. 1.1). В правом нижнем углу каждого листа вплотную к рамке выполняется основная надпись, форма, размеры и содержание которой приведены на рисунке 1.3. В верхнем углу формата (как правило, в левом) располагается дополнительная графа, содержащая обозначение чертежа, повернутое на 90° или 180°.

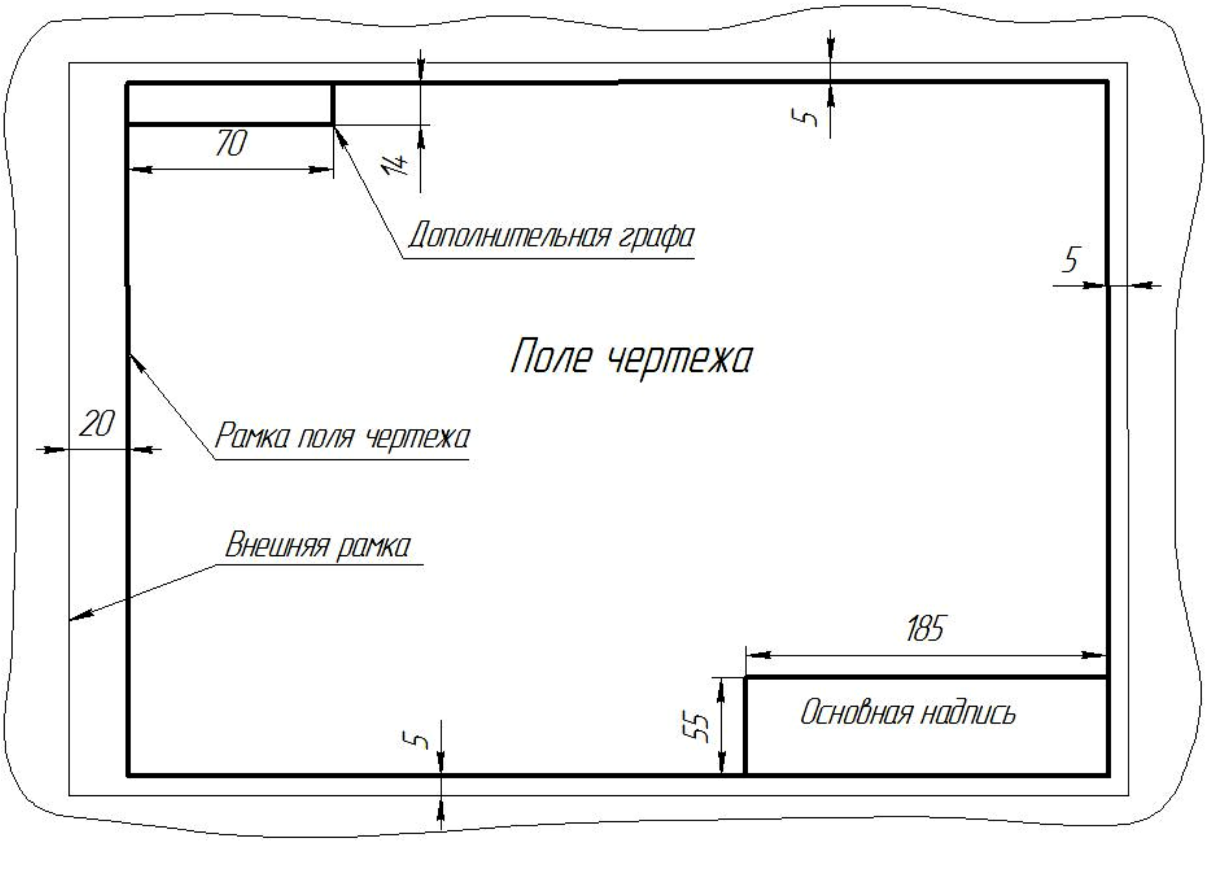
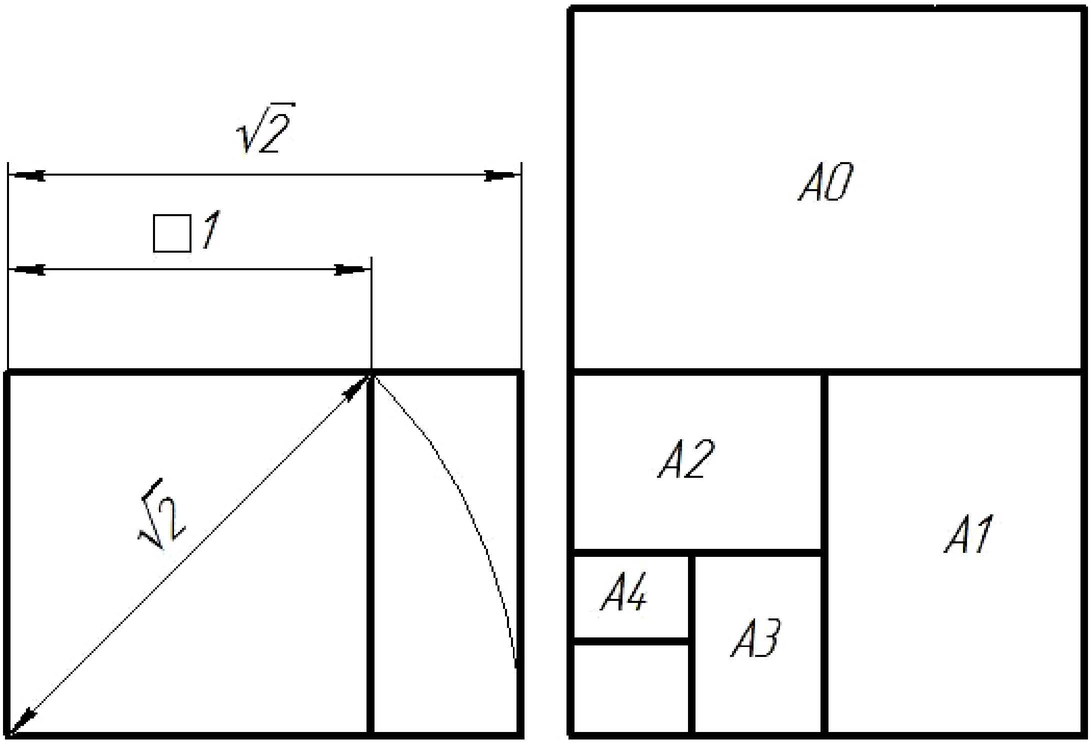


Рисунок 1.1 – Оформление чертежа

ГОСТ 2.301-68 установил следующие зависимости параметров форматов: площадь формата А0 равна 1 м^2, а стороны относятся как 1:$\sqrt{2}$; если одна из сторон формата будет стороной квадрата, то другая – его диагональю (рис. 1.2, *а*). Такое соотношение сторон выбрано из следующих соображений:

– прямоугольник с соотношением сторон 1: $\sqrt{2}$ просто построить при помощи циркуля и линейки;

– легко получить любой другой формат, опять же при помощи линейки и циркуля. Каждый меньший последующий формат получается делением пополам предыдущего формата параллельно его меньшей стороне (рис. 1.2, *б*) или делением большей стороны пополам.



а *б*

Рисунок 1.2 – Форматы чертежа

Основные форматы чертежа

Обозначение формата:	А0	А1	А2	А3	А4
Размеры сторон формата, мм:	841×1189	594×841	420×594	297×420	210×297

1.4.2. Основные надписи

Формы, размеры и порядок заполнения основной надписи и дополнительных граф к ней в чертежах, схемах и текстовых документах устанавливает **ГОСТ 2.104-2006**.

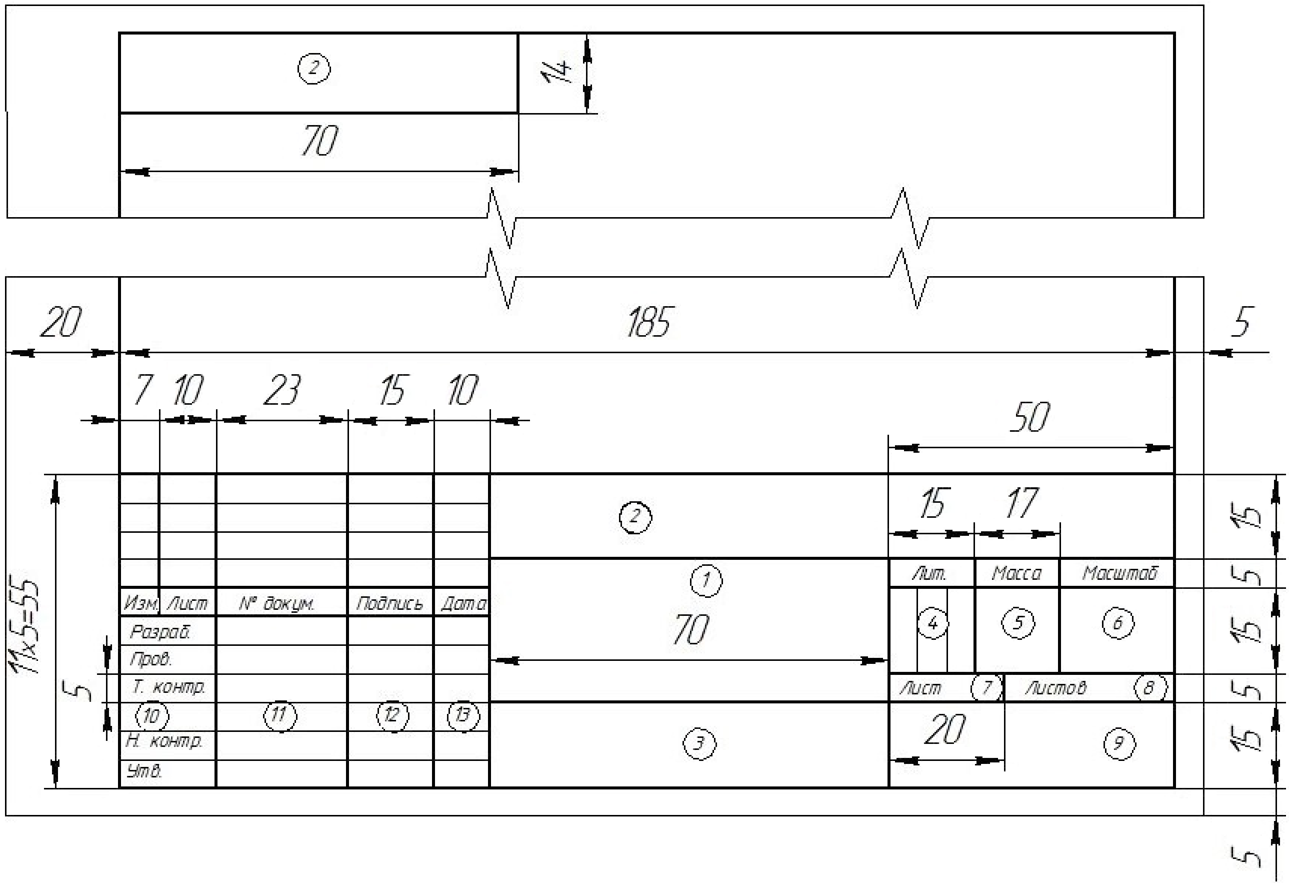


Рисунок 1.3 – Основная надпись, форма 1

Основная надпись, дополнительные графы к ней и рамки выполняют сплошными основными и сплошными тонкими линиями, а именно: тонкие линии наносятся там, где вносятся фамилии и подписи лиц, ответственных за разработку данного чертежа, графы литеры, остальные линии – основные.

Основная надпись всегда располагается в правом нижнем углу формата, горизонтально, вплотную к рамке (см. рис. 1.1).

Содержание, расположение и размеры граф основной надписи, дополнительных граф к ней, а также размеры рамок на чертежах и схемах должны соответствовать *форме 1* (см. рис. 1.3) указанного выше ГОСТа:

1 – наименование чертежа (начинается с существительного в единственном числе);

2 – обозначение чертежа (в учебных чертежах, как правило, состоит из индекса раздела курса, номера задания, варианта, порядкового номера чертежа, например, *ИГ01.22.001*);

3 – обозначение материала (заполняют только на чертежах и эскизах деталей);

4 – литера чертежа в соответствии с этапом выполнения работ (на учебных чертежах допускается использовать литеру «*У*»);

5 – масса изделий (на учебных чертежах не указывается);

6 – масштаб;

7 – порядковый номер листа (на документах, состоящих из одного листа, графу не заполняют);

8 – количество листов (графу заполняют только на первом листе, если документ состоит из одного листа, указывают *1*);

9 – наименование предприятия, выпустившего чертеж (на учебных чертежах указывают наименование учебного заведения и шифр группы, например, *КрасГАУ гр. М-11*);

10 – характер работы, выполняемой лицом, подписавшим чертеж;

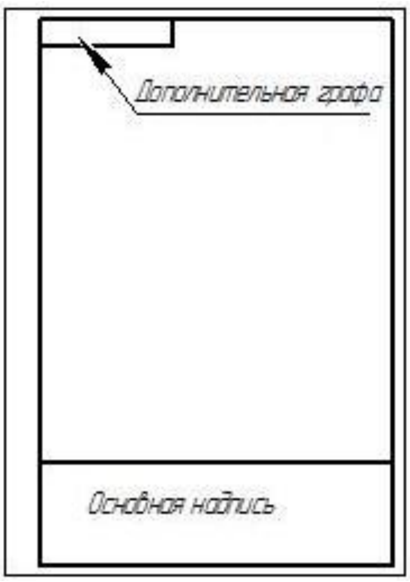
11 – фамилии лиц, подписавших чертеж (указывают без инициалов);

12 – подписи лиц, фамилии которых указаны в графе 11;

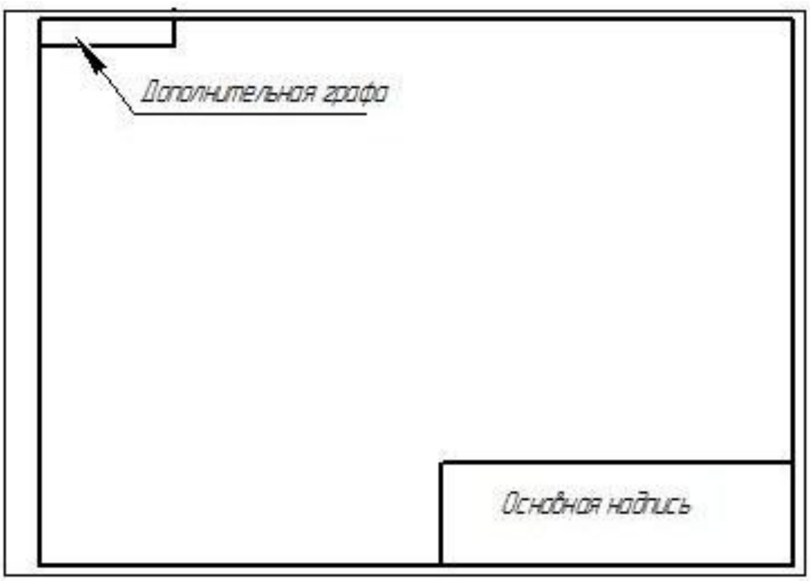
13 – даты, когда были сделаны подписи.

На формате А4 основную надпись размещают только *вдоль короткой стороны,* дополнительную графу в левом верхнем углу – вдоль короткой стороны (рис. 1.4, *а*).

На форматах больше А4 при расположении основной надписи вдоль длинной стороны листа дополнительная графа располагается, как показано на рисунке 1.4, *б*.



а



б

Рисунок 1.4 – Расположение основной надписи и дополнительной графы

На форматах больше А4 при расположении основной надписи вдоль короткой стороны листа дополнительная графа располагается, как показано на рисунке 1.5.

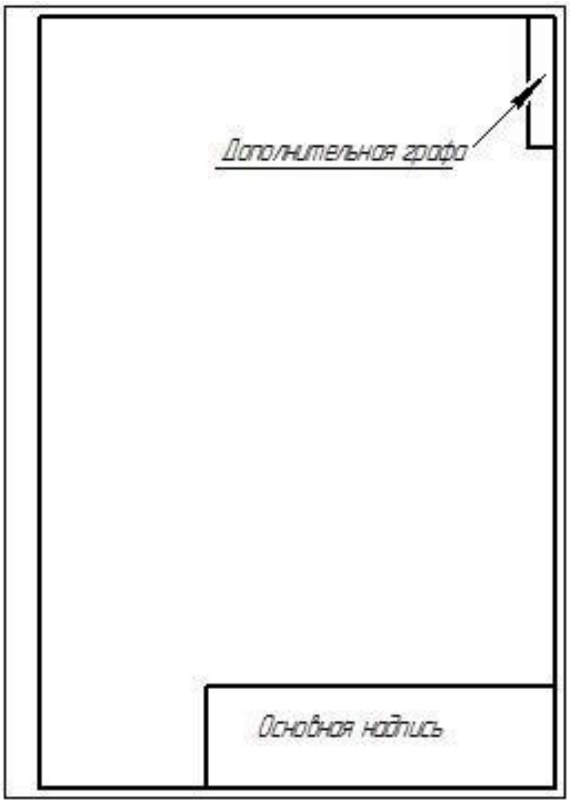


Рисунок 1.5 – Расположение основной надписи и дополнительной графы на форматах больше А4

1.4.3. Масштабы

Масштабом называется отношение линейных размеров изображения на чертеже к действительным линейным размерам.

Все чертежи выполняют в масштабах, утвержденных **ГОСТ 2.302-68**.

Масштабы изображений в чертежах в зависимости от сложности и величины изображаемых изделий или их составных частей, а также от вида чертежа нужно выбирать из представленного ниже ряда.

Масштабы (ГОСТ 2.302-68)

Масштабы уменьшения: 1:2; 1:2,5; 1:4; 1:5; 1:10; 1:15; 1:20; 1:25; 1:40; 1:50; 1:75; 1:100; 1:200; 1:400; 1:500; 1:800; 1:1000.

Натуральная величина: 1:1.

Масштабы увеличения: 2:1; 2,5:1; 4:1; 5:1; 10:1; 20:1; 40:1; 50:1; 100:1.

Масштаб, указанный в предназначенной для этого графе основной надписи чертежа, должен обозначаться по типу 1:1; 1:2; 2:1 и т. д.

Масштаб изображения, отличающийся от указанного в основной надписи, помещают справа от надписи, относящейся к изображению, в круглых скобках. Например: А (1:2), А-А (1:2).

1.4.4. Линии

Все чертежи выполняют линиями различного типа и толщины, причем толщина линий зависит от величины, сложности и назначения чертежа.

ГОСТ 2.303-68 устанавливает начертания и основные назначения линий на чертежах (рис. 1.6).

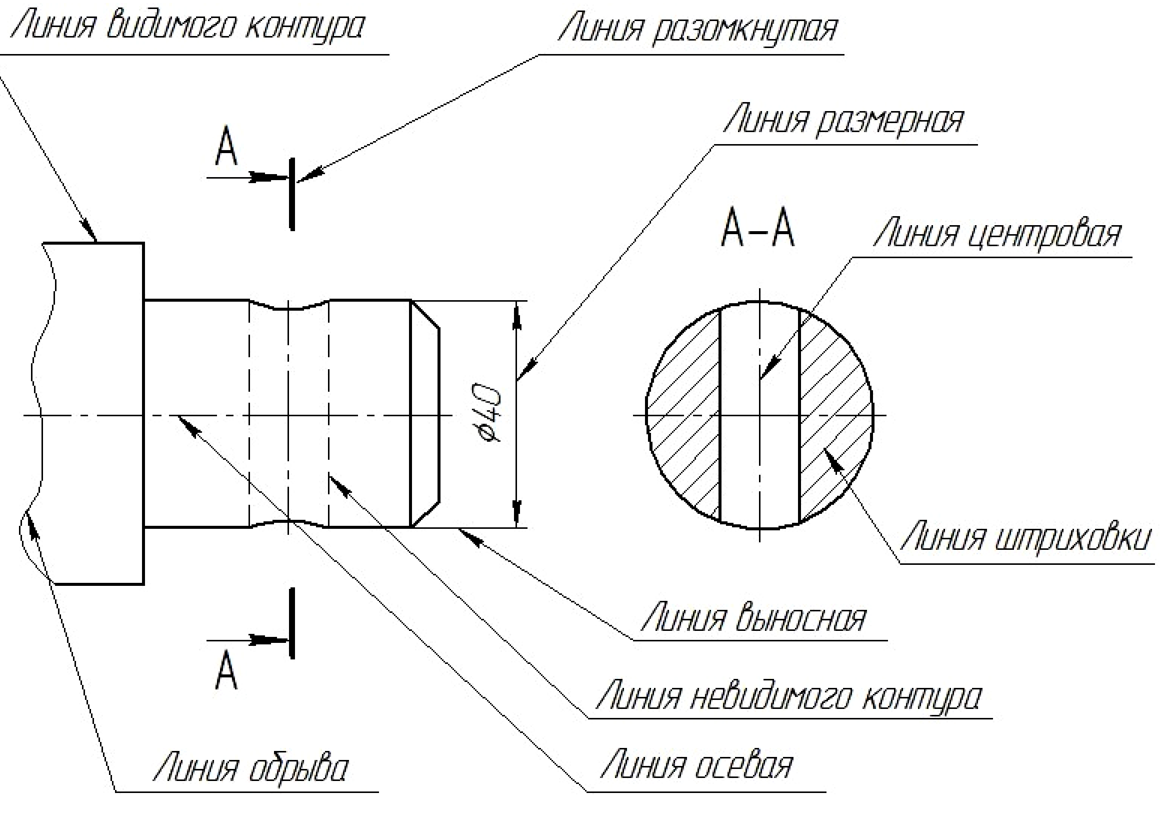
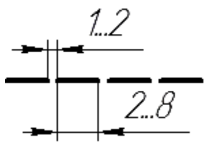
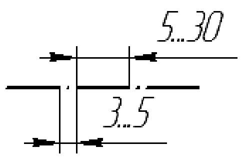
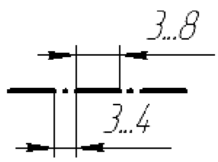
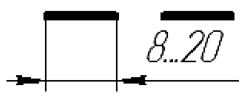
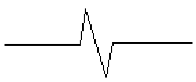
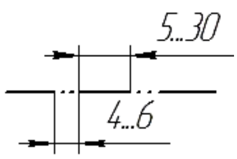


Рисунок 1.6 – Типы линий

Указанный стандарт устанавливает назначение и начертание девяти типов линий, это – сплошная (основная, тонкая, волнистая и тонкая с изломами), штриховая, штрихпунктирная (тонкая, утолщенная и с двумя точками) и разомкнутая линии (табл.).

Линии (ГОСТ 2.303-68)

Наименование	Начертание	Толщина линии	Основное назначение
1. Сплошная толстая основная		S	Линии видимого контура; линии перехода видимые; линии контура сечения
2. Сплошная тонкая		От $\frac{S}{3}$ до $\frac{S}{2}$	Линия контура наложенного сечения; линии размерные и выносные; линии штриховки; линии-выноски; полки линий-выносок и подчеркивание надписей; линии для изображения пограничных деталей; линии ограничения выносных элементов; линии перехода воображаемые; следы плоскостей, линии построения характерных точек
3. Сплошная волнистая		От $\frac{S}{3}$ до $\frac{S}{2}$	Линии обрыва; линии разграничения вида и разреза
4. Штриховая		От $\frac{S}{3}$ до $\frac{S}{2}$	Линии невидимого контура; линии перехода невидимые
5. Штрих-пунктирная тонкая		От $\frac{S}{3}$ до $\frac{S}{2}$	Линии осевые и центровые; линии сечения, являющиеся осями симметрии для вынесенных и наложенных сечений
6. Штрих-пунктирная утолщенная		От $\frac{S}{3}$ до $\frac{2}{3}S$	Линии, обозначающие поверхности, подлежащие термообработке или покрытию; линии для изображения элементов, расположенных перед секущей плоскостью
7.Разомкнутая		От S до 1,5S	Линии сечений
8. Сплошная тонкая с изломом		От $\frac{S}{3}$ до $\frac{S}{2}$	Длинные линии обрыва
9. Штрих-пунктирная с двумя точками тонкая		От $\frac{S}{3}$ до $\frac{S}{2}$	Линия сгиба на развертках; линии для изображения частей изделий в крайних или промежуточных положениях; линии для изображения развертки, совмещенной с видом

Волнистой линией показывают линии обрыва и линии разграничения вида и разреза.

Штриховую линию применяют для изображения на чертежах линий невидимого контура.

Штрихпунктирной тонкой линией проводят осевые и центровые линии, линии сечений, являющиеся осями симметрии для наложенных или вынесенных сечений.

Штрихпунктирная тонкая линия с двумя точками применяется для изображения линий сгиба и частей изделий в крайних или промежуточных положениях, а также для изображения развертки, совмещенной с видом.

Утолщенная штрихпунктирная линия применяется для обозначения поверхности, подлежащей термической обработке или нанесения покрытия.

Сплошная тонкая линия предназначена для построений, выносных и размерных линий, штриховки разрезов и сечений, линии контура наложенного сечения, линии-выноски, полки линий-выносок и др. (табл. 1.3). *Расстояние между линиями штриховки принимают от 1 до 10 мм в зависимости от величины площади штриховки.*

Длину штрихов в штриховых линиях следует выбирать в пределах от 2 до 8 мм в соответствии с толщиной линий, а расстояние между штрихами примерно 1…2 мм.

Длина штрихов в штрихпунктирных тонких линиях должна быть в пределах от 5 до 30 мм, при малых изображениях длину штрихов рекомендуется выбирать меньшей длины. Промежутки между штрихами в этих линиях рекомендуется брать для линии с одной точкой от 3 до 6 мм, а с двумя точками – примерно 4…6 мм.

Длина штрихов в штрихпунктирных утолщенных линиях должна быть в пределах от 3 до 8 мм, при малых изображениях длину штрихов рекомендуется выбирать меньшей величины. Промежутки между штрихами в этих линиях рекомендуется выбирать от 3 до 5 мм.

Разомкнутую линию применяют для обозначения линий разрезов и сечений. Длину штрихов в этих линиях следует выбирать в пределах от 8 до 20 мм в зависимости от величины изображения.

При выполнении чертежа следует руководствоваться следующими требованиями:

– толщина линий одного типа должна быть одинаковой для всех изображений на данном чертеже, вычерченных в одном масштабе;

– штрихи в линии должны быть приблизительно одинаковой длины;

– штриховые и штрихпунктирные линии должны начинаться и заканчиваться штрихами, которые рекомендуется выводить за контур изображения предмета на 3…5 мм;

– штриховые и штрихпунктирные линии должны пересекаться между собой и другими линиями чертежа штрихами;

– если диаметр окружности в изображении менее 12 мм, то штрихпунктирные линии, применяемые в качестве центровых, следует заменять сплошными тонкими;

– центр окружности во всех случаях должен определяться пересечением штрихов.

1.4.5. Шрифты чертежные

ГОСТ 2.304-81 регламентирует правила написания шрифтов (букв, цифр, условных знаков). Необходимость строгого соблюдения этого ГОСТа продиктована проблемой быстрого и безошибочного распознавания надписей невооруженным глазом или вооруженным, или «читающим» устройством в различных условиях (при различной освещенности, когда наблюдатель неподвижен, а движется чертеж, или наоборот). Кроме того, чертежи со временем могут изнашиваться, и надписи становятся менее четкими. Ошибки при чтении размерных чисел недопустимы. Поэтому к качеству шрифта на чертежах предъявляют особые требования.

В соответствии с требованиями ГОСТ 2.304-81 шрифты, применяемые при оформлении чертежей и других технических документов всех отраслей промышленности и строительства, установлены двух типов: тип А с толщиной линии 1:14 и тип Б с толщиной 1:10 с наклоном под углом 75° к основанию строки (рис. 1.7) или без наклона.

Устанавливаются следующие размеры шрифта (высота прописной буквы в миллиметрах): 1,8; 2,5; 3,5; 5; 7; 10; 14; 20; 28; 40. *Применение шрифта типа А с размером 1,8 не рекомендуется и допускается только для типа Б.*

Рисунок 1.7 – Шрифт типа А с наклоном

Нижние горизонтальные отростки у прописных и строчных букв Ц и Щ типов А и Б делают за счет промежутков между смежными буквами, а вертикальные (также черта над Й) – за счет промежутка между строками.

При выполнении надписей шрифтом вначале необходимо построить карандашом вспомогательную сетку (рис. 1.8) в виде тонких линий, а затем от руки нанести на эту сетку буквы и цифры тонкими линиями. Необходимая толщина линий букв и цифр достигается при обводке мягким карандашом.

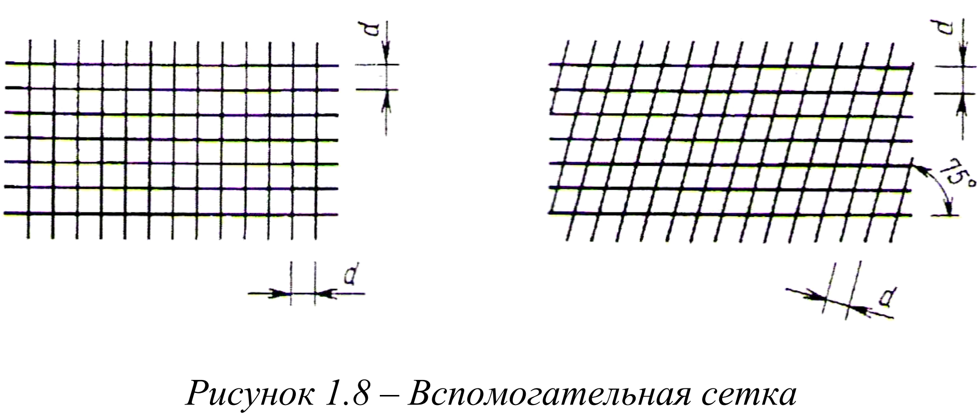


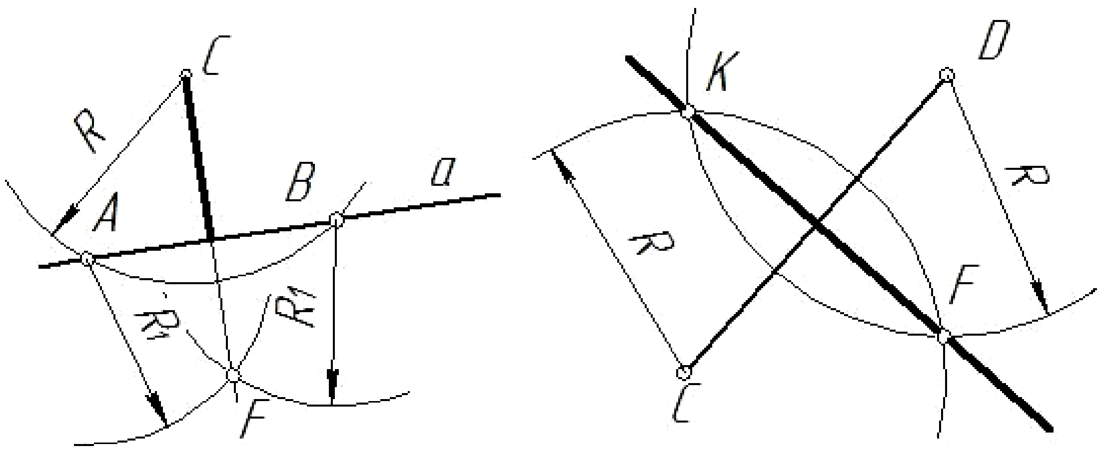
Рисунок 1.8 – Вспомогательная сетка

2. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ЧЕРЧЕНИЕ

2.1. Геометрические построения, часто применяемые при выполнении чертежей

Проведение перпендикуляра из заданной точки к прямой линии. Из заданной точки *C* (рис. 2.1, *а*) проводят дугу окружности произвольного радиуса *R* так, чтобы она пересекала прямую *а,* получают точки *А* и *В.* Из этих точек описывают две дуги окружности произвольным радиусом R_1, несколько большим половины отрезка *АВ,* до их взаимного пересечения в точке *F*. Точки *F* и *C* соединяют прямой, которая и будет искомым перпендикуляром к прямой *а*.

Проведение серединного перпендикуляра к отрезку. Из двух концов отрезка *CD* (рис. 2.1, *б*) как из центров строят две дуги окружности произвольным радиусом *R,* несколько большим половины отрезка *CD,* до их взаимного пересечения в точках *F* и *К.* Точки *F* и *К* соединяют прямой, которая и будет искомым перпендикуляром к *CD.*



а *б*

Рисунок 2.1 – Построение перпендикуляра к прямой линии

Деление отрезка прямой линии на любое число равных частей. Пусть отрезок *АВ* требуется разделить на 10 равных частей. Для этого из любого конца отрезка (например, из точки *А*) проводят под острым углом к отрезку прямую линию (рис. 2.2), на которой от точки *А* измерительным циркулем откладывают 10 равных отрезков (точки деления 1_1 ... 10_1) произвольной длины. Точку 10_1 соединяют с концом *В* данного отрезка прямой линией. Из точек делений *1* ... *9* проводят ряд прямых линий, параллельных отрезку прямой *10_1B*, которые и разделят отрезок *AB* на 10 равных частей.

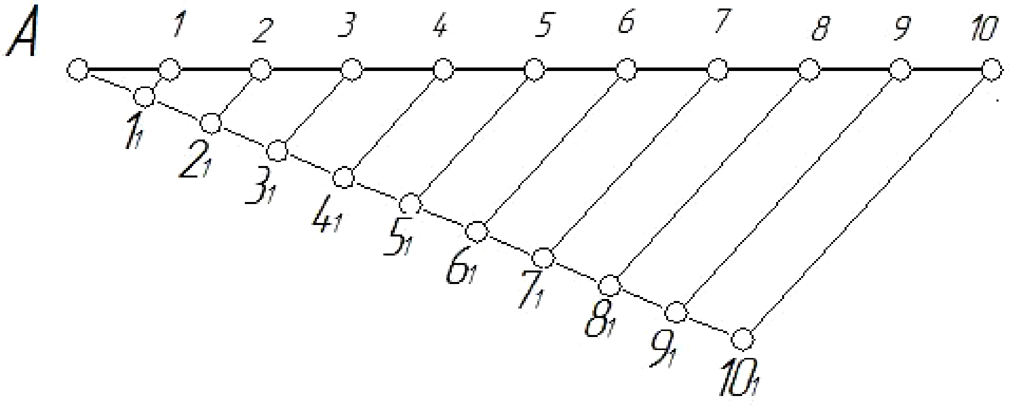
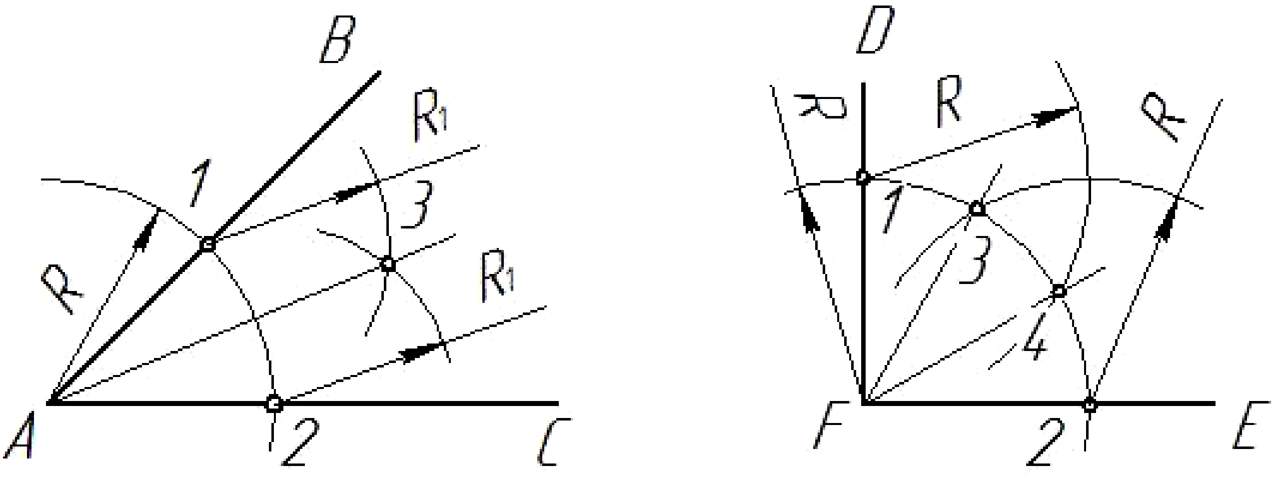


Рисунок 2.2 – Деление отрезка прямой линии на любое число равных частей

Деление угла на две равные части. Для того чтобы разделить угол *BAC* (рис. 2.3, *а*) пополам (или провести биссектрису этого угла), из вершины *A* строят дугу окружности произвольного радиуса *R* до пересечения со сторонами угла *BAC* в точках *1* и *2*. Из полученных точек проводят две дуги радиусом *R_1*, несколько большим половины длины дуги *12* до взаимного пересечения в точке *3*. Вершину угла *A* соединяют с точкой *3* прямой, которая делит угол *BAC* пополам. Прямая *A3* – биссектриса угла *BAC*.

Чтобы разделить угол на четыре равные части, аналогично строят биссектрисы улов *BA3* и *3AC*.



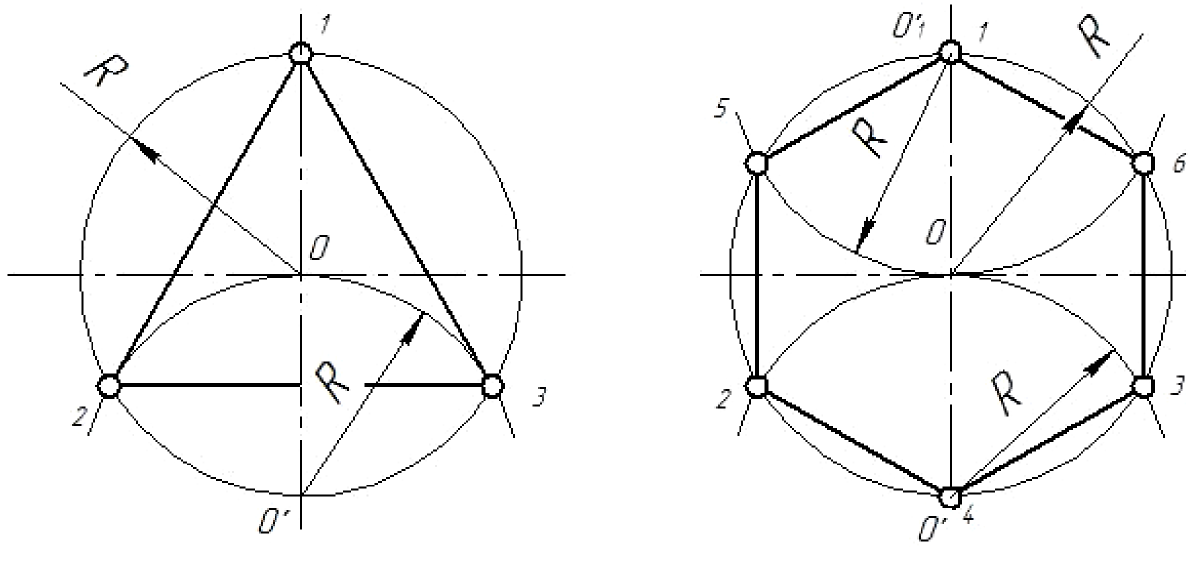
а *б*

Рисунок 2.3 – Деление угла на равные части

Деление прямого угла на три равные части. Из вершины *F* прямого угла *DFE* (рис. 2.3, *б*) произвольным радиусом *R* проводят дугу окружности до пересечения ее со сторонами прямого угла в точках *1* и *2,* из которых проводят дуги окружности того же радиуса *R* до пересечения с дугой *12* в точках *3* и *4*. Точки *3* и *4* соединяют с вершиной угла *F* прямыми линиями и получают стороны *F3* и *F4* углов *DF3, 3F4* и *4FE,* равных ⅓ прямого угла, то есть по 30°.

Деление окружности на три и шесть равных частей. Для того чтобы разделить окружность на три равные части, иглу циркуля ставят в точку *O'* окружности (рис. 2.4, *а*) и радиусом *R*, равным радиусу окружности, проводят дугу до пересечения с исходной окружностью в точках *2* и *3*. Соединив последовательно точки *1, 2* и *3*, получают *вписанный в окружность правильный треугольник*.

Для деления окружности циркулем на шесть равных частей применяется тот же прием, что и для деления окружности на три равные части. Радиусом окружности *R* (рис. 2.4, *б*) дугу описывают не один, а два раза из точек *O'* и O'_1. Соединив последовательно точки *1, 5, 2, 4, 3* и *6*, получают *вписанный в окружность правильный шестиугольник*.



а *б*

Рисунок 2.4 – Деление окружности на три и шесть равных частей

Для *деления окружности на пять равных частей* (рис. 2.5) заданный радиус *01* делят на три равные части, а радиус *02* – на пять равных частей. Затем через точки деления проводят хорды *34* и *56* перпендикулярно диаметру, как на рисунке 2.5. Окружность точками *1*, *3*, *4*, *5*, *6* поделена на пять равных частей. Для построения правильного пятиугольника точки деления соединяют последовательно.

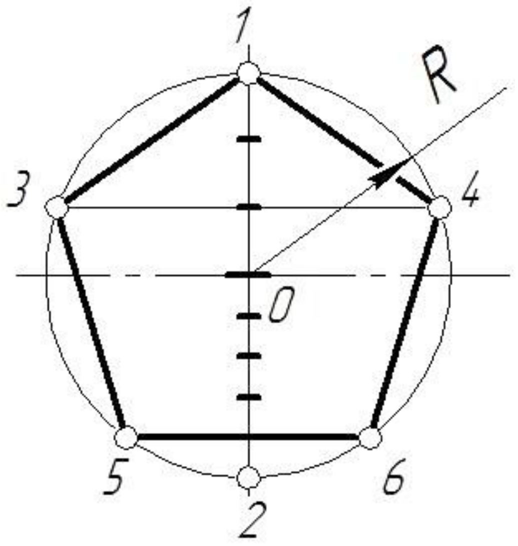


Рисунок 2.5 – Деление окружности на пять равных частей

Для *деления окружности на n равных частей* (например, на 7) один из диаметров делят на *n* частей (рис. 2.6). Из какого-либо конца этого же диаметра проводится дуга окружности радиусом, равным диаметру данной окружности, до пересечения с продолжением второго диаметра в точках *M* и *N*. Из полученных точек проводят лучи через четные или нечетные точки на диаметре. При пересечении с окружностью лучи дадут искомые точки деления окружности.

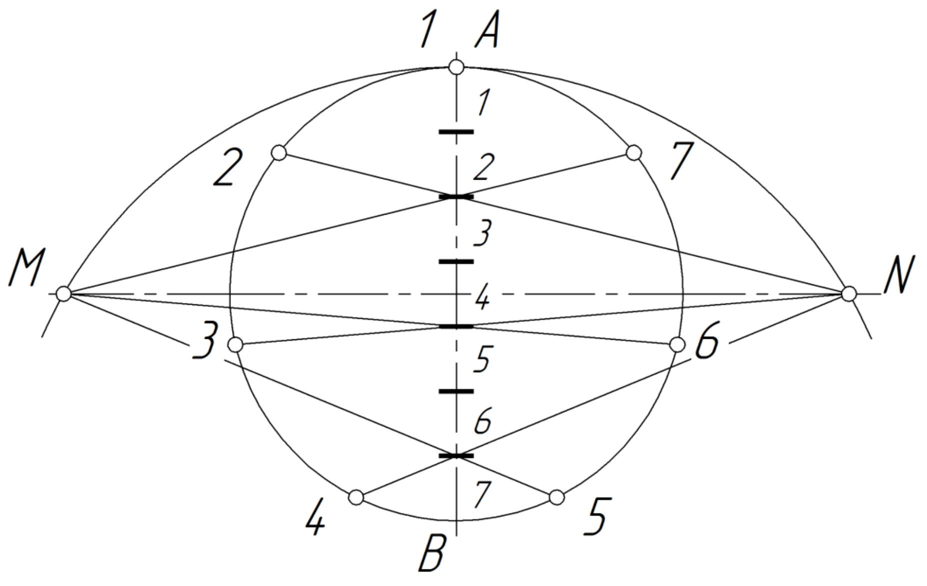
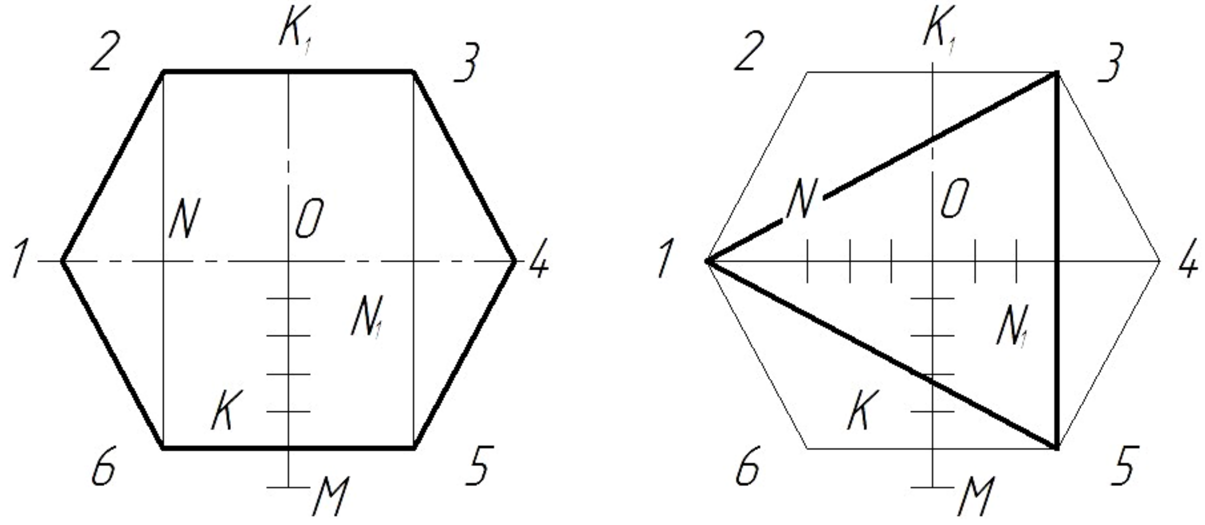


Рисунок 2.6 – Деление окружности на n равных частей

При *построении шестиугольника по заданной его стороне* на осях симметрии откладывают в обе стороны от заданного на рисунке центра длину стороны шестиугольника, получают диагональ *14* (рис. 2.7, *а*). На радиусе $OM=01$ находят точку K, которая делит его в отношении 1:6. Симметрично ей откладывают точку K_1. Через точки K и K_1 проводят прямые, параллельные диагонали *14*, а через точки N и N_1 (середины отрезков *01* и *04*) – прямые, параллельные отрезку KK_1. Взаимное пересечение их дает искомые вершины шестиугольника.

Построение *шестиугольника по заданной диагонали* начинают с деления ее на четыре равные части и отмечают точки N и N_1. Затем берут отрезок OM, равный *01*, на котором определяют точку K аналогично предыдущему построению (рис. 2.7, *б*).



а *б*

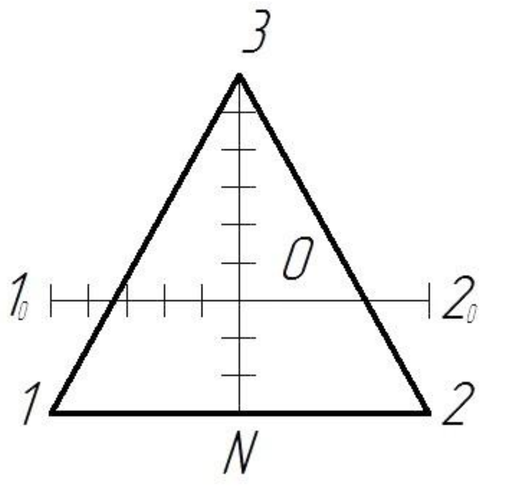
Рисунок 2.7 – Построение правильного шестиугольника

Последовательность *построения равностороннего треугольника* вытекает из построения шестиугольника (рис. 2.7, *б*). В равностороннем треугольнике центр O делит высоту $1N_1$ в отношении 1:3. Отрезок ON_1 приблизительно равен $^3/_5\ 3N_1$, а отрезок $O1=2\ ON_1$. Зная эти отношения, можно построить треугольник по его заданной высоте $1N_1$ или стороне *35*.

Для примера рассмотрим построение треугольника по заданной стороне (рис. 2.8, *а*). На горизонтальной линии, проведенной через заданный на рисунке центр O, откладывают сторону $1_0 2_0$ треугольника. Делят $O1_0$ на пять равных частей. Затем на вертикальной линии отмечают $ON= {}^3/_5 O1_0$ и через точку N проводят основание треугольника $12=1_0 2_0$. Отрезок $O3$ берут вдвое больше отрезка ON. Если треугольник строят по заданной высоте $N3$, то на рисунке высоту берут так, чтобы заданный центр O поделил ее в отношении 1:3.

Построение пятиугольника по заданному диаметру описанной окружности выполняется следующим образом. Через заданный центр O на рисунке проводят вертикальную прямую линию, на которой откладывают величину $OE=ON={}^1/_2$ заданного диаметра. На этом диаметре определяют точки M и K. Если за единицу измерения взять ${}^1/_5$ радиуса описанной окружности, то точка M поделит радиус ON в отношении 1:4 (рис. 2.8, *б*). Отрезок OK составляет 1,5 единицы (можно брать ${}^1/_3 OE$). Через точки M и K проводят горизонтальные линии, на которых откладывают $MA=MB=3$ единицам или $2OK$, и отрезки $A_0C=B_0D=1{,}75$ единицы. Соединив точки A, B, D, E, C, получают пятиугольник.

Очень часто приходится рисовать технические детали, построение которых выполняется с использованием известных построений простейших геометрических фигур.



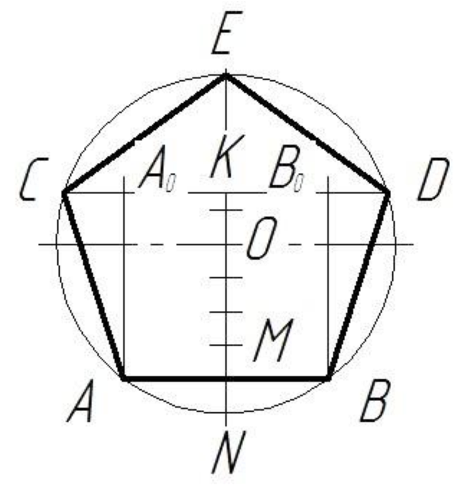


Рисунок 2.8 – Построение треугольника и пятиугольника

Построение уклона. Уклоном i называется отношение катета BC, противолежащего углу α, к прилежащему катету AC (рис. 2.9), или tgα.

Уклоны выражаются в виде отношения

$$i = tg\ \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{6} = 1:6.$$

Для построения прямой AB с заданной величиной уклона к горизонтальной прямой, например, 1:6, необходимо от точки C горизонтально отложить отрезок [CA], равный шести единицам длины (например, 60 мм), и от точки *C* вверх отрезок [*AB*], равный одной единице длины (10 мм). Точки *A* и *B* соединяют прямой, которая дает направление линии искомого уклона.

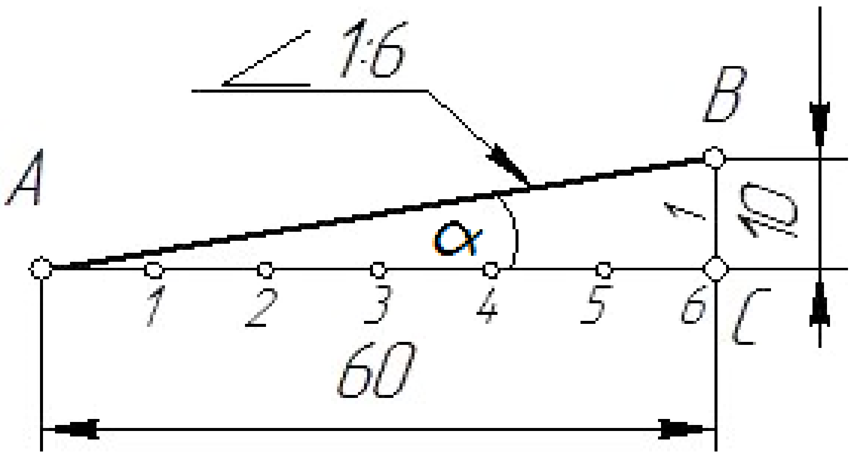


Рисунок 2.9 – Построение уклона

Построение конусности. Конусностью называется отношение диаметра окружности основания конуса к его высоте. Если конус усеченный (рис. 2.10) с диаметрами оснований *D* и *d* и высотой *h,* то конусность определяется в виде отношения по формуле

$$K = \frac{D-d}{h}.$$

На рисунке 2.10 даны размеры *D*= 30 мм, *d* = 20 мм и *h* = 60 мм, тогда

$$K = \frac{30-20}{60} = 1{:}6.$$

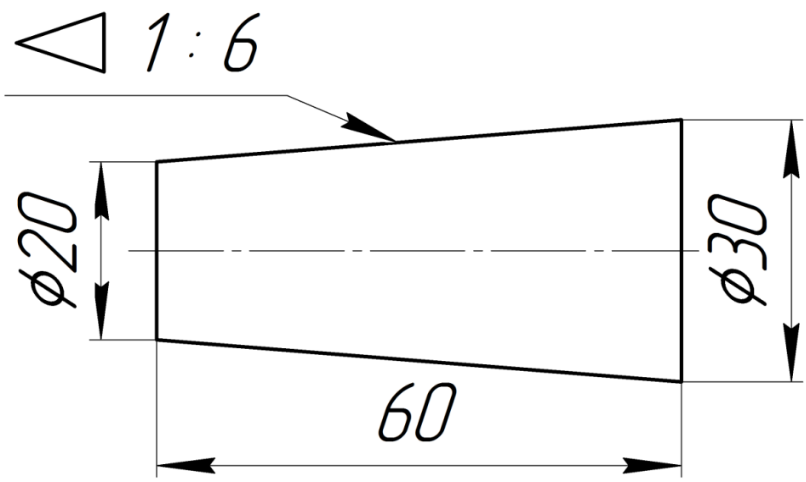


Рисунок 2.10 – Построение конусности

2.2. Сопряжения линий

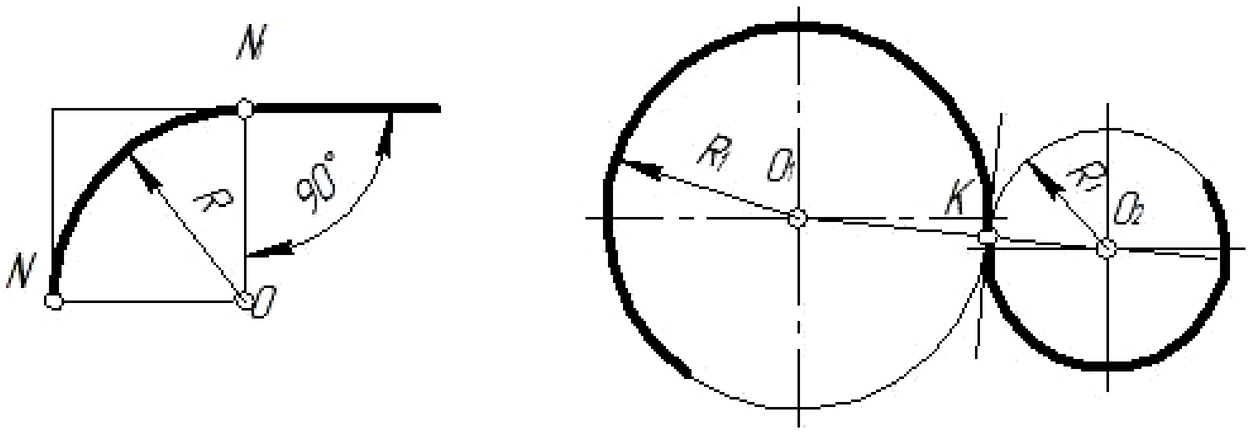
Зачастую контур очертания деталей состоит из прямых линий и дуг окружностей, плавно переходящих от одной линии к другой. Такой плавный переход называется *сопряжением*.

Построение сопряжений основано на двух положениях геометрии.

Первое – для *сопряжения прямой линии и дуги окружности* необходимо, чтобы центр окружности, которой принадлежат дуги, лежал на восстановленном из точки сопряжения перпендикуляре к заданной прямой (рис. 2.11, *а*).

Второе – для *сопряжения двух дуг* необходимо, чтобы центры окружностей, которым принадлежат дуги, лежали на прямой, которая проходит через точку сопряжения и является перпендикуляром к общей касательной этих дуг (рис. 2.11, *б*).

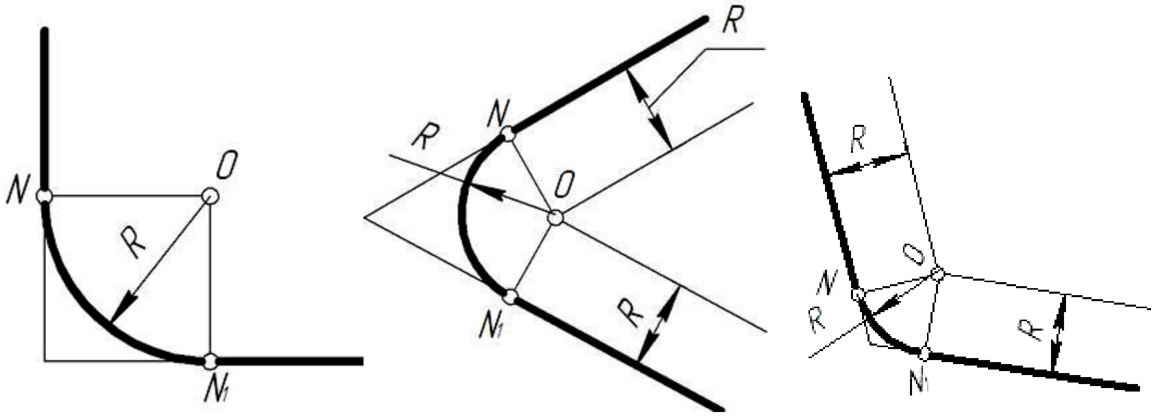
При вычерчивании сопряжений между двумя прямыми, прямой и окружностью, двумя окружностями при помощи некоторой дуги построение выполняется по следующему алгоритму: задав радиус дуги перехода, построением получают центр дуги перехода и точку сопряжения.



а *б*

Рисунок 2.11 – Сопряжение прямой линии и дуги окружности, двух дуг окружностей

Сопряжение двух прямых, расположенных под прямым (рис. 2.12, *а*), острым (рис. 2.12, *б*) и тупым (рис. 2.12, *в*) углами, *дугой окружности радиуса R* выполняют следующим образом. Параллельно сторонам угла на расстоянии, равном радиусу дуги *R*, проводят две вспомогательные прямые линии и находят точку O пересечения этих прямых. Точка O является центром дуги радиуса R, сопрягающей стороны угла. Из центра O опускают перпендикуляры к заданным прямым, N и N_1 – основания перпендикуляров. Из центра O между точками сопряжений N и N_1 строят дугу, плавно переходящую в прямые линии – стороны угла.



а *б* *в*

Рисунок 2.12 – Сопряжение двух прямых

Для *сопряжения дуги окружности радиуса R с прямой линией дугой радиуса r* строят дугу окружности радиуса R (рис. 2.13, *а*) и прямую. Параллельно заданной прямой на расстоянии, равном радиусу r сопрягающей дуги, проводят прямую a. Из центра O проводят дугу окружности радиусом, равным сумме радиусов R и r до пересечения ее с прямой a в точке O_1. Точка O_1 является центром дуги сопряжения.

Точку сопряжения C_2 находят на пересечении отрезка прямой OO_1 с дугой окружности радиуса R. Точка сопряжения C_3 служит основанием перпендикуляра, опущенного из центра O_1 на заданную прямую.

Сопряжение прямой, проходящей через точку O, с дугой окружности радиуса R (рис. 2.13, *б*). Дуга сопряжения имеет радиус r. Центр дуги сопряжения O_1 находят на пересечении вспомогательной прямой, проведенной параллельно заданной прямой на расстоянии радиуса r, с дугой вспомогательной окружности, описанной из точки O радиусом, равным разности (R–r). Точка сопряжения C_1 является основанием перпендикуляра, опущенного из точки O_1 на заданную прямую. Точку сопряжения *C* находят на пересечении прямой OO_1 с заданной сопрягаемой дугой.

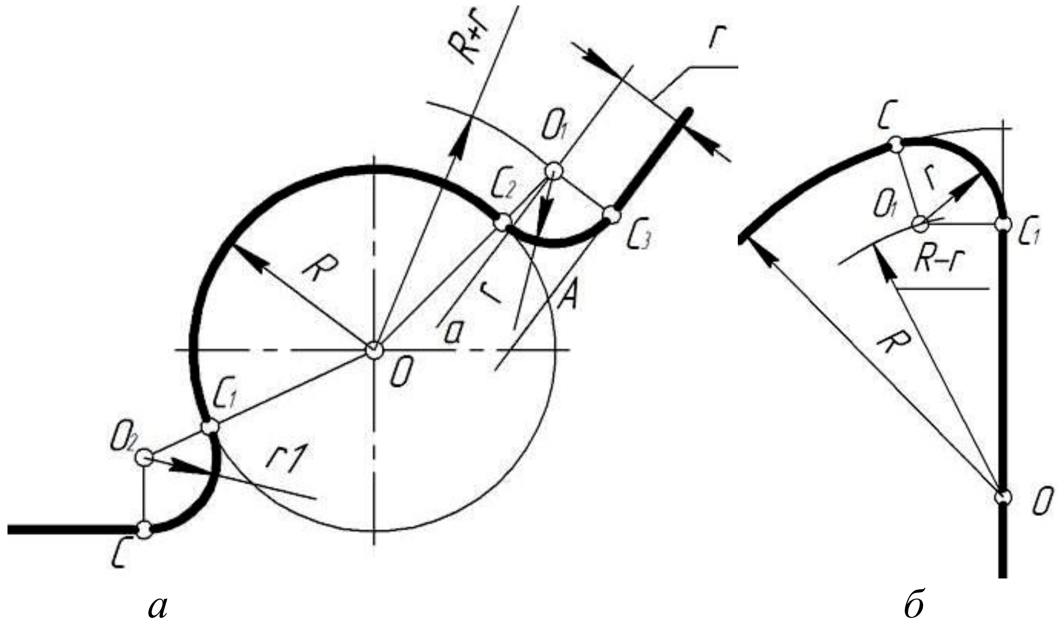


Рисунок 2.13 – Сопряжение дуги окружности радиуса R с прямой линией дугой радиуса r (а); сопряжение прямой, проходящей через точку О, с дугой окружности радиуса R (б)

Сопряжение двух дуг окружностей дугой заданного радиуса может быть *внешним, внутренним и смешанным.*

При внутреннем сопряжении центры *O* и O_1 сопрягаемых дуг радиусов R_1 и R_2 лежат внутри сопрягающей дуги радиуса *R* (рис. 2.14).

При внешнем сопряжении центры *O* и O_1 сопрягаемых дуг радиусов R_1 и R_2 лежат вне сопрягающей дуги радиуса *R* (рис. 2.15).

При смешанном сопряжении центр O_1 одной из сопрягаемых дуг лежит внутри сопрягающей дуги радиуса *R,* а центр *O* другой сопрягаемой дуги – вне ее (рис. 2.16).

Для построения *внутреннего сопряжения двух дуг окружностей дугой заданного радиуса* по заданным расстояниям между центрами L_1 и L_2 (рис. 2.14) находят точки *O* и O_1, из которых проводят сопрягаемые дуги радиусов R_1 и R_2. Из центра *O* проводят вспомогательную дугу окружности радиусом, равным сумме радиусов сопрягаемой дуги R_1 и сопрягающей *R* (R_1+*R*), а из центра O_1 проводят вспомогательную дугу радиусом, равным сумме радиусов сопрягаемой дуги R_2 и сопрягающей *R* (R_2+*R*). Вспомогательные дуги пересекутся в точке O_2, которая и будет искомым центром сопрягающей дуги.

Для нахождения точек сопряжения центры дуг соединяют отрезками прямых линий OO_2 и O_1O_2. Эти два отрезка пересекают сопрягаемые дуги в точках сопряжения S и S_1. Из центра O_2 радиусом R проводят сопрягающую дугу, ограничивая ее точками сопряжения S и S_1.

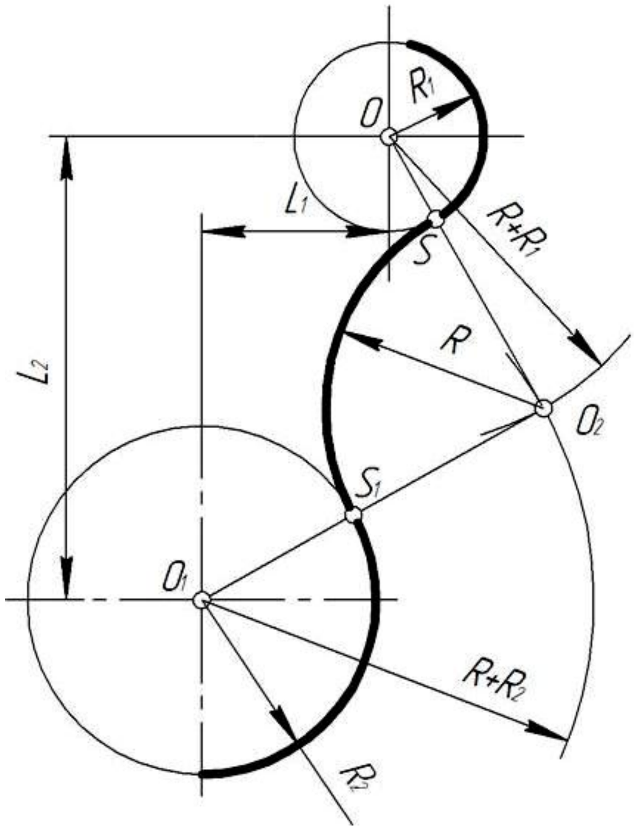


Рисунок 2.14 – Внутреннее сопряжение двух дуг окружностей дугой заданного радиуса

Внешнее сопряжение двух дуг окружностей дугой заданного радиуса выполняют в следующей последовательности. По заданным расстояниям между центрами L_1 и L_2 (рис. 2.15) находят центры O и O_1, из которых проводят сопрягаемые дуги радиусов R_1 и R_2. Из центра O проводят вспомогательную дугу окружности радиусом, равным разности радиусов сопрягающей дуги R и сопрягаемой R_1 ($R–R_1$), а из центра O_1 проводят вспомогательную дугу окружности радиусом, равным разности радиусов сопрягающей дуги R и сопрягаемой R_2 ($R–R_2$). Вспомогательные дуги пересекутся в точке O_2, которая и будет искомым центром сопрягающей дуги.

Для нахождения точек сопряжения точку O_2 соединяют с точками O и O_1 отрезками прямых линий. Точки пересечения S и S_1 – продолжения этих отрезков с сопрягаемыми дугами являются искомыми точками сопряжения. Радиусом R из центра O_2 проводят сопрягающую дугу между точками сопряжения S и S_1.

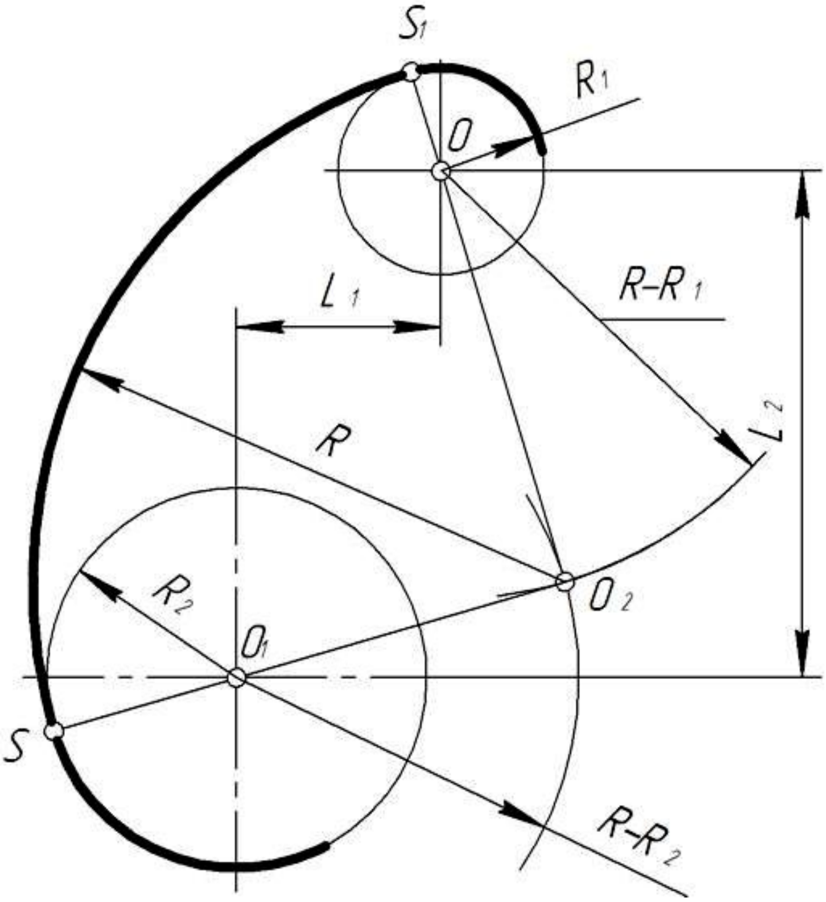


Рисунок 2.15 – Внешнее сопряжение двух дуг окружностей дугой заданного радиуса

Смешанное сопряжение двух дуг окружностей дугой заданного радиуса выполняют в следующей последовательности. По заданным расстояниям между центрами L_1 и L_2 (рис. 2.16) находят центры O и O_1, из которых проводят сопрягаемые дуги радиусов R_1 и R_2. Из центра O проводят вспомогательную дугу радиусом, равным сумме радиусов сопрягаемой дуги R_1 и сопрягающей R, (R_1+R), а из центра O_1 проводят вспомогательную дугу радиусом, равным разности радиусов сопрягающей дуги R и сопрягаемой дуги R_2, (R–R_2). Вспомогательные дуги пересекутся в точке O_2, которая будет искомым центром сопрягающей дуги.

Соединив точки O и O_2 прямой, получают точку сопряжения S_1, соединив точки O_1 и O_2, находят точку сопряжения S. Из центра O_2 проводят дугу сопряжения от S до S_1.

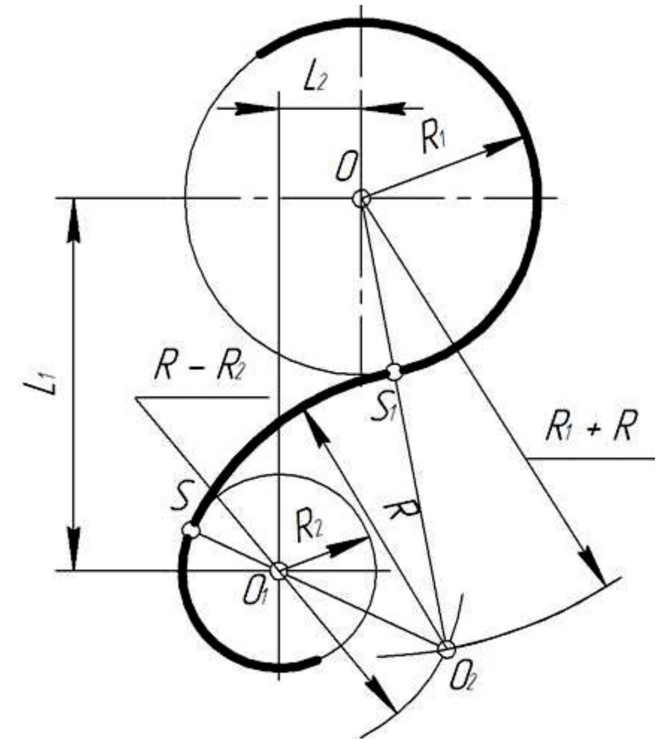


Рисунок 2.16 – Смешанное сопряжение двух дуг окружностей дугой заданного радиуса

При *построении касательной к двум окружностям* из центра O_1 проводят вспомогательную окружность радиусом R', равным разности радиусов $R_1–R_2$ (рис. 2.17). На ее пересечении с дугой окружности, радиус которой равен половине расстояния между центрами заданных окружностей, находят точку M'.

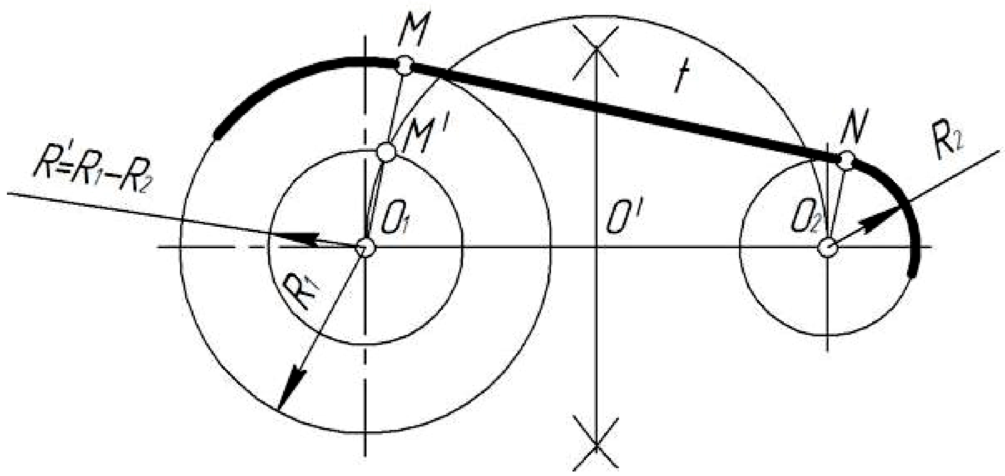


Рисунок 2.17 – Построение касательной к двум окружностям

Точку O_1 соединяют с точкой M', на продолжении прямой линии O_1M' строят точку M. Проводят параллельную линии O_1M прямую из точки O_2 до пересечения с окружностью – находят точку N. Точки M и N – точки сопряжения.

Из центра O_1 проводят вспомогательную окружность радиусом R', равным сумме радиусов заданных окружностей R_1+R_2 (рис. 2.18). На ее пересечении с дугой окружности, радиус которой равен половине расстояния между центрами заданных окружностей, находят точку M'. Точку O_1 соединяют с точкой M', на окружности радиуса R_1 находят точку M. Проводят параллельную линии O_1M прямую из точки O_2 до пересечения с окружностью радиусом R_2 и находят точку N. Точки M и N – точки сопряжения.

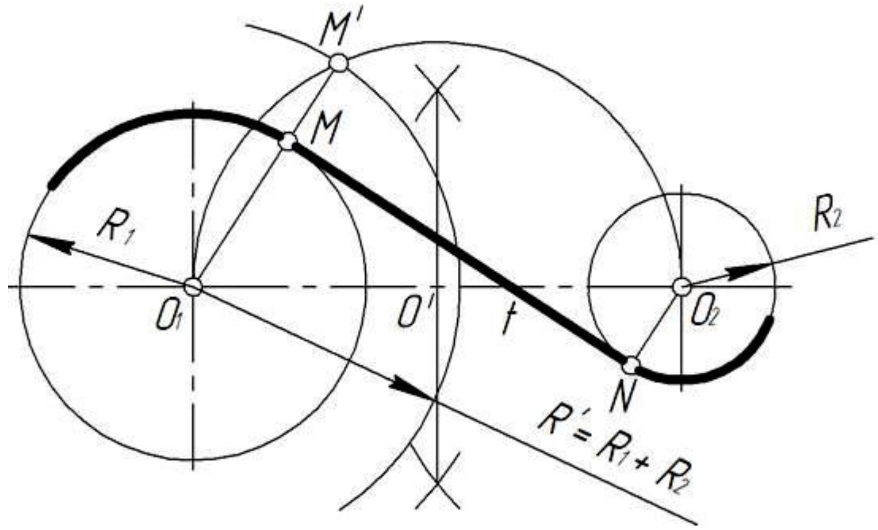


Рисунок 2.18 – Построение касательной к двум окружностям

2.3. Коробовые кривые

Коробовыми называются кривые, состоящие из взаимно сопрягающихся дуг окружностей различных диаметров. К таким кривым относятся овал, овоид, арки (составная, ползучая, Тюдора и др.).

Овал (рис. 2.19) представляет собой сопряжение двух дуг окружности радиуса R_1 с двумя дугами окружности радиуса R_2.

Часто при вычерчивании контуров овальных деталей, а также при выполнении их технических рисунков задаются не радиусы дуг, а величины большой и малой осей овала.

По двум перпендикулярным осям откладывают заданные длины осей овала: большой AB (по горизонтали) и малой CD (по вертикали).

Точки A и C – концы большой и малой осей, соединяют прямой AC. Из точки O дугой радиусом, равным длине большой полуоси, на продолжении малой оси получают точку K ($OA = OK$), а из точки C радиусом, равным CK, получают на прямой AC точку F ($CK = CF$). К отрезку AF проводят серединный перпендикуляр (построение приведено на рис. 2.1), который пересекает большую полуось AO в точке O_1 и малую полуось в точке O_2. Точка O_1 является центром сопрягаемой дуги радиуса $R_1 = AO_1$, а точка O_2 – центром сопрягающей дуги радиуса $R_2 = O_2C$. Правая половина овала вычерчивается аналогично.

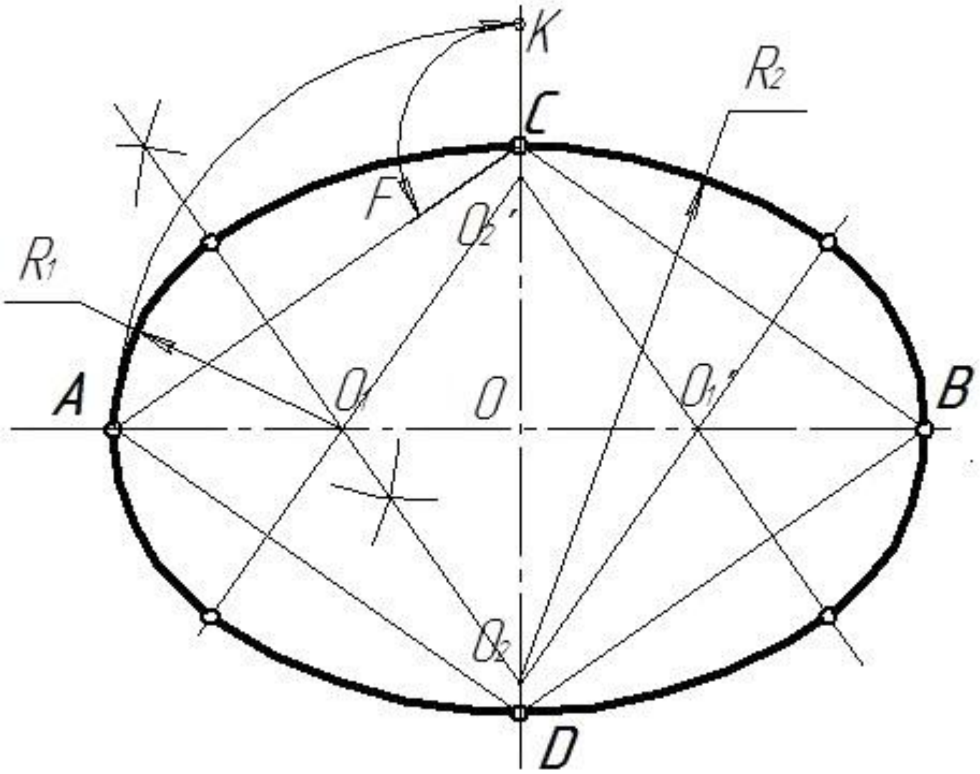


Рисунок 2.19 – Построение овала

Овоид в отличие от овала имеет только одну ось симметрии. Радиусы R и R_1 дуг окружностей, центры которых лежат на оси симметрии овоида, не равны друг другу. Способ построения овоида сходен со способом построения овала.

Построение овоида (рис. 2.20) по заданным величинам – радиусу окружности R и радиусу сопрягаемой дуги R_1 заключается в следующем. Проводят осевые линии, строят окружность заданного радиуса R. Определяют точку O_1, как точку пересечения окружности с осью симметрии овоида. Точки A и B соединяют с точкой O_1. Определяют центры O_2 заданного радиуса R_1 и описывают дуги окружности до пересечения в точках C и D на продолжении прямых BO_1 и AO_1. Из точки O_1 проводят третью, малую сопрягаемую дугу радиуса R_2 овоида, соединяющую точки C и D.

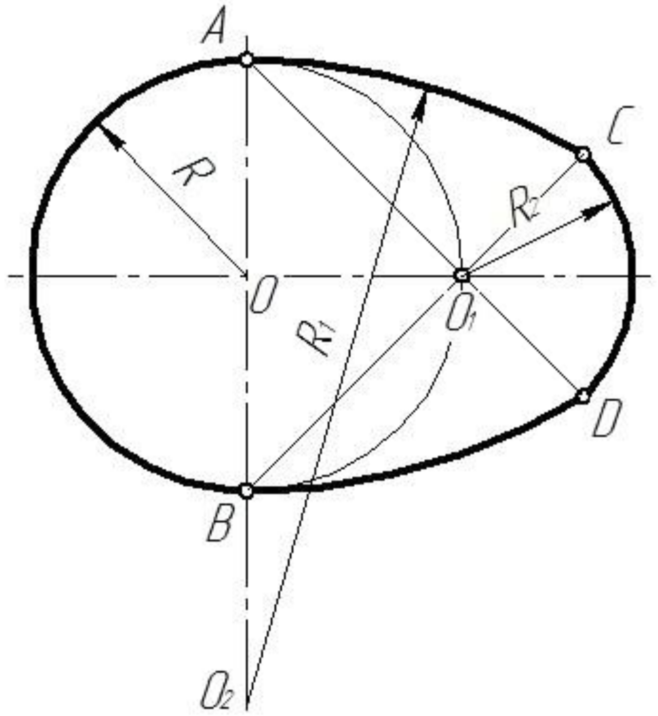


Рисунок 2.20 – Построение овоида

2.4. Лекальные кривые

Кривая, заданная множеством точек, представляющая ряд сопряженных отрезков кривых, которые невозможно построить с помощью циркуля, называется *лекальной кривой*.

Лекальные кривые – эллипс, парабола, гипербола, синусоида, спираль Архимеда, эвольвента, циклоидальные кривые и многие другие – имеют широкое применение в технике, так, например, профили зубьев цилиндрических, конических и винтовых зубчатых колес очерчивают или по эвольвенте окружности, или другим циклоидальным кривым. Особенно широко применяются в технике кривые второго порядка, к ним относятся конические сечения: окружность, эллипс, парабола и гипербола. Эти кривые являются образующими ряда поверхностей вращения (например, эллипсоида, параболоида), часто встречающихся в различных инженерных конструкциях. Поэтому необходимо изучить законы образования лекальных кривых и освоить приемы их построения.

Эллипс – замкнутая кривая, для которой сумма расстояний от любой ее точки до двух точек – фокусов эллипса, есть величина постоянная, равна большей оси эллипса.

Существует множество способов построения эллипса, основанных на его свойствах, рассмотрим наиболее простой – построение эллипса по большой *AB* и малой *CD* осям (рис. 2.21).

Проводят осевые линии, затем от центра *O* откладывают вверх и вниз по вертикальной оси отрезки *OC* и *OD*, равные длине малой полуоси, а влево и вправо по горизонтальной оси – отрезки *OA* и *OB*, равные длине большой полуоси.

Из центра *O* радиусами *OA* и *OC* проводят две концентрические окружности и ряд лучей-диаметров. Из точек пересечения лучей с окружностями проводят линии, параллельные осям эллипса, до взаимного пересечения в точках, образующих эллипс. Намеченную точками линию строят по лекалу.

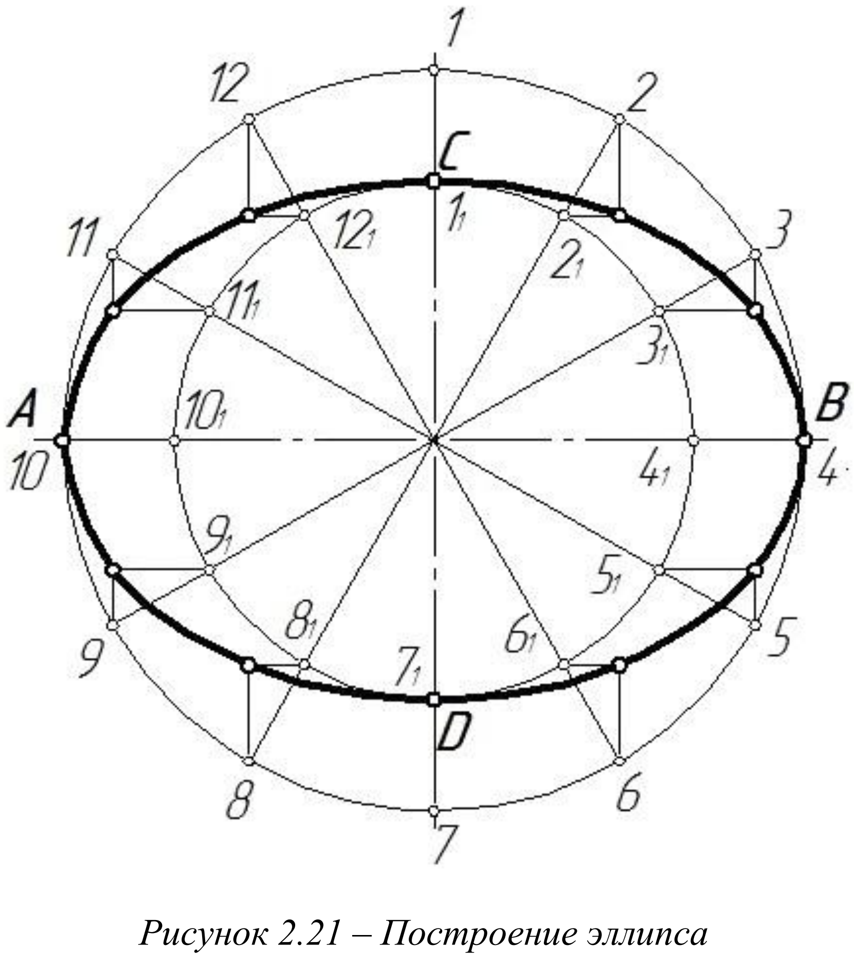


Рисунок 2.21 – Построение эллипса

Парабола – плоская кривая, каждая точка которой равноудалена от точки (фокуса), лежащей на оси симметрии, и прямой (направляющей – директрисы), перпендикулярной оси симметрии.

Способов *построения параболы* известно также несколько. Рассмотрим способ построения *по заданной вершине O, оси OC и точке B* (рис. 2.22).

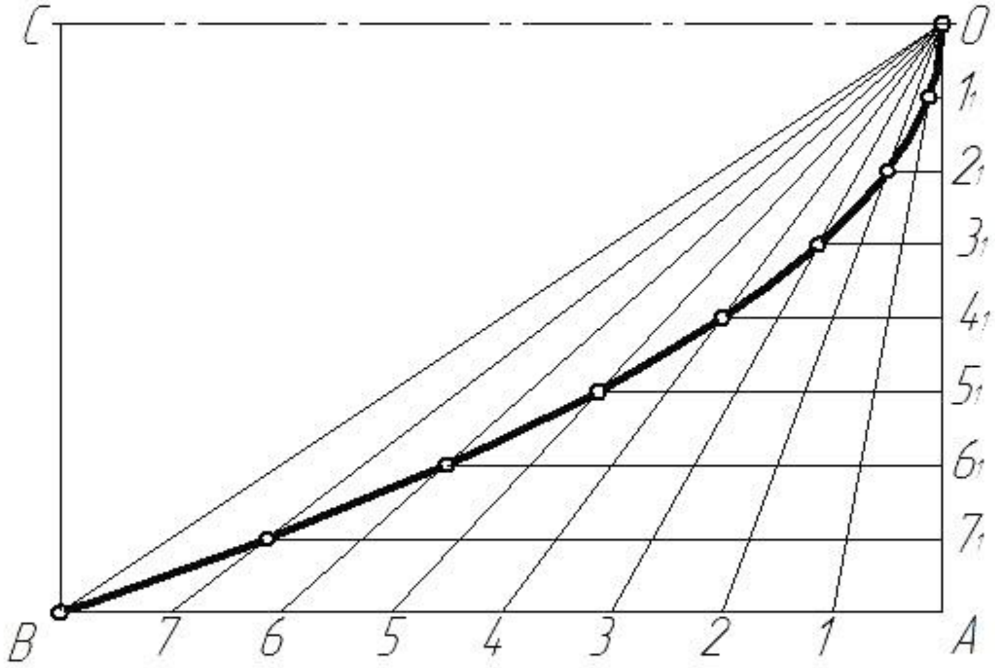


Рисунок 2.22 – Построение параболы

Строят вспомогательный прямоугольник *ABCD*. Стороны *AB* и *AO* делят на равные части и точки деления нумеруют. Горизонтальный ряд деления (на *AB*) соединяют лучами с вершиной *O*, а через точки деления, расположенные на *AO*, проводят линии, параллельные оси параболы. Точки пересечения горизонтальных прямых 1_1, 2_1, … , 7_1 с лучами *O1*, *O2*, … *O7* принадлежат параболе. Полученные точки параболы соединяют по лекалу.

Гипербола – плоская кривая, состоящая из двух разомкнутых, симметрично расположенных ветвей (рис. 2.23). Разность расстояний от каждой точки гиперболы до фокусов F и F_1 есть величина постоянная и равная расстоянию между вершинами *A* и *B*.

Рассмотрим способ построения гиперболы по заданному расстоянию между вершинами *AB* и фокусному расстоянию FF_1.

Проводят осевые линии, затем от центра *O*, разделив расстояние между вершинами *AB* и фокусное расстояние FF_1 пополам, откладывают влево и вправо по горизонтальной оси отрезки *OA* и *OB* и отрезки *OF* и OF_1. Слева от фокуса *F* произвольно берут ряд точек *1, 2, 3, 4*, …, постепенно увеличивая расстояние между ними. Из фокуса *F* описывают дугу вспомогательным радиусом R, равным, например, расстоянию от вершины B до точки 3. Из фокуса F_1 проводят вторую вспомогательную дугу радиусом R_1, равным расстоянию от вершины A до точки 3. На пересечении этих дуг находят точки C и C_1, принадлежащие гиперболе. Аналогично строятся остальные точки правой ветви гиперболы. Подобным образом строят левую ветвь гиперболы.

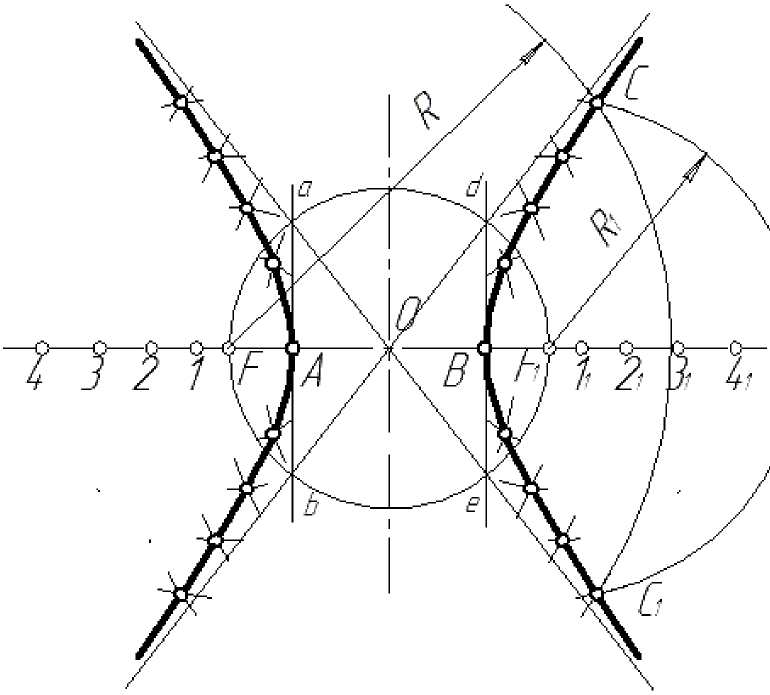


Рисунок 2.23 – Построение гиперболы

Вопросы для самопроверки

1. Что называется сопряжением?
2. Какие виды сопряжений Вы знаете?
3. Какая кривая называется лекальной?
4. Какие кривые относятся к лекальным?
5. Какая кривая называется циркульной?
6. Какие кривые относятся к циркульным?
7. В чем особенность построения коробовых кривых?
8. Что называется фокусом гиперболы?
9. Почему при построении лекальных кривых окружность рекомендуется разбивать на 12 частей?
10. Назовите примеры применения в чертежах деталей машиностроения коробовых, циркульных, лекальных кривых.
11. В чем разница между овалом и эллипсом, овалом и овоидом?
12. С какой целью выполняют сопряжения поверхностей?

3. ПРОЕЦИРОВАНИЕ ТОЧКИ

3.1. Виды проецирования

Одно из основных геометрических понятий – ***отображение множеств***. В начертательной геометрии каждой точке трехмерного пространства ставится в соответствие определенная точка двумерного пространства – плоскости. Геометрическими элементами отображения служат точки, линии, поверхности пространства. Геометрический объект, рассматриваемый как точечное множество, отображается на плоскость по закону проецирования. Результатом такого отображения является изображение объекта.

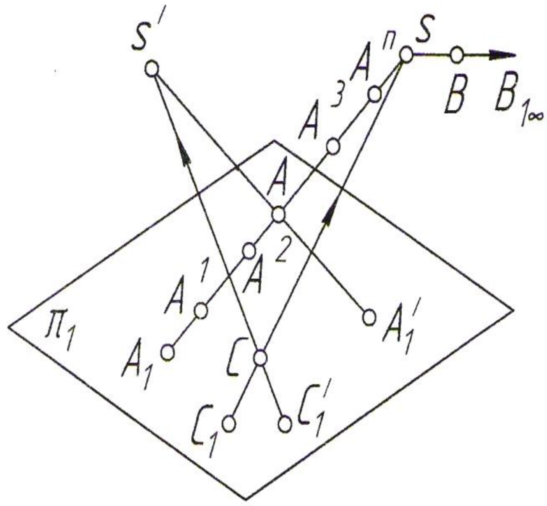


Рисунок 3.1 – Центральное проецирование

В основу любого изображения положена операция проецирования, которая заключается в следующем. В пространстве выбирают произвольную точку $\boldsymbol{S}$ (рис.3.1) в качестве ***центра проецирования*** и плоскость $\boldsymbol{\Pi}_\mathrm{i}$, не проходящую через точку $\boldsymbol{S}$, в качестве ***плоскости проекций*** (картинной плоскости). Чтобы спроецировать точку $\boldsymbol{A}$ на плоскость $\boldsymbol{\Pi}_\mathbf{i}$, через центр проецирования $\boldsymbol{S}$ проводят луч $\boldsymbol{SA}$ до его пересечения с плоскостью $\boldsymbol{\Pi}_\mathrm{i}$ в точке $\boldsymbol{A}_\mathbf{i}$. Точку $\boldsymbol{A}_\mathbf{i}$ принято называть ***центральной проекцией*** точки $\boldsymbol{A}$, а луч $\boldsymbol{SA}$ – ***проецирующим лучом.***

Описанные построения выражают суть операции, называемой ***центральным проецированием*** точек пространства на плоскость.

Проецируя точку пространства на плоскость, получают лишь одну ее центральную проекцию. В таких случаях говорят об однозначности изображения. Но центральной проекции соответствует множество точек пространства, расположенных на ее проецирующем луче. В этом заключается необратимость чертежа, выполненного по методу центрального проецирования на одну плоскость проекций. По центральной проекции невозможно реконструировать объект, определить его действительные размеры.

Совокупность проецирующих лучей образует коническую поверхность, поэтому центральное проецирование называют также коническим.

Центральное проецирование есть наиболее общий случай проецирования геометрических объектов на плоскости. Основными и неизменными его свойствами (инвариантами) являются следующие:

- проекция точки – точка;
- проекция прямой в общем случае – прямая;
- если точка принадлежит прямой, то проекция этой точки принадлежит проекции прямой.

Частным случаем центрального проецирования является ***проецирование параллельное***, когда центр проецирования удален в бесконечность, при этом проецирующие лучи можно рассматривать как параллельные проецирующие прямые. Положение проецирующих прямых относительно плоскости проекций определяется направлением проецирования ***s*** (рис. 3.2). В этом случае полученное изображение называют параллельной проекцией объекта.

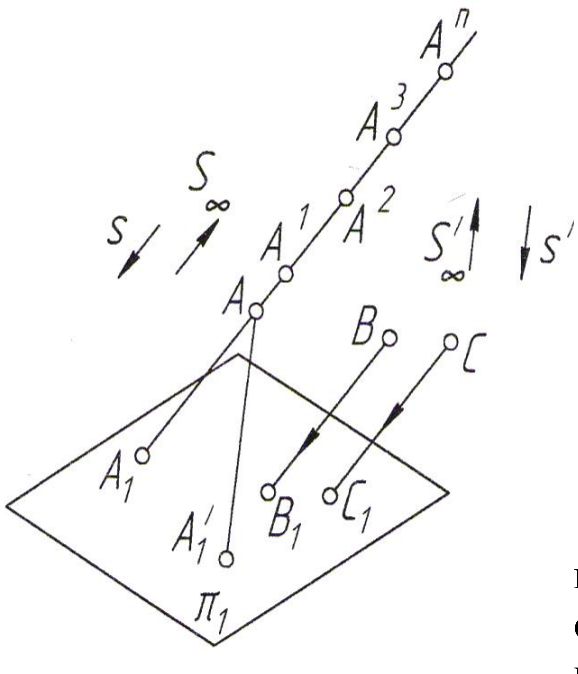


Рисунок 3.2 – Параллельное проецирование

При параллельном проецировании сохраняются свойства центрального и добавляются следующие:

- проекции параллельных прямых параллельны между собой;
- проекция отрезка прямой делится точкой в том же отношении, что и отрезок в пространстве;
- отношение длин отрезков двух параллельных прямых равно отношению длин их проекций.

Параллельные проекции разделяются на ***прямоугольные***, когда проецирующие прямые перпендикулярны плоскости проекций, и ***косоугольные,*** когда направление проецирования образует с плоскостью проекций угол, не равный 90°.

Таким образом, ***ортогональное*** (прямоугольное) проецирование является частным случаем параллельного, и полученная этим методом проекция объекта называется ***ортогональной***.

Ортогональному проецированию присущи все свойства параллельного и центрального проецирования.

При параллельном проецировании проецирующие лучи образуют цилиндрическую поверхность, поэтому такое проецирование называют цилиндрическим. Как и при центральном проецировании, параллельные проекции однозначны, но необратимы.

3.2. Эпюр Монжа

Изложенный Монжем метод ортогонального проецирования, в котором рассматриваются две проекции на две взаимно перпендикулярные плоскости проекций, обеспечивая выразительность, точность и удобоизмеримость изображений предметов на плоскости, был и остается основным методом составления технических чертежей. Чертеж в этом случае называют ***двухкартинным*** или ***комплексным.***

Чтобы получить плоский чертеж, состоящий из указанных проекций, плоскость Π_1 совмещают вращением вокруг оси x с плоскостью Π_2. Проекционный чертеж, на котором плоскости проекций со всем тем, что на них изображено, совмещены определенным образом одна с другой, называется ***эпюром*** (франц. epure – чертеж). Эпюр часто называют эпюром Монжа.

В начертательной геометрии под ***точкой*** понимается физический объект, имеющий линейные измерения. При построении проекции необходимо помнить, что ортогональной проекцией точки на плоскость является основание перпендикуляра, опущенного из данной точки на эту плоскость. На рисунке 3.3 показана точка A и ее ортогональные проекции A_1 и A_2. A_1 называют горизонтальной проекцией точки A, A_2 – ее фронтальной проекцией. ***Проекции точек всегда расположены на прямых, перпендикулярных оси x и пересекающих эту ось в одной и той же точке***.

На эпюре Монжа проекции A_1 и A_2 окажутся расположенными на одном перпендикуляре к оси x. При этом расстояние A_1A_x – от горизонтальной проекции точки до оси, равно расстоянию от самой точки A до плоскости Π_2, а расстояние A_2A_x – от фронтальной проекции точки до оси, равно расстоянию от самой точки A до плоскости Π_1.

Прямые линии, соединяющие разноименные проекции точки на эпюре, называются ***линиями проекционной связи.***

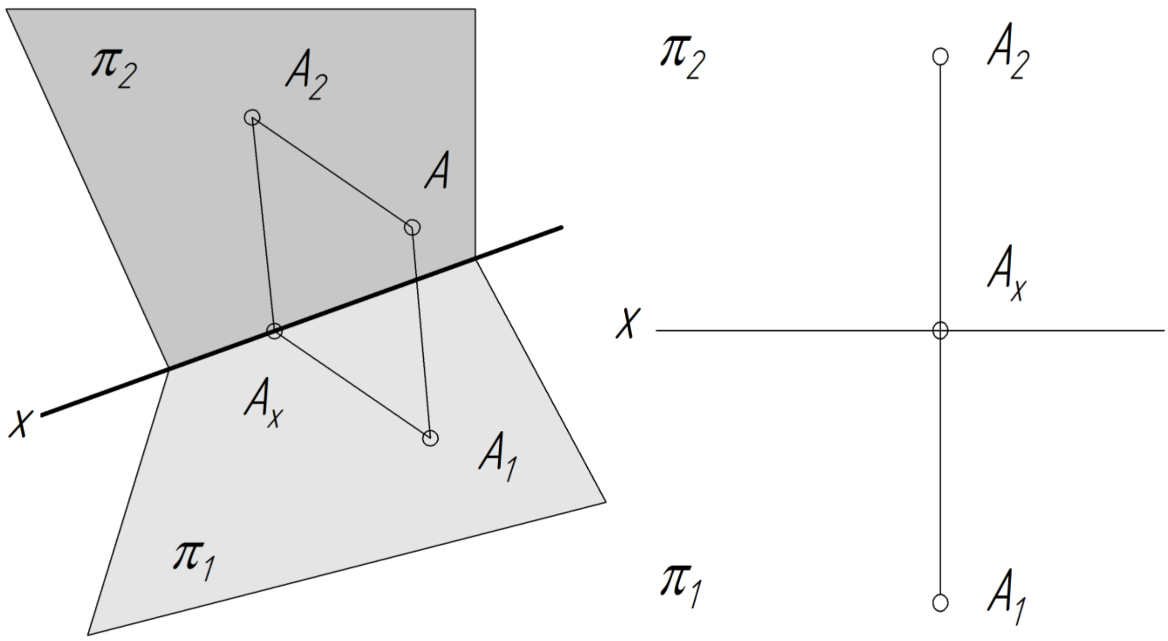


Рисунок 3.3 – Точка в системе двух плоскостей проекций

3.3. Проецирование точки на три плоскости проекций

Геометрический объект любой сложности можно рассматривать как геометрическое место точек, по взаимному расположению которых можно составить представление об объекте, а по расположению их относительно системы координат можно судить о положении его в пространстве.

В практике изображения различных геометрических объектов, чтобы сделать проекционный чертеж более ясным, возникает необходимость использовать третью – профильную плоскость проекций Π_3, расположенную перпендикулярно к Π_1 и Π_2, к горизонтальной и фронтальной. В соответствии с ГОСТ 2.305-2008 плоскости проекций Π_1, Π_2 и Π_3 относятся к основным плоскостям проекций. Модель трех плоскостей проекций показана на рисунке 3.4.

Координатами называют числа, которые ставят в соответствие точке для определения ее положения в пространстве или на поверхности. В трехмерном пространстве положение точки устанавливают с помощью прямоугольных декартовых координат x, y и z (абсцисса, ордината и аппликата). В Европе принята правая система координат, в которой ось абсцисс распространяется влево от начала координат.

Если точка принадлежит хотя бы одной плоскости проекций, она занимает ***частное*** положение относительно плоскостей проекций. Если же точка не принадлежит ни одной из плоскостей проекций, она занимает ***общее*** положение.

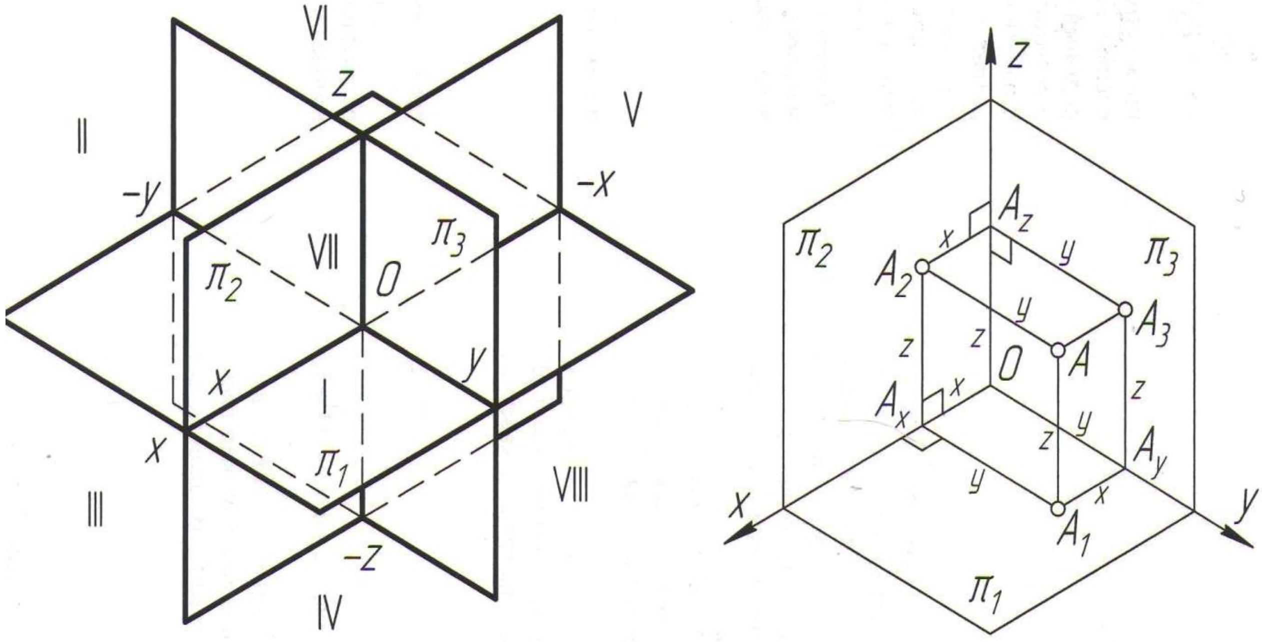


Рисунок 3.4 – Точка в системе трех плоскостей проекций

3.4. Взаимное расположение точек

Можно выделить два основных варианта взаимного расположения точек.

Первый вариант – если расположение точек относительно друг друга можно описать, используя понятия «ближе», «дальше», «выше», «ниже», «левее», «правее».

Пусть точки *A* и *B* (рис. 3.5) расположены в первой четверти так, что:

$Y_A > Y_B$, тогда точка *A* расположена дальше от плоскости Π_2 и ближе к наблюдателю, чем точка *B*;

$Z_A > Z_B$, тогда точка *A* расположена дальше от плоскости Π_1, то есть выше, чем точка *B*;

$X_A < X_B$, тогда точка *B* расположена дальше от плоскости Π_3, то есть левее точки *A*.

По второму варианту у точек равны две одноименные координаты. Такие точки называются ***конкурирующими***. Соответствующие проекции конкурирующих точек совпадают. На рисунке 3.6 даны три пары таких точек, у которых:

$X_A = X_D$, $Y_A = Y_D$, $Z_A > Z_D$;

$X_A = X_C$, $Z_A = Z_C$, $Y_A > Y_C$;

$Y_A = Y_B$, $Z_A = Z_B$, $X_A > X_B$.

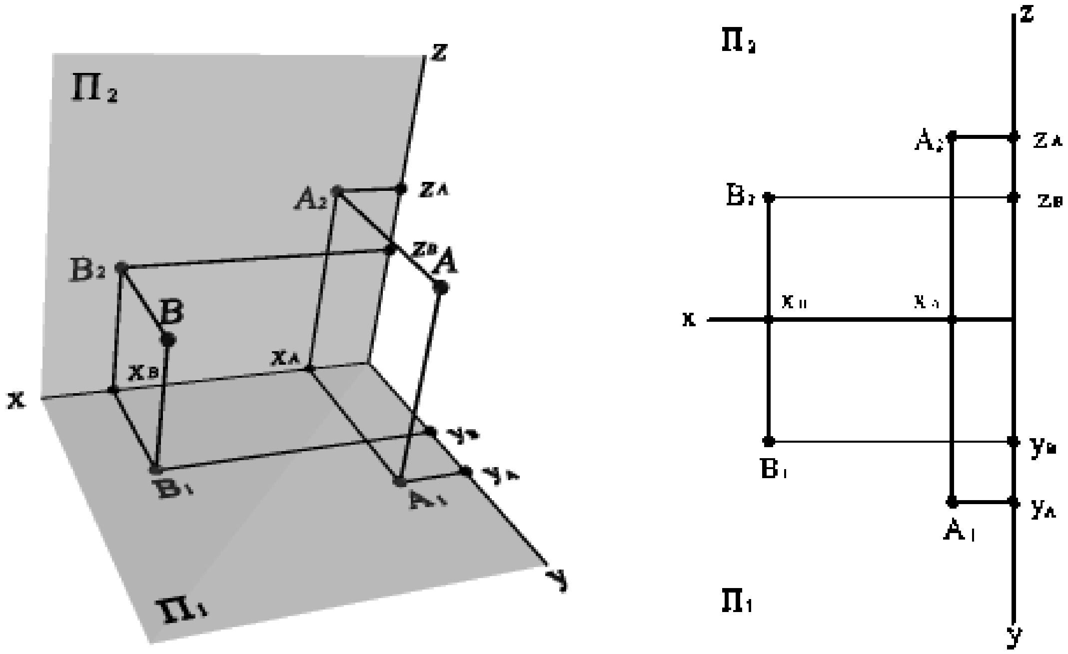


Рисунок 3.5 – Взаимное расположение точек

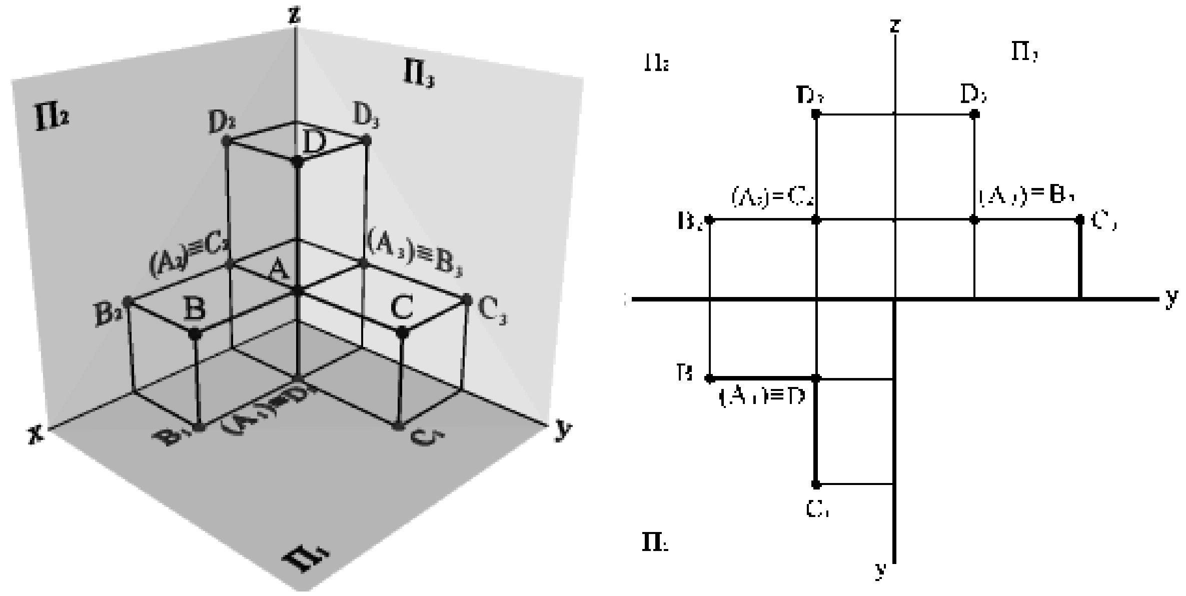


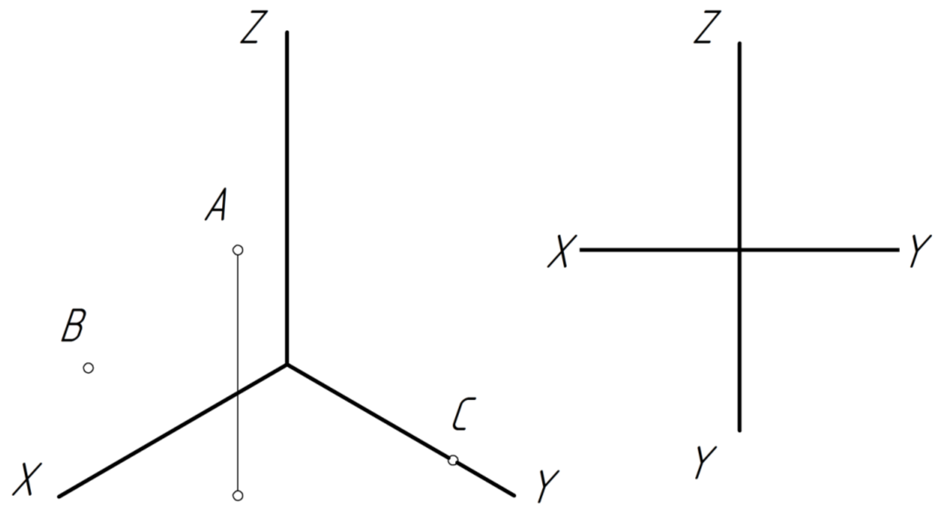
Рисунок 3.6 – Конкурирующие точки

Различают ***горизонтально конкурирующие*** точки *A* и *D*, расположенные на горизонтально проецирующей прямой *AD*; ***фронтально конкурирующие*** точки *A* и *C*, расположенные на фронтально проецирующей прямой *AC*; ***профильно конкурирующие*** точки *A* и *B*, расположенные на профильно проецирующей прямой *AB*. При проецировании на соответствующую плоскость проекций одна точка «закроет» другую точку, конкурирующую с ней, соответствующая проекция которой окажется невидимой.

Примеры решения задач

Пример 3.1.

Задание: по наглядному изображению точек *A*, *B* и *C* (рис. 3.7, *а*) определить их координаты, показать три проекции и построить комплексный чертеж точек (рис. 3.7, *б*). Учесть, что точка *A* находится в первом квадранте (X_A>0, Y_A >0, Z_A >0), точка *B* расположена на фронтальной плоскости проекций (Y_B=0) и точка *C* находится на фронтальной и горизонтальной плоскостях проекций (X_C =0, Z_C =0).

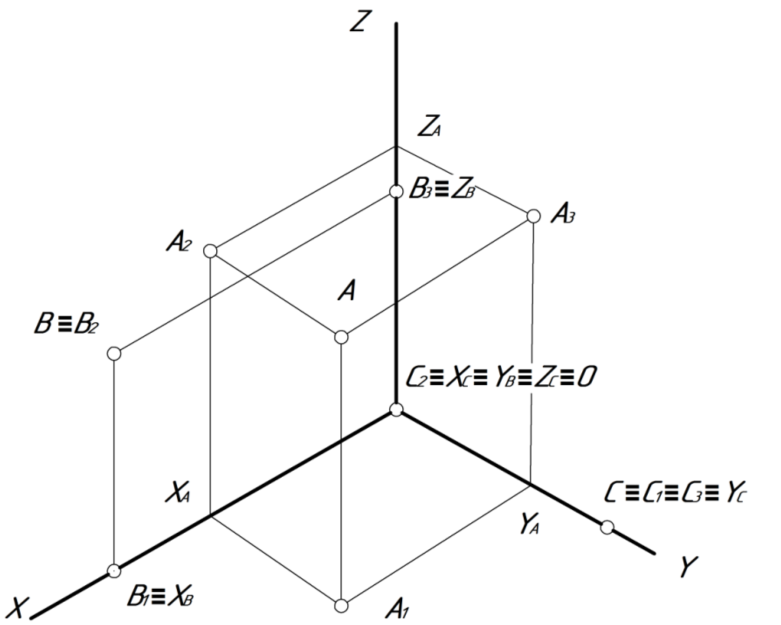


а *б*

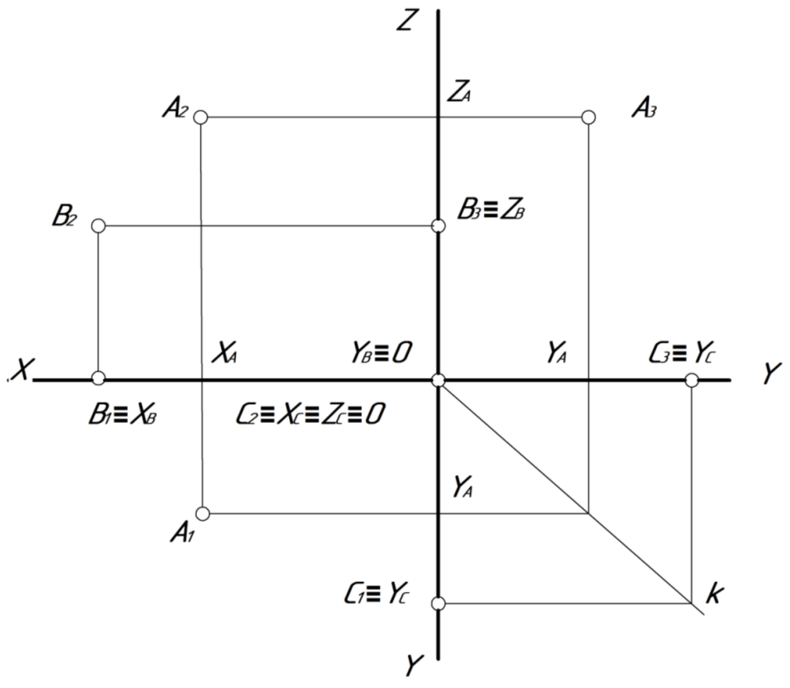
Рисунок 3.7. – Задание для примера 3.1

Решение: на наглядном изображении (рис. 3.8, *а*) для каждой точки проводим линии, параллельные координатным осям, и находим проекции точек на плоскостях проекций. Получаем изображения координат точки: на *горизонтальной плоскости проекций* $П_1$ – *X* и *Y*; на *фронтальной плоскости проекций* $П_2$ – *X* и *Z*; на *профильной плоскости проекций* $П_3$ – *Y* и *Z*. Для точки *A* строим параллелепипед и показываем три проекции точки. Точка *B* находится на фронтальной плоскости проекций, а это значит, что Y_B=0. Тогда горизонтальная проекция точки будет на оси *x*, а профильная – на оси *z*. Так как точка *C* расположена на горизонтальной и профильной плоскостях проекций, то она принадлежит линии пересечения этих плоскостей, то есть расположена на оси *y*. Горизонтальная и профильная проекции точки располагаются там же. Фронтальная проекция точки *C* лежит в начале координат, поскольку X_C=Z_C=0 (рис. 3.8, *а*).

На наглядном изображении (рис. 3.8, *а*) показываем координаты точек и измеряем их значения. Откладываем соответствующие координаты на *комплексном чертеже* (рис. 3.8, *б*).



а



б

Рисунок 3.8 – Решение примера 3.1

Пример 3.2.

Задание: даны точки: *A* (30, 20, 10), *B* (40, -25, 50), *C* (10, 50, 0), *D* (0, 0, 0). Определить (по значениям координат) правую, левую, высшую, низшую, ближайшую и наиболее удаленную точки.

Решение:

правая – *D*, так как ее координата *x* наименьшая;

левая – *B*, так как ее координата *x* наибольшая;

высшая – *B*, так как ее координата *z* наибольшая;

низшие – *C*, *D*, так как их координата *z* наименьшая;

ближайшая – *C*, так как ее координата *y* наибольшая;

наиболее удаленная – *B*, так как ее координата *y* наименьшая.

Пример 3.3.

Задание: определить положение точек друг относительно друга на рисунке 3.9.

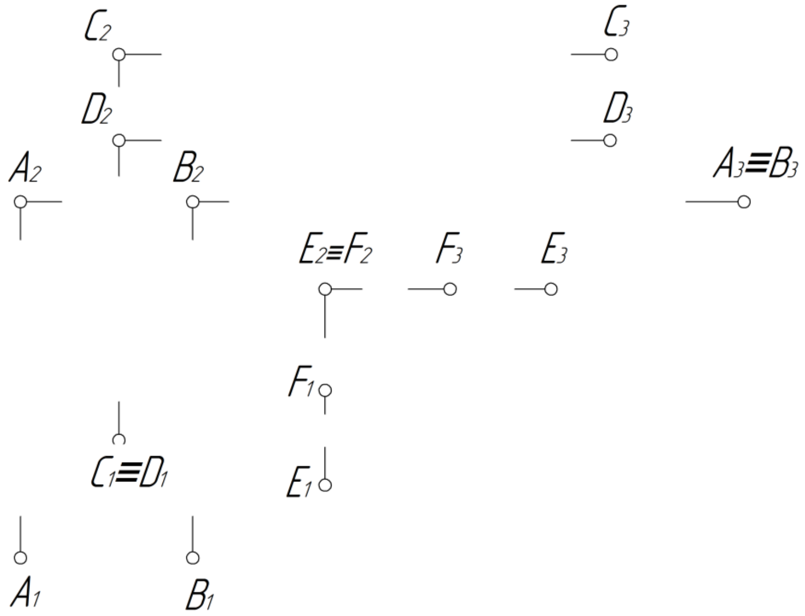


Рисунок 3.9 – Пример 3.3

Решение: по фронтальной или профильной проекциям определяем, что самая высшая точка – *C*, а низшие точки – *E* и *F*.

По горизонтальной или фронтальной проекциям определяем, что самые правые точки *E* и *F*, а левая – точка *A*.

Ближайшие точки определяем по самым низшим проекциям на горизонтальной плоскости проекций или на профильной проекции – самые правые проекции точек *A* и *B*. Наиболее удаленной точкой на горизонтальной проекции будет точка, проекция которой располагается выше всех горизонтальных проекций, или точка, проекция которой на профильной плоскости проекций будет самой левой – точка *F*.

Построение третьей проекции точки по двум известным проекциям становится возможным двумя способами, если учесть, что две проекции точки всегда характеризуются тремя координатами: *X*, *Y* и *Z*.

Аналитический способ – определение координаты точки по двум известным проекциям; по известным координатам точки надо построить третью проекцию.

Графический способ решения рассмотрен на примере 3.4.

Пример 3.4.

Задание: построить третью проекцию точек *A* и *B* по двум из известных проекций (рис. 3.10, *а*).

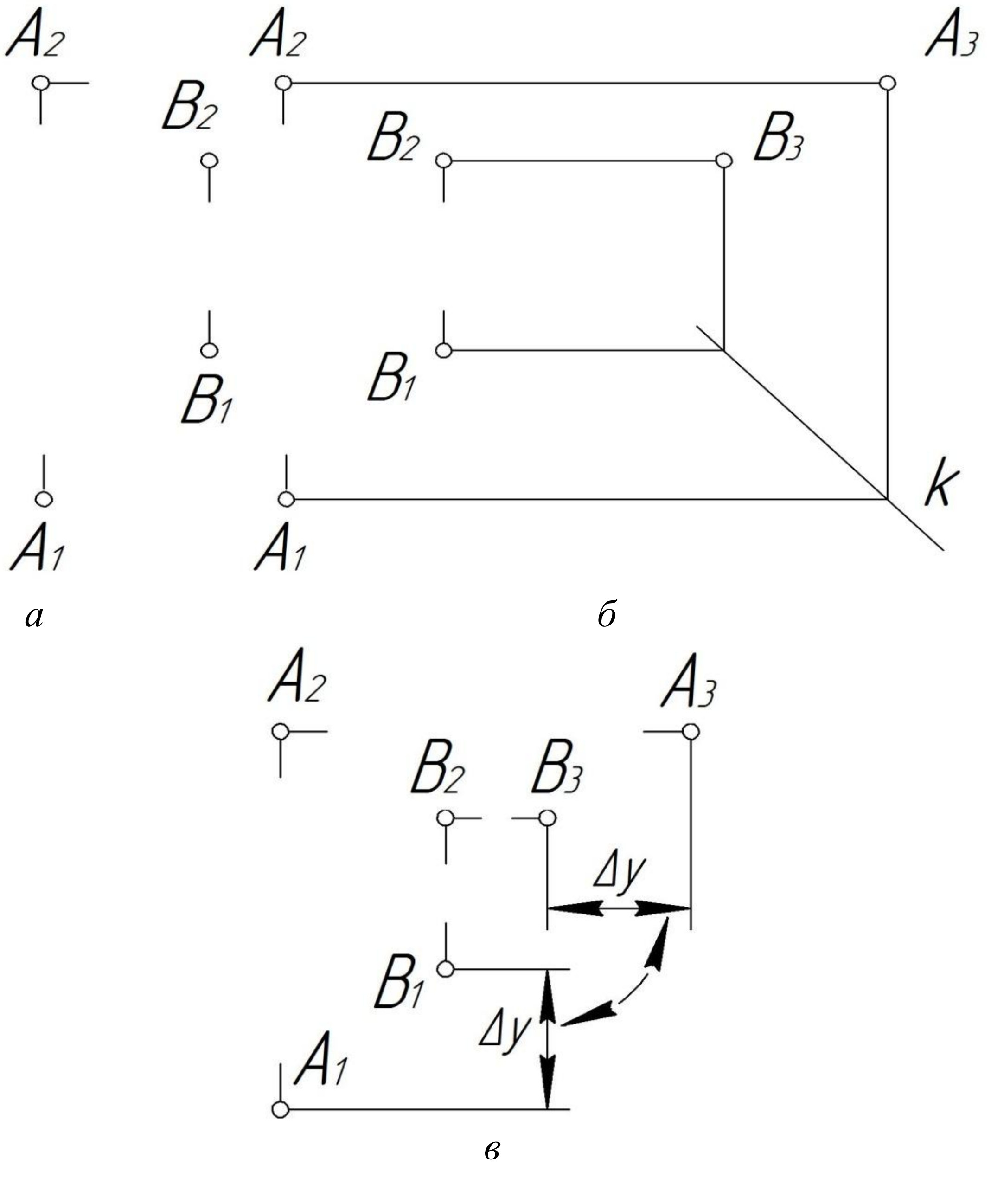


Рисунок 3.10 – Решение примера 3.4

Решение: на рисунке 3.10, *б* показано построение профильных проекций точек *A* и *B*. Первоначально определяем положение профильных проекций друг относительно друга. Так как точка *A* ближе точки *B* (на горизонтальной плоскости проекций проекция точки *A* ниже точки *B*), то профильная проекция первой точки будет правее второй. Поэтому построение начинаем с профильной проекции *B* (располагаем на линии связи $B_2 - B_3$ на свободном месте чертежа). Построим ломаную линию B_1B_3, проведя вертикальную линию из точки B_3 и горизонтальную линию из точки B_1. Через вершину ломаной линии проводим постоянную прямую k под углом 45°. С ее помощью определяем положение профильной проекции точки A.

Другой способ построения третьей проекции по двум известным показан на рисунке 3.10, *в*. Как и ранее, сначала показываем профильную проекцию точки B_3. Далее откладываем разность ординат точек A и B ($\Delta y = |y_A - y_B|$) вдоль линии связи $A_2 - A_3$.

Пример 3.5.

Задание: показать на комплексном чертеже точки A (30, 9, 10), B и C (19, -10, 18). Учесть, что точка B фронтально конкурирует с точкой A и не видна. Причем последняя левее точки C на 11 мм, ниже на 8 мм и ближе на 19 мм. Расстояние между точками A и B равно 9 мм.

Решение: для того чтобы начать построение, необходимо определить габариты чертежа – высоту и ширину. Для размера высоты необходимо учесть координаты Z и Y. Максимальная аппликата будет у точки C – Z_C =18 мм. Учитывая максимальную ординату у точки A – Y_A = 9 мм и то, что ордината точки B меньше, так как она располагается дальше, чем точка A, получим минимальный габаритный размер чертежа по высоте: Z_C+Y_A=27 мм. Допустим, что высота листа больше, чем полученный минимальный размер. Тогда построение можно начинать либо с фронтальной проекции точки C (наивысшая точка), либо с горизонтальной проекции точки A. Учитывая, что точка A самая левая точка, приходим к выводу, что построение удобнее начинать именно с этой точки, так как на чертеже она будет самая левая и нижняя.

На рисунке 3.11 начало координат для каждой плоскости проекций не показано, но следует учесть, что здесь начала координат для каждой плоскости проекций не совпадают, то есть фронтальная плоскость проекций смещена по вертикали, а профильная – по горизонтали.

Построение горизонтальных проекций точек выполним в следующей последовательности. Обозначим положение проекции точки A – A_1 (см. рис. 3.11). Показываем вертикальную линию связи. Так как точки A и B фронтально конкурирующие, то они имеют одинаковые координаты Z и X, а значит, располагаются на одной вертикальной линии связи. Учитывая, что точки имеют одинаковую высоту (одинаковая аппликата), расстояние между этим точками будет равно разности ординат – $\Delta Y = 9$ мм. Выше на 9 мм проекции точки A показываем проекцию точки B – B_1. Проекция точки C выше проекции точки A на $\Delta Y = Y_A - Y_C = 9 - (-10) = 19$ мм и правее на $\Delta X = X_A - X_C = 30 - 19 = 11$ мм, что и показываем на чертеже.

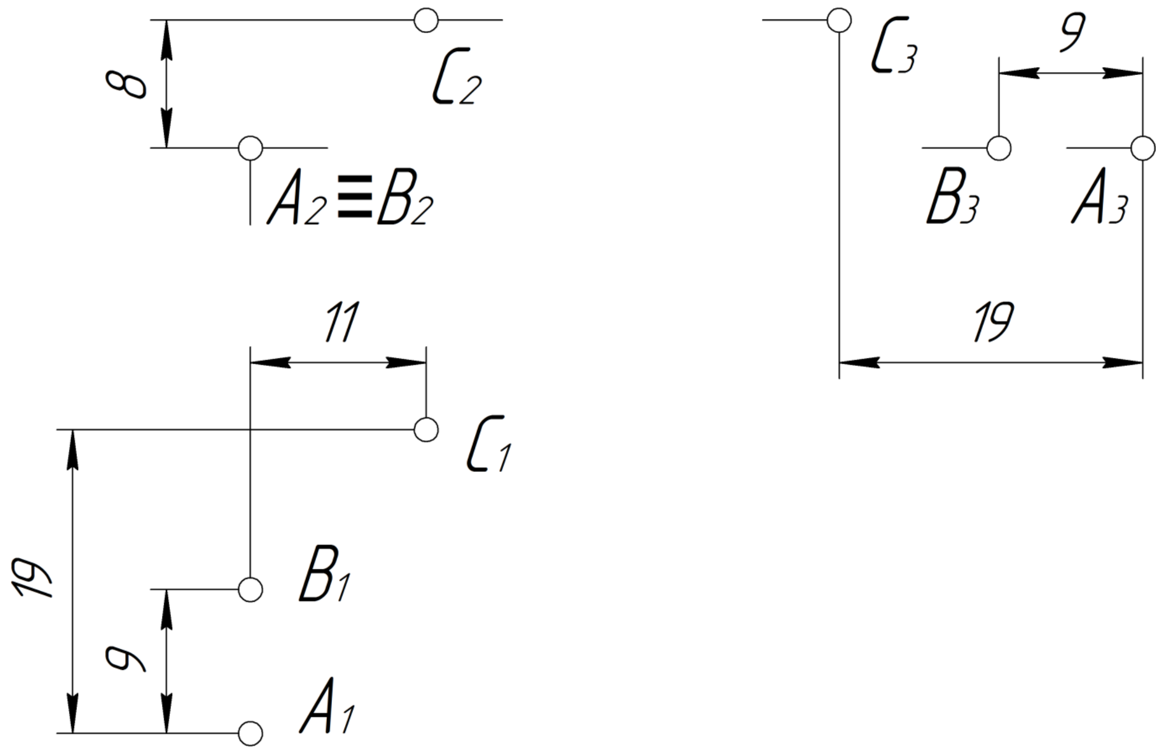


Рисунок 3.11 – Решение примера 3.5

При построении фронтальных проекций точек будем исходить из того, что на фронтальной плоскости проекций самой низшей точкой будет точка A, и построение начинаем именно с этой точки. На вертикальной линии связи этой точки произвольно, учитывая габариты по высоте и размер поля чертежа, показываем положение проекции точек A и B (фронтально конкурирующие точки – проекции совпали). На вертикальной линии связи точки C выше проекции точки A_2 на расстоянии $\Delta Z = Z_C - Z_A = 18 - 10 = 8$ мм показываем фронтальную проекцию точки C – C_2.

Для построения профильных проекций точек проводим горизонтальные линии связи. Начинаем построение с самой дальней точки, так как на профильной проекции самая левая проекция будет у той точки, которая находится дальше всех. Для нашей задачи (определяем по горизонтальной проекции) это будет точка C. На ее горизонтальной линии связи показываем проекцию точки C – C_3. При этом необходимо учесть, что чертеж будет правее – на расстоянии от самой ближней до самой дальней точки чертежа. В данном случае – $\Delta Y = Y_A - Y_C = 19$ мм. На горизонтальной линии связи точек A и B правее профильной проекции точки C откладываем это расстояние и показываем проекцию точки $A - A_3$. На этой же линии связи левее проекции точки A_3 (так как точка A ближе точки C) откладываем 9 мм и отмечаем проекцию точки $B - B_3$.

Следует отметить, что при решении задачи система координат не показывалась, так как в этом отсутствует необходимость.

Вопросы для самопроверки

1. Как называются плоскости $П_1$, $П_2$, $П_3$?
2. Что называется осью проекций?
3. Что называется эпюром точки?
4. Какой чертеж называется однозначным и обратимым?
5. Каков алгоритм построения 3-й проекции точки?
6. Объяснить сущность центрального проецирования.
7. Что такое параллельное проецирование?
8. Привести примеры косоугольного и ортогонального проецирования.
9. Перечислить инварианты ортогонального проецирования.
10. Каковы преимущества ортогонального проецирования перед центральным и параллельным проецированием?
11. Какие элементы определяют аппарат центрального, и какие – параллельного проецирования?
12. Какие свойства геометрических тел называются инвариантными?
13. Какое условие положения плоскостей проекций необходимо соблюдать для получения однозначных и обратимых изображений на чертеже?
14. Что такое ортогональное проецирование точки?
15. Как обозначаются проекции точки на три основные плоскости проекций?
16. Какие координаты определяют положение горизонтальной, фронтальной и профильной проекций точки относительно начала координат?
17. Какие точки называются конкурирующими?
18. Какие плоскости проекций относятся к основным?

4. ПРЯМАЯ

Прямая – одно из основных понятий геометрии, которые не могут быть определены с помощью других, более простых понятий. Если основой построения геометрии служит понятие расстояния между двумя точками пространства, то прямую можно определить как линию, вдоль которой расстояние между двумя точками является кратчайшим.

Рассмотрим две точки в пространстве *A* и *B* (рис. 4.1). Соединив эти точки прямой линией, получим отрезок [*BA*]. Для того чтобы найти проекции этого отрезка на плоскости проекций, необходимо найти проекции точек *A* и *B* и соединить их прямой.

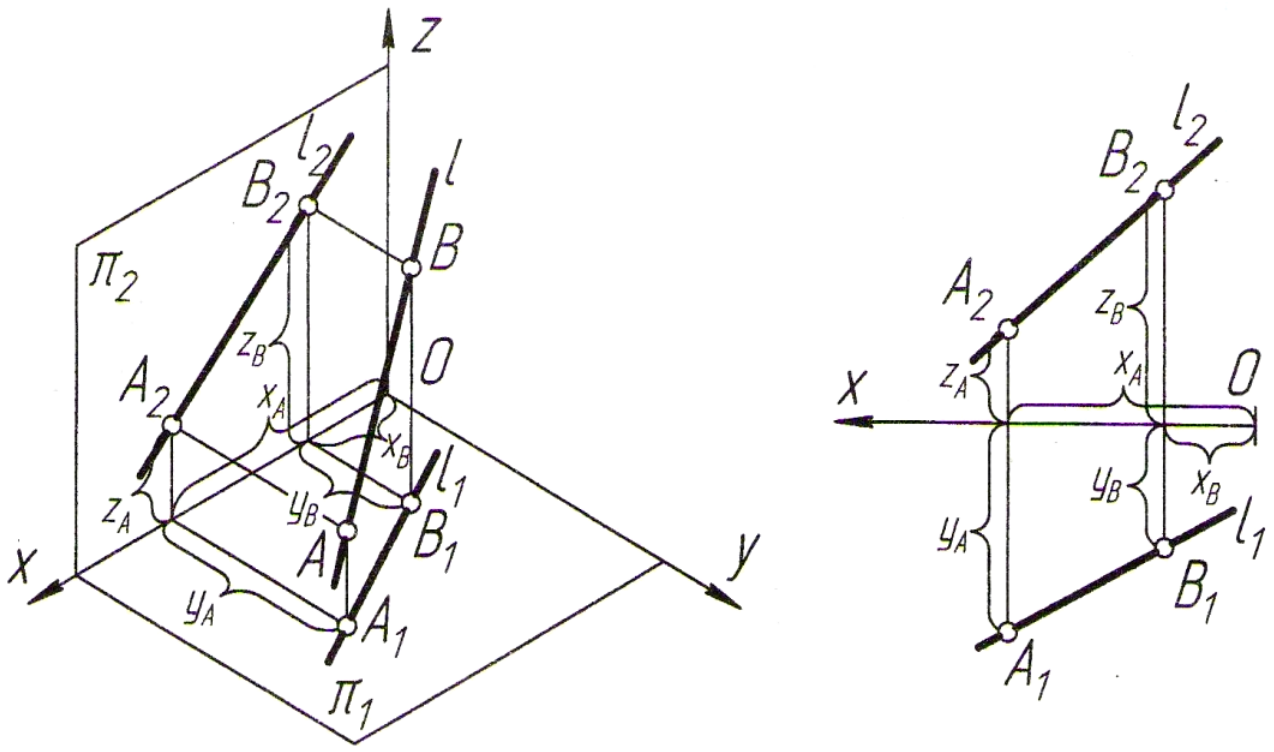


Рисунок 4.1 – Определение положения прямой по двум точкам

4.1. Положение прямой относительно плоскостей проекций

Прямой ***общего положения*** называется прямая, не параллельная и не перпендикулярная ни одной из плоскостей проекций (см. рис. 4.1). Различают ***восходящую*** и ***нисходящую*** прямые. Первая по мере удаления от зрителя поднимается, вторая – снижается.

Прямыми ***частного положения*** называются прямые, параллельные или перпендикулярные плоскостям проекций.

Прямые, параллельные плоскостям проекций, называются ***прямыми уровня***. Каждая из них проецируется на параллельную ей плоскость проекций без искажения.

Прямые, перпендикулярные плоскостям проекций, называются ***прямыми проецирующими***.

Прямые уровня:

1. Прямые, параллельные горизонтальной плоскости проекций, называются ***горизонтальными прямыми уровня*** или ***горизонталями*** (рис. 4.2).

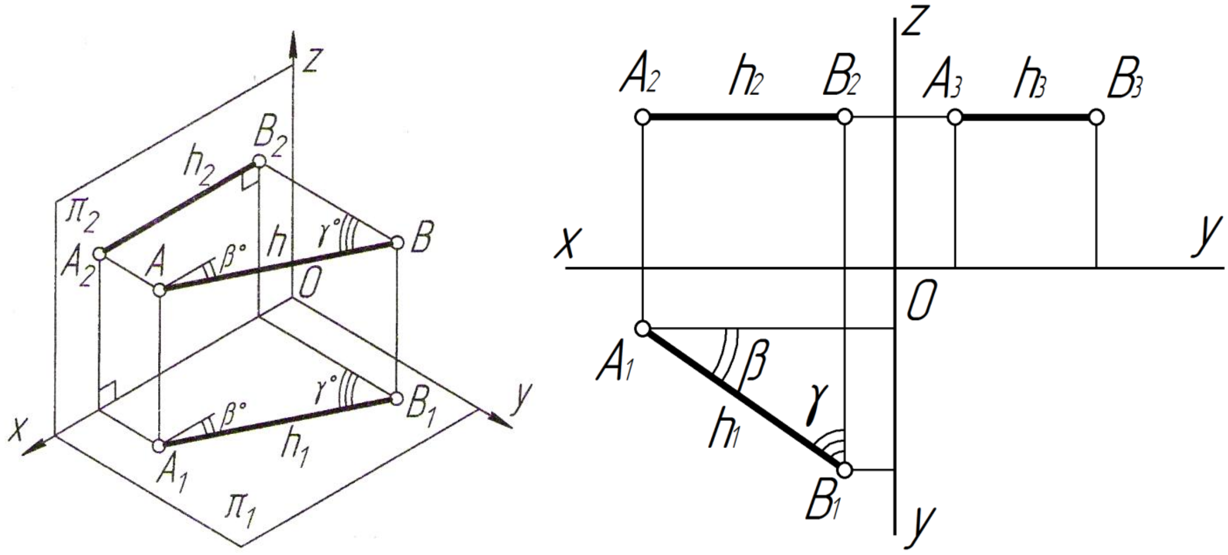


Рисунок 4.2 – Горизонтальная прямая уровня

2. Прямые, параллельные фронтальной плоскости проекций, называются ***фронтальными прямыми уровня*** или ***фронталями*** (рис. 4.3).

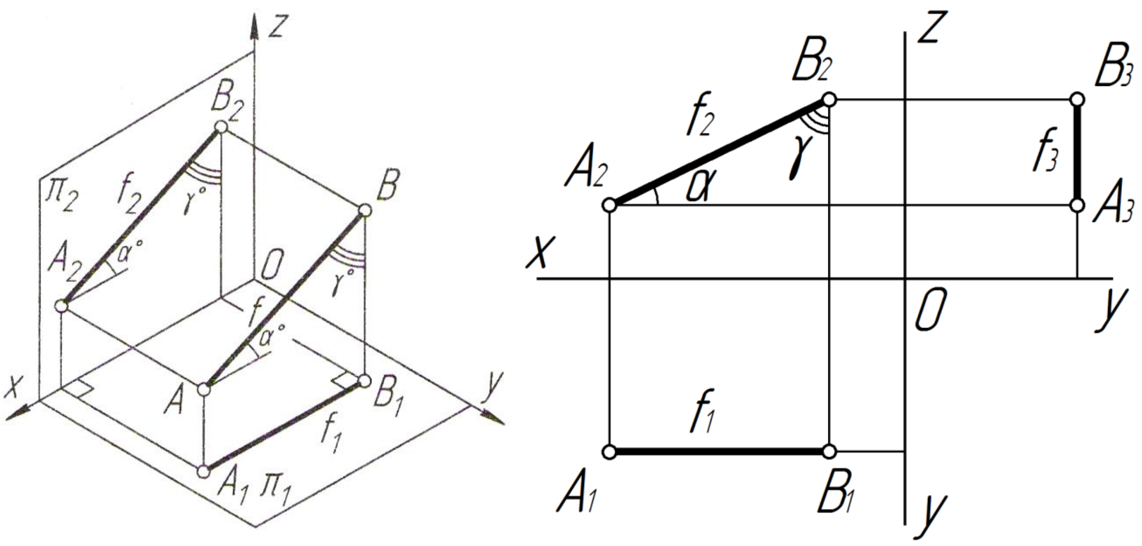


Рисунок 4.3 – Фронтальная прямая уровня

3. Прямые, параллельные профильной плоскости проекций, называются ***профильными прямыми уровня*** (рис. 4.4).

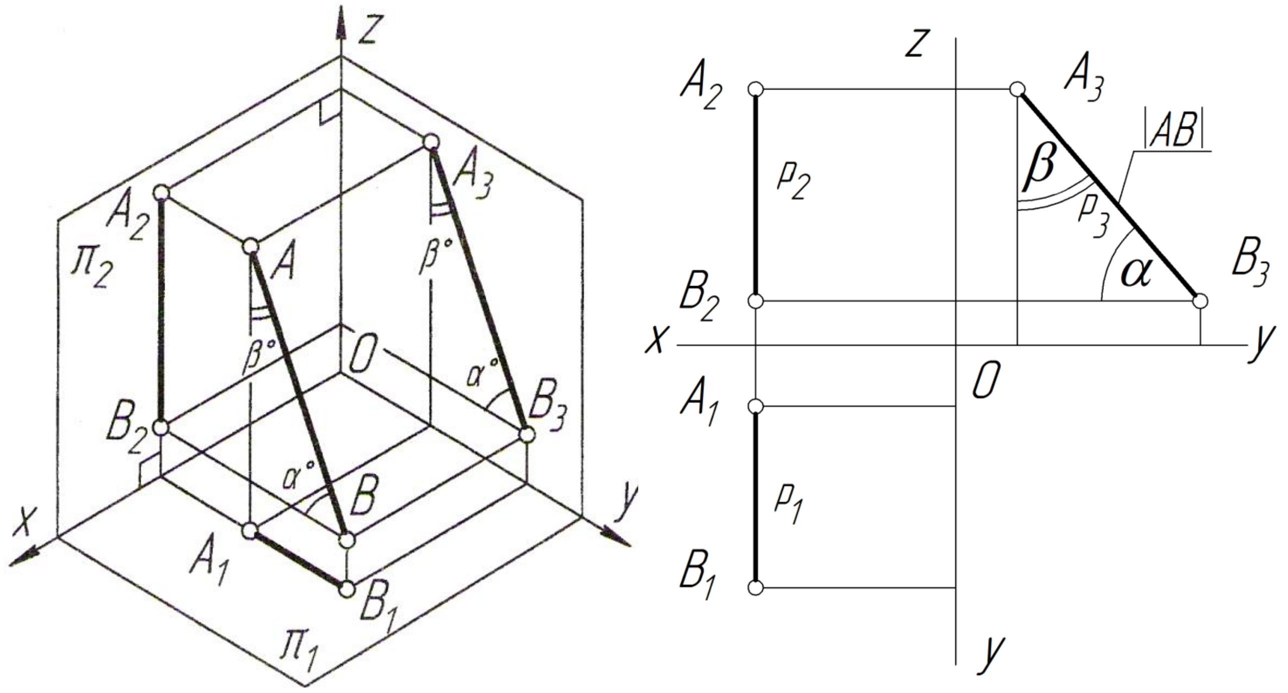


Рисунок 4.4 – Профильная прямая уровня

Прямые проецирующие:

1. ***Фронтально проецирующая*** прямая – прямая, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций (рис. 4.5).

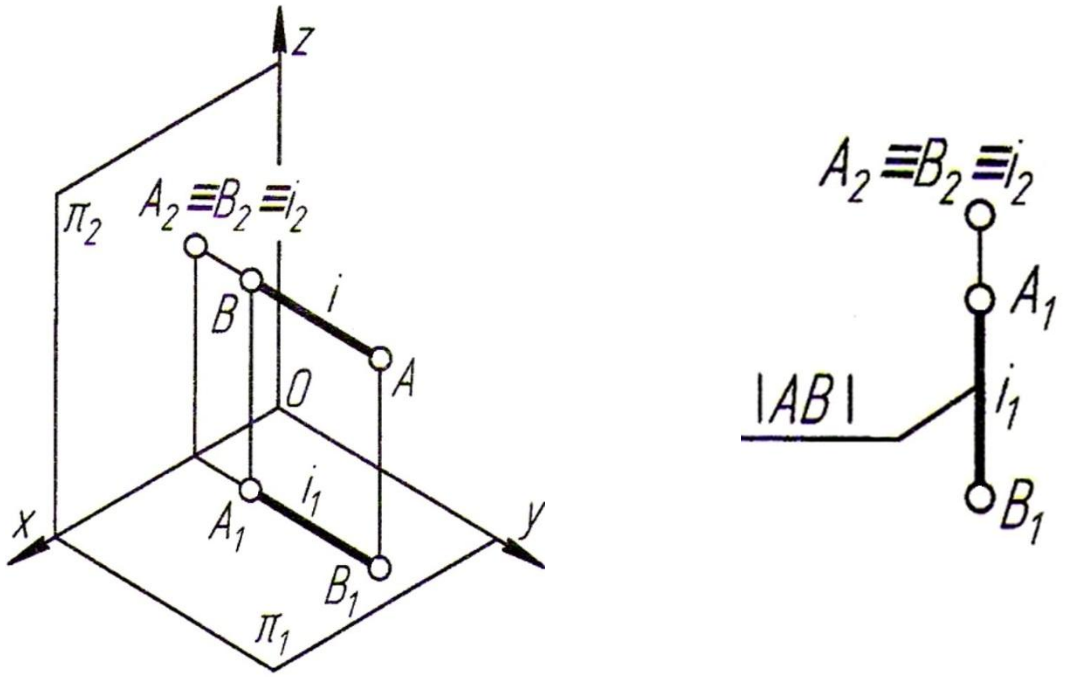


Рисунок 4.5 – Фронтально проецирующая прямая

2. ***Горизонтально проецирующая*** прямая – прямая, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций (рис. 4.6).

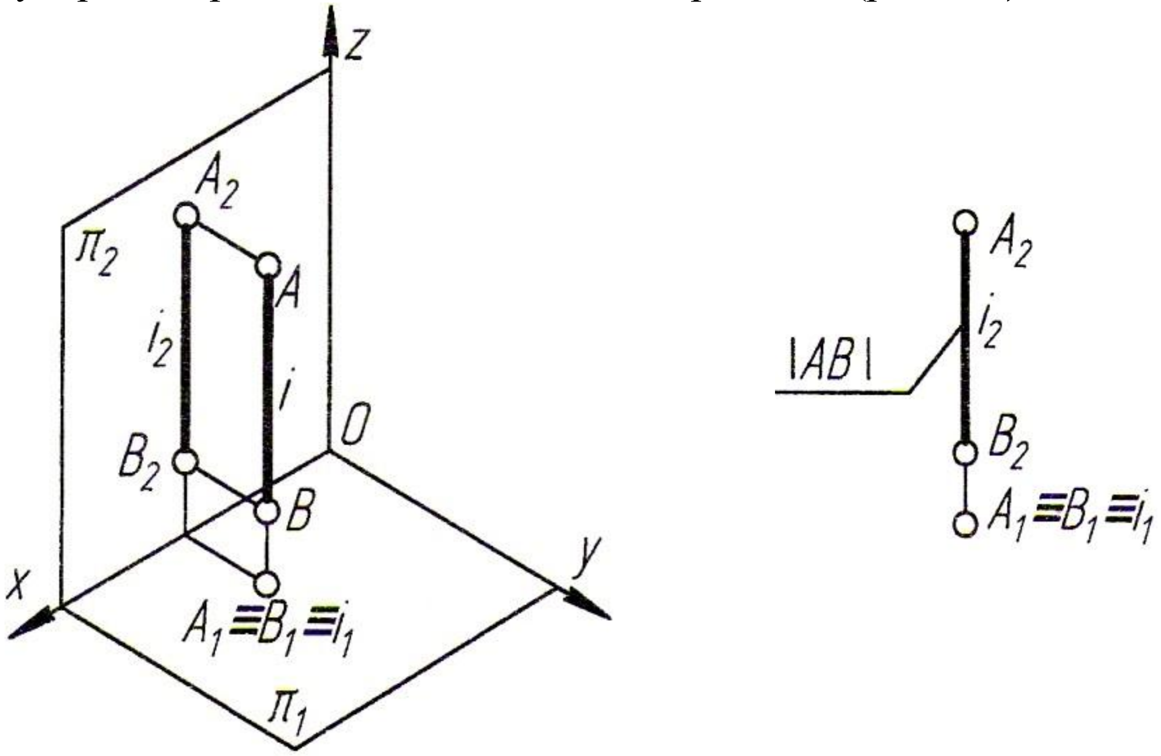


Рисунок 4.6 – Горизонтально проецирующая прямая

3. ***Профильно проецирующая*** прямая – прямая, перпендикулярная профильной плоскости проекций (рис. 4.7).

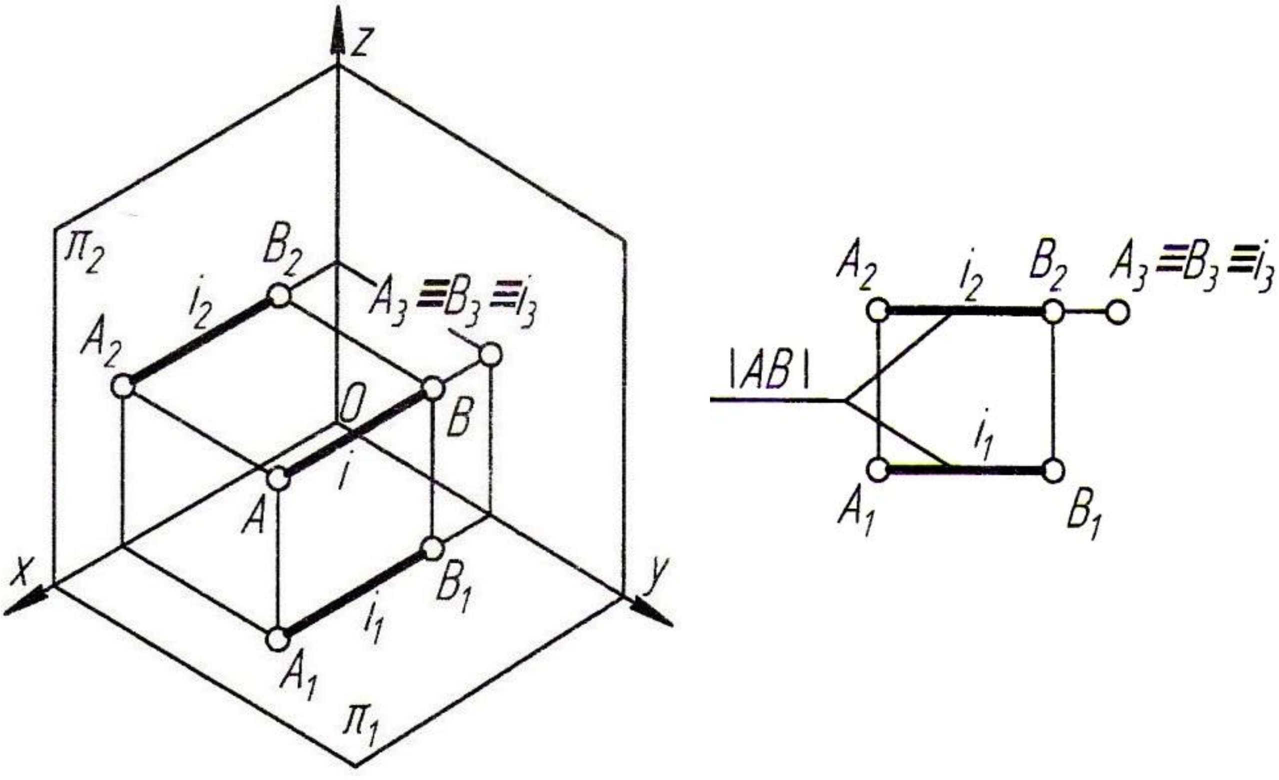


Рисунок 4.7 – Профильно проецирующая прямая

4.2. Следы прямой

Следом прямой называется точка, в которой прямая пересекается с плоскостью проекций (так как след принадлежит одной из плоскостей проекций, то одна его координата должна быть равна нулю).

Горизонтальный след – точка пересечения прямой с горизонтальной плоскостью проекций. ***Фронтальный*** след – точка пересечения прямой с фронтальной плоскостью проекций. ***Профильный*** след – точка пересечения прямой с профильной плоскостью проекций.

Следы прямой являются точками частного положения. Одноименные проекции следа прямой совпадают с самим следом, а другие проекции лежат на осях. Например, фронтальный след прямой $N_2 \equiv N$, а N_1 лежит на оси x (рис. 4.8). Отмеченные особенности в расположении следов проекций позволяют сформулировать следующие правила:

1. Для построения горизонтального следа M прямой необходимо продолжить ее фронтальную проекцию до пересечения с осью x, и из этой точки восстановить перпендикуляр к оси до пересечения с горизонтальной проекцией прямой.

2. Для построения фронтального следа N прямой нужно из точки пересечения горизонтальной проекции ее с осью x восстановить перпендикуляр до пересечения с фронтальной проекцией прямой.

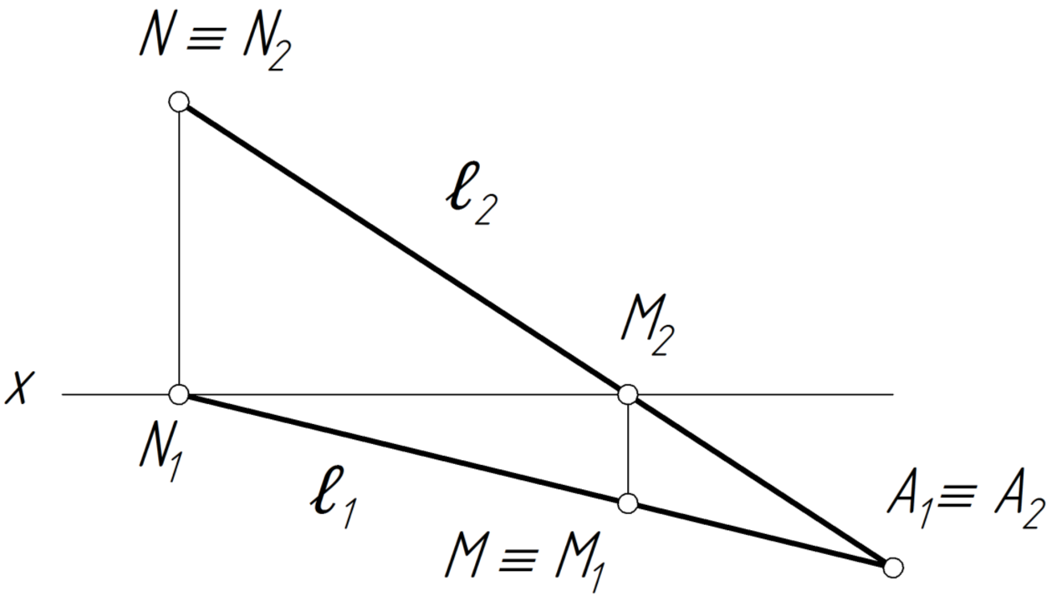


Рисунок 4.8 – Нахождение горизонтального и фронтального следов прямой

4.3. Взаимное расположение точки и прямой

Если точка принадлежит прямой, то ее проекции должны принадлежать одноименным проекциям этой прямой (аксиома принадлежности точки прямой). На рисунке 4.9 точка B принадлежит прямой, точка A – выше и ближе прямой, точка C – ближе, точка D расположена выше и дальше прямой, точка E – ниже, точка F– ниже и ближе, а точка N – ниже и дальше.

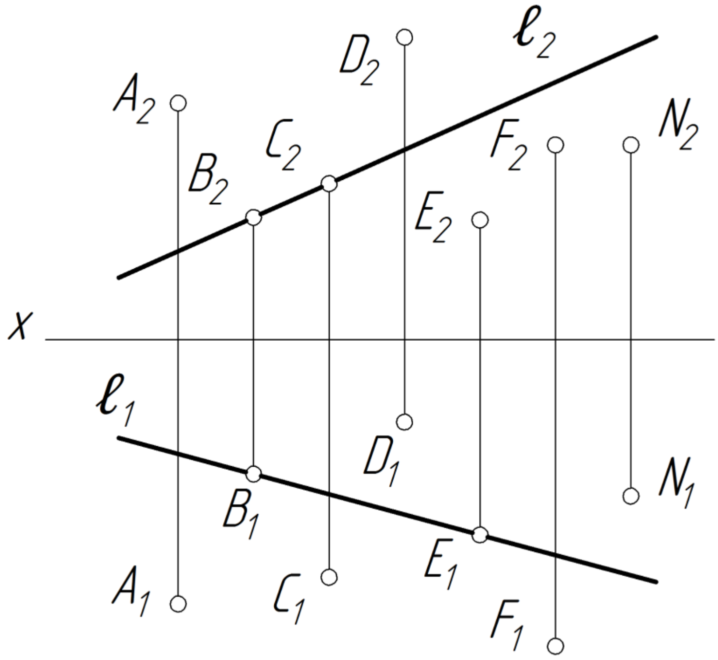


Рисунок 4.9 – Взаимное расположение точки и прямой

В тех случаях, когда точка и прямая лежат в плоскости уровня (параллельной какой-либо из плоскостей проекций Π_1, Π_2 или Π_3), то вопрос о взаимном расположении прямой и точки решается при построении проекций на плоскость, соответственно Π_1, Π_2 или Π_3.

4.4. Деление отрезка прямой в заданном соотношении

Из свойств параллельного проецирования известно, что если точка делит отрезок прямой в заданном отношении, то проекции этой точки делят одноименные проекции прямой в том же соотношении. Поэтому, чтобы некоторый отрезок разделить на эпюре в заданном соотношении, надо в том же соотношении разделить его проекции.

Чтобы разделить отрезок $[AB]$ в отношении 2:3 (рис. 4.10), из точки A_1 проводят произвольный отрезок $[A_1B^*_1]$, разделенный на пять равных частей $|A_1K^*_1|=2$, $|K^*_1B^*_1|=3$. Соединим точку B^*_1 с точкой B_1 и, проведя из точки K^*_1 прямую, параллельную $(B_1B^*_1)$, получим проекцию точки K_1. Согласно теореме Фалеса (***если на одной стороне угла отложить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие другую сторону, то на другой стороне отложатся равные между собой отрезки***) $A_1K_1/K_1B_1=$ $=2/3$, далее находим K_2. Таким образом, проекции точки K делят одноименные проекции отрезка $[AB]$ в заданном соотношении, следовательно, и точка K делит отрезок $[AB]$ в соотношении 2:3.

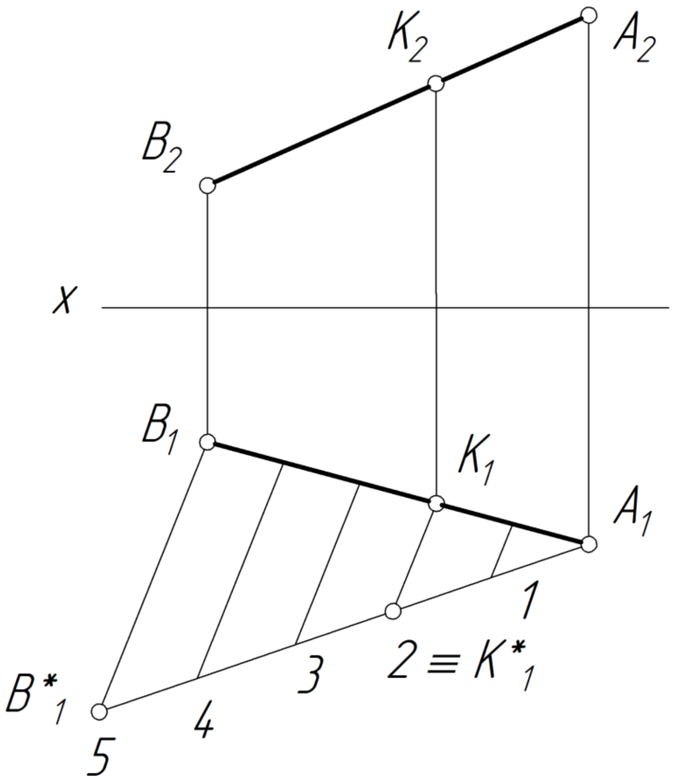


Рисунок 4.10 – Деление отрезка прямой в заданном соотношении

4.5. Определение длины отрезка и углов его наклона к плоскостям проекций

Длину отрезка $[AB]$ можно определить из прямоугольного треугольника ABC, где $|AC|=|A_1B_1|$, $|CB|=\Delta Z$, угол α – угол наклона отрезка к плоскости Π_1, β – угол наклона отрезка к плоскости Π_2. Для этого на эпюре (рис. 4.11) из точки B_1 под углом 90° к $|A_1B_1|$ проводится отрезок $|B_1B_1*|=\Delta Z$. Полученный в результате построений отрезок $|A_1B_1*|$ и будет натуральной величиной отрезка $[AB]$, а угол $B_1A_1B_1$***=**α. Рассмотренный способ называется *способом прямоугольного треугольника*. ***Натуральная величина отрезка есть гипотену-***

за прямоугольного треугольника, одним катетом которого является проекция отрезка на одну из плоскостей проекций, а другим – разность расстояний от концов отрезка до этой плоскости проекций.

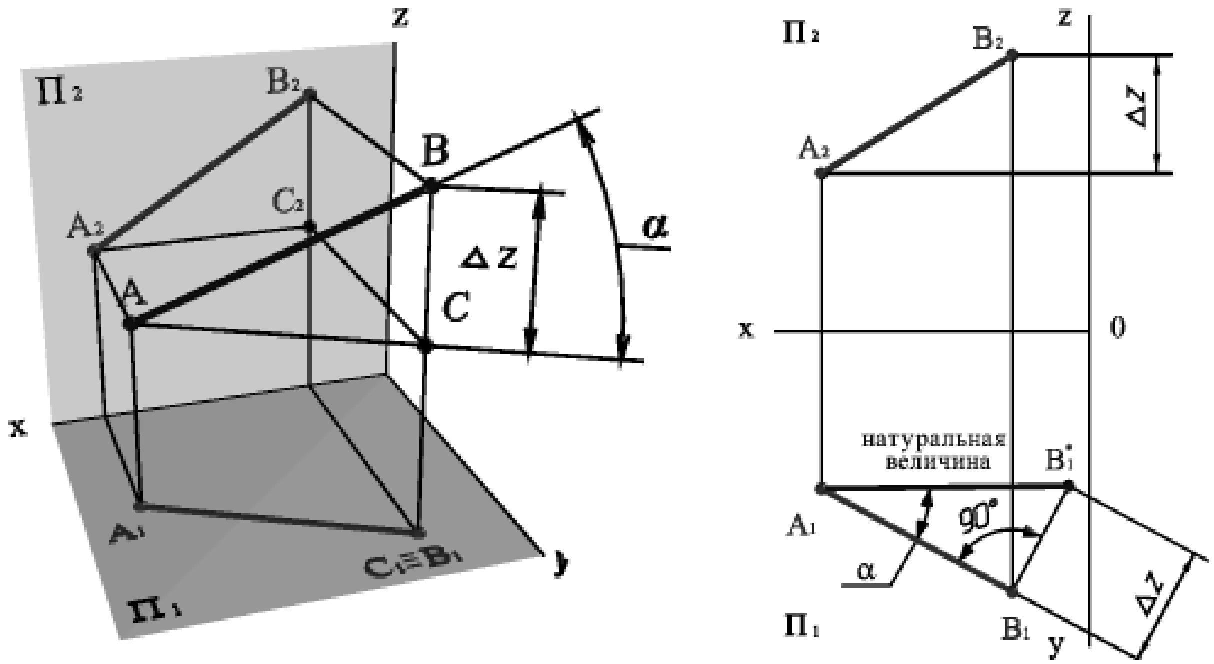


Рисунок 4.11 – Определение натуральной величины отрезка и угла его наклона к горизонтальной плоскости проекций

Для определения угла наклона отрезка к плоскости $П_2$ построения аналогичные (рис. 4.12), только в треугольнике ABB^* сторона $|BB^*| = \Delta Y$ и треугольник совмещается с плоскостью $П_2$.

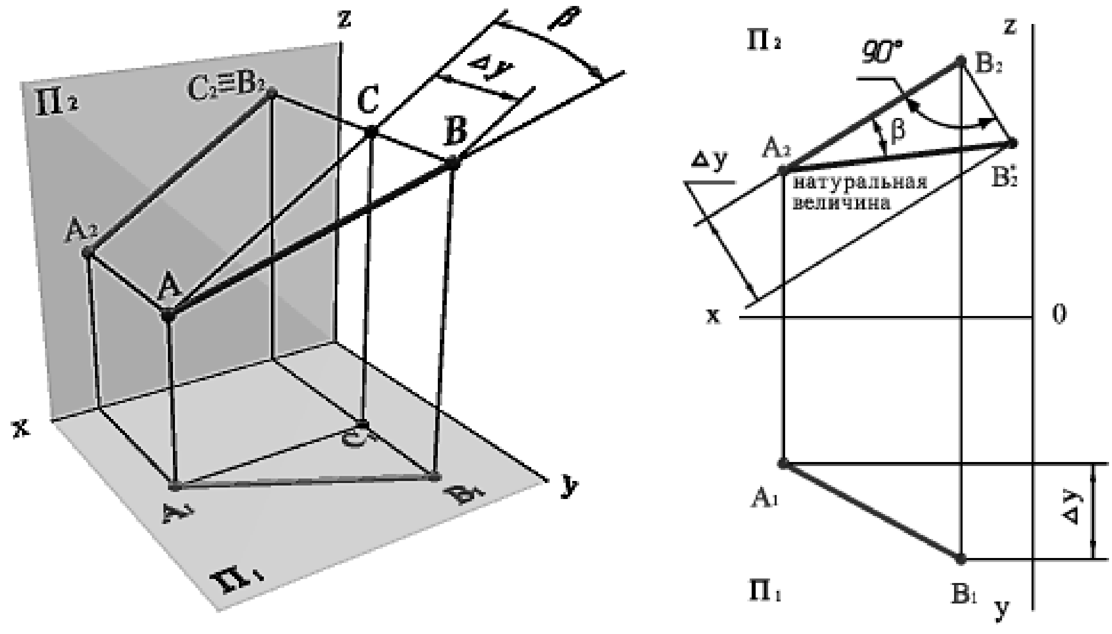


Рисунок 4.12 – Определение натуральной величины отрезка и угла его наклона к фронтальной плоскости проекций

4.6. Взаимное положение двух прямых

Прямые линии в пространстве могут быть параллельными, пересекающимися и скрещивающимися.

Параллельными называются две прямые, которые лежат в одной плоскости и не имеют общих точек. ***Проекции параллельных прямых на любую плоскость (не перпендикулярную данным прямым) параллельны.***

Это свойство параллельного проецирования остается справедливым и для ортогональных проекций, то есть если $c//d$, то $c_1//d_1$; $c_2//d_2$; $c_3//d_3$ (рис. 4.13). В общем случае справедливо и обратное утверждение.

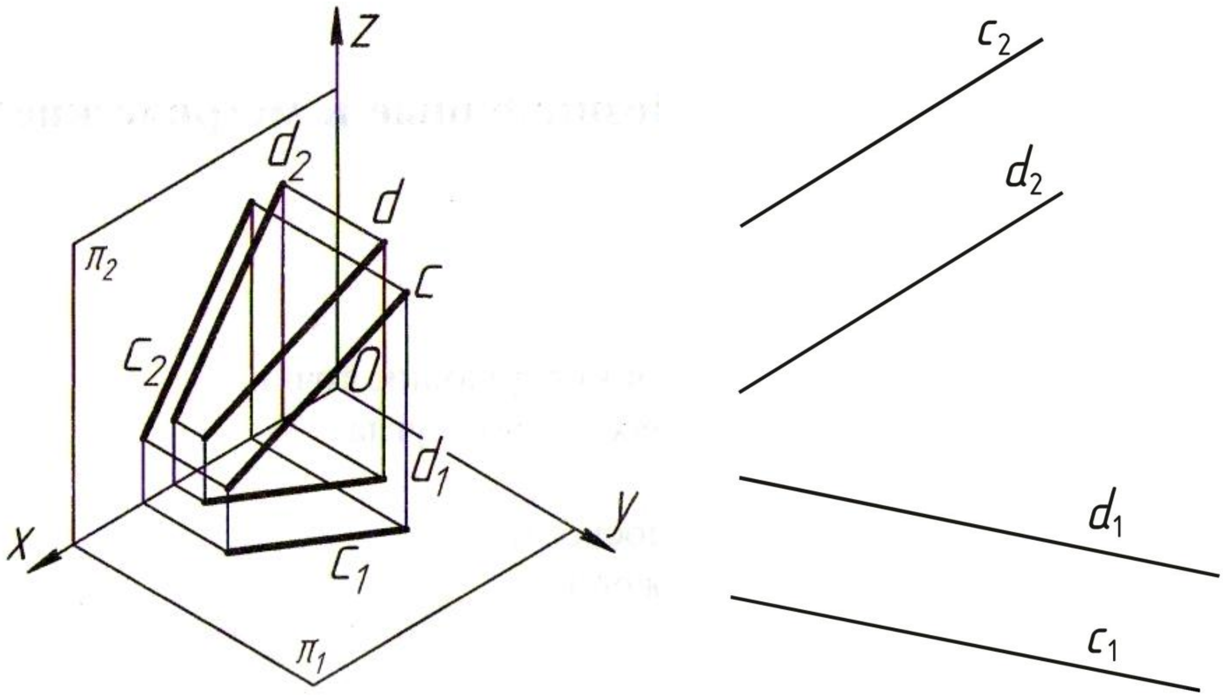


Рисунок 4.13 – Параллельные прямые

Особый случай представляют собой прямые, параллельные одной из плоскостей проекций. Например, фронтальные и горизонтальные проекции профильных прямых уровня параллельны, но для оценки их взаимного положения необходимо сделать проекцию на профильную плоскость проекций (рис. 4.14).

Пересекающимися называются две прямые, лежащие в одной плоскости и имеющие одну общую точку. ***Если прямые пересекаются, то точки пересечения их одноименных проекций находятся на одной линии связи*** (рис. 4.15).

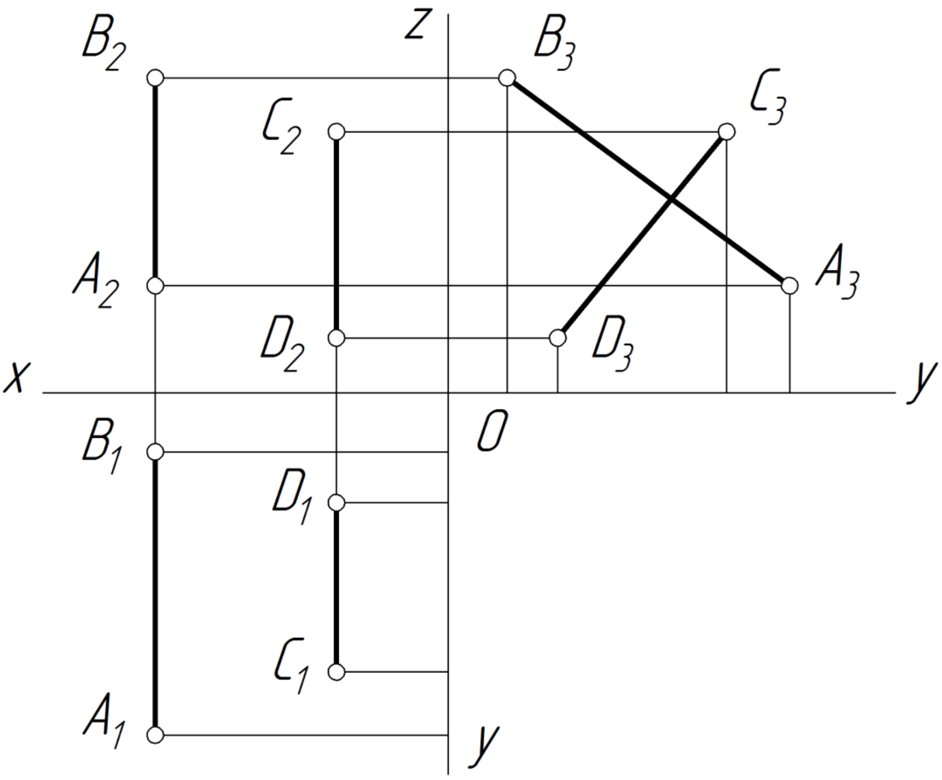


Рисунок 4.14 – Прямые, параллельные профильной плоскости проекций

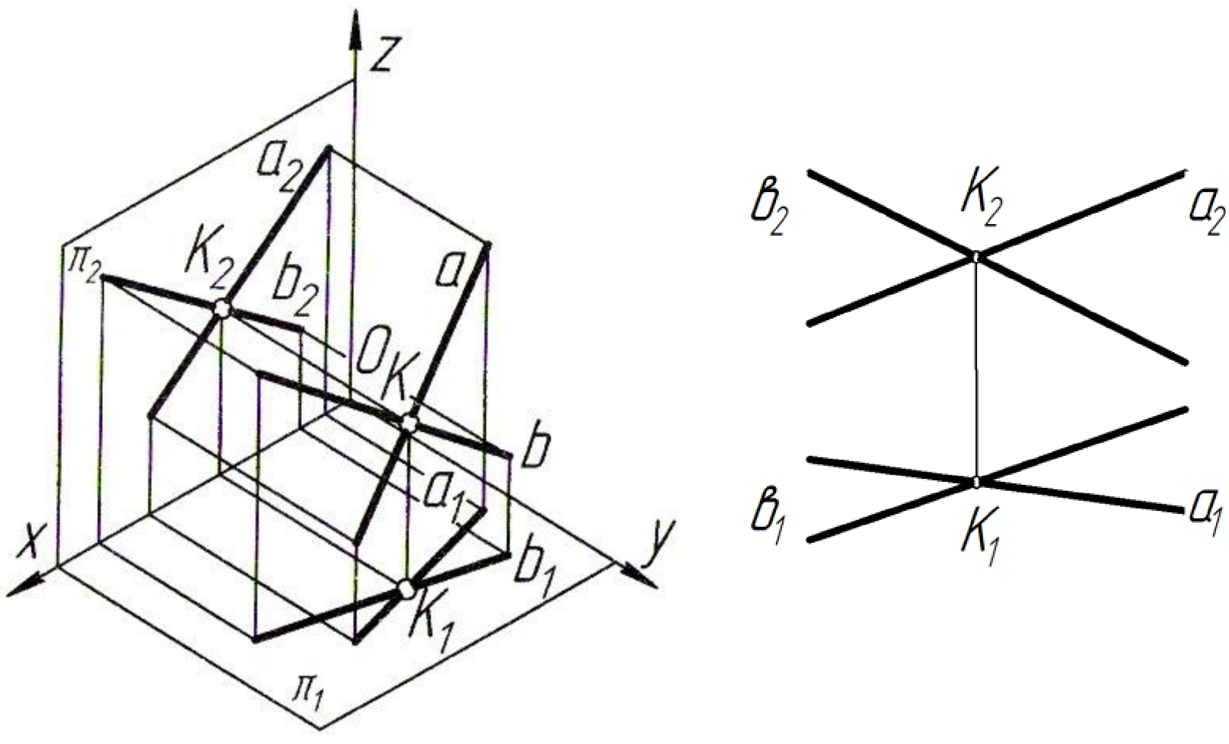


Рисунок 4.15 – Пересекающиеся прямые

Скрещивающимися называются две прямые, не лежащие в одной плоскости. ***Если прямые не пересекаются и не параллельны между собой, то точка пересечения их одноименных проекций не лежит на одной линии связи.***

Точке пересечения фронтальных проекций прямых (рис. 4.16) на эпюре соответствуют две точки *3* и *4*, из которых одна принадлежит прямой *а*, другая – *в*.

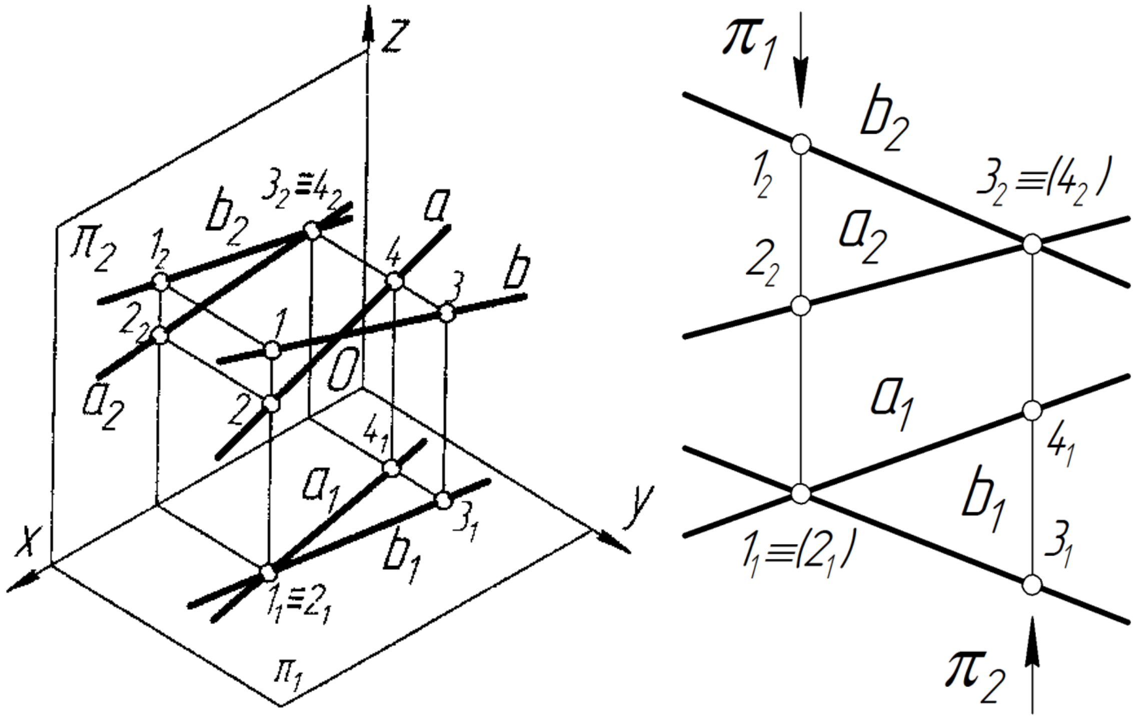


Рисунок 4.16 – Скрещивающиеся прямые

Их фронтальные проекции совпадают лишь потому, что в пространстве обе точки *3* и *4* находятся на общем перпендикуляре к фронтальной плоскости проекций. Горизонтальная проекция этого перпендикуляра, обозначенная стрелкой, позволяет установить, какая из двух точек ближе к наблюдателю. На предложенном примере ближе точка *3*, лежащая на прямой *в,* следовательно, прямая *в* проходит в этом месте ближе прямой *а,* и фронтальная проекция точки *3* закрывает проекцию точки *4*. Для точек *1* и *2* решение аналогично.

Это способ определения видимости ***по конкурирующим точкам***. В данном случае точки *3* и *4 – фронтально конкурирующие*, а *1* и *2 – горизонтально конкурирующие.*

4.7. Проекции плоских углов

Угол – геометрическая фигура, состоящая из двух различных лучей, выходящих из одной точки. ***Углом между прямыми*** называется меньший из двух углов между лучами, параллельными этим прямым. ***Углом между плоскостью и не перпендикулярной ей прямой*** называется угол между прямой и ее проекцией на данную плоскость.

Рассмотрим ряд свойств ортогональных проекций плоских углов.

1. Если хотя бы одна из сторон прямого угла параллельна плоскости проекций, а другая не перпендикулярна ей, то на эту плоскость прямой угол проецируется без искажения (***теорема о проецировании прямого угла***).

Дано: $\angle ACB = 90°$; $[BC] \parallel \Pi_1$; $[AC] \not\perp \Pi_1$.

Для доказательства теоремы продлим отрезок $[AC]$ до пересечения с плоскостью Π_1 (рис. 4.17), получим горизонтальный след прямой – точку $M \equiv M_1$, одновременно принадлежащую прямой и ее проекции. Из свойства ортогонального проецирования следует, что $[BC] \parallel [B_1C_1]$. Если через точку M проведем прямую MD, параллельную C_1B_1, то она будет параллельна и CB, а следовательно, $\angle CMD = 90°$. Согласно теореме о трех перпендикулярах $\angle C_1MD = 90°$ и $\angle A_1C_1B_1 = 90°$, что и требовалось доказать. В случае, когда $[AC] \perp \Pi_1$, проекцией угла, согласно свойствам ортогонального проецирования, будет прямая.

2. Если проекция угла представляет угол 90°, то проецируемый угол будет прямым лишь при условии, что одна из сторон этого угла параллельна плоскости проекций (рис. 4.18).

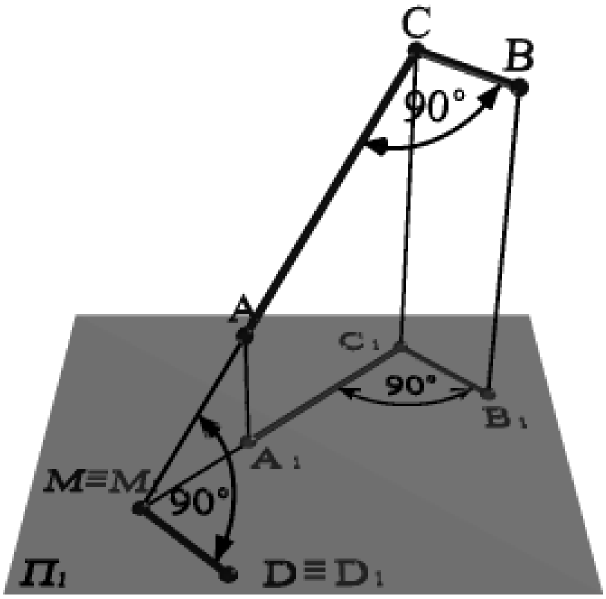


Рисунок 4.17 – Теорема о проецировании прямого угла

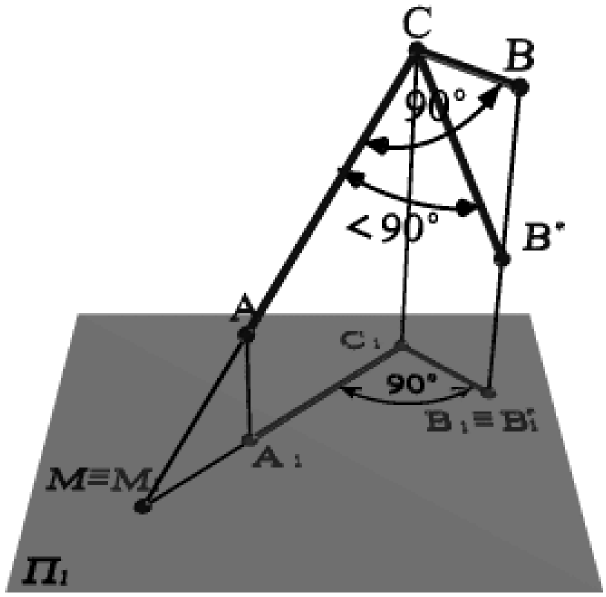


Рисунок 4.18 – Обратная теорема о проецировании прямого угла

3. Если обе стороны любого угла параллельны плоскости проекций, то его проекция равна по величине проецируемому углу.

4. Если стороны угла параллельны плоскости проекций или одинаково наклонены к ней, то деление проекции угла на этой плоскости пополам соответствует делению пополам и самого угла в пространстве.

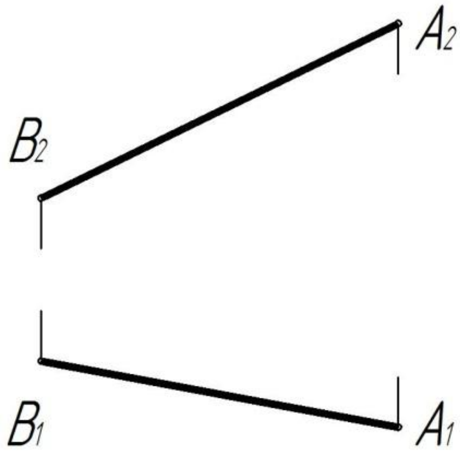
5. Если стороны угла не параллельны плоскости проекций, то угол на эту плоскость проецируется с искажением.

Примеры решения задач

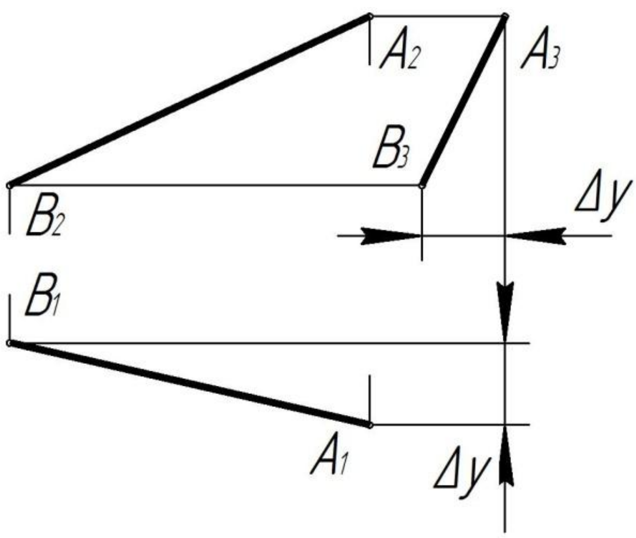
Пример 4.1.

Задание: построить профильную проекцию отрезка [*AB*] (рис. 4.19, *а*).

Решение: показываем линии связи для профильной и фронтальной проекций точек *A* и *B*. На профильной плоскости проекций показываем (произвольно) проекцию наиболее удаленной точки (предварительно определив положение точек *A* и *B* на горизонтальной плоскости проекций). Для данной задачи точка *A* будет ближайшей, ее горизонтальная проекция ниже точки *B* (рис. 4.19), значит профильная проекция последней будет самой левой и все точки отрезка будут правее. Теперь все дальнейшие построения будут производиться правее этой точки.



а



б

Рисунок 4.19 – Пример 4.1

На горизонтальной плоскости проекций определяем разность координат вдоль оси y – Δy.

Откладываем Δy от профильной проекции точки B_3 вправо вдоль линии связи и показываем профильную проекцию точки A (A_3). Соединяя проекции точек, получаем третью проекцию отрезка [AB].

Пример 4.2.

Задание: определить натуральную величину отрезка [AB] (рис. 4.20, *а*) и углы его наклона к плоскостям проекций. Применить способ прямоугольного треугольника.

Решение: проводим линию, перпендикулярную к одной из проекций отрезка [AB]. Перпендикуляр восстанавливаем из проекции любой точки A или B (рис. 4.20, *б*).

Откладываем на перпендикуляре отрезок, равный разности расстояний от точек отрезка до соответствующей плоскости проекций: Δx (до $П_3$), Δy (до $П_2$) или Δz (до $П_1$) – разности координат точек вдоль оси, перпендикулярной к плоскости проекций, на которой строится прямоугольный треугольник.

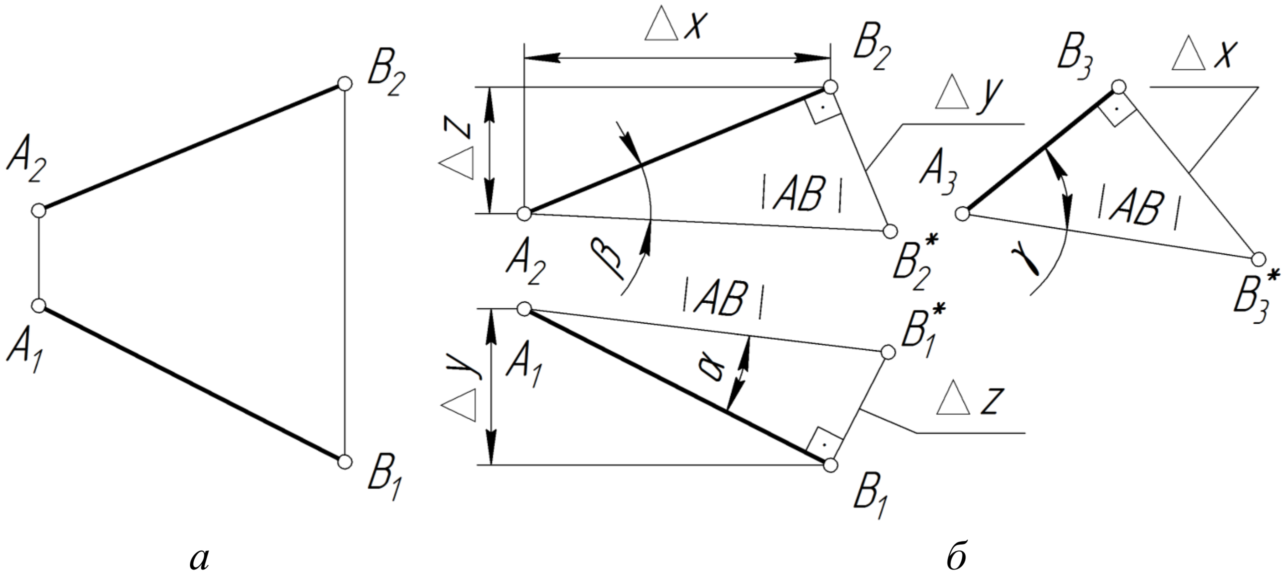


Рисунок 4.20 – Пример 4.2

Строим прямоугольный треугольник, одним катетом которого будет проекция отрезка, а вторым катетом – разность координат. Длина гипотенузы будет равна натуральной величине отрезка (*способ прямоугольного треугольника*).

Угол, противолежащий катету, равному разности координат, будет углом наклона к соответствующей плоскости проекций: α – угол наклона к горизонтальной плоскости проекций; β – угол наклона к фронтальной плоскости проекций; γ – угол наклона к профильной плоскости проекций.

При построении прямоугольного треугольника для определения угла наклона к плоскости $П_3$ необходимо построить профильную проекцию отрезка.

Пример 4.3.

Задание: на прямой m определить точку C, удаленную от точки A на 30 мм (рис. 4.21, *а*).

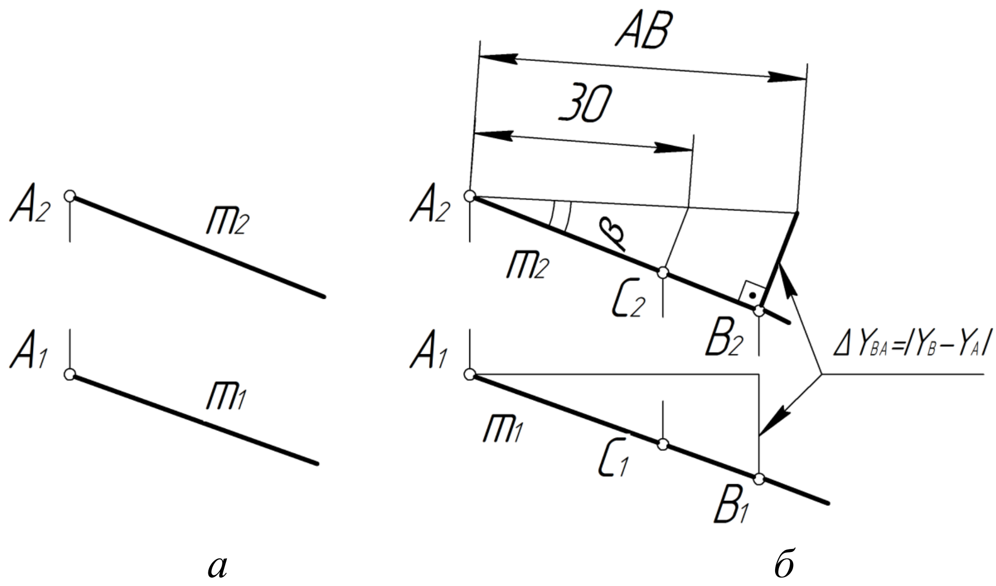


Рисунок 4.21 – Пример 4.3

Решение: для решения задачи зададим на прямой m произвольную промежуточную точку B (рис. 4.21, *б*) и определим на комплексном чертеже натуральную величину полученного отрезка $[AB]$, на которой отложим 30 мм (натуральную величину $[AC]$). Опустив перпендикуляр из полученной отметки на проекцию отрезка, определим фронтальную проекцию точки C, а по линиям связи – горизонтальную проекцию.

Пример 4.4.

Задание: построить нисходящий отрезок длиной 30 мм и определить его угол наклона к фронтальной плоскости проекций (рис. 4.22).

Решение: для построения отрезка общего положения воспользуемся способом прямоугольного треугольника. Угол наклона к фронтальной плоскости проекций будет у треугольника, построенного на этой же плоскости проекций. Поэтому построим прямоугольный треугольник, у которого гипотенуза равна 30 мм (рис. 4.22).

Один катет – фронтальная проекция отрезка $[AB]$, другой – разность координат вдоль оси y – ΔY_{AB}. Измеряем ее и откладываем на профильной проекции по линиям связи, отмечаем положение проекции точки A (так как она будет самая левая, а значит, на профильной проекции дальняя по отношению к наблюдателю). Точка A выше и дальше точки B – восходящий отрезок.

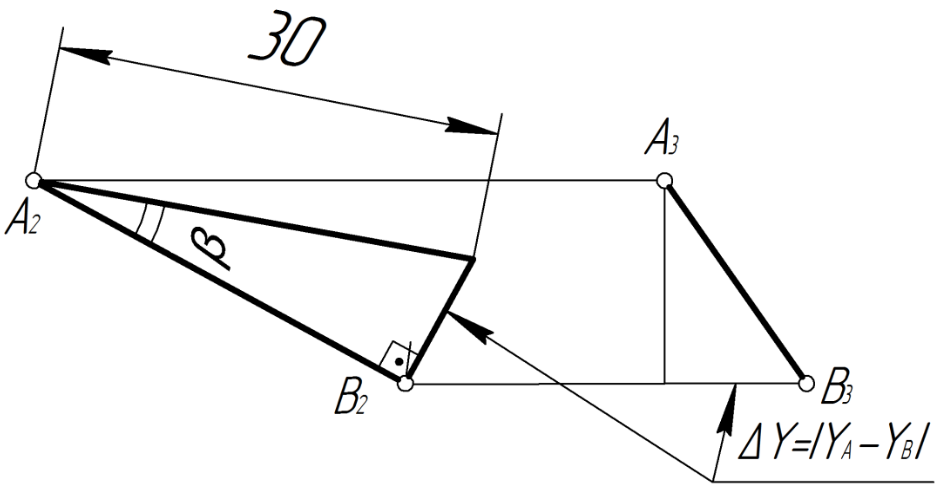


Рисунок 4.22 – Пример 4.4

Пример 4.5.

Задание: построить в трех проекциях отрезок [AB] = 45 мм, наклоненный к $П_3$ под углом 60°. Положение проекций отрезка выбрать самостоятельно.

Решение: так как в условии задан угол наклона к профильной плоскости проекций, то отрезок проще строить параллельно одной из плоскостей проекций, то есть отрезок, принадлежащий прямой уровня. Поскольку профильная прямая уровня параллельна профильной плоскости проекций, то ее построение не имеет смысла. Остается построение горизонтали или фронтали. Остановимся на построении отрезка, принадлежащего фронтальной прямой уровня. Основываясь на свойствах фронтали, проводим горизонтальную и профильную проекции фронтали – горизонтально и вертикально соответственно (рис. 4.23).

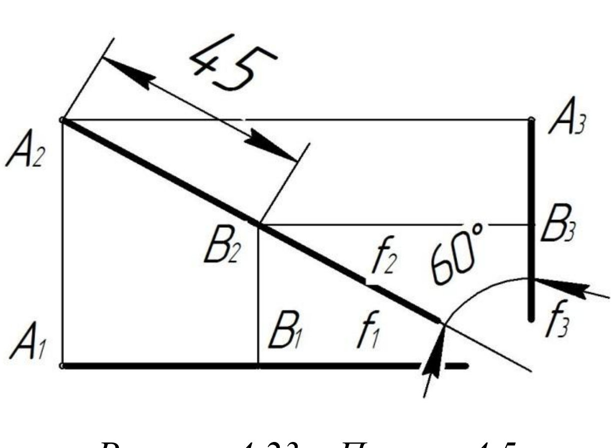
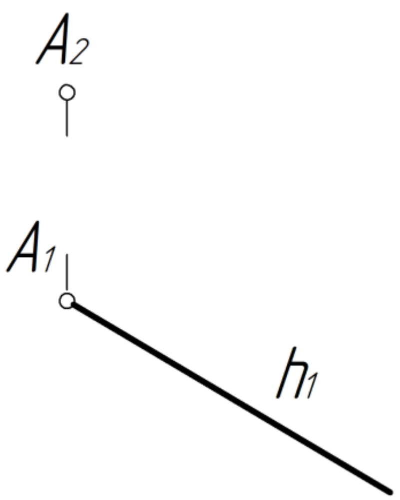


Рисунок 4.23 – Пример 4.5

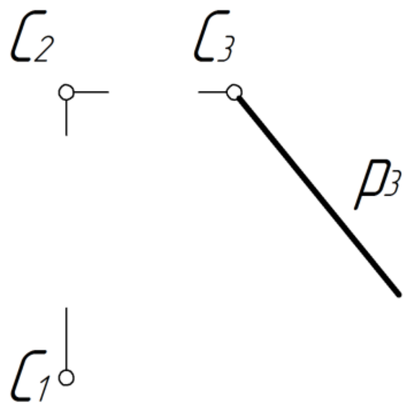
Далее проводим фронтальную проекцию под углом 60° к вертикальной линии. Таким образом, мы показали три проекции прямой, наклоненной под углом 60° к профильной плоскости проекций. На ее фронтальной проекции откладываем отрезок, равный 45 мм, и обозначаем проекции точек *A* и *B*. Окончательно проводим линии связи, на которых находим недостающие проекции точек *A* и *B*.

Пример 4.6.

Задание: достроить проекции отрезков и определить углы α, β, γ отрезка горизонтальной прямой уровня $|AB|$ = 50 мм (рис. 4.24, *а*), профильной прямой уровня $|CD|$ = 30 мм (рис. 4.24, *б*).



а

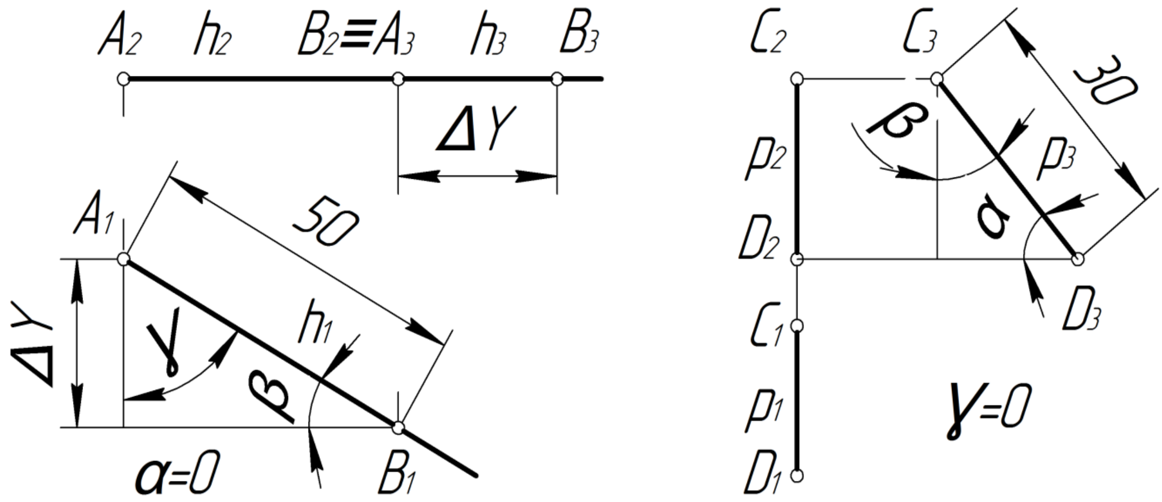


б

Рисунок 4.24 – Задания примера 4.6

Решение: для построения проекции отрезка [*AB*] (рис. 4.25, *а*) воспользуемся свойствами горизонтали: через точку A_2 проводим горизонтальную прямую и на горизонтальной проекции откладываем отрезок $|A_1B_1| = |AB|$ = 50 мм. По линии связи находим фронтальную проекцию точки *B*. Профильную проекцию горизонтали показываем вдоль линии связи, выбрав положение проекции точки *A* (предварительно определив по горизонтальной проекции, что она самая дальняя, а значит, на профильной проекции самая левая), там же, где и фронтальная проекция точки *B* (можно выбрать и в другой точке на h_3). По известной методике определяем третью проекцию точки *B* и показываем углы наклона прямой.

Согласно свойству профильной прямой уровня $|p| = |p_3|$ откладываем на профильной проекции отрезок $|CD| = |C_3D_3|$ = 30 мм (рис. 4.25, *б*). Через горизонтальную и фронтальную проекции точки *C* проводим проекции профильной прямой уровня вертикально (свойство проекций прямой уровня). Дальнейшее построение аналогично задаче, изображенной на рисунке 4.25, *а*.



а *б*

Рисунок 4.25 – Решение заданий примера 4.6

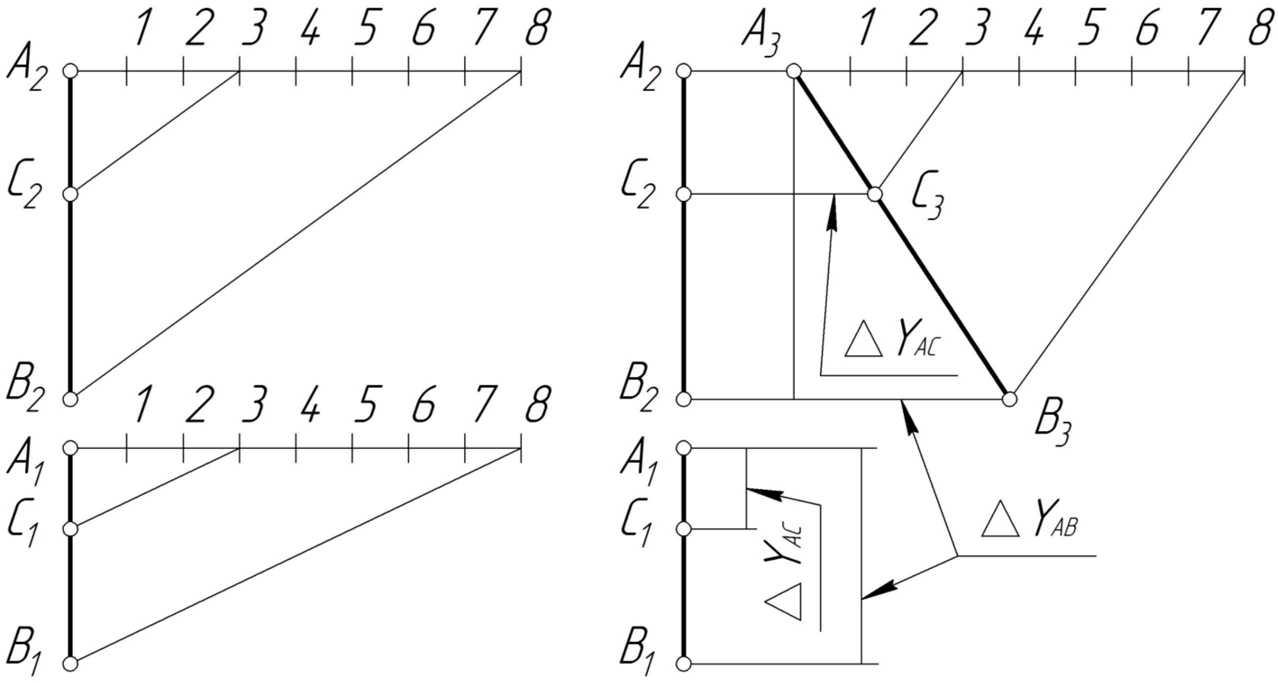
В обоих случаях положение проекций и углы наклона показываем в строгом соответствии свойствам прямых уровня.

Пример 4.7.

Задание: на отрезке [*AB*] определить точку *C* так, чтобы [*AC*] : [*CB*]= 3:5. Задачу решить двумя способами.

Решение: первый способ основан на свойстве 4 инвариантного проецирования. Проведем через проекции любой точки (в данном случае *A*) прямую под углом, отличным от 0° или 180°, на которой отложим (при помощи циркуля или линейки) по восемь равных частей (сумма числителя и знаменателя 3+5) (рис. 4.26, *а*). Конечную отметку *8* соединим с начальной точкой заданного отрезка – точкой *B*. Получим треугольник *AB8*. Через отметку *3* проведем прямую, параллельную стороне *B8*. Точка пересечения прямой с отрезком [*AB*] будет точкой *C* – вершиной подобного треугольника *AC3*. На основании подобия треугольников можно утверждать, что [*AC*] : [*CB*]= 3:5. Выполнив аналогичные построения на горизонтальной и фронтальной плоскостях проекций, получим проекции искомой точки *C*.

Второй способ (рис. 4.26, *б*): строим профильную проекцию отрезка [*AB*] и аналогично первому способу находим профильную проекцию точки *C*. Далее определяем (по известным методикам) горизонтальную и фронтальную проекции точки *C*.



а *б*

Рисунок 4.26 – Решение задания примера 4.7

Пример 4.8.

Задание: определить недостающие проекции точек *K* и *L* (рис. 4.27), принадлежащих горизонтали [*AB*].

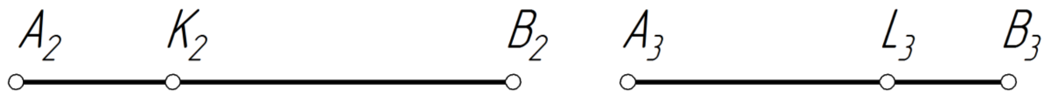


Рисунок 4.27 – Задание примера 4.8

Решение: рассмотрим два способа решения данной задачи.

Первый способ (рис. 4.25, *а*) основан на построении третьей проекции отрезка. На вертикальной линии связи показываем горизонтальную проекцию точки *A*. Профильная проекция ее самая левая, а значит, она самая дальняя по отношению к наблюдателю, и на горизонтальной проекции она будет самая высшая, а значит, все остальные точки на комплексном чертеже будут располагаться ниже. Далее проводим линию под углом 45° через точку пересечения горизонтальной и вертикальной линий, проведенных через проекции точек A_1 и A_3 соответственно.

Второй способ (рис. 4.25, *б*) основан на построении пропорциональных отрезков путем построения подобных треугольников. Для построения профильной проекции точки K проведем линию, не совпадающую с профильной проекцией отрезка $[AB]$ (A_3B_3). На этой прямой отложим отрезки, равные $|A_2B_2|$ и $|B_2K_2|$. Соединяем точку B_3 с конечной точкой отрезка $|A_2B_2|$. Затем параллельно полученной линии через точку отрезка $|B_2K_2|$ проводим еще одну линию. Точка пересечения последней с проекцией A_3B_3 и будет профильной проекцией точки K. Построение основано на пропорциональности сторон подобных треугольников. Аналогичным образом определяем фронтальную проекцию точки L.

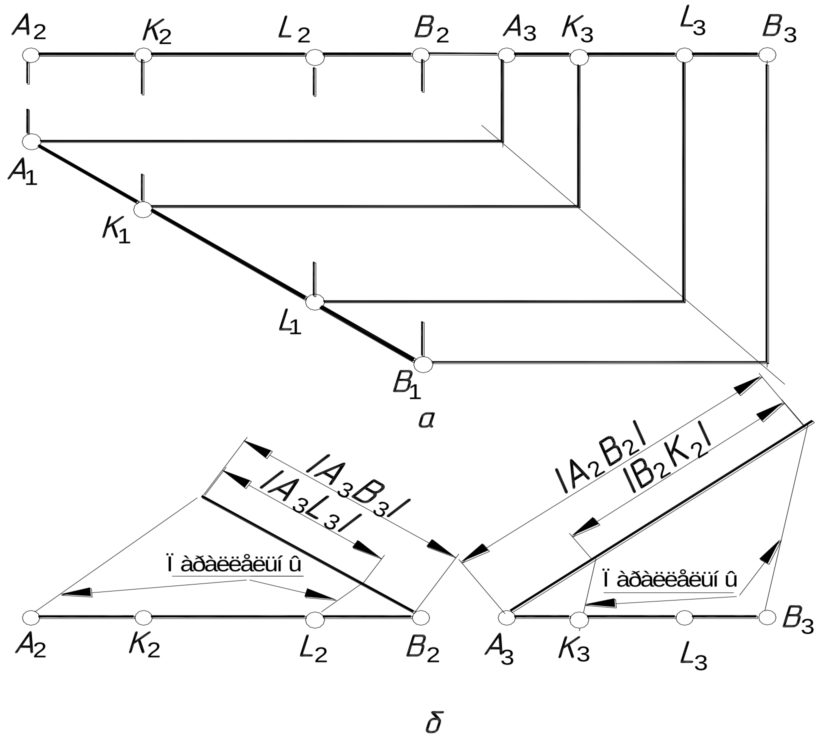
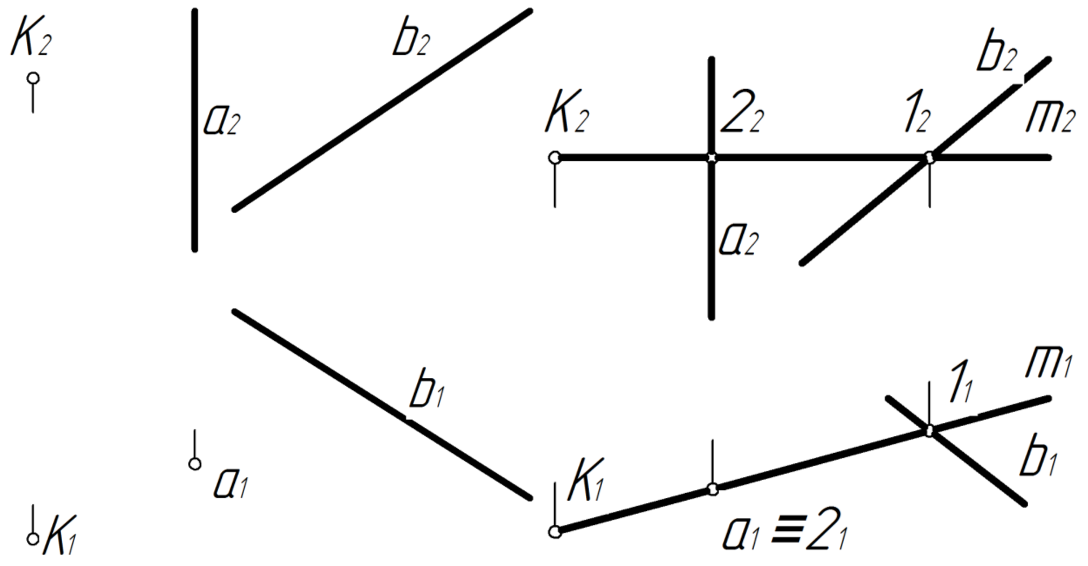


Рисунок 4.28 – Решение задания примера 4.8

Пример 4.9.

Задание: через точку K провести прямую m, пересекающую прямые a и b (рис. 4.29, *а*).

Решение: прямая m должна иметь общие точки с прямыми a и b. Начинаем построение с горизонтальной плоскости проекций, так как прямая a – горизонтально проецирующая и точка пересечения (*2*) с прямой a будет совпадать с ее проекцией. Зная положение прямой m_1 по линиям связи точки 1_1, определяем 1_2 и строим фронтальную проекцию прямой m_2 (рис. 4.29, *б*) по точкам K_2 и 1_2.



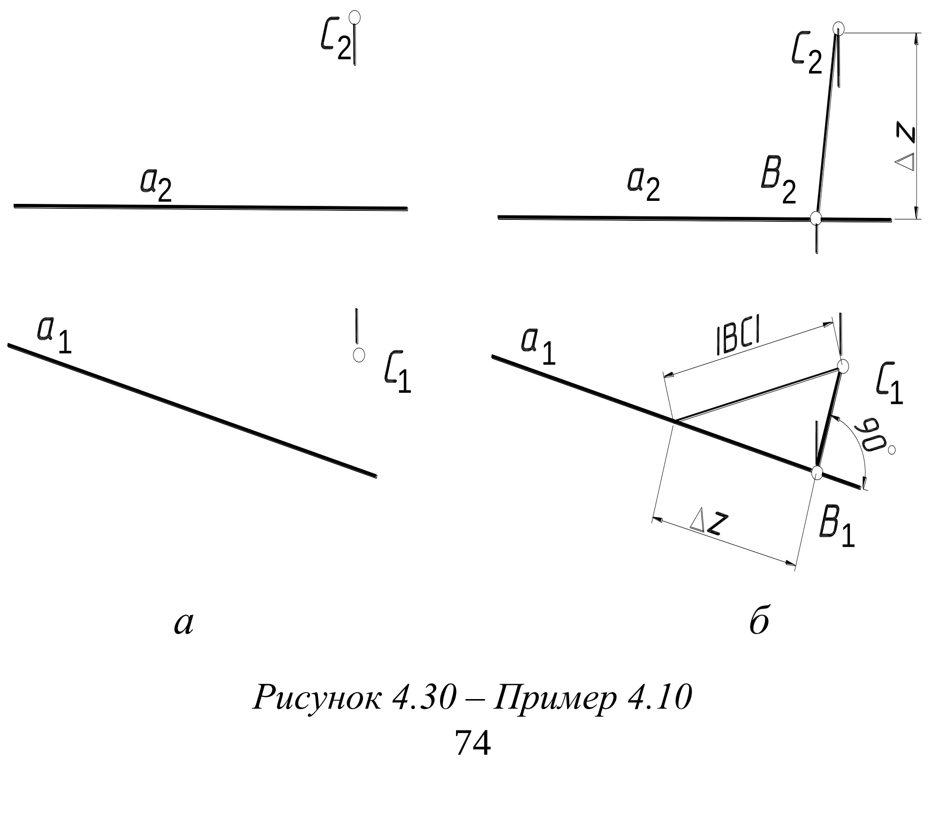
а *б*

Рисунок 4.29 – Пример 4.9

Пример 4.10.

Задание: определить расстояние между точкой *C* и прямой *a* (рис. 4.30, *а*).

Решение: кратчайшее расстояние между точкой и прямой – перпендикуляр, опущенный из точки на прямую (рис. 4.30, *б*). Угол 90° проецируется в натуральную величину, если одна из его сторон параллельна плоскости проекций, а вторая не перпендикулярна ей (теорема о прямом угле**)**.



а *б*

Рисунок 4.30 – Пример 4.10

Прямая a – горизонталь, так как ее фронтальная проекция горизонтальна. Проекция перпендикуляра, опущенного из точки C_1 на прямую a_1, будет соответствовать натуральной величине угла 90°, так как прямая a параллельна горизонтальной плоскости. Фронтальную проекцию точки B определим по линии связи.

Воспользуемся способом прямоугольного треугольника и определим натуральную величину кратчайшего расстояния от точки C до прямой a – |BC| (см. рис. 4.30, *б*).

Пример 4.11.

Задание: через точку C (рис. 4.31, *а*) провести горизонталь h и фронталь f, пересекающие прямую a.

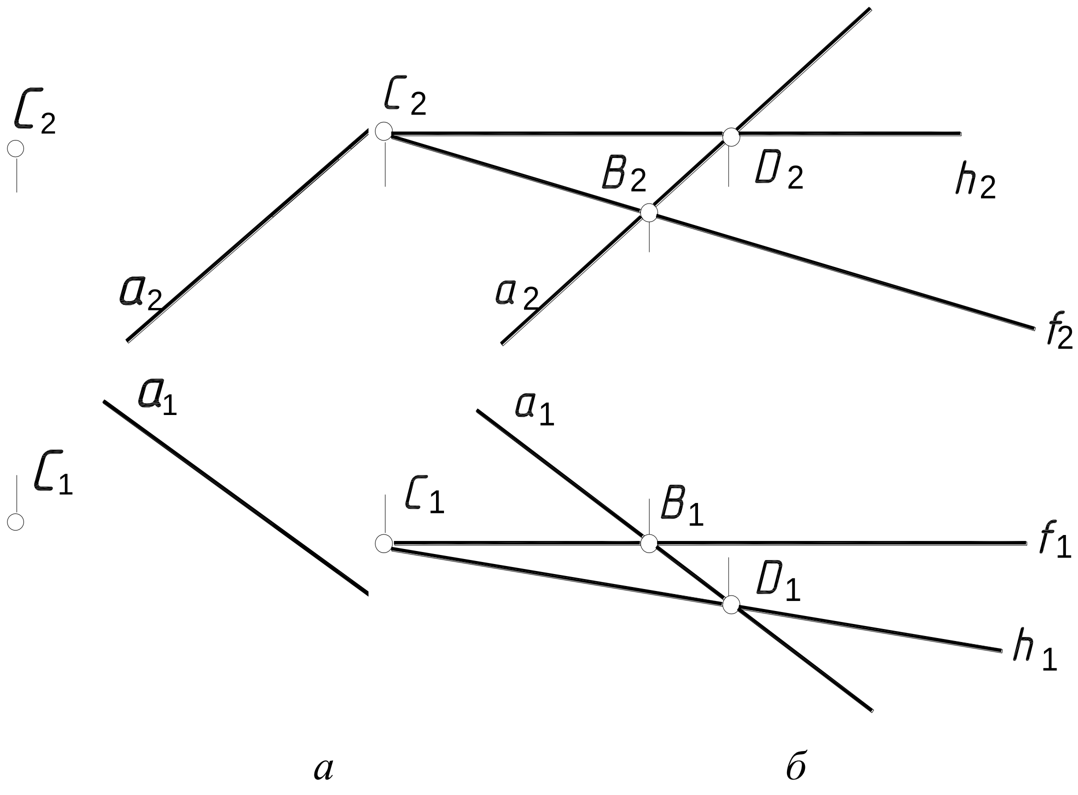


Рисунок 4.31 – Пример 4.11

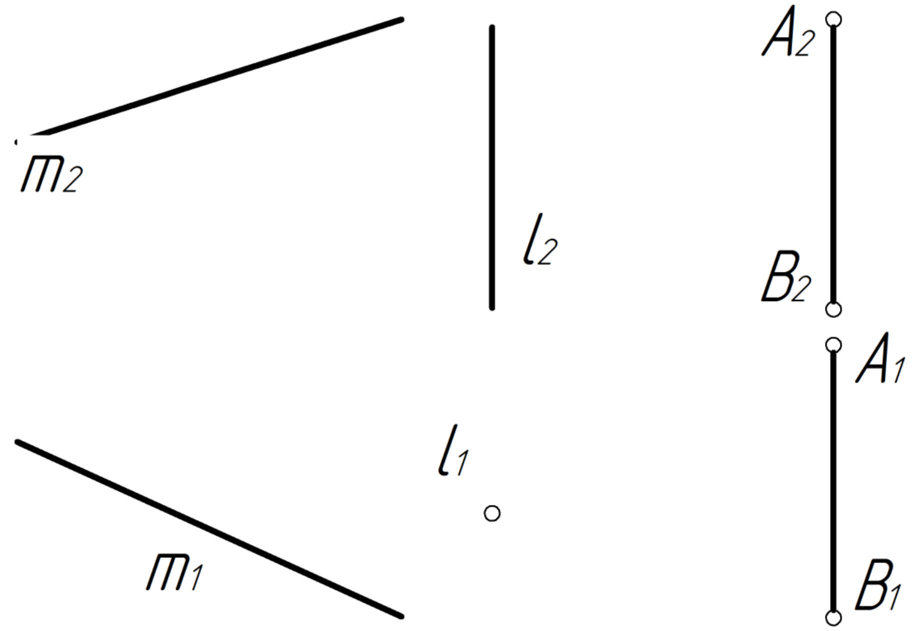
Решение основано на положении, что *две прямые пересекаются, если они имеют общую точку*. Точка принадлежит прямой, если все ее проекции принадлежат соответствующим проекциям прямой (*признак принадлежности точки прямой*). Построение фронтали и горизонтали начинаем с той проекции, положение которой относительно осей координат известно: для горизонтали – h_2 (параллельно оси x), для фронтали – f_1 (параллельно оси x).

По линиям связи находим проекции точек пересечения, принадлежащих обеим прямым уровня и прямой *a*: точка *B* для *h* и точка *D* для *f* (рис. 4.31, *б*).

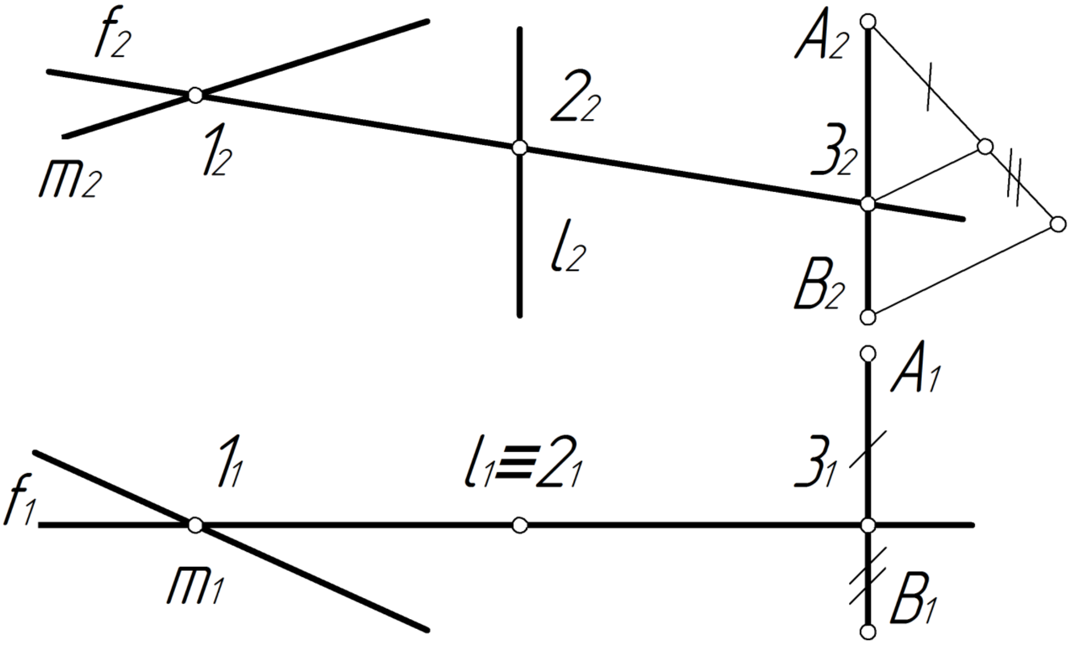
Соединяем соответствующие проекции точек пересечения с проекциями точки *C* и получаем искомые проекции горизонтали и фронтали.

Пример 4.12.

Задание: провести фронталь *f*, пересекающую прямые *m*, *l* и отрезок [*AB*] (рис. 4.32, *а*).



а



б

Рисунок 4.32 – Пример 4.12

Решение: положение горизонтальной проекции фронтальной прямой уровня может быть только горизонтальное. Эта проекция однозначно должна проходить через проекцию прямой l в точке *2*, то есть через проекцию l_1 (рис. 4.32, *б*). Далее по линии связи проекции точки 1_1 находим ее фронтальную проекцию – 1_2. Положение фронтальной проекции точки *2* (2_2) пока не известно. Ее определим после того, как проведем фронтальную проекцию фронтали f. Для этого определим фронтальную проекцию точки *3*, построив подобные треугольники. Соединяя точки 1_2 и 3_2, определяем положение точки 2_2.

Вопросы для самопроверки

1. Как изображается прямая общего положения, как она располагается по отношению к плоскостям проекций?

2. Какие существуют прямые частного положения?

3. Дать определение натуральной величины отрезка общего положения и определить углы наклона его к плоскостям проекций методом прямоугольного треугольника.

4. Дать определение натуральной величины и определить углы наклона к плоскостям проекций:

а) прямой уровня;

б) проецирующей прямой.

5. Перечислить возможные случаи расположения прямых в пространстве.

6. Сформулировать признак принадлежности точки прямой.

7. Сформулировать признак пересечения прямых, описать их свойства.

8. Сформулировать признак параллельности прямых, описать их свойства.

9. Сформулировать признак скрещивающихся прямых, описать их свойства.

10. Какое свойство прямых уровня является основным при решении задач начертательной геометрии?

11. С помощью каких элементов определяется взаимное расположение прямых на комплексном чертеже?

12. Какие особенности присущи проекциям проецирующих прямых?

13. Каково соотношение между отрезком прямой общего положения и его проекцией?

14. Что называется следом прямой?

5. ПЛОСКОСТЬ

5.1. Плоскость. Способы графического задания плоскостей

Плоскость – одно из основных понятий геометрии. Некоторые характеристические свойства плоскости:

1. Плоскость есть поверхность, содержащая полностью каждую прямую, соединяющую любые ее точки.

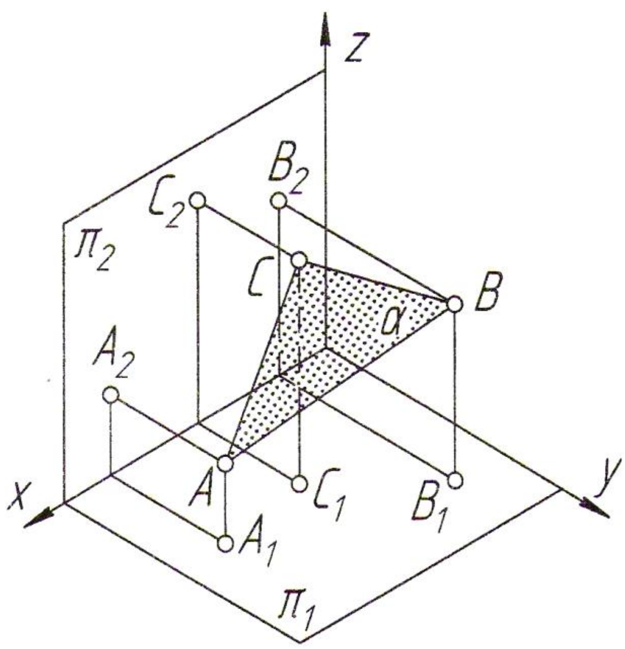
2. Плоскость есть множество точек, равноотстоящих от двух заданных точек.

Плоскость в линейной алгебре – поверхность первого порядка: в декартовой системе координат плоскость может быть задана уравнением первой степени. Общее уравнение плоскости:

$Ax+By+Cz+D=0$, где A, B, C и D – постоянные, причем A, B и C одновременно не равны нулю.

Положение плоскости в пространстве можно определить:

1. Тремя точками, не лежащими на одной прямой (рис. 5.1).
2. Прямой и точкой, не принадлежащей этой прямой (рис. 5.2).
3. Двумя пересекающимися прямыми (рис. 5.3).
4. Двумя параллельными прямыми (рис. 5.4).
5. О положении плоскости относительно плоскостей проекций удобно судить по ее ***следам*** – прямым линиям, по которым плоскость пересекается с плоскостями проекций (рис. 5.5).



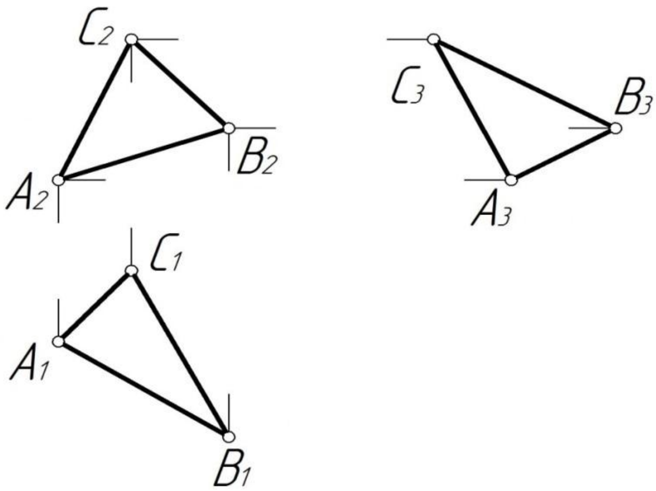


Рисунок 5.1 – Плоскость, заданная тремя точками, не лежащими на одной прямой

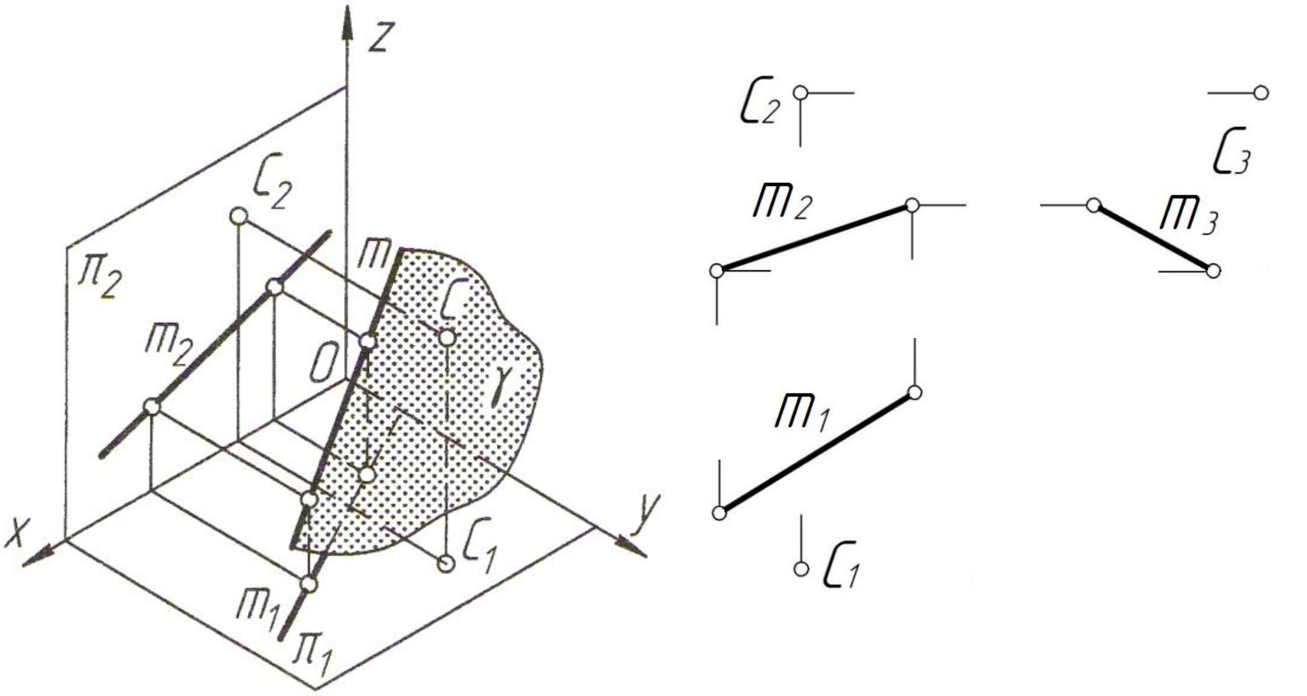


Рисунок 5.2 – Плоскость, заданная прямой и точкой, не принадлежащей этой прямой

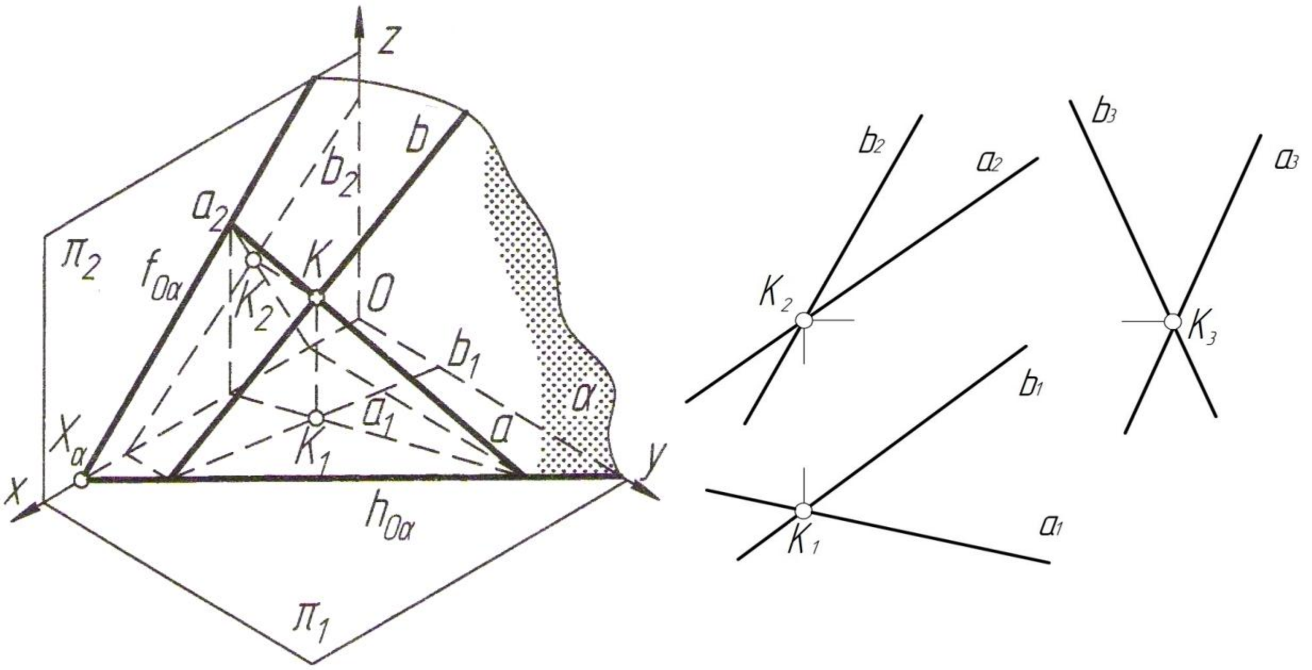


Рисунок 5.3 – Плоскость, заданная двумя пересекающимися прямыми

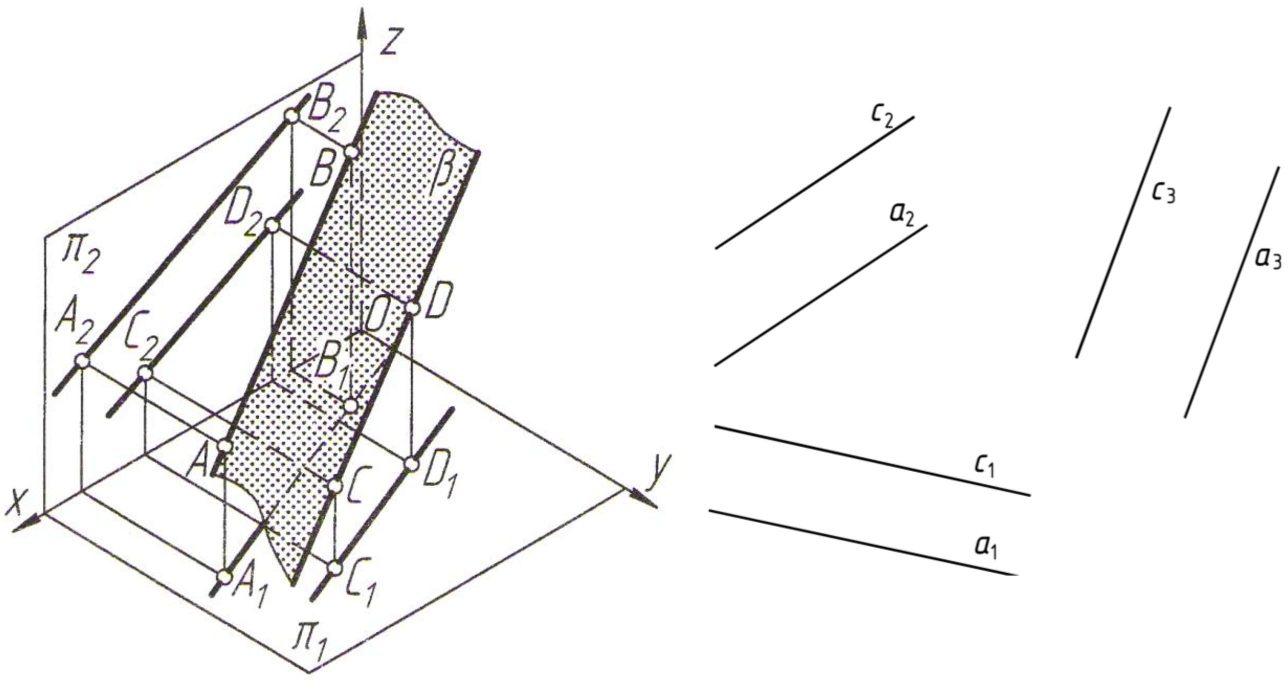


Рисунок 5.4 – Плоскость, заданная двумя параллельными прямыми

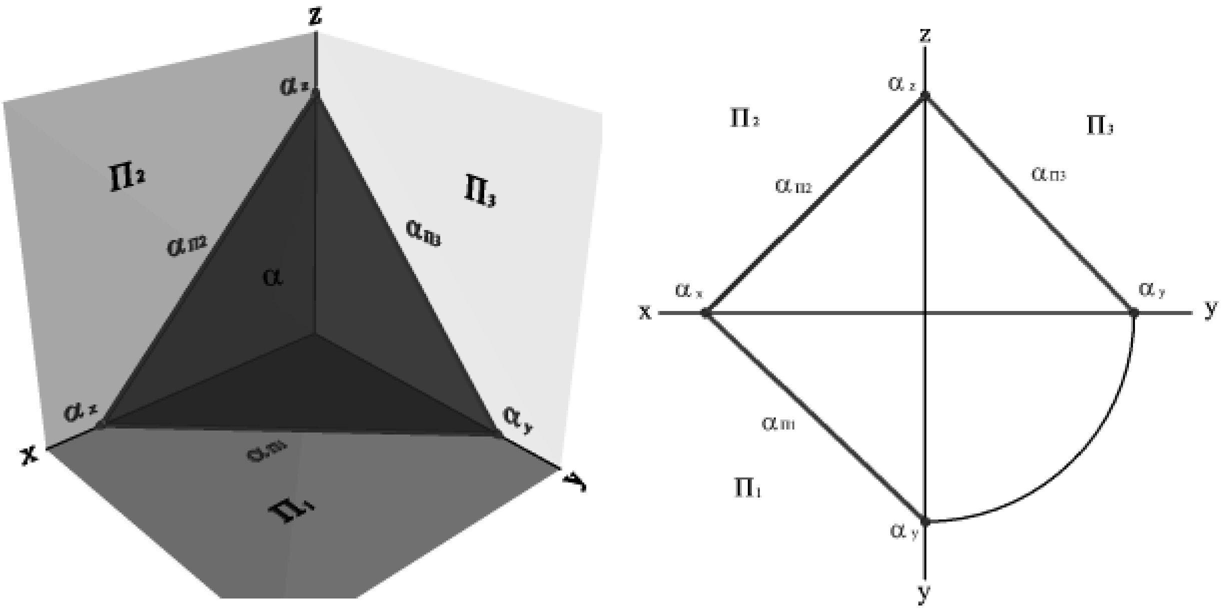


Рисунок 5.5 – Плоскость, заданная следами

5.2. Положение плоскости относительно плоскостей проекций

Плоскость общего положения (не перпендикулярна и не параллельна ни одной плоскости проекций) имеет три следа: горизонтальный $\alpha_{\Pi 1}$, фронтальный $\alpha_{\Pi 2}$, профильный $\alpha_{\Pi 3}$.

Следы плоскости общего положения пересекаются попарно на осях в точках α_x, α_y, α_z. Эти точки называются точками схода следов, их можно рассматривать как вершины трехгранных углов, образованных данной плоскостью с двумя из трех плоскостей проекций.

Каждый из следов плоскости совпадает со своей одноименной проекцией, а две другие разноименные проекции лежат на осях (см. рис. 5.5).

Плоскости ***частного*** положения делятся на ***плоскости уровня*** и ***проецирующие плоскости***.

Проецирующие плоскости – это плоскости, перпендикулярные какой-либо плоскости проекций:

а) Плоскость, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций ($\alpha \perp \Pi_1$), называется ***горизонтально проецирующей плоскостью***. Горизонтальная проекция такой плоскости представляет собой прямую, которая одновременно является ее горизонтальным следом. Горизонтальные проекции всех точек любых фигур в этой плоскости совпадают с горизонтальным следом (рис. 5.6).

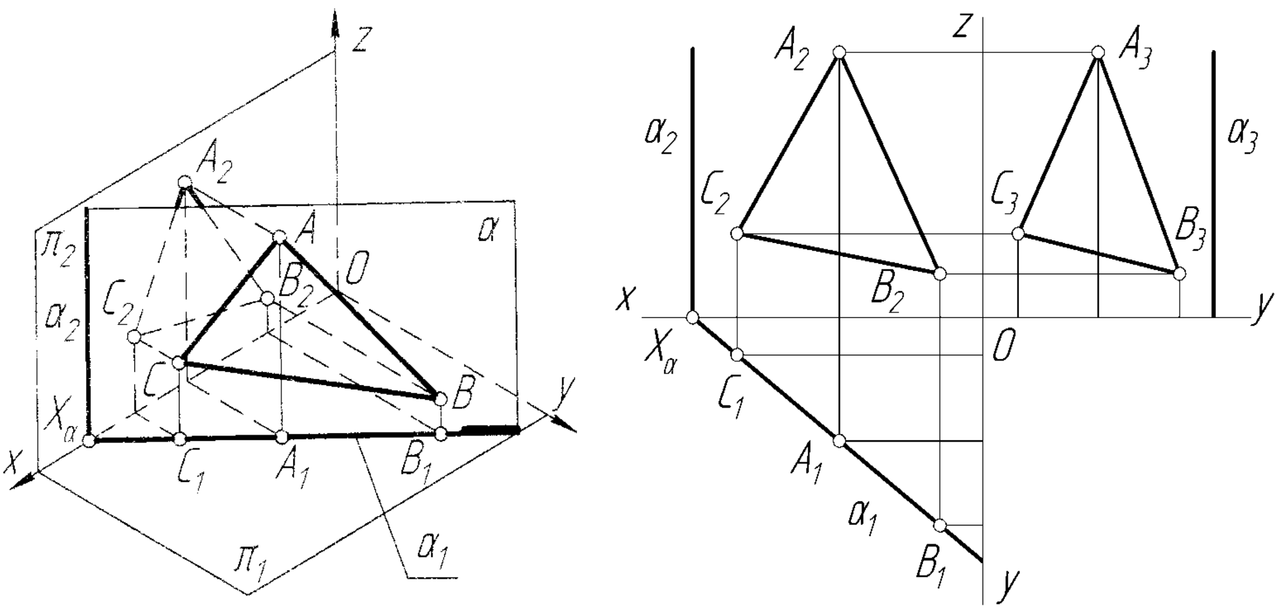


Рисунок 5.6 – Горизонтально проецирующая плоскость

б) Плоскость, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций ($\beta \perp \Pi_2$) – ***фронтально проецирующая плоскость***. Фронтальной проекцией плоскости β является прямая, совпадающая со следом β_2 (рис. 5.7).

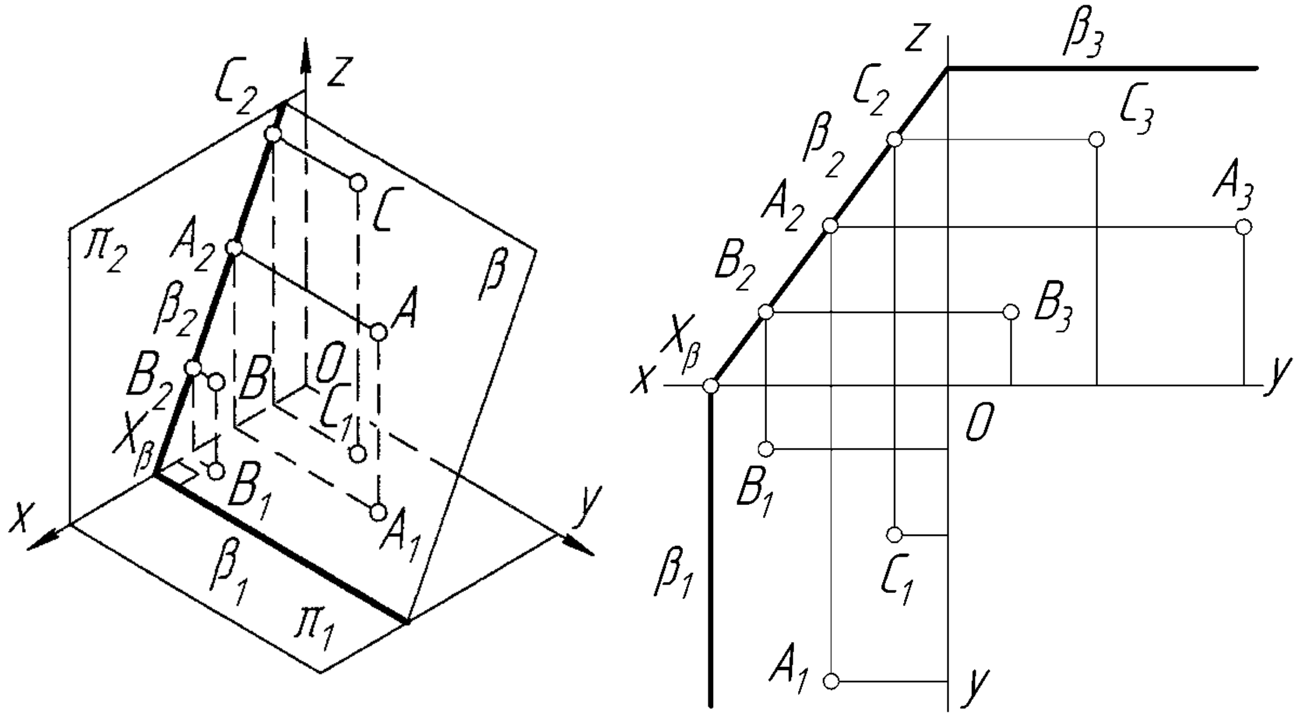


Рисунок 5.7 – Фронтально проецирующая плоскость

в) Плоскость, перпендикулярная профильной плоскости ($\gamma \perp \Pi_3$) – ***профильно проецирующая плоскость*** (рис. 5.8).

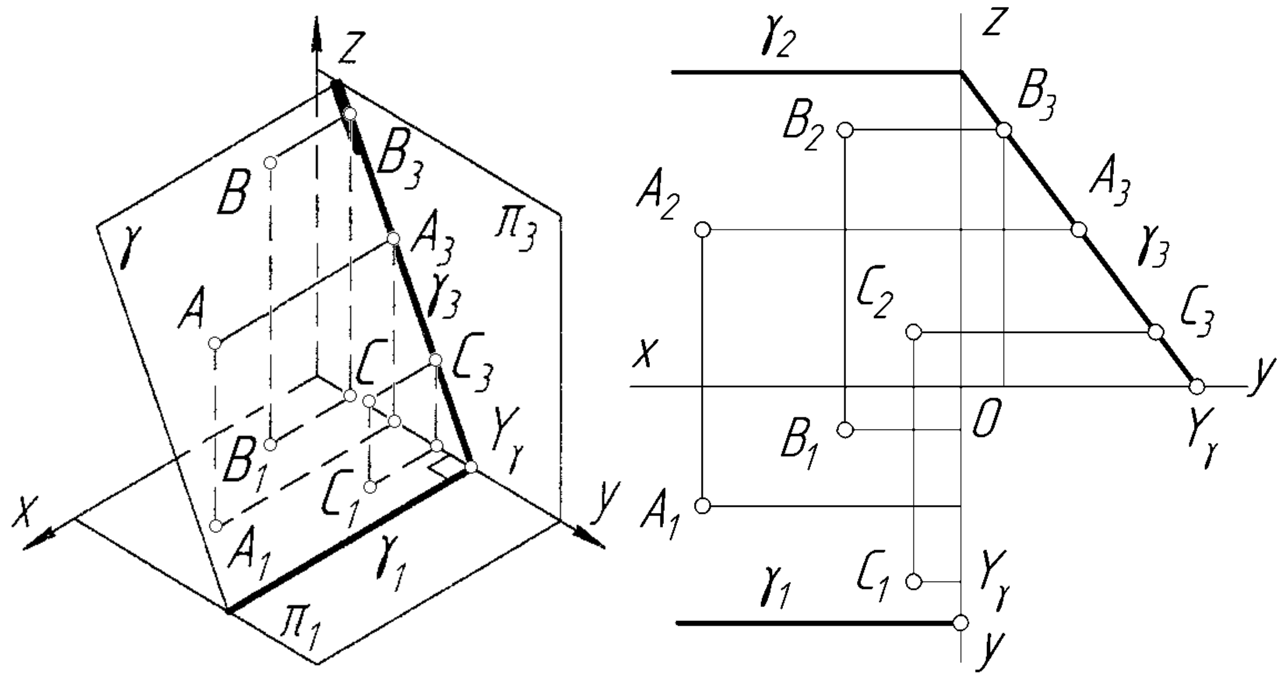


Рисунок 5.8 – Профильно проецирующая плоскость

Плоскости уровня – это плоскости, параллельные какой-либо плоскости проекций:

а) Плоскость, параллельная горизонтальной плоскости проекций ($Г//П_1$) – ***горизонтальная плоскость уровня*** ($Г\perp П_2$, $Г\perp П_3$). Любая фигура в этой плоскости проецируется на плоскость $П_1$ без искажения, а на плоскости $П_2$ и $П_3$ в прямые – следы плоскости $Г_2$ и $Г_3$ (рис. 5.9).

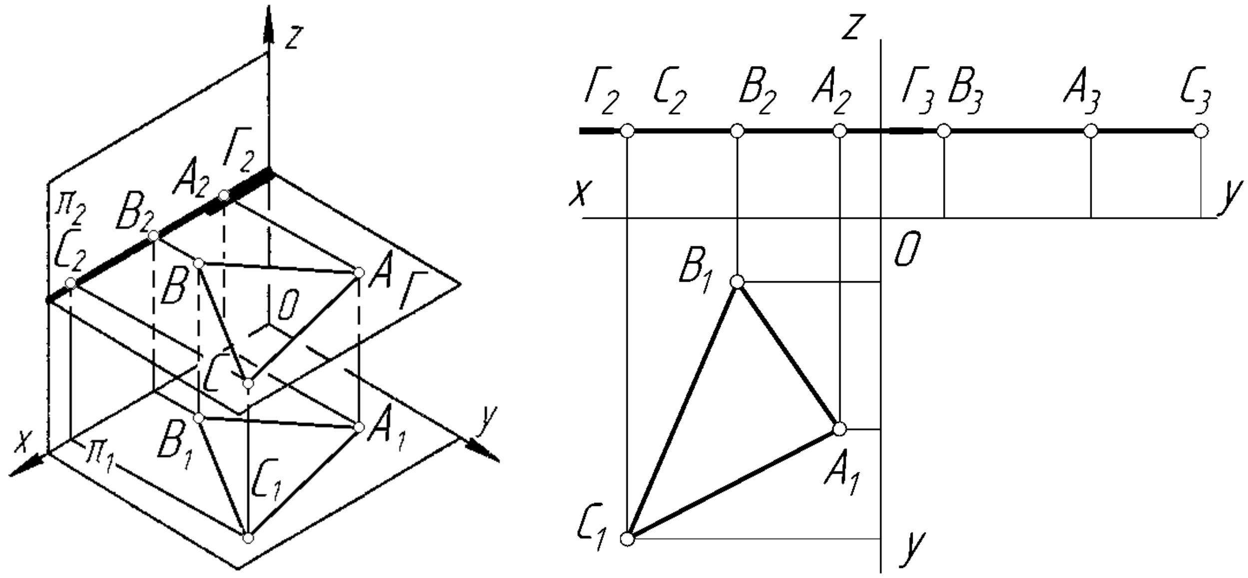


Рисунок 5.9 – Горизонтальная плоскость уровня

б) Плоскость, параллельная фронтальной плоскости проекций ($Ф//П_2$), называется ***фронтальной плоскостью уровня*** ($Ф\perp П_1$, $Ф\perp П_3$). Любая фигура в этой плоскости проецируется на плоскость $П_2$ без искажения, а на плоскости $П_1$ и $П_3$ в прямые – следы плоскости $Ф_1$ и $Ф_3$ (рис. 5.10).

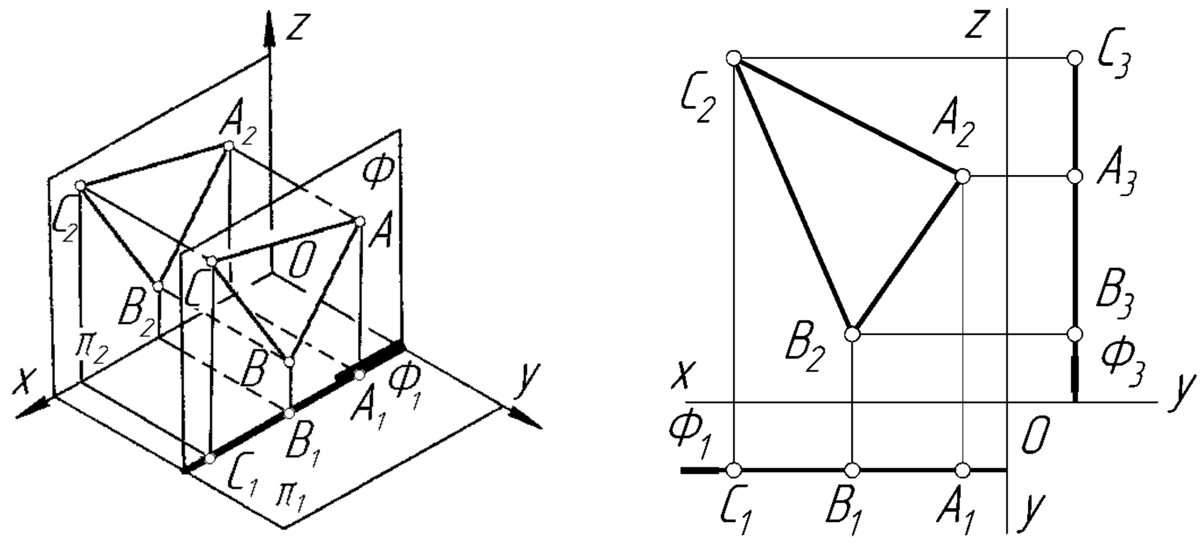


Рисунок 5.10 – Фронтальная плоскость уровня

в) Плоскость, параллельная профильной плоскости проекций ($\Psi // \Pi_3$),называется ***профильной плоскостью уровня*** ($\Psi \perp \Pi_1$, $\Psi \perp \Pi_2$). Любая фигура в этой плоскости проецируется на плоскость Π_3 без искажения, а на плоскости Π_1 и Π_2 в прямые – следы плоскости Ψ_1 и Ψ_2 (рис. 5.11).

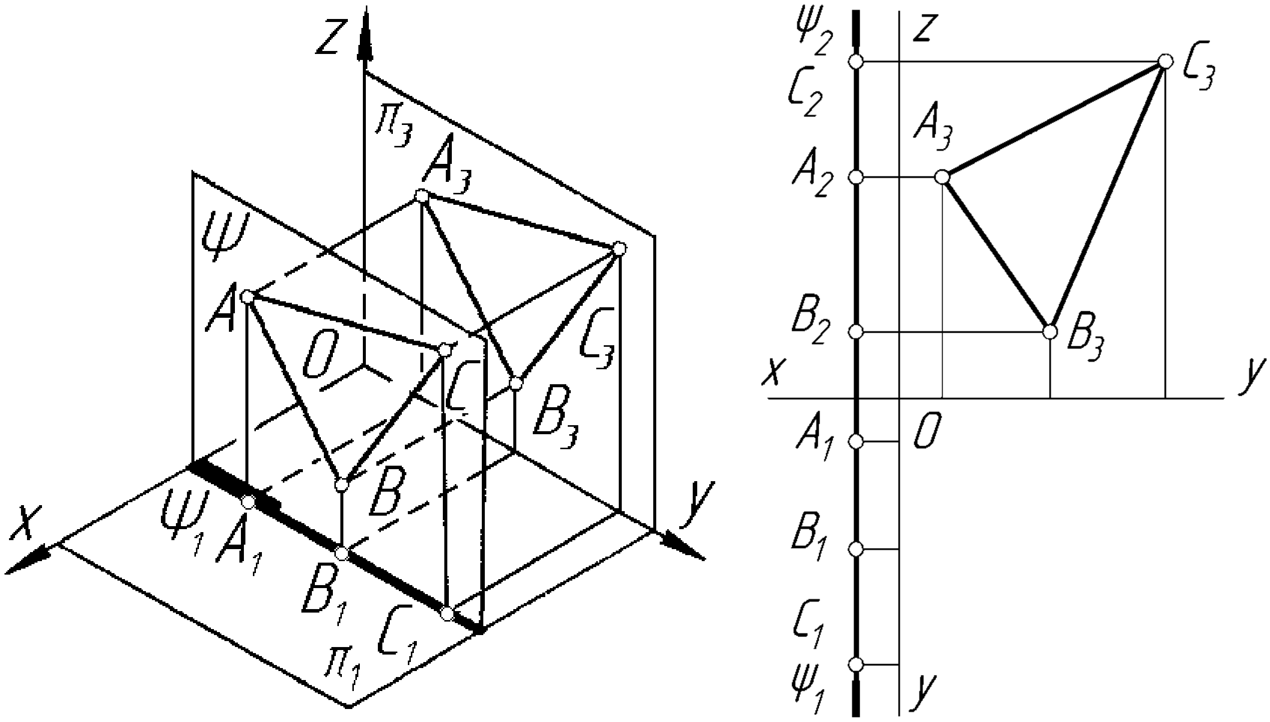


Рисунок 5.11 – Профильная плоскость

5.3. Следы плоскости

Следом плоскости называется линия пересечения плоскости с плоскостями проекций. В зависимости от того, с какой из плоскостей проекций пересекается данная плоскость, различают: ***горизонтальный***, ***фронтальный*** и ***профильный*** следы плоскости.

Каждый след плоскости является прямой, для построения которой необходимо знать две точки либо одну точку и направление прямой (как для построения любой прямой). На рисунке 5.12 показано нахождение следов плоскости $\alpha(ABC)$.

Фронтальный след плоскости $\alpha_{\Pi 2}$ построен как прямая, соединяющая две точки $N_{(AC)}$ и $N_{(AB)}$, являющиеся фронтальными следами соответствующих прямых, принадлежащих плоскости α. Горизонтальный след $\alpha_{\Pi 1}$ – прямая, проходящая через горизонтальные следы прямых BC и AB. Профильный след $\alpha_{\Pi 3}$ – прямая, соединяющая точки (α_y и α_z) пересечения горизонтального и фронтального следов с осями.

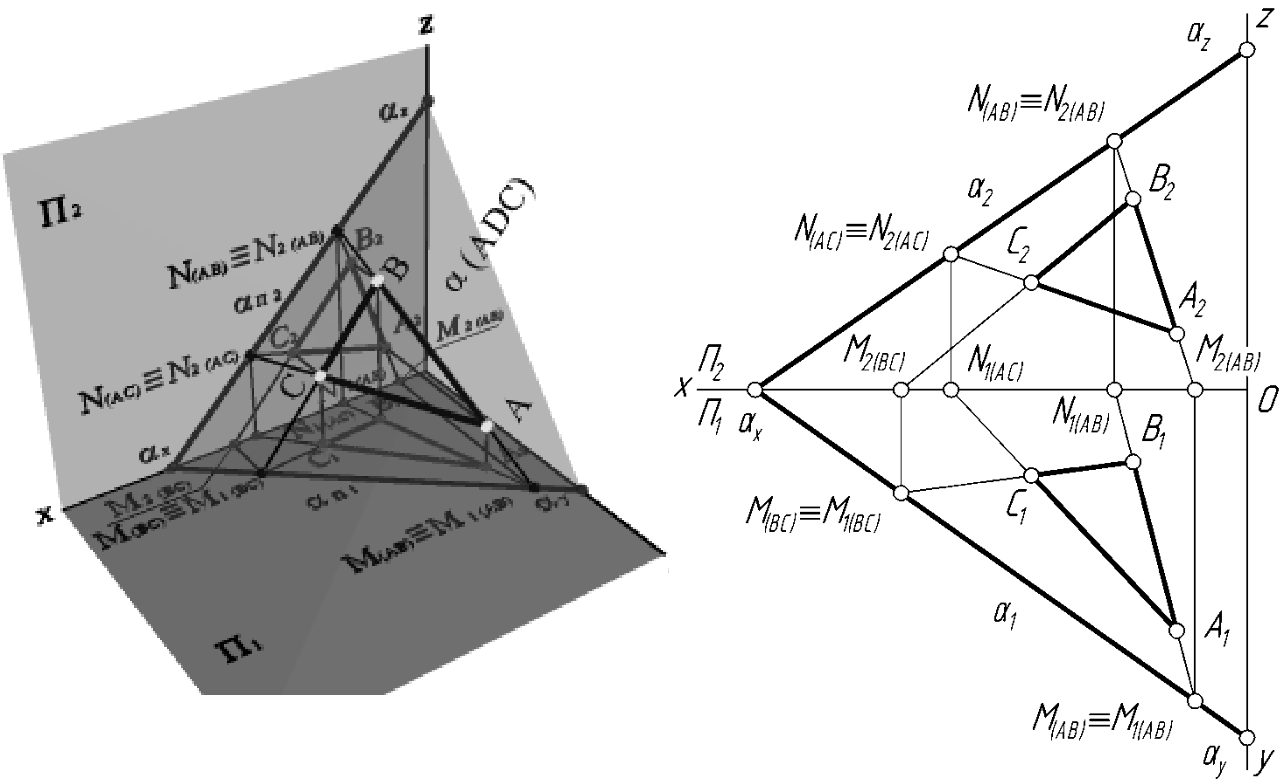


Рисунок 5.12 – Построение следов плоскости

5.4. Главные линии в плоскости

Среди прямых линий, которые могут быть расположены в данной плоскости, особое место занимают прямые четырех направлений.

Горизонтали h – прямые, лежащие в данной плоскости и параллельные горизонтальной плоскости проекций ($h \in ABC$, $h // \Pi_1$, $h_2 // Ox$, $h_3 // Oy$) (рис. 5.13).

Фронтали f – прямые, расположенные в плоскости и параллельные фронтальной плоскости проекций ($f \in ABC$, $f // \Pi_2$, $f_1 // Ox$, $f_3 // Oz$) (рис. 5.14).

Профильные прямые уровня p – прямые, которые находятся в данной плоскости и параллельны профильной плоскости проекций ($p \in ABC$, $p // \Pi_3$, $p_1 \perp Ox$, $p_2 \perp Ox$) (рис. 5.15).

Следует заметить, что следы плоскости можно отнести тоже к главным линиям. Горизонтальный след – это горизонталь плоскости, фронтальный – фронталь и профильный – профильная прямая уровня плоскости.

Линия наибольшего ската и ее горизонтальная проекция образуют линейный угол α, которым измеряется двугранный угол, составленный данной плоскостью и горизонтальной плоскостью проекций (рис. 5.16).

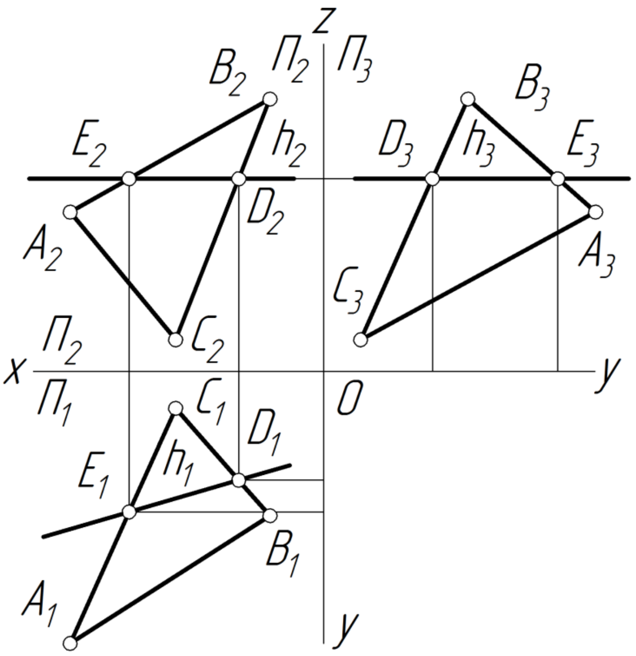


Рисунок 5.13 – Построение горизонтали плоскости

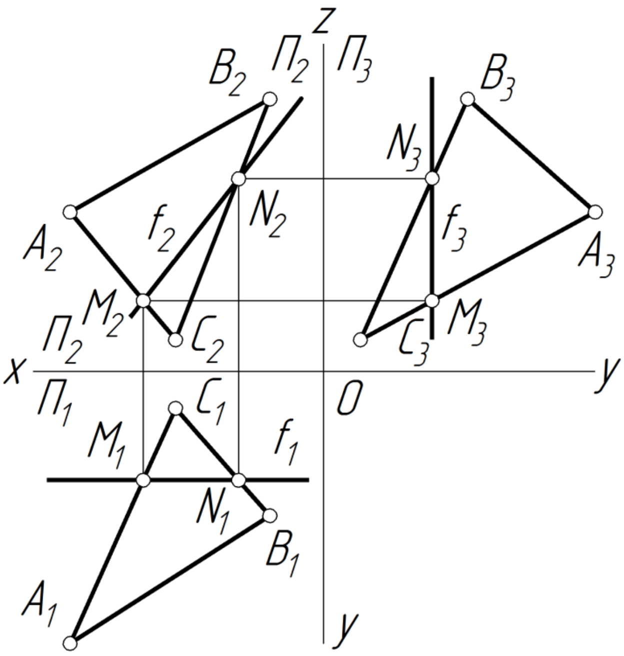


Рисунок 5.14 – Построение фронтали плоскости

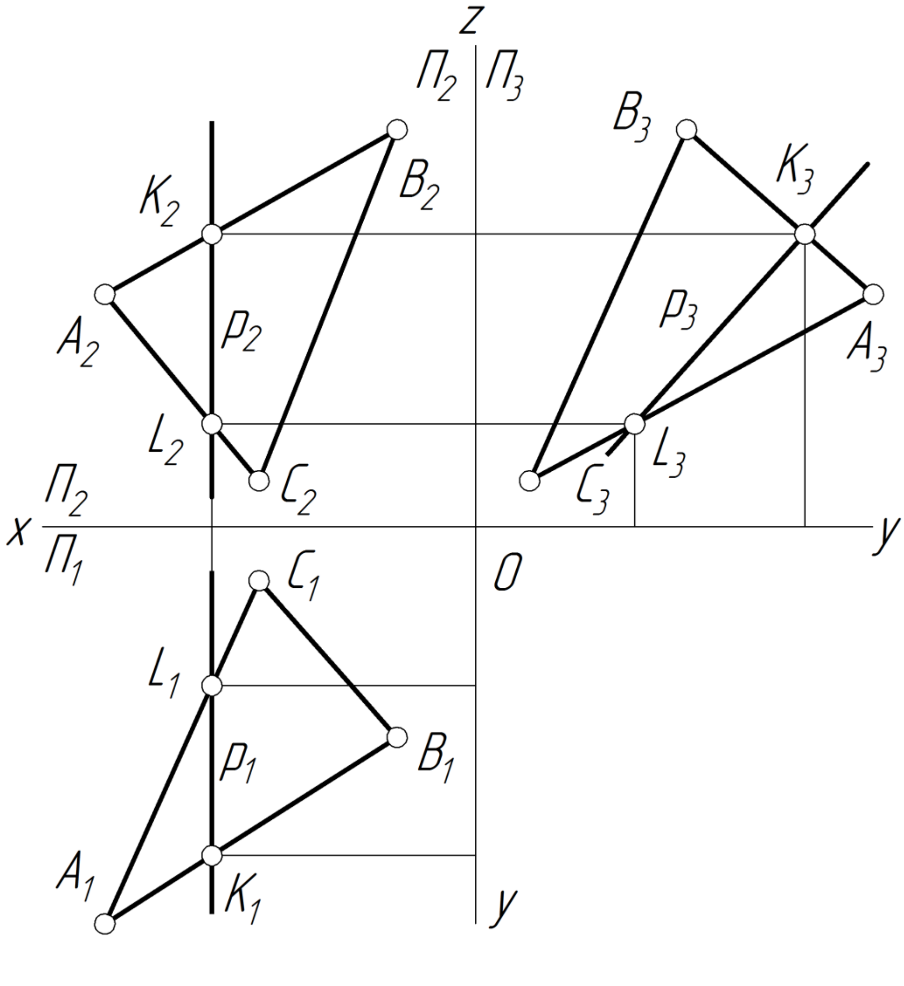


Рисунок 5.15 – Построение профильной прямой уровня плоскости

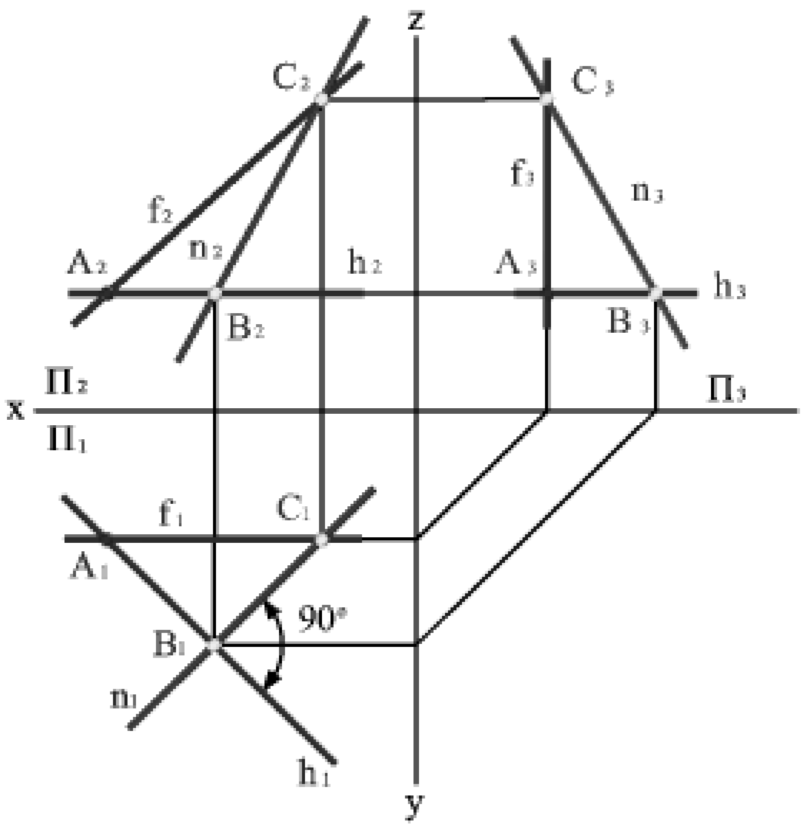


Рисунок 5.16 – Линия наибольшего ската (наклона)

5.5. Взаимное расположение прямой и плоскости

Определение взаимного положения прямой и плоскости – позиционная задача, для решения которой применяется ***способ вспомогательных секущих плоскостей***. Сущность способа заключается в следующем: через прямую проводится вспомогательная секущая плоскость γ и устанавливается относительное положение двух прямых *а* и *в*, последняя из которых является линией пересечения вспомогательной секущей плоскости γ и данной плоскости α (рис. 5.17).

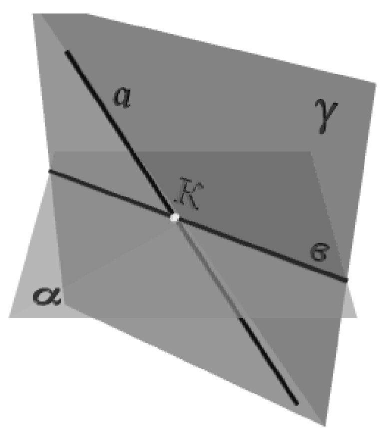


Рисунок 5.17 – Способ вспомогательных секущих плоскостей

Каждому из трех возможных случаев относительного расположения этих прямых соответствует аналогичный случай взаимного расположения прямой и плоскости. Так, если обе прямые совпадают, то прямая *a* лежит в плоскости α, параллельность прямых укажет на параллельность прямой и плоскости и пересечение прямых соответствует случаю, когда прямая *a* пересекает плоскость α. Таким образом, возможны три случая относительного расположения прямой и плоскости:

1. Прямая принадлежит плоскости, если две ее точки принадлежат той же плоскости (рис. 5.18).

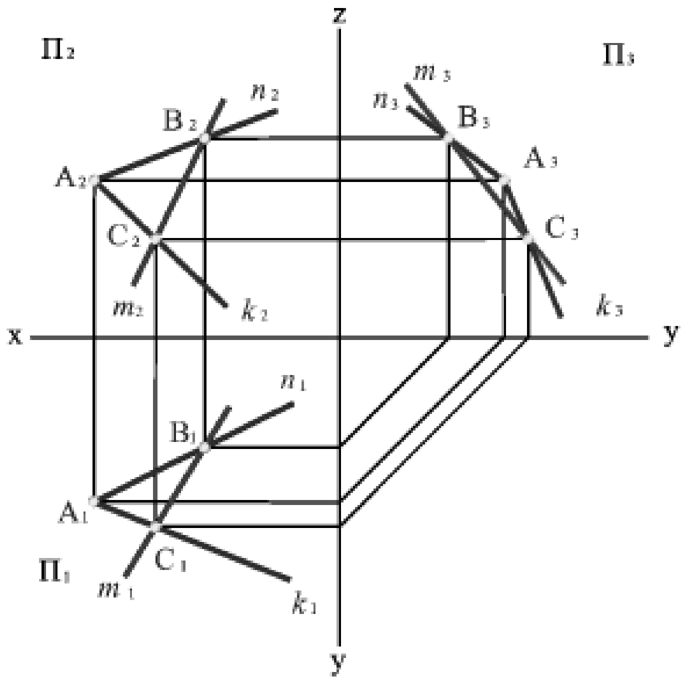


Рисунок 5.18 – Прямая и плоскость имеют две общие точки

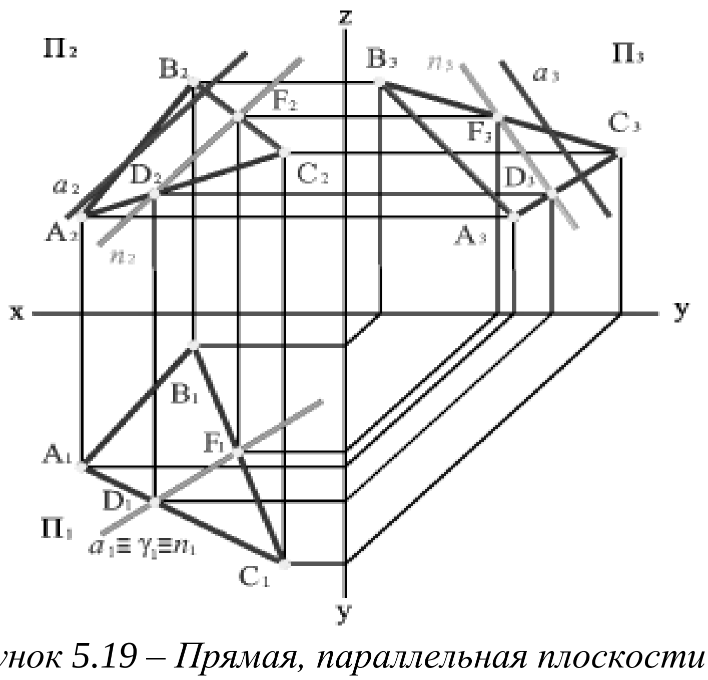


Рисунок 5.19 – Прямая, параллельная плоскости

2. Прямая параллельна плоскости.

При решении вопроса о параллельности прямой и плоскости необходимо опираться на известное положение стереометрии: ***прямая параллельна плоскости, если она параллельна одной из прямых, лежащих в этой плоскости***. Для оценки взаимного положения прямой a и плоскости ABC (рис. 5.19) через прямую a проводится вспомогательная секущая плоскость γ – в данном случае горизонтально проецирующая плоскость. Находится линия пересечения плоскостей γ и ABC – прямая n (DF). Проекция прямой n на горизонтальную плоскость проекций совпадает с проекцией a_1 и со следом плоскости γ. Проекция прямой n_2 параллельна a_2, n_3 параллельна a_3, следовательно, прямая a параллельна плоскости ABC.

3. Прямая пересекает плоскость, частный случай – прямая перпендикулярна плоскости.

Нахождение точки пересечения прямой и плоскости – основная задача начертательной геометрии. Можно сформулировать алгоритм решения задачи следующим образом (рис. 5.20):

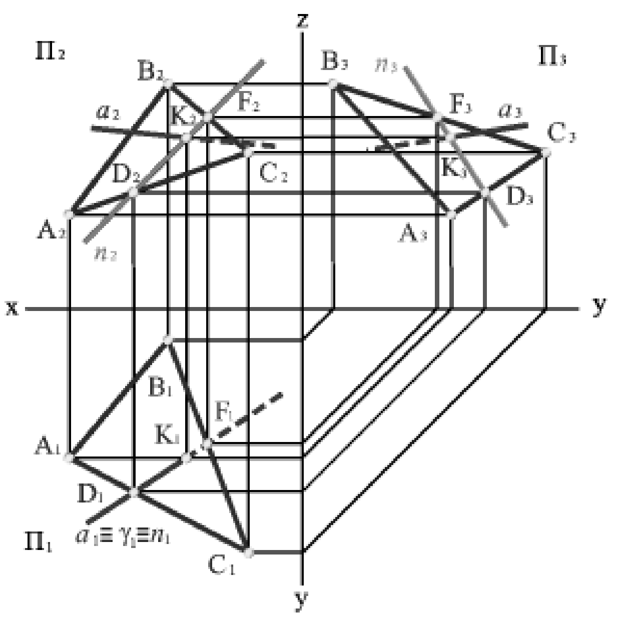


Рисунок 5.20 – Нахождение точки пересечения прямой и плоскости

1. Построение вспомогательной секущей плоскости γ (горизонтально проецирующая плоскость), которую проводят через прямую a.

2. Построение линии пересечения вспомогательной плоскости γ и заданной плоскости α.

3. Определение искомой точки K, как точки пересечения двух прямых, заданной – a и полученной в результате пересечения плоско-

стей n ($K=a \cap n$). В качестве вспомогательной плоскости γ рекомендуется брать одну из проецирующих плоскостей.

4. Определение видимости прямой a относительно плоскости α.

Рассмотрим частный случай – прямая, перпендикулярная плоскости.

Докажем следующую теорему о перпендикуляре к плоскости: ***если прямая перпендикулярна плоскости, то горизонтальная проекция этой прямой перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали плоскости, а фронтальная проекция – фронтальной проекции фронтали плоскости.***

Пусть прямая n, перпендикулярная плоскости, пересекает плоскость BCD в точке N. Тогда по условию n перпендикулярна h – горизонтали, проведенной в плоскости BCD, а на основании теоремы о проецировании прямого угла можно утверждать, что на горизонтальную плоскость проекций они проецируются под прямым углом, то есть $n_1 \perp h_1$. Аналогично для фронтали – $f \perp n \Rightarrow f_2 \perp n_2$.

Справедлива и обратная теорема: ***если проекции прямой перпендикулярны одноименным проекциям соответствующих главных линий плоскости (горизонтали и фронтали), то такая прямая перпендикулярна плоскости.***

Доказательство следует из теоремы о проецировании прямого угла.

Исходя из рассмотренных теорем, можно решить задачу о построении перпендикуляра, проведенного к плоскости общего положения из точки A (рис. 5.21).

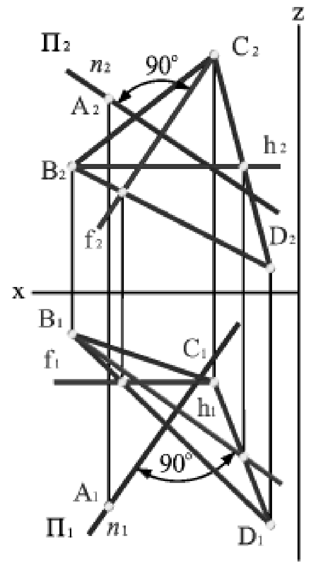


Рисунок 5.21 – Построение прямой, перпендикулярной плоскости общего положения

5.6. Взаимное расположение точки и плоскости

Возможны два варианта взаимного расположения точки и плоскости: либо точка принадлежит плоскости, либо нет. Если точка принадлежит плоскости, то из трех проекций, определяющих положение точки в пространстве, произвольно задать можно только одну.

Рассмотрим пример (рис. 5.22): построение проекции точки A, принадлежащей плоскости общего положения, заданной двумя параллельными прямыми $\alpha(a//b)$.

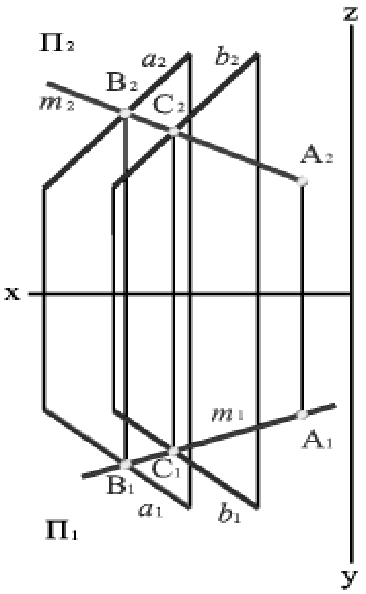


Рисунок 5.22 – Точка, принадлежащая плоскости

Через точку A_2 проводится проекция прямой m_2, пересекающая проекции прямых a_2 и b_2 в точках C_2 и B_2 ($C \in b, B \in a \Rightarrow m \in \alpha$). Построив проекции точек C_1 и B_1, определяющих положение m_1, находят горизонтальную проекцию точки A ($A_1 \in m_1, m \in \alpha \Rightarrow A \in \alpha$).

5.7. Взаимное расположение плоскостей. Параллельные плоскости

Две плоскости в пространстве могут быть либо взаимно параллельны, в частном случае совпадая друг с другом, либо пересекаться. Взаимно перпендикулярные плоскости представляют собой частный случай пересекающихся плоскостей.

Плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости.

Это определение хорошо иллюстрируется задачей, когда через точку B необходимо провести плоскость, параллельную плоскости, заданной двумя пересекающимися прямыми a и b (рис. 5.23).

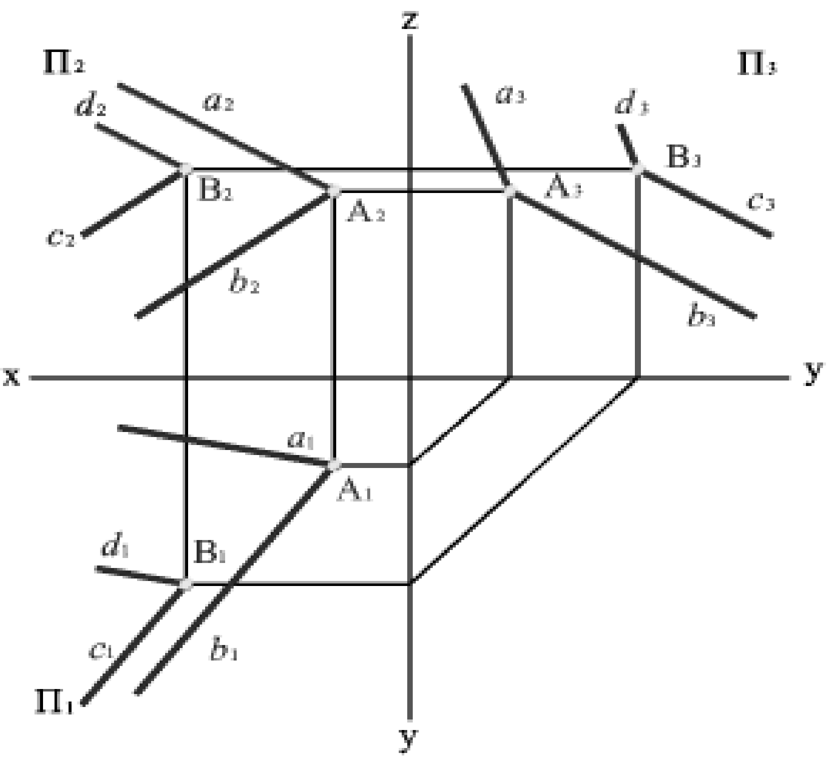


Рисунок 5.23 – Параллельные плоскости

5.8. Пересекающиеся плоскости

Линией пересечения двух плоскостей является прямая, для построения которой достаточно определить две ее точки, общие для обеих плоскостей, либо одну точку и направление линии пересечения плоскостей.

Рассмотрим построение линии пересечения двух плоскостей, когда одна из них проецирующая (рис. 5.24). Пусть плоскость общего положения задана треугольником *ABC*, а вторая плоскость – горизонтально проецирующая α.

Решение задачи заключается в нахождении двух точек, общих для данных плоскостей, через которые можно провести прямую. Плоскость, заданную треугольником *ABC*, можно представить как отрезки прямых (*AB*), (*AC*), (*BC*). Точка пересечения отрезка прямой (*AB*) с плоскостью α – точка *D*, прямой (*AC*) – *F*. Отрезок [*DF*] определяет линию пересечения плоскостей.

Перейдем к общему случаю. Пусть в пространстве заданы две плоскости общего положения α (ν,μ) и β (*ABC*) (рис.5.25).

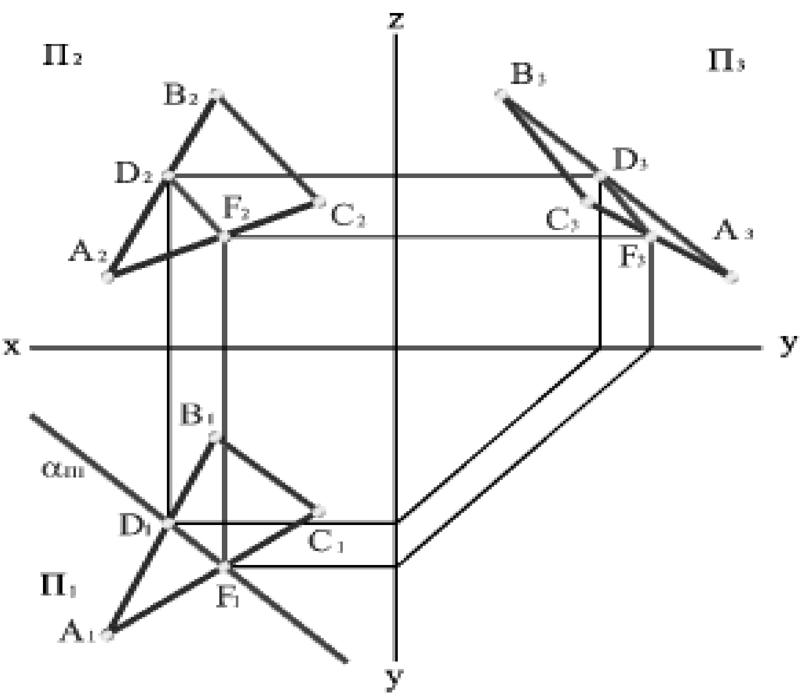


Рисунок 5.24 – Пересечение плоскости общего положения с горизонтально проецирующей плоскостью

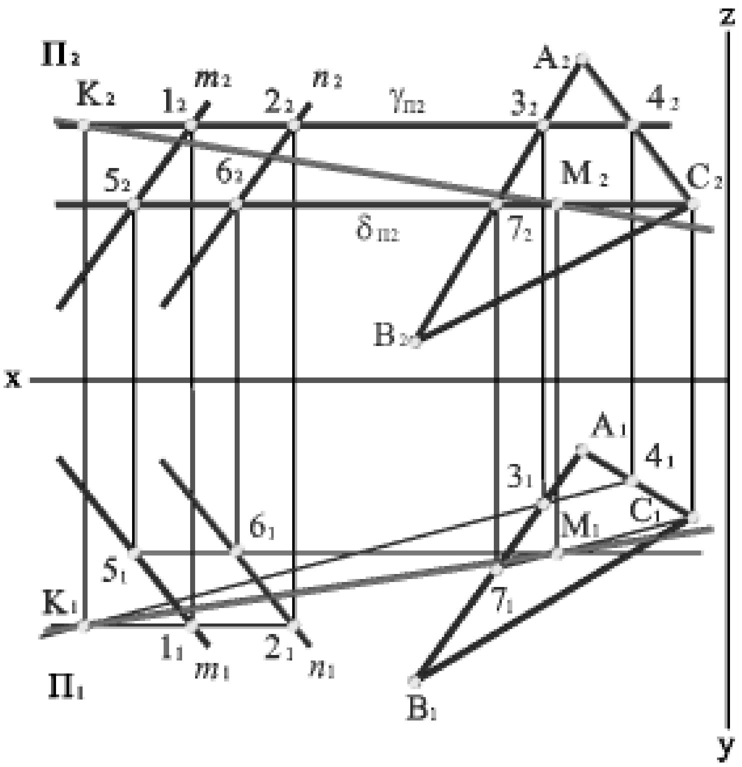


Рисунок 5.25 – Пересечение плоскостей общего положения

Рассмотрим на эпюре построение линии пересечения плоскостей $\alpha(m//n)$ и $\beta(ABC)$. По аналогии с предыдущей задачей для нахождения линии пересечения данных плоскостей проводятся вспомогательные секущие плоскости γ и δ. Находятся линии пересечения этих плоскостей с рассматриваемыми плоскостями. Плоскость γ пересекает плоскость α по прямой (*12*), а плоскость β – по прямой (*34*). Точка *K* – точка пересечения этих прямых, одновременно принадлежит трем плоскостям α, β и γ, являясь таким образом точкой, принадлежащей линии пересечения плоскостей α и β. Плоскость δ пересекает плоскости α и β по прямым (*56*) и (*7C*) соответственно, точка их пересечения *M* расположена одновременно в трех плоскостях α, β, δ и принадлежит прямой пересечения плоскостей α и β. Таким образом, найдены две точки, принадлежащие линии пересечения плоскостей α и β – прямая (*KM*).

5.9. Построение взаимно перпендикулярных плоскостей

Из стереометрии известно, что две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них проходит через перпендикуляр к другой. Через точку *A* можно провести множество плоскостей, перпендикулярных данной плоскости α(*f*,*h*). Эти плоскости образуют в пространстве пучок плоскостей, осью которого является перпендикуляр, опущенный из точки *A* на плоскость α. На эпюре это будет выглядеть следующим образом (рис. 5.26): *n* – перпендикуляр, восстановленный из точки *A* к плоскости α(*f*,*h*); *m* – произвольная прямая, проведенная через точку *A*.

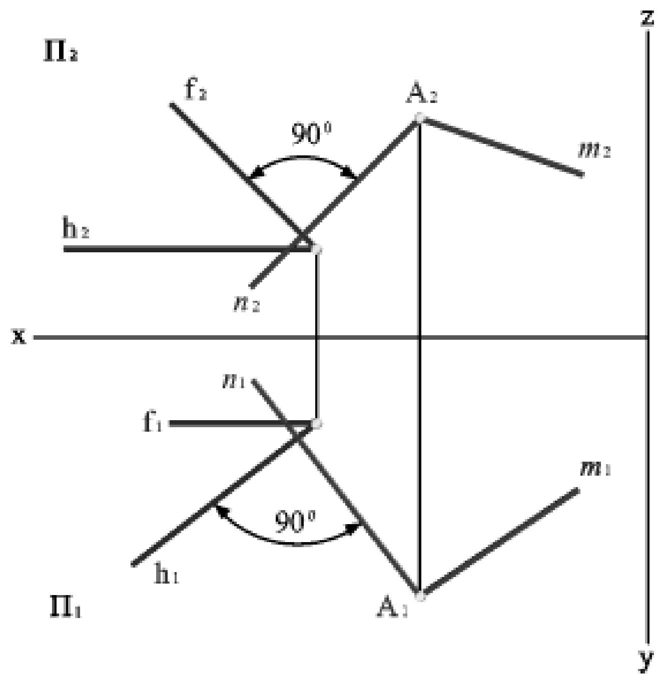


Рисунок 5.26 – Взаимно перпендикулярные плоскости

Примеры решения задач

Пример 5.1.

Задание: построить три проекции плоскости общего положения $\Omega(a \cap b)$.

Решение: построим две проекции плоскостей (рис. 5.27). Так как у этих проекций только точка *K* будет зависеть от линии связи, то, изобразив горизонтальную и фронтальную проекции этой точки и проведя через них пару прямых, получим чертеж плоскости $\Omega(a \cap b)$.

Далее строим третьи проекции точек *A* и *B,* выбрав их таким образом, чтобы у этих точек были одинаковыми координаты y ($y_A = y_B$). Далее проводим постоянную прямую k через вершину ломаной линии K_3K_1 и определяем профильные проекции точек *A* и *B*.

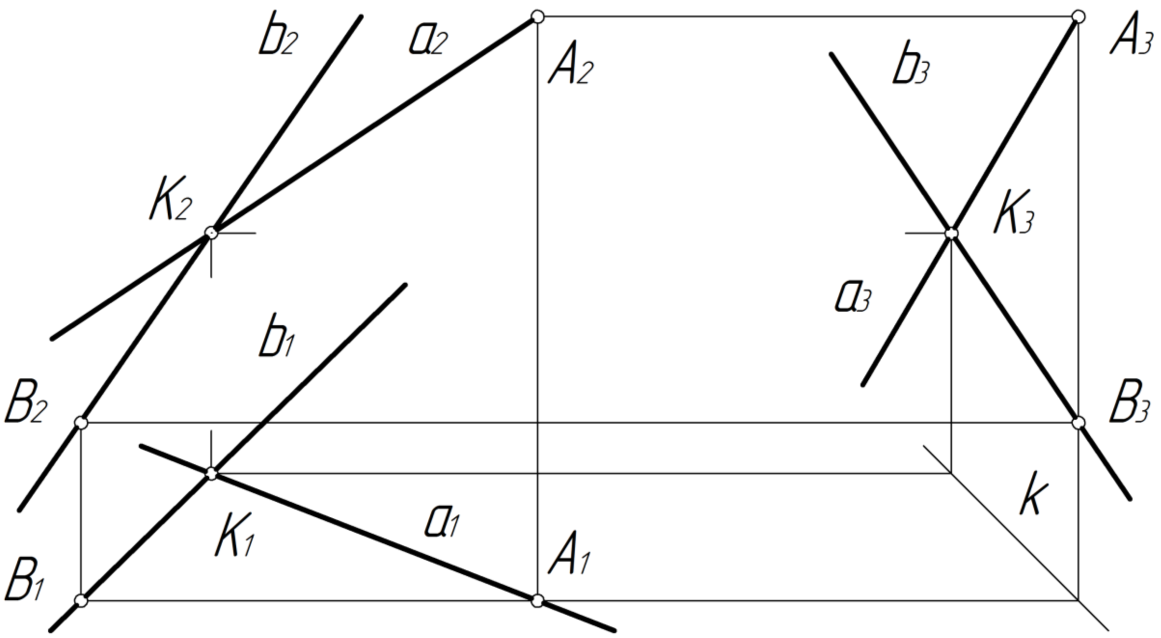


Рисунок 5.27 – Пример 5.1

Пример 5.2.

Задание: построить проекции прямой *a*, принадлежащей ΔABC (рис. 5.28).

Решение: на любой из проекций проводим прямую *a*. В данном случае на горизонтальной проекции (рис. 5.29). По линиям связи определяем положение фронтальных проекций точек: *1* на стороне треугольника *AC* и *2 – BC.*

Так как на профильной проекции треугольник спроецировался в виде отрезка прямой линии (профильно проецирующая плоскость), проекции любой линии, принадлежащей плоскости, будут лежать на этой прямой.

Здесь же и будет располагаться третья проекция прямой линии. Поэтому отпадает необходимость нахождения профильных проекций точек *1* и *2*.

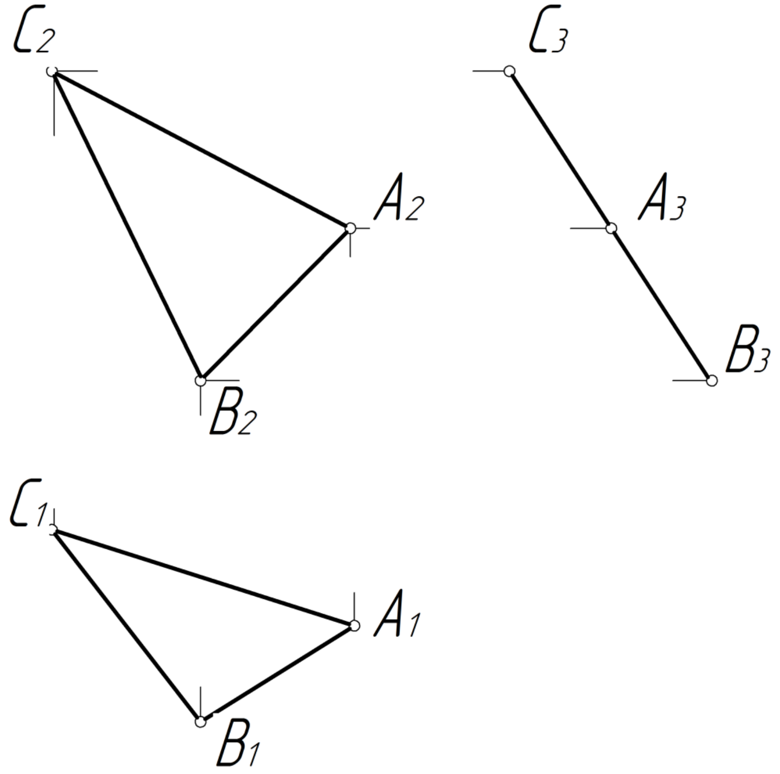


Рисунок 5.28 – Задание примера 5.2

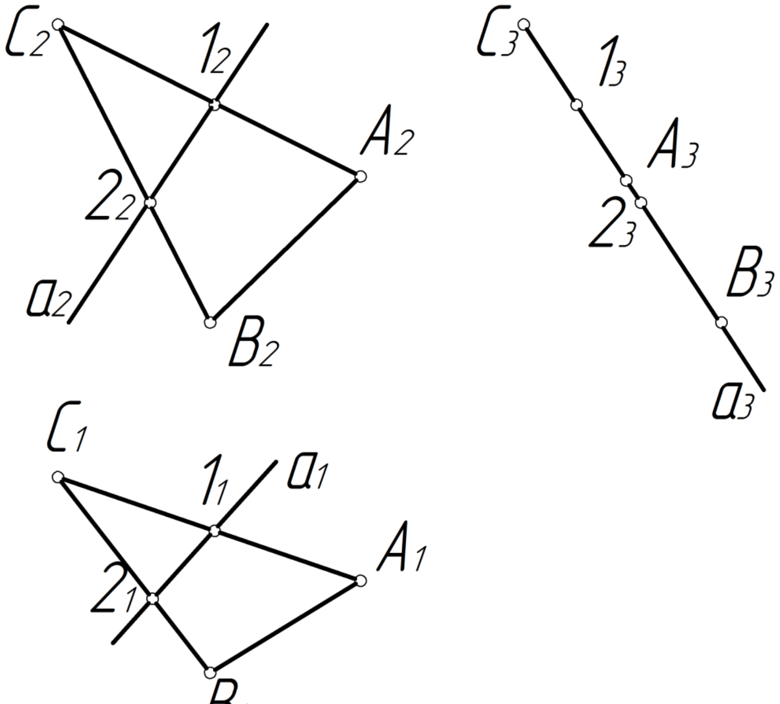


Рисунок 5.29 – Решение примера 5.2

Пример 5.3.

Задание: построить фронтальную проекцию отрезка [BC], параллельного плоскости $\Omega(a \cap b)$ (рис. 5.30). Определить видимость отрезка.

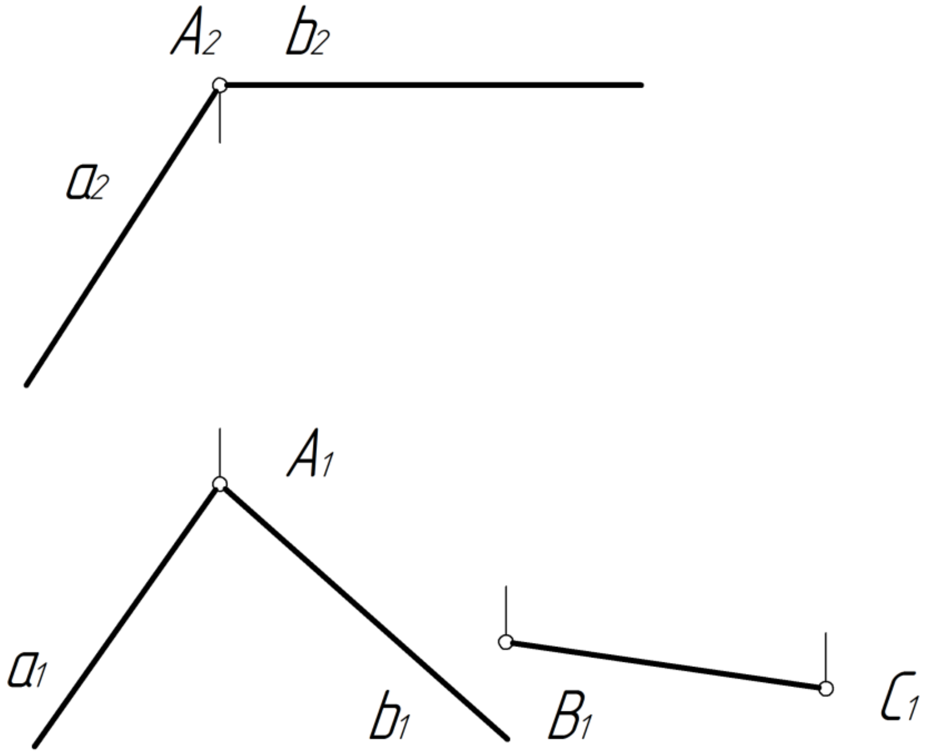


Рисунок 5.30 – Задание примера 5.3

Решение: на рисунке 5.31 показано решение данной задачи. На основании признака параллельности прямой и плоскости необходимо провести проекции прямой, параллельной любой прямой в плоскости. При решении задачи достаточно в плоскости $\Omega(a \cap b)$ провести прямую, параллельную горизонтальной проекции отрезка [BC]. Затем определить фронтальную проекцию этой прямой, параллельно которой по линии связи определить фронтальную проекцию отрезка [BC]. После определения видимости задача будет считаться решенной.

На рисунке 5.31 горизонтальная проекция прямой, принадлежащей плоскости $\Omega(a \cap b)$, конкурирует с отрезком [BC]. По линиям связи точек D и E определяем фронтальную проекцию прямой, принадлежащей плоскости. Далее параллельно по линиям связи откладываем фронтальную проекцию отрезка [BC]. Фронтальная проекция отрезка [BC] будет принадлежать фронтальной проекции плоскости, поэтому и сам отрезок кажется принадлежащим плоскости, что будет неверным решением.

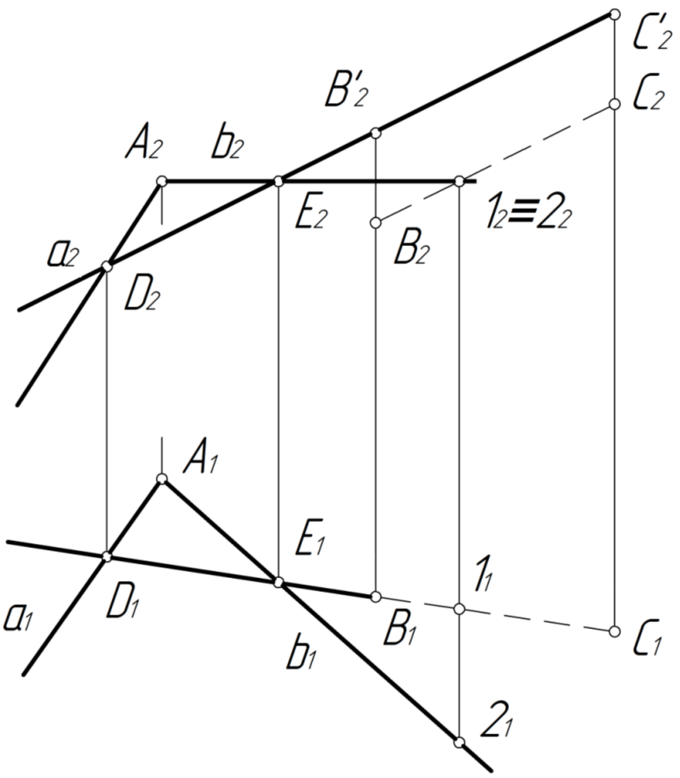


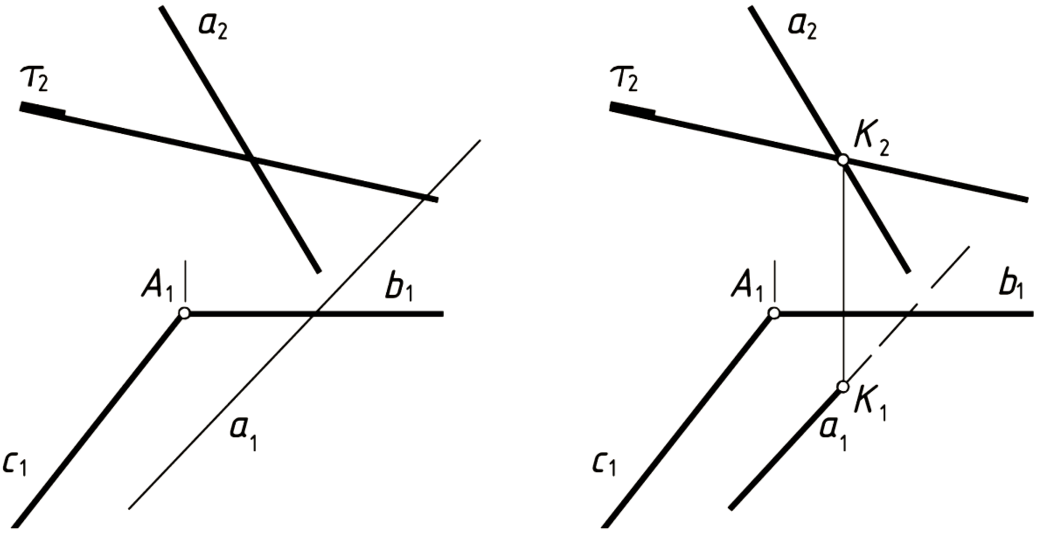
Рисунок 5.31 – Решение примера 5.3

Видимость определяем по конкурирующим точкам. Для этого удлиним проекции прямой b до пересечения с фронтальной проекцией отрезка $[BC]$. Точку *2* отметим на прямой b, а точку *1* – на отрезке $[BC]$. По горизонтальной проекции определим, что на фронтальной проекции видима точка *2*, принадлежащая плоскости, а это значит, что отрезок будет невидимым, то есть находится под плоскостью. Поэтому проекцию отрезка B_2C_2 показываем невидимой. Понятно, что и горизонтальная проекция отрезка тоже будет невидимой.

Пример 5.4.

Задание: определить точку пересечения прямой a с плоскостью $\tau(c \cap b)$ (рис. 5.32, *а*). Показать видимость проекций.

Решение: точку пересечения определяем по фронтальной проекции – K_2 (рис. 5.32, *б*). По линии связи определяем горизонтальную проекцию – K_1. На фронтальной проекции прямая a видна как сверху, так и снизу плоскости. Для определения видимости на горизонтальной плоскости проекций нет необходимости использовать конкурирующие точки – достаточно посмотреть по направлению взгляда на горизонтальную плоскость проекций и увидим, в каком месте плоскость τ закрывает прямую a.



а *б*

Рисунок 5.32 – Пример 5.4

Пример 5.5.

Задание: определить точку пересечения прямой и плоскости (рис. 5.33).

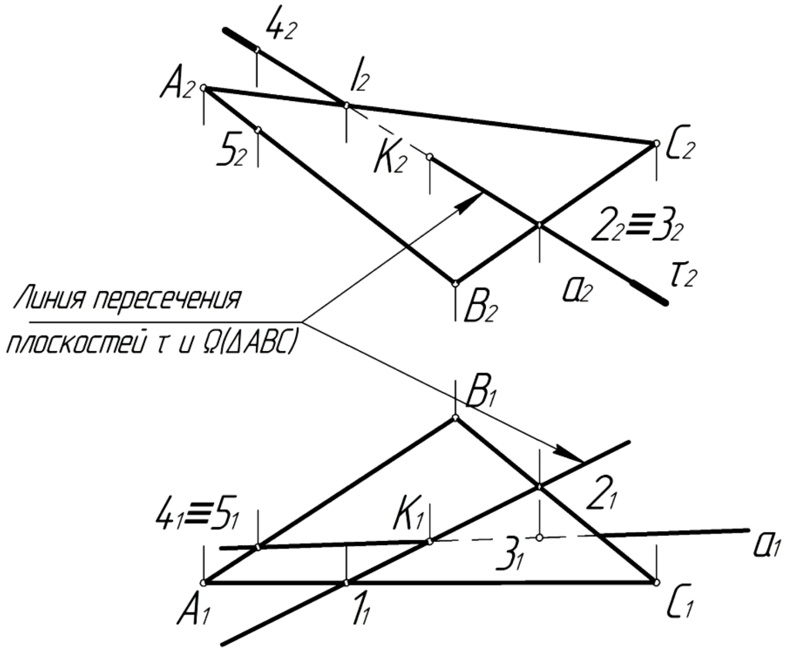


Рисунок 5.33 – Пример 5.5

Решение задачи по определению точки пересечения прямой с плоскостью показано на рисунке 5.33. В качестве вспомогательной плоскости выбрана фронтально проецирующая плоскость τ, которая пересечет плоскость Ω(Δ*ABC*) по прямой (12). Точкой пересечения прямой *a* и плоскости Ω(Δ*ABC*) будет точка *K*, так как она будет принадлежать обеим плоскостям и прямой.

Видимость участков прямой определяем по конкурирующим точкам. По горизонтальной проекции определяем, что точка *3*, принадлежащая прямой *a*, будет ближе, чем точка *2*, принадлежащая треугольнику *ABC*. Значит, на фронтальной проекции точка *3* будет видима или участок прямой *2K* будет видимым. По фронтальной проекции определяем, что точка *4* будет выше точки *5*, то есть на горизонтальной проекции видимой будет точка *4*, а значит, и участок прямой *4K* будет видимым.

В качестве посредника можно выбрать линию [*12*], принадлежащую плоскости (конкурирующую с одной из проекций прямой).

Пример 5.6.

Задание: по комплексному чертежу определить угол наклона к горизонту крыши здания (рис. 5.34).

Решение: угол наклона крыши здания к горизонту – угол наклона линии наибольшего ската по отношению к горизонтальной плоскости. Таким образом, задача сводится к построению линии наибольшего ската и определению угла между этой линией и горизонтальной плоскостью проекций.

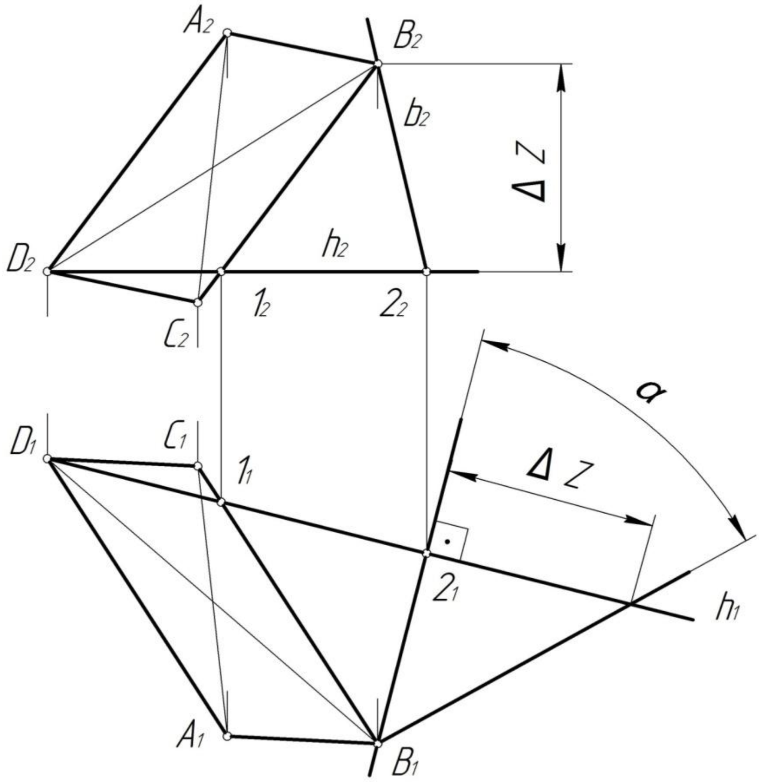


Рисунок 5.34 – Пример 5.6

Прежде чем приступать к решению задачи, проверим, является ли четырехугольник, представленный на рисунке 5.34, плоским. Для этого проведем диагонали многоугольника. Так как точка пересечения лежит на одной линии связи, то точка принадлежит фигуре, следовательно, данный четырехугольник – фигура плоская.

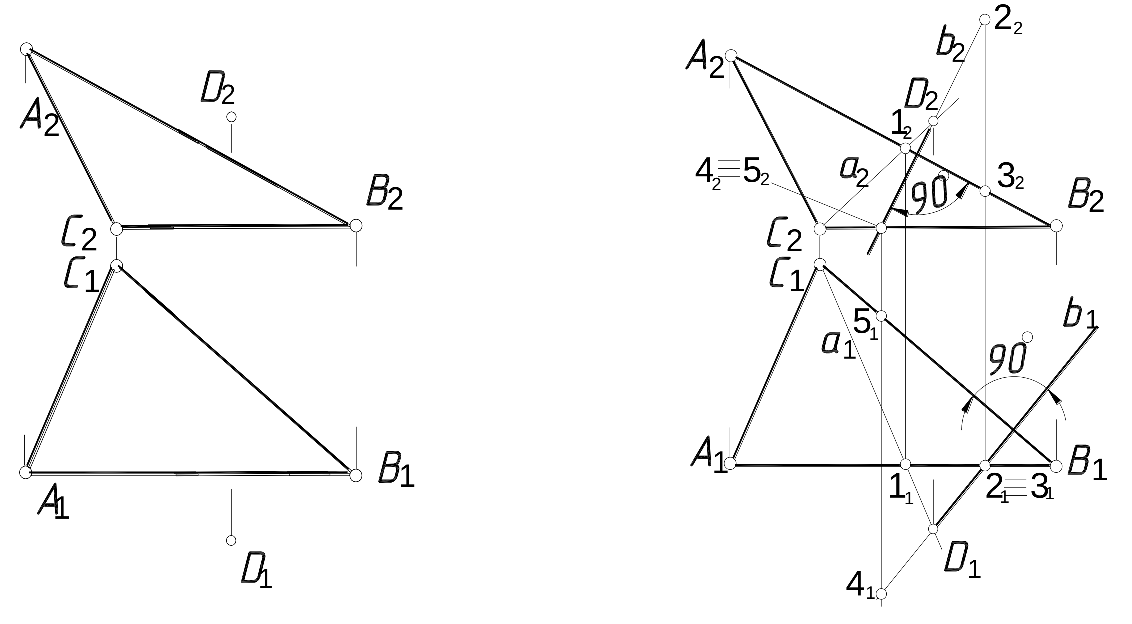
Линия наибольшего ската будет перпендикулярна к горизонтальной линии уровня, у которой фронтальная проекция горизонтальна. Поэтому через фронтальную проекцию точки D – D_2 проводим горизонтальную линию, которая пересечет проекцию стороны BC – B_2C_2 в точке 1_2. По линии связи определяем горизонтальную проекцию точки *1* и показываем горизонтальную проекцию прямой.

Теперь строим горизонтальную проекцию линии наибольшего ската. Проводим ее горизонтальную проекцию через проекцию точки *B* перпендикулярно горизонтальной проекции горизонтали. Далее показываем горизонтальную проекцию точки *2* в точке пересечения горизонтальных проекций горизонтальной линии уровня и линии ската. Наконец, по линии связи определяем фронтальную проекцию точки *2* и проводим фронтальную проекцию линии наибольшего ската.

Угол наклона определим при помощи способа прямоугольного треугольника.

Пример 5.7.

Задание: из точки *D* восстановить перпендикуляр к плоскости $\Delta(\Delta ABC)$ (рис. 5.35, *а*).



а *б*

Рисунок 5.35 – Пример 5.7

Решение: определяем принадлежность точки D к плоскости $\Delta(\Delta ABC)$ (рис. 5.35, *б*). Для этого проведем прямую a и убедимся, что точка D принадлежит плоскости, а значит, эта точка является точкой основания перпендикуляра b к плоскости.

Для того чтобы прямая была перпендикулярна к плоскости, необходимо, чтобы она была перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, принадлежащим плоскости. Так как AB – фронталь, а CB – горизонталь, то восстановим линии, перпендикулярные к соответствующим проекциям, проходящим через точку D, которые будут являться проекциями перпендикуляра к плоскости. Таким образом, прямая b будет перпендикулярна к двум пересекающимся прямым h и f, что, в конечном счете, и служит признаком перпендикулярности прямой к плоскости.

Определим видимость перпендикуляра по точкам *4* и *5* для горизонтальной проекции. Для указанных точек видимой будет точка *4*, которая ближе к наблюдателю. Точка *4* принадлежит прямой, а значит на фронтальной проекции этот ее участок будет видимым. По горизонтально конкурирующим точкам *2* и *3* определяем видимость участков прямой на горизонтальной плоскости проекций. По фронтальной проекции можно увидеть, что точка *2*, принадлежащая прямой, расположена выше точки *3*, принадлежащей плоскости. Поэтому на горизонтальной проекции видимой будет точка *2*, а значит видимой на этом участке будет проекция прямой.

Вопросы для самопроверки

1. Дать определение плоскости общего положения, плоскости уровня, проецирующей плоскости.

2. Какими геометрическими элементами можно задать плоскость общего положения на комплексном чертеже?

3. Какими свойствами обладают плоскости частного положения? Перечислить способы их задания.

4. Дать определение взаимного положения точки и прямой относительно плоскости.

5. Каковы признаки параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости?

6. Каковы признаки параллельности и перпендикулярности двух плоскостей?

7. Как располагаются относительно плоскостей проекций прямые уровня в проецирующих плоскостях?

6. КРИВЫЕ ЛИНИИ

6.1. Основные понятия и определения

Кривая – это множество точек пространства, координаты которых являются функциями одной переменной. В начертательной геометрии кривую рассматривают как траекторию, описанную движущейся точкой, как проекцию другой кривой, как линию пересечения двух поверхностей, как множество точек, обладающих каким-либо общим для всех их свойством и т. д.

Кривые линии, все точки которых принадлежат одной плоскости, называются ***плоскими***, остальные – ***пространственными***.

Каждая кривая включает в себя геометрические элементы, которые составляют ее определитель, то есть совокупность независимых условий, однозначно определяющих эту кривую.

Способы задания кривых:

• **аналитический** – кривая задана математическим уравнением;

• **графический** – кривая задана визуально на носителе графической информации;

• **табличный** – кривая задана координатами последовательного ряда точек.

Уравнением кривой линии называется такое соотношение между переменными, которому удовлетворяют координаты точки, принадлежащей кривой.

В основу классификации кривых положена природа их уравнений.

Кривые подразделяются на алгебраические и трансцендентные, в зависимости от того, являются ли их уравнения алгебраическими или трансцендентными в прямоугольной системе координат.

6.2. Алгебраические и трансцендентные кривые линии

Плоская кривая линия называется ***алгебраической***, если ее уравнение $f(x, y)=0$. Функция $f(x, y)$ является степенным множителем относительно переменных x и y; в остальных случаях кривая называется ***трансцендентной***.

Кривая линия, представленная в декартовых координатах уравнением n-й степени, называется алгебраической кривой n-го порядка.

Порядок плоской алгебраической кривой линии определяется наибольшим числом точек ее пересечения прямой линией. Любая прямая линия может пересекать алгебраическую кривую линию n-го порядка не более чем в n точках.

Построение характерных и наиболее распространенных алгебраических кривых линий подробно рассмотрено в разделе 2 настоящего пособия. Это парабола, гипербола, эллипс.

Порядок пространственной алгебраической кривой линии определяется наибольшим числом точек ее пересечения плоскостью общего положения.

Трансцендентные кривые, в отличие от алгебраических, могут иметь бесконечное количество точек пересечения с прямой, точек перегиба, вершин и т. п.

Синусоида – трансцендентная плоская кривая, выражающая закон изменения синуса в зависимости от величины центрального угла. Длина волны синусоиды равна $2\pi R$, где R – амплитуда синусоиды.

Для построения синусоиды по заданной амплитуде (рис. 6.1) проводят горизонтальную ось, откладывают на ней отрезок AB, равный вычисленной длине волны, как $2\pi R$, и делят его на определенное количество равных отрезков. В учебных целях отрезок удобно делить на 12 частей, дающих достаточную точность построения. Слева на этой оси вычерчивают окружность радиусом R и также делят ее на 12 равных частей. Точки деления нумеруют и через них проводят горизонтальные прямые. Из точек деления отрезка AB восстанавливают перпендикуляры к оси синусоиды и на их пересечении с одноименными горизонтальными прямыми находят точки синусоиды, которые соединяют по лекалу.

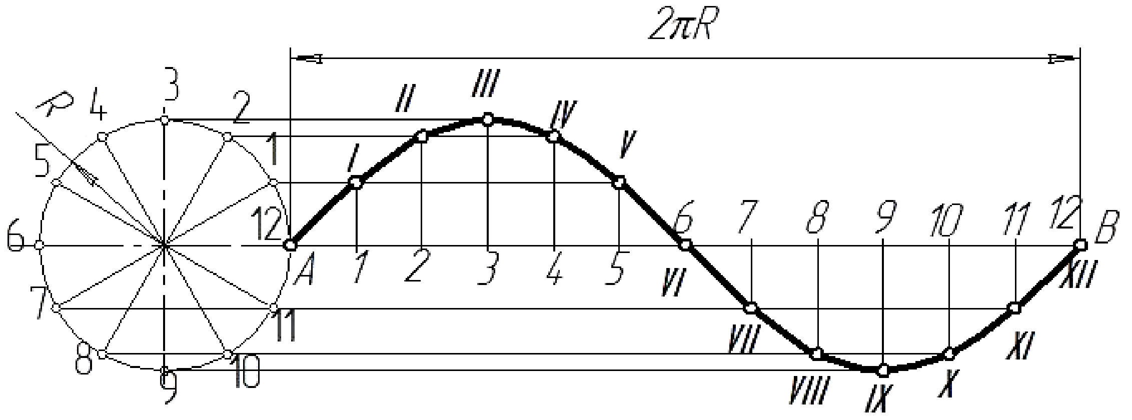


Рисунок 6.1 – Построение синусоиды

Эвольвента окружности – плоская кривая линия, являющаяся траекторией точки прямой линии, когда эта прямая перекатывается без скольжения по окружности.

Для построения эвольвенты (рис. 6.2) заданную окружность диаметра D делят на несколько равных частей (удобно на 12), которые нумеруют. Из точки *12* (последней) проводят касательную к окружности и на ней откладывают длину окружности, равную πD, которую также делят на 12 равных частей. Из точек деления окружности проводят касательные и откладывают на них части окружности соответствующей длины, а именно: на первой касательной откладывают одно деление окружности, на второй – два, на третьей – три и т. д. Получают ряд точек *I*, *II*, … , *XII*, которые соединяют по лекалу.

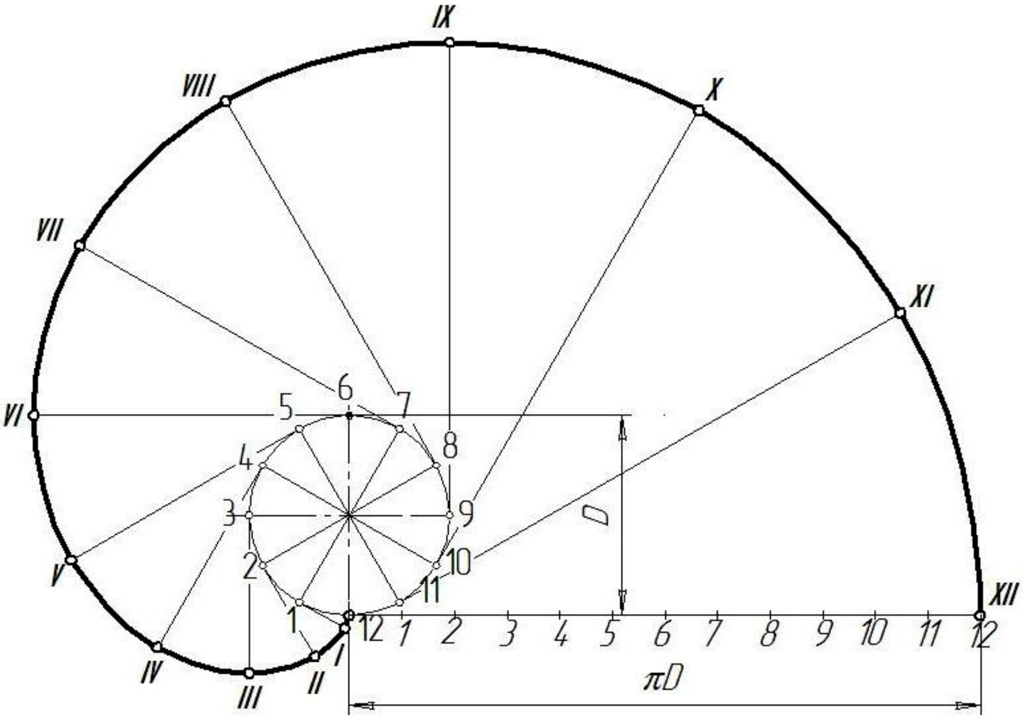


Рисунок 6.2 – Построение эвольвенты окружности

Спираль Архимеда – это плоская кривая линия, образуемая точкой, равномерно движущейся по прямой, равномерно вращающейся вокруг неподвижной точки.

Для построения спирали Архимеда задается шаг спирали S (рис. 6.3). Из центра O проводят окружность, равную шагу S, и делят окружность и шаг на несколько равных частей. Точки обозначают. Из центра O радиусами *O1*, *O2* и т. д. проводят дуги до пересечения с соответствующими радиусами. Полученные точки *I*, *II*, …, *XI*, принадлежащие спирали, соединяют по лекалу плавной кривой линией.

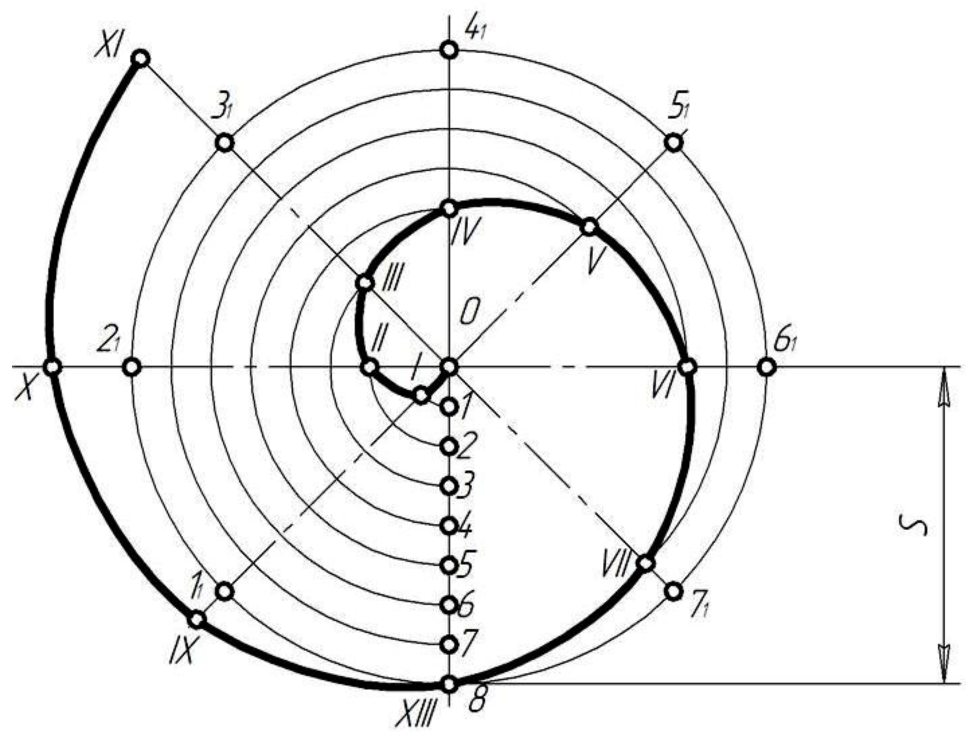


Рисунок 6.3 – Построение спирали Архимеда

Циклоида – плоская кривая линия, являющаяся траекторией точки, лежащей на окружности, которая катится без скольжения по прямой (рис. 6.4).

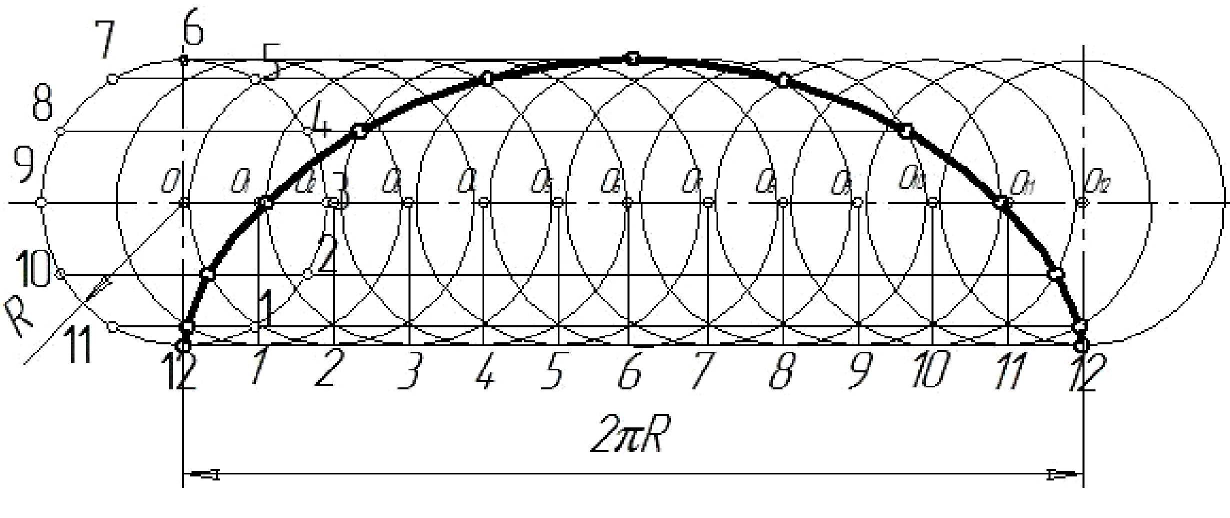


Рисунок 6.4 – Построение циклоиды

Построение циклоиды выполняют в следующей последовательности. На направляющей горизонтальной прямой откладывают длину производящей окружности радиусом *R*, равную *2πR*. Окружность и отрезок делят на несколько равных частей (удобно на 12). Из точек делений отрезка *1, 2, 3, 4, …, 12* восстанавливают перпендикуляры до пересечения с продолжением горизонтальной оси окружности, получают точки O_1, O_2, ..., O_{12}. Из точек делений окружности проводят горизонтальные прямые, на которых из точек O_1, O_2,... , O_{12} делают засечки дугами окружности радиуса R и получают точки, принадлежащие циклоиде, которые соединяют по лекалу плавной кривой линией.

Эпициклоида – это плоская кривая линия, являющаяся траекторией точки, лежащей на окружности, которая катится без скольжения по направляющей окружности.

Для построения эпициклоиды производящую окружность диаметра D и направляющую окружность радиуса R проводят так, чтобы они касались в точке *12* (рис. 6.5). Производящую окружность делят на 12 равных частей. Из центра O_0 радиусом, равным $R + 0{,}5D$, проводят вспомогательную дугу.

Величину центрального угла α определяют по формуле

$$\alpha = \frac{D}{R}180°.$$

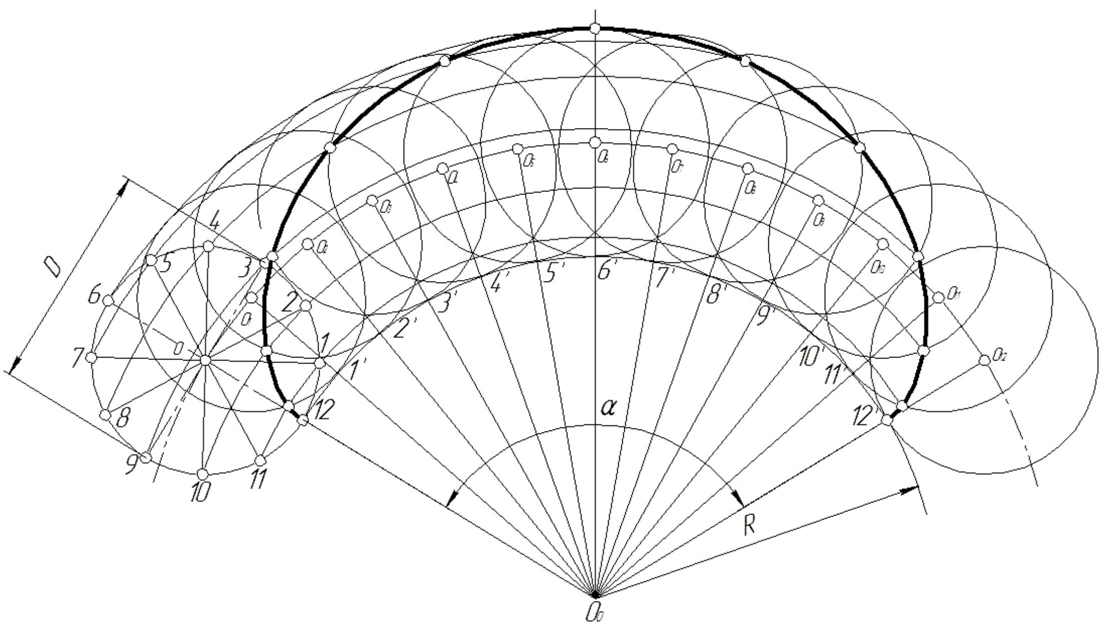


Рисунок 6.5 – Построение эпициклоиды

Разделив дугу направляющей окружности, ограниченную углом α, на 12 равных частей, получают точки *1', 2', 3', ..., 12'*. Из центра O_0 через точки *1', 2', 3', ..., 12'* проводят прямые, которые продолжают до пересечения со вспомогательной дугой в точках O_1, O_2, O_3, ..., O_{12}. Из центра

O_0 проводят вспомогательные дуги через точки делений *1 ... 12* производящей окружности.

Из точек O_1, O_2, O_3, ..., O_{12}, как из центров, проводят окружности диаметром D до пересечения со вспомогательными дугами и получают точки пересечения, принадлежащие эпициклоиде. Полученные точки соединяют по лекалу.

В технике циклоидальными кривыми описываются траектории перемещения деталей машин, которые совершают одновременно равномерное вращательное и поступательное движение.

Наряду с этим у трансцендентных кривых могут быть характерные точки, которых не существует у алгебраических кривых: точки прекращения, угловые точки (точки излома), асимптотические точки. Простейшими примерами трансцендентных кривых служат графики функций логарифмической, показательной, тригонометрической, а также все спирали, циклоиды и т. п.

Кривая линия как траектория движущейся точки должна быть непрерывной. Движущаяся точка в любом положении должна иметь определенное направление движения. Это направление указывает прямая (касательная), проходящая через рассматриваемую точку.

Длина отрезка кривой линии определяется в общем случае как сумма длин отрезков вписанной в нее ломаной линии, с заданной точностью передающей форму кривой.

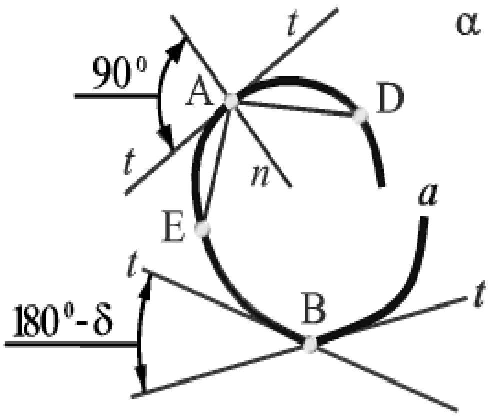


Рисунок 6.6 – Касательные к кривой линии

Плоская кривая a построена в плоскости α (рис. 6.6). Через точку A проведены секущие хорды AE и AD. Если точку E приближать к точке A, секущая AE поворачивается вокруг точки A. Когда точка E совпадет с точкой A ($A\equiv E$), секущая AE достигнет своего предельного положения t. В этом предельном положении секущая называется полукасательной к кривой a в точке A. Секущая AD в предельном положении $A\equiv D$ также представлена полукасательной t.

Кривая линия в точке A имеет две полукасательные прямые, которые совпадают и определяют одну касательную к кривой линии в точке A – кривая в этой точке называется плавной.

Кривая, плавная во всех ее точках, называется *плавной кривой линией.*

Нормалью n в точке *A* кривой линии называется перпендикуляр к касательной.

6.3. Свойства ортогональных проекций кривой линии

1. Проекцией кривой линии является кривая линия.
2. Касательная к кривой линии проецируется в касательную к ее проекции.
3. Несобственная точка кривой проецируется в несобственную точку ее проекции.
4. Порядок линии – проекции алгебраической кривой – равен порядку самой кривой или меньше.
5. Число узловых точек (в которых кривая пересекает сама себя) проекции равно числу узловых точек самой кривой.

6.4. Пространственные кривые линии

Пространственные кривые линии в начертательной геометрии обычно рассматриваются как результат пересечения поверхностей или траектория движения точки.

Пространственную, так же как и плоскую, кривую линию на чертеже задают последовательным рядом точек.

Классическим примером пространственных кривых линий являются цилиндрическая и коническая винтовые линии.

Цилиндрическую винтовую линию в пространстве описывает точка, которая движется по какой-либо образующей прямого кругового цилиндра, вращающегося вокруг своей оси так, что путь, проходимый точкой по образующей, пропорционален углу поворота цилиндра (рис. 6.7).

Смещение точки вдоль образующей за один оборот называется *шагом* цилиндрической винтовой линии.

Различают правую и левую винтовые линии.

Коническую винтовую линию описывает точка, которая движется по какой-либо образующей прямого кругового конуса, вращающегося вокруг своей оси так, что путь, пройденный точкой по образующей, все время равен углу поворота конуса (рис. 6.8). Проекция на ось конуса смещения точки вдоль образующей за один оборот называется шагом конической винтовой линии. Горизонтальной проекцией конической винтовой линии является спираль Архимеда – одна из замечательных плоских кривых линий.

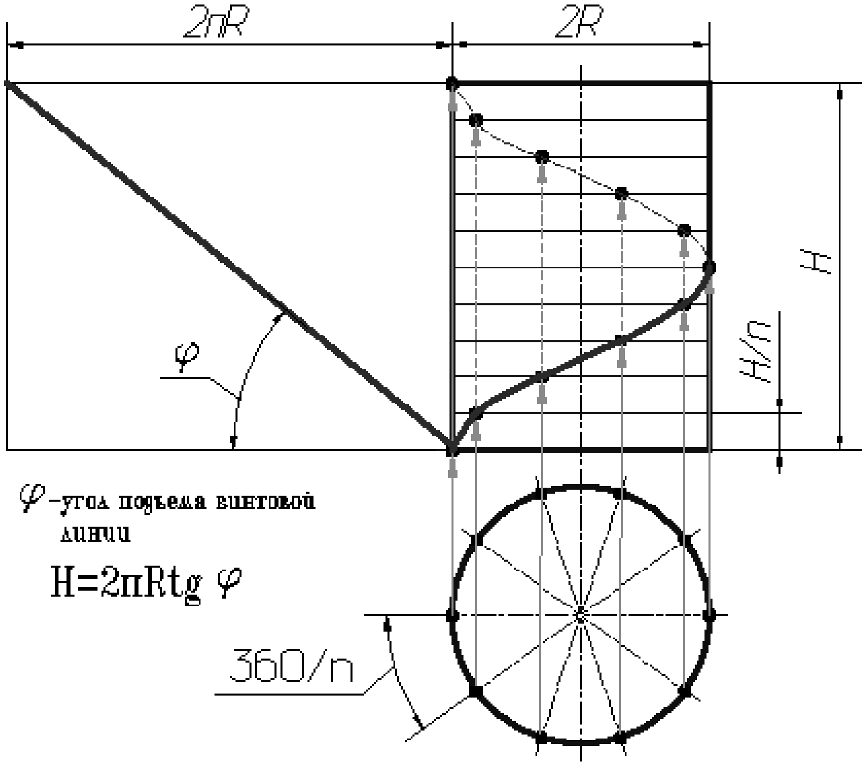


Рисунок 6.7 – Цилиндрическая винтовая линия

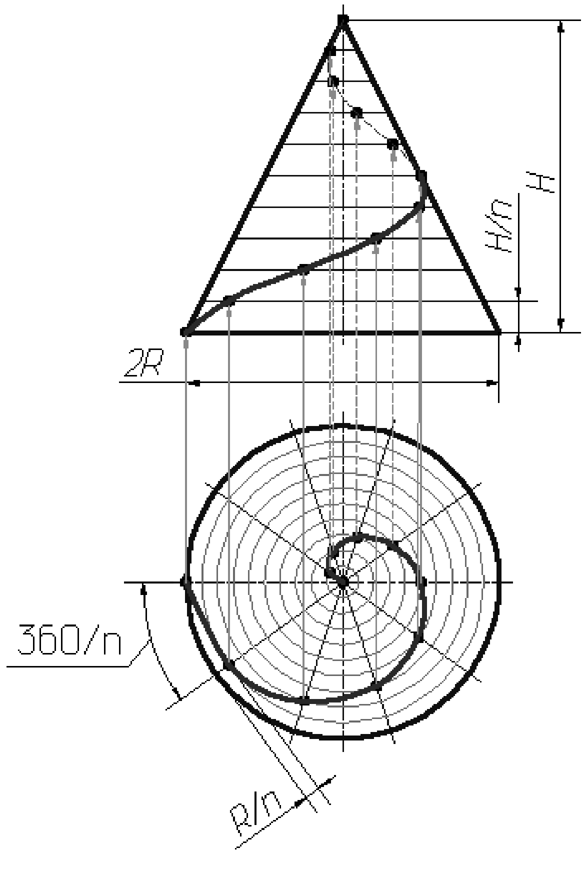


Рисунок 6.8 – Коническая винтовая линия

Примеры решения задач

Пример 6.1.

Задание: на рисунке 6.9 показаны две проекции пространственной кривой. Определить ее длину.

Решение: чтобы определить длину, спрямляем прямую, применяя способ прямоугольного треугольника следующим образом.

1. Спрямляем горизонтальную проекцию, предварительно разбив ее на дуги, мало отличающиеся от стягивающих их хорд. Откладываем длины хорд $|A_1 1_1|$, $|1_1 2_1|$, $|2_1 3_1|$, …, $|7_1 B_1|$ на горизонтальной проекции прямой в последовательности, которую они занимали на проекции кривой. Эти длины будут катетами проекций.

2. Второй катет Δz показываем таким образом: из точек A^1, 1^1, 2^1, …, B^1 прямой a проводим перпендикуляры и отмечаем точки их пересечения с горизонтальными прямыми, проведенными через соответствующие фронтальные проекции точек A_2, 1_2, 2_2, 3_2, …, B_2.

3. Полученные точки пересечения A^0, 1^0, 2^0, …, B^0 укажут вершины ломаной линии. Далее выпрямляем последнюю и получаем отрезок $|A_O B_O|$, приближенно равный длине пространственной кривой. С увеличением количества точек разбиения проекций увеличивается точность построения.

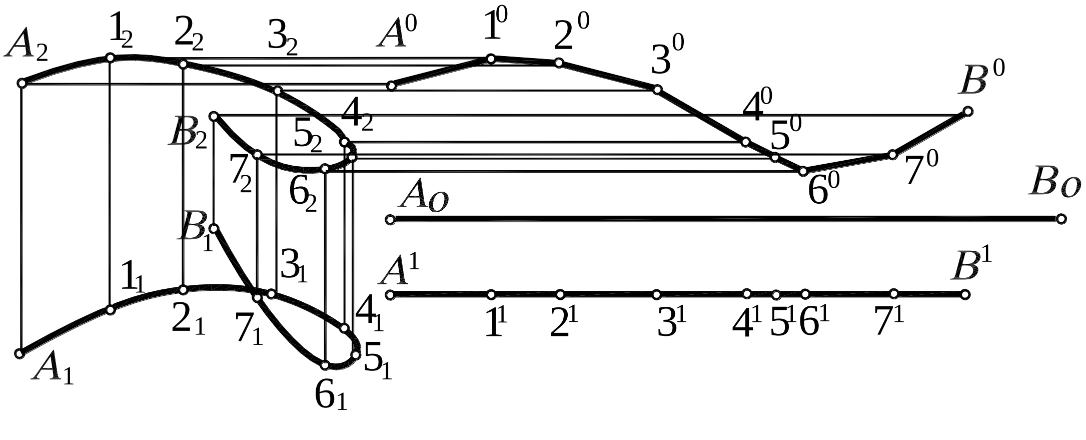


Рисунок 6.9 – Пример 6.1

Вопросы для самопроверки

1. Назовите способы задания кривых линий.

2. В чем принципиальное отличие трансцендентных кривых линий от алгебраических?

3. Где в технике встречаются винтовые линии?

4. Какими элементами определяется порядок плоской алгебраической кривой линии?

7. СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧЕРТЕЖА

7.1. Задачи начертательной геометрии, решаемые преобразованием комплексного чертежа

Решение позиционных и метрических задач начертательной геометрии значительно облегчается, когда геометрические объекты располагаются на прямых или плоскостях частного положения. Желание упростить решение указанных задач приводит к необходимости такого преобразования комплексного чертежа, при котором прямые и плоскости общего положения, содержащие интересующие элементы оригинала, перешли бы соответственно в прямые и плоскости частного положения.

При этом наиболее выгодным частным положением геометрического объекта следует считать:

- положение, **перпендикулярное** к плоскости проекций (для решения позиционных, а в ряде случаев и метрических задач);
- положение, **параллельное** по отношению к плоскости проекций (при решении метрических задач).

При решении метрических задач, связанных с определением истинных размеров изображенных на эпюре фигур, могут встретиться значительные трудности, если заданные проекции не подвергнуть специальным преобразованиям. Такое преобразование комплексного чертежа может быть осуществлено несколькими способами.

В связи с этим, естественно, возникает вопрос, каким путем можно получить удобные проекции для решения поставленной задачи по заданным неудобным ортогональным проекциям.

Переход от общего положения геометрической фигуры к частному можно осуществлять за счет изменения взаимного положения проецируемой фигуры и плоскостей проекций.

При ортогональном проецировании это достигается двумя путями:

1. Перемещением плоскостей проекций в новое положение, по отношению к которому проецируемая фигура (которая не меняет положения в пространстве) окажется в частном положении – способ замены плоскостей проекций.

2. Перемещение в пространстве проецируемой фигуры так, чтобы она заняла частное положение относительно плоскостей проек-

ций, которые при этом не меняют своего положения в пространстве – способ плоскопараллельного перемещения и способ вращения.

7.2. Способ замены плоскостей проекций

Способ замены плоскостей проекций состоит в том, что одна из основных плоскостей проекций $П_1$, $П_2$, $П_3$ заменяется новой плоскостью проекций $П_4$, подходящим образом расположенной относительно оригинала, но перпендикулярно незаменяемой плоскости проекций. В результате замены одной из основных плоскостей проекций на плоскость проекций $П_4$ получают вместо старой системы плоскостей $П_1 / П_2$ новую систему $П_1 / П_4$, если заменялась плоскость $П_2$, или систему $П_2 / П_4$, если заменялась плоскость $П_1$ (рис. 7.1).

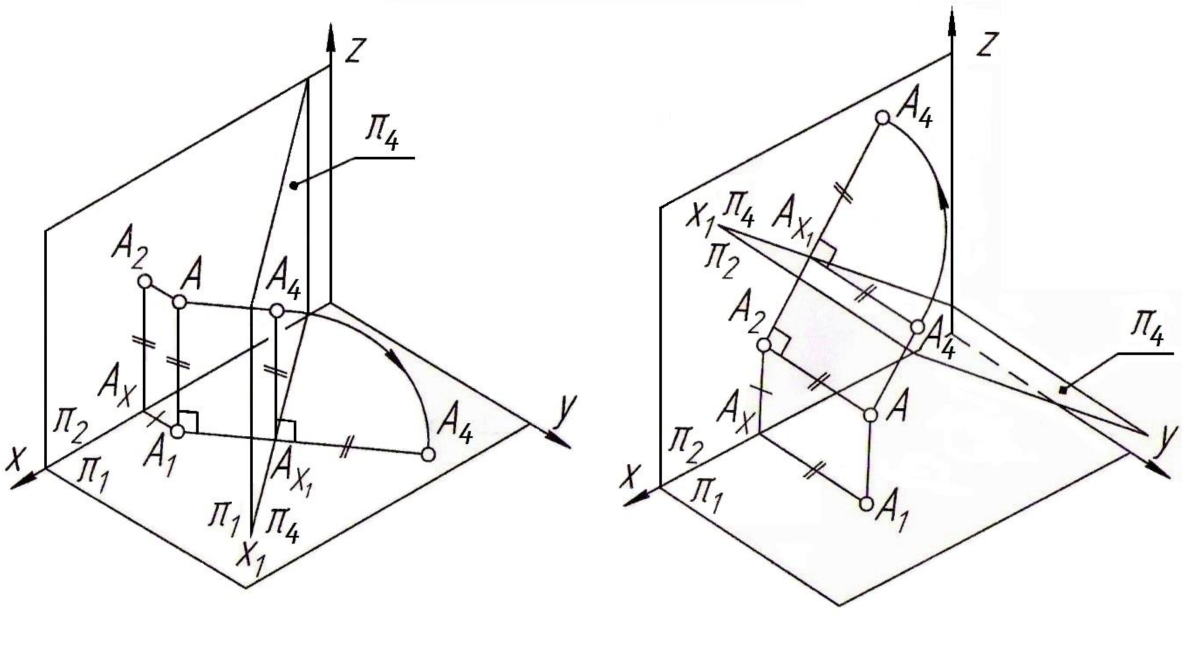


Рисунок 7.1 – Замена плоскостей проекций

При замене плоскостей проекций придерживаются следующих правил:

1. Линии связи всегда перпендикулярны оси проекций (или базе отсчета расстояний).

2. Расстояние от заменяемой базы отсчета расстояний (старой оси проекций) до заменяемой проекции точки равно расстоянию от новой базы отсчета расстояний до новой проекции точки.

Далее рассмотрим основные задачи, решаемые при помощи способа замены плоскостей проекций.

Задача 1. Отрезок прямой общего положения [AB] преобразовать в отрезок прямой уровня.

Для этого достаточно заменить одну из плоскостей проекций на новую так, чтобы она располагалась параллельно заданному отрезку прямой. Тогда в новой системе плоскостей проекций данный отрезок прямой будет являться отрезком прямой уровня.

На комплексном чертеже решение ведется следующим образом. Проводят базу отсчета расстояний в системе плоскостей проекций $П_1$ / $П_2$ (старая ось проекций) (рис. 7.2).

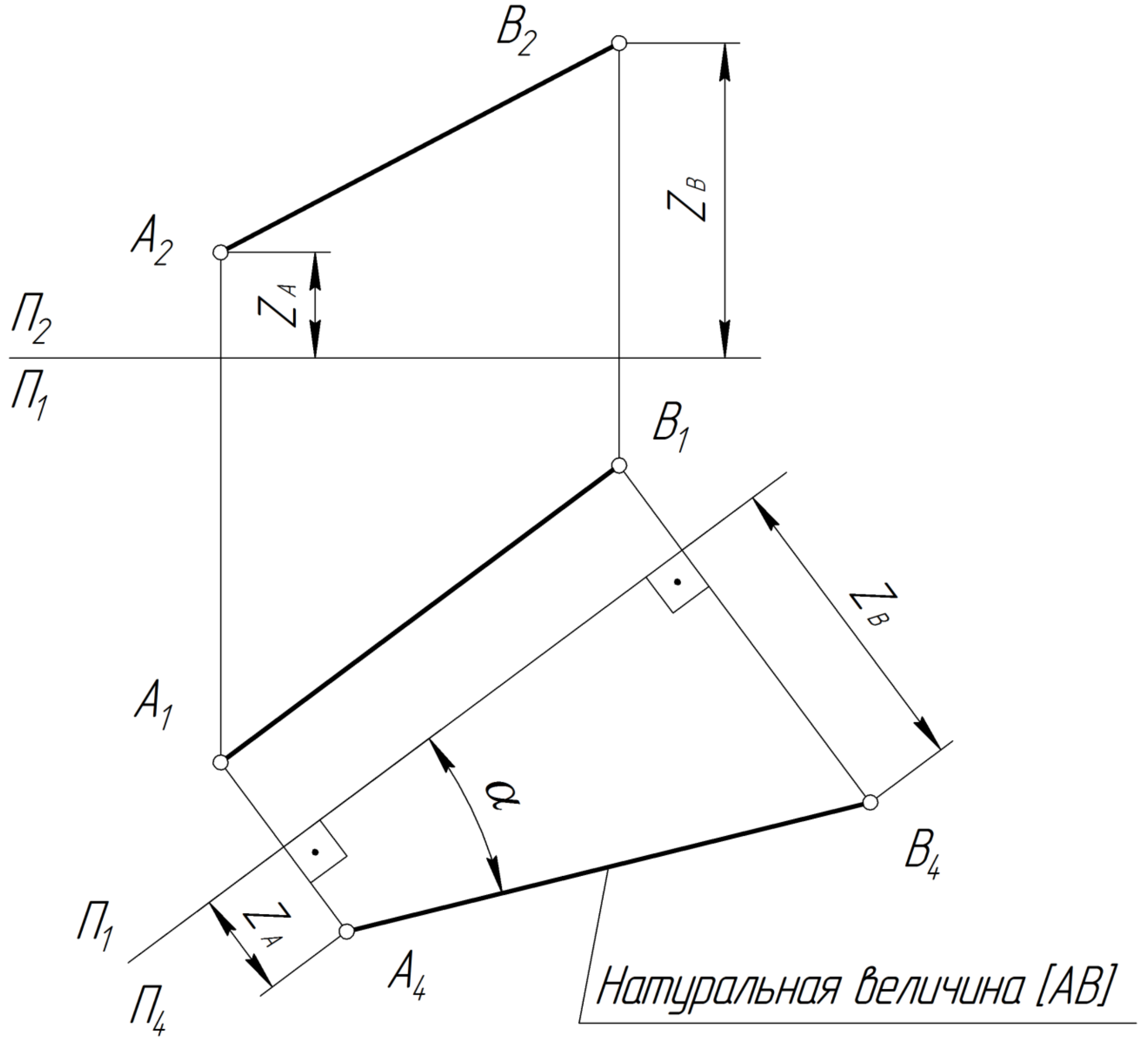


Рисунок 7.2 – Преобразование прямой общего положения в прямую уровня

Проводят новую ось проекций параллельно одной из проекций заданного отрезка прямой общего положения, в данном случае – горизонтальной. Линии связи проводятся в обеих системах плоскостей проекций. Для построения новых проекций точек A и B откладывают высоту соответствующей точки Z_A и Z_B от новой оси проекций, так как они остаются неизменными в новой системе плоскостей проекций $П_1$ / $П_4$. Соединив прямой проекции точек A_4 и B_4, получают новую проекцию заданного отрезка прямой [AB]. Причем этот отрезок прямой в новой системе плоскостей проекций будет являться отрезком прямой уровня. Нетрудно видеть, что теперь он проецируется на плоскость $П_4$ без искажения, то есть в натуральную величину, а угол α, образованный проекцией A_4B_4 с осью, дает натуральный угол наклона отрезка прямой [AB] к плоскости $П_1$.

Задача 2. Прямую уровня преобразовать в проецирующую прямую.

Задача 3. Плоскость общего положения преобразовать в проецирующую плоскость (рис. 7.3).

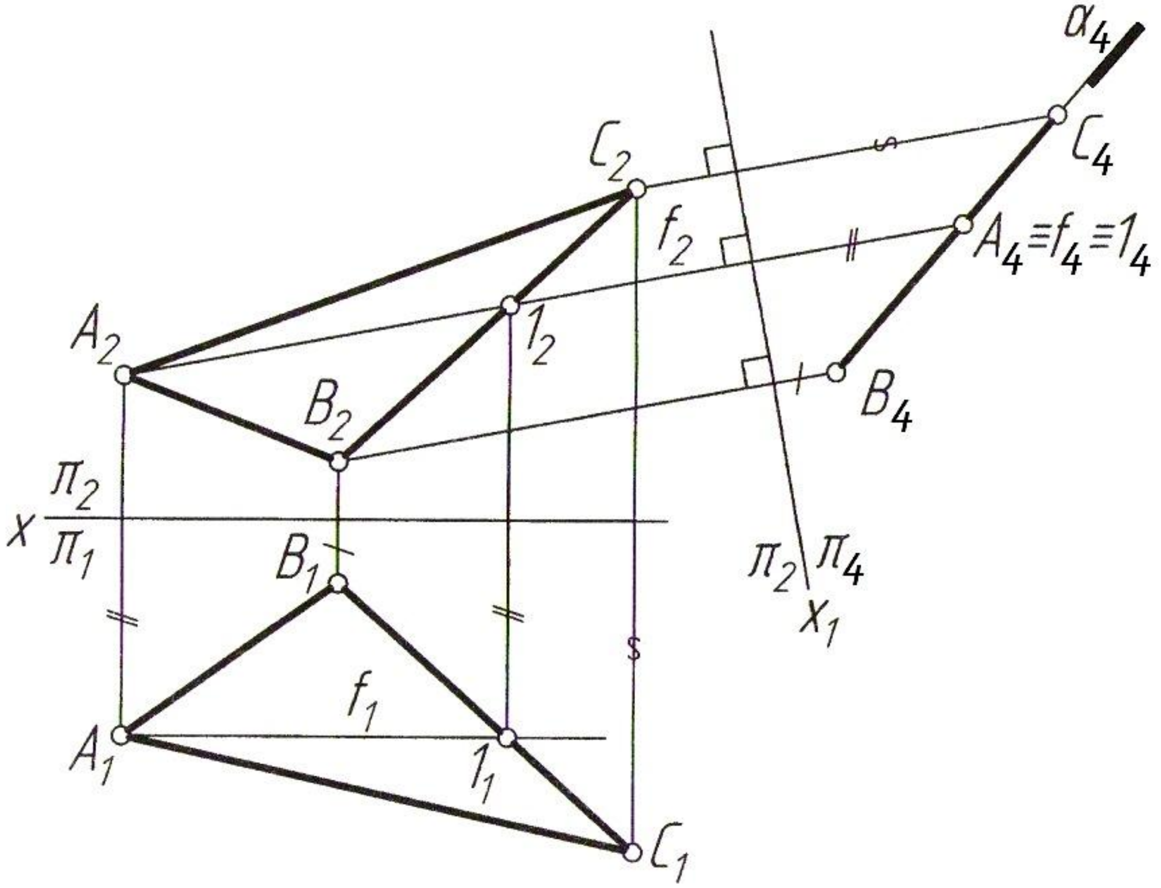


Рисунок 7.3 – Преобразование плоскости общего положения в проецирующую плоскость

Задача 4. Плоскость проецирующую преобразовать в плоскость уровня.

Задача 5. Определить минимальное расстояние от точки A до прямой общего положения, заданной отрезком [BC] (рис. 7.4).

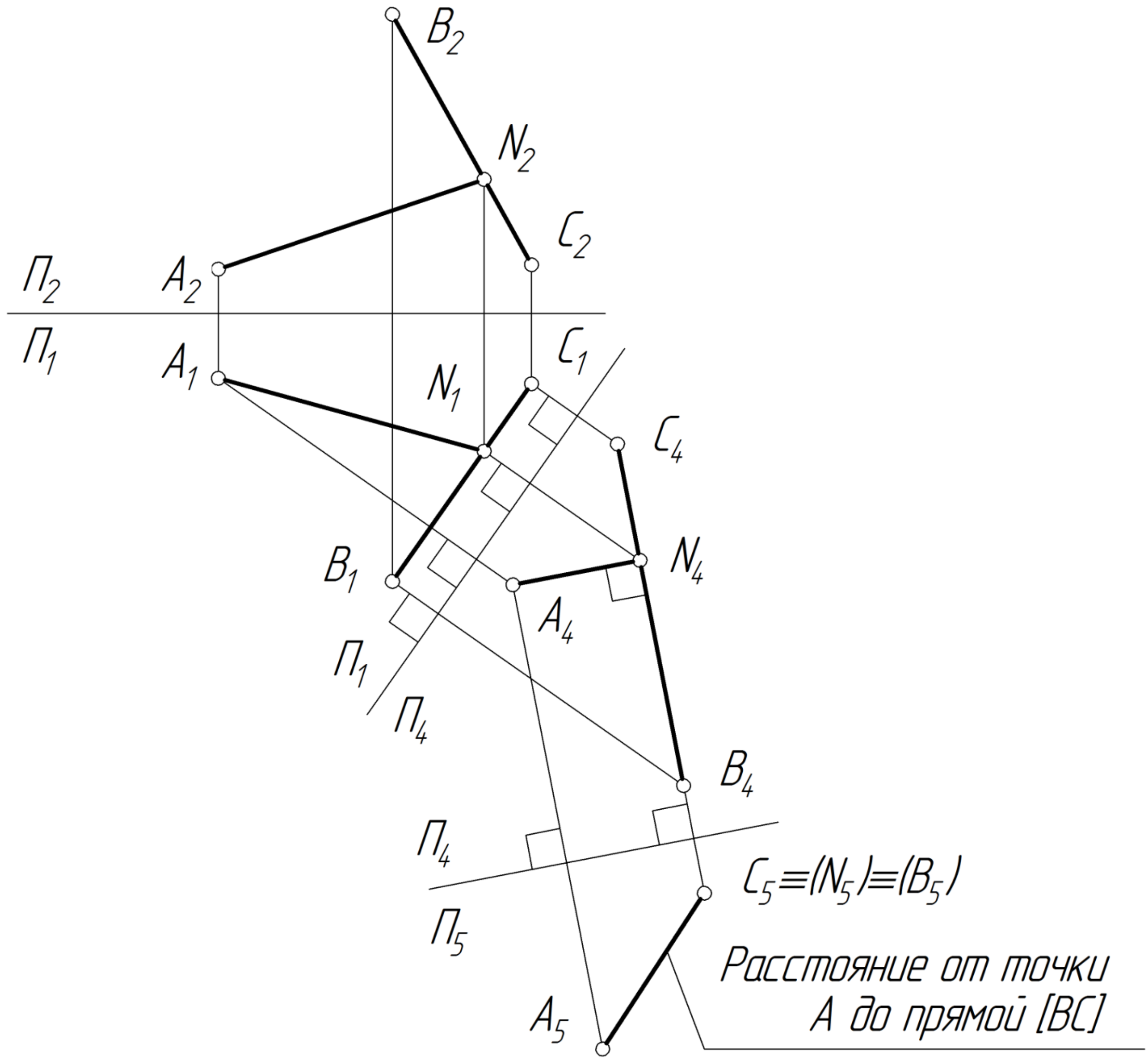


Рисунок 7.4 – Определение минимального расстояния от точки до прямой общего положения

7.3. Способ плоскопараллельного перемещения

Изменение взаимного положения проецируемого объекта и плоскостей проекций способом плоскопараллельного перемещения осуществляется путем изменения положения геометрического объекта так, чтобы траектория движения ее точек находилась в параллельных плоскостях. Плоскости-носители траекторий перемещения точек параллельны какой-либо плоскости проекций (рис. 7.5). Траектория – произвольная линия. При параллельном переносе геометрического объекта относительно плоскостей проекций проекция фигуры хотя и меняет свое положение, но остается конгруэнтной проекции фигуры в ее исходном положении.

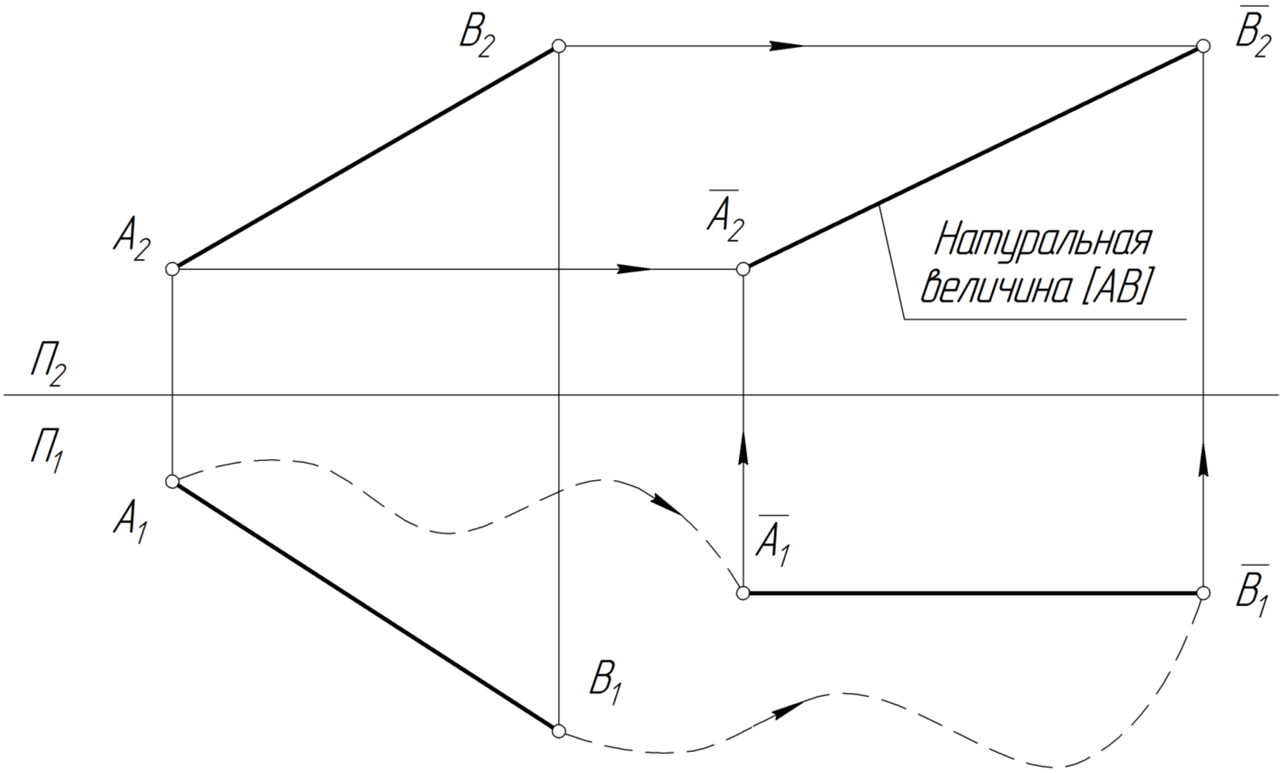


Рисунок 7.5 – Определение натуральной величины отрезка способом плоскопараллельного перемещения

Свойства плоскопараллельного перемещения:

При всяком перемещении точек в плоскости, параллельной плоскости $П_1$, ее фронтальная проекция перемещается по прямой, параллельной оси x.

В случае произвольного перемещения точки в плоскости, параллельной $П_2$, ее горизонтальная проекция перемещается по прямой, параллельной оси x.

В зависимости от положения этих плоскостей по отношению к плоскостям проекций и вида кривой линии, определяющей траекторию перемещения точек, способ плоскопараллельного проецирования имеет следующие частные случаи:

1. Способ вращения вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекций.

2. Способ вращения вокруг оси, параллельной плоскости проекций.

3. Способ вращения вокруг оси, принадлежащей плоскости проекций (вращение вокруг следа плоскости) – способ совмещения.

7.4. Способ вращения вокруг проецирующей прямой

Для определения натуральной величины отрезка прямой общего положения [AB] (рис. 7.6) выбирают ось вращения i, перпендикулярную горизонтальной плоскости проекций и проходящую через B_1.

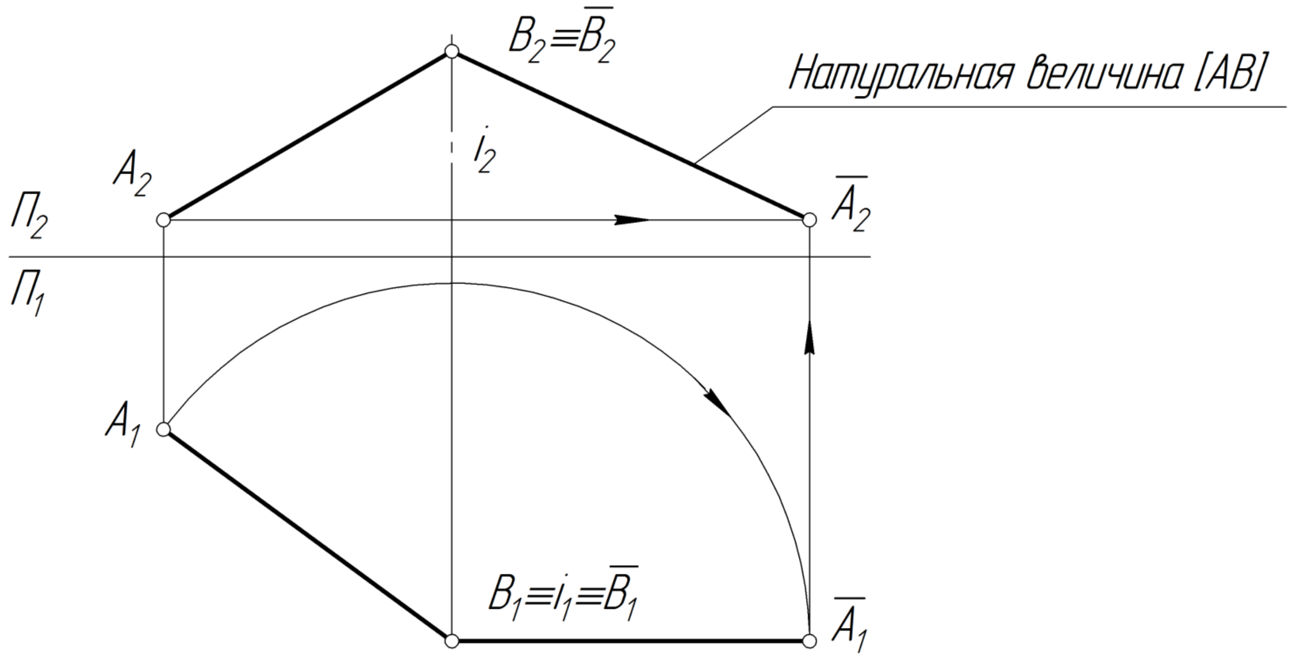


Рисунок 7.6 – Определение натуральной величины отрезка способом вращения вокруг оси, перпендикулярной горизонтальной плоскости проекций

Поворачивают отрезок так, чтобы он стал параллелен фронтальной плоскости проекций (горизонтальная проекция отрезка параллельна оси координат). При этом точка A_1 переместится в $\bar{A}_1$, а точка B не изменит своего положения. Положение точки $\bar{A}_2$ находится на пересечении фронтальной проекции траектории перемещения точки A (прямая линия, перпендикулярная проекции оси i_2) и линии связи, проведенной из $\bar{A}_1$. Полученная проекция $B_2\bar{A}_2$ определяет действительные размеры самого отрезка.

7.5. Способ вращения вокруг прямой уровня

Рассмотрим этот способ на примере определения угла между пересекающимися прямыми (рис. 7.7). Рассмотрим две проекции пересекающихся прямых a и $в$, которые пересекаются в точке K. Для того чтобы определить натуральную величину угла между этими прямыми, необходимо произвести преобразование ортогональных проекций так, чтобы прямые стали параллельны плоскости проекций. Воспользуемся способом вращения вокруг прямой уровня – горизонтали. Проведем произвольно фронтальную проекцию горизонтали h_2 параллельно оси Ox, которая пересекает прямые в точках A_2 и B_2. Определив проекции A_1 и B_1, построим горизонтальную проекцию горизонтали h_1. Траектория движения всех точек при вращении вокруг горизонтали – окружность, которая проецируется на плоскость $П_1$ в виде прямой, перпендикулярной горизонтальной проекции горизонтали.

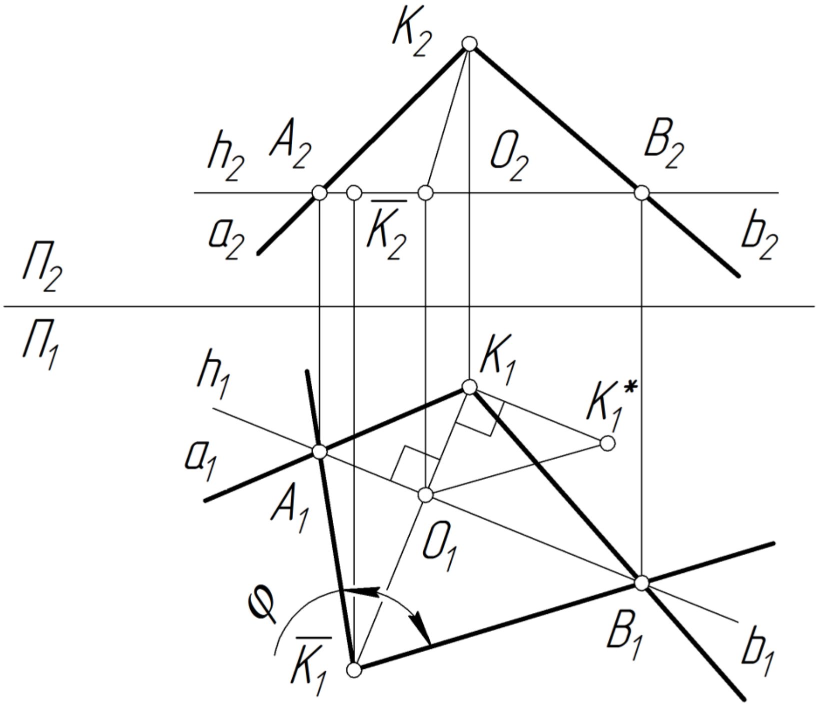


Рисунок 7.7 – Определение натуральной величины угла между пересекающимися прямыми

Таким образом, траектория движения точки K_1 определена прямой K_1O_1, точка O – центр окружности – траектории движения точки K. Чтобы найти радиус этой окружности, найдем способом прямоугольного треугольника натуральную величину отрезка $[KO]$. Продолжим прямую K_1O_1 так, чтобы $|KO|=|O_1K^*{}_1|$. Точка $\overline{K}_1$ соответствует точке K, когда прямые a и $в$ лежат в плоскости, параллельной $П_1$ и проведенной через горизонталь – ось вращения. С учетом этого через точку $\overline{K}_1$ и точки A_1 и B_1 проведем прямые, которые лежат теперь в плоскости, параллельной $П_1$, а следовательно, и угол φ – натуральная величина угла между прямыми a и $в$.

Примеры решения задач

Пример 7.1.

Задание: построить линию пересечения плоскостей $\Omega(\Delta ABC)$ и $\Sigma(\Delta EFD)$.

Решение: для определения линии пересечения плоскостей чертеж необходимо преобразовать таким образом, чтобы одна из заданных плоскостей стала проецирующей. На рисунке 7.8 дополнительная плоскость Π_4 выбрана так, чтобы она была перпендикулярна плоскости проекций Π_2 и проекции A_2C_2 (AC – отрезок фронтальной прямой уровня – на Π_4 проецируется в виде конкурирующих точек A_4 и C_4).

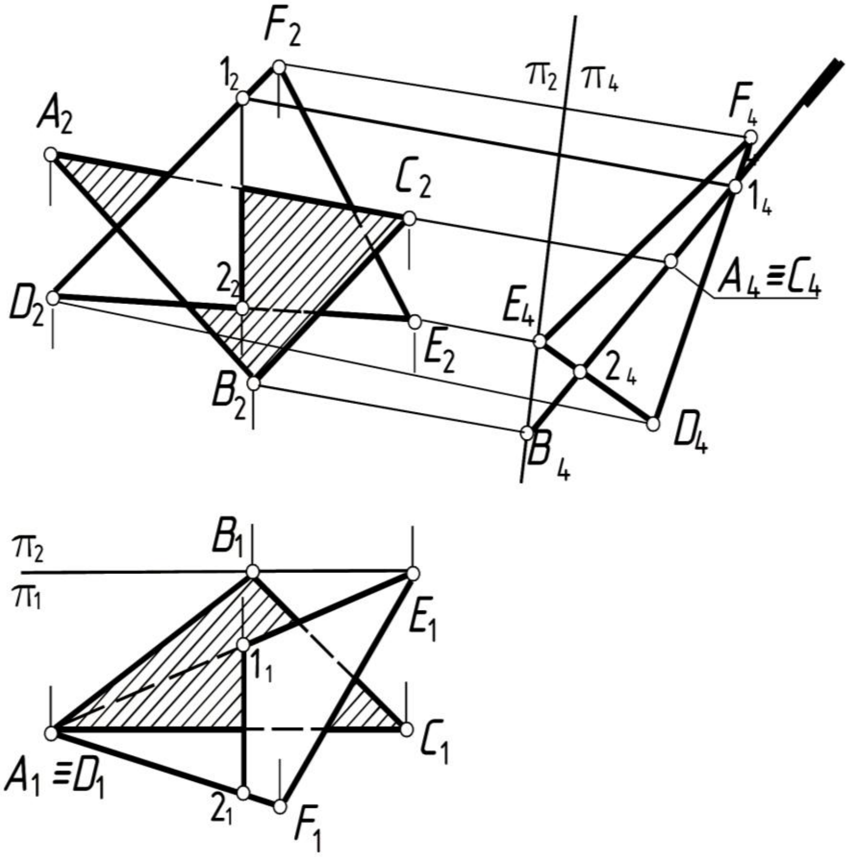
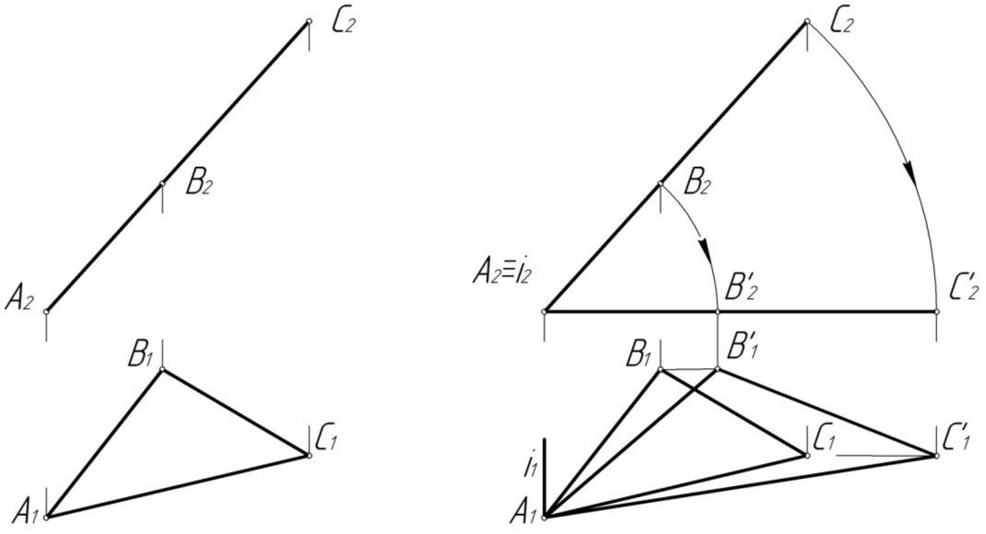


Рисунок 7.8 – Решение примера 7.1

Так как проекция треугольника ABC на плоскость Π_4 выглядит как проекция проецирующей плоскости, то проекция линии пересечения на дополнительную плоскость будет $1_4 2_4$. По построенной проекции находим фронтальную, а затем горизонтальную проекцию линии пересечения. Точка A выше, чем точка D (см. фронтальную проекцию), а значит, на горизонтальной проекции у плоскости $\Omega(\Delta ABC)$ будет видна часть от вершины A до линии пересечения. На фронтальной проекции видна будет часть от линии пересечения до вершины C треугольника, так как точка C ближе, чем точка E.

Пример 7.2.

Задание: определить натуральную величину треугольника *ABC* (рис. 7.9, *а*).



а *б*

Рисунок 7.9 – Пример 7.2

Решение: так как Δ*ABC* является фронтально проецирующим, то преобразование чертежа удобнее провести путем поворота вокруг фронтально проецирующей прямой *i* треугольника *ABC* (рис. 7.9, *б*) до положения, параллельного горизонтальной плоскости проекций. Тогда плоскость треугольника займет положение горизонтальной плоскости уровня. Преобразованная горизонтальная проекция треугольника будет тождественна натуральной величине треугольника *ABC*.

Пример 7.3.

Задание: определить величину двугранного угла (рис. 7.10).

Решение: для того чтобы показать натуральную величину двугранного угла, необходимо, чтобы две грани по отношению к плоскости проекций заняли положение проецирующих плоскостей. Плоскость займет проецирующее положение, если линия, принадлежащая этой плоскости, будет перпендикулярна плоскости проекций. В данном случае ребро *AB* будет общим для двух граней.

Первое преобразование, в результате которого ребро *AB* становится параллельным горизонтальной плоскости проекций, осуществим путем вращения вокруг фронтально проецирующей оси и параллельного переноса относительно этой же плоскости. Тогда фронтальная проекция ребра *AB* займет положение горизонтальной прямой уровня ($A_2^1B_2^1$).

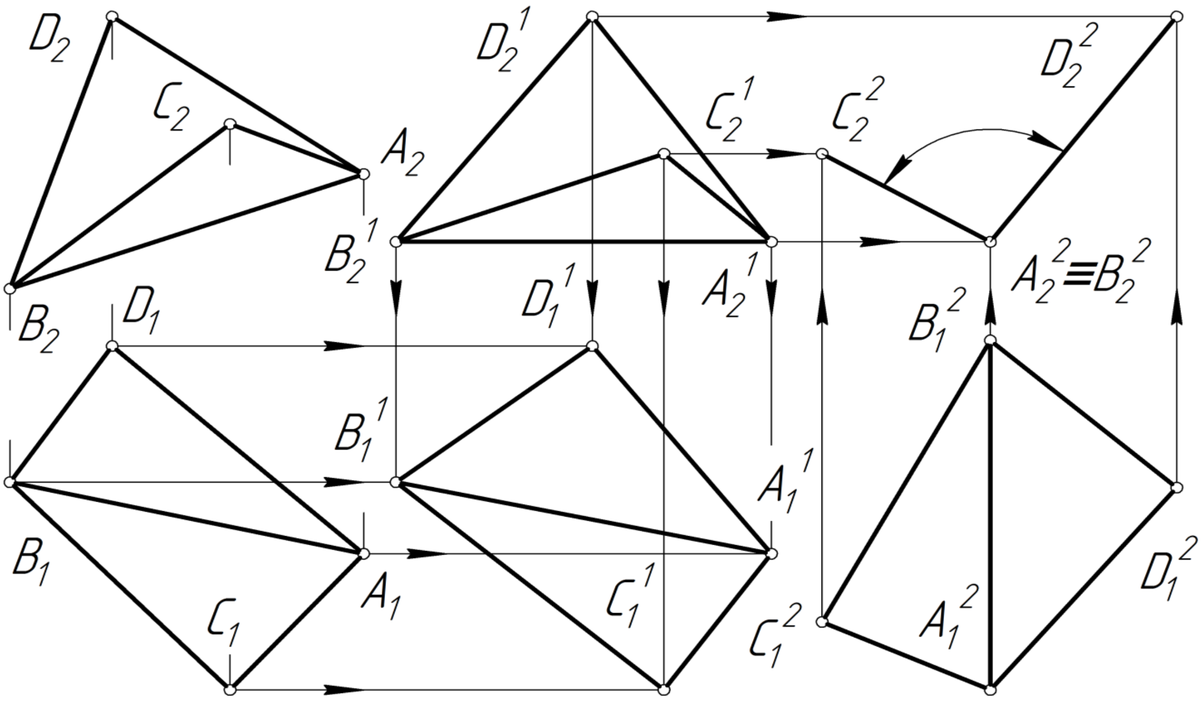


Рисунок 7.10 – Пример 7.3

Второе преобразование, в результате которого ребро *AB* становится фронтально проецирующим, осуществим путем вращения вокруг горизонтально проецирующей оси и параллельного переноса относительно этой же плоскости. Тогда фронтальная проекция ребра *AB* (вершина двугранного угла) будет проецироваться в точку (на рис. 7.9 – $A_2^2 \equiv B_2^2$). Таким образом, грани угла на фронтальной проекции вырождаются в отрезки прямых линий, между которыми определяется искомая величина угла.

Пример 7.4.

Задание: определить натуральную величину треугольника способом вращения вокруг прямой уровня.

Решение: преобразование комплексного чертежа показано на рисунке 7.11. Вращение треугольника *ABC* произведено вокруг горизонтальной прямой уровня.

Для того чтобы треугольник спроецировать в натуральную величину на горизонтальную плоскость проекций, достаточно показать натуральную величину радиуса вращения точки *A*, то есть определить натуральную величину перпендикуляра, опущенного из точки *A* на горизонталь h. Натуральная величина определена с помощью способа прямоугольного треугольника и отложена вдоль перпендикуляра к h_1. Так как точка *1* находится на оси вращения, то она неподвижна, поэтому, построив прямую через точки A_1^1 и 1_1 до пересечения с перпендикуляром, опущенным из точки C_1 на горизонталь, получим новое положение проекции точки C – $C_1^{\,1}$.

Таким образом, на горизонтальной проекции получили натуральную величину треугольника. При этом на фронтальной плоскости проекций треугольник будет проецироваться в виде отрезка прямой линии.

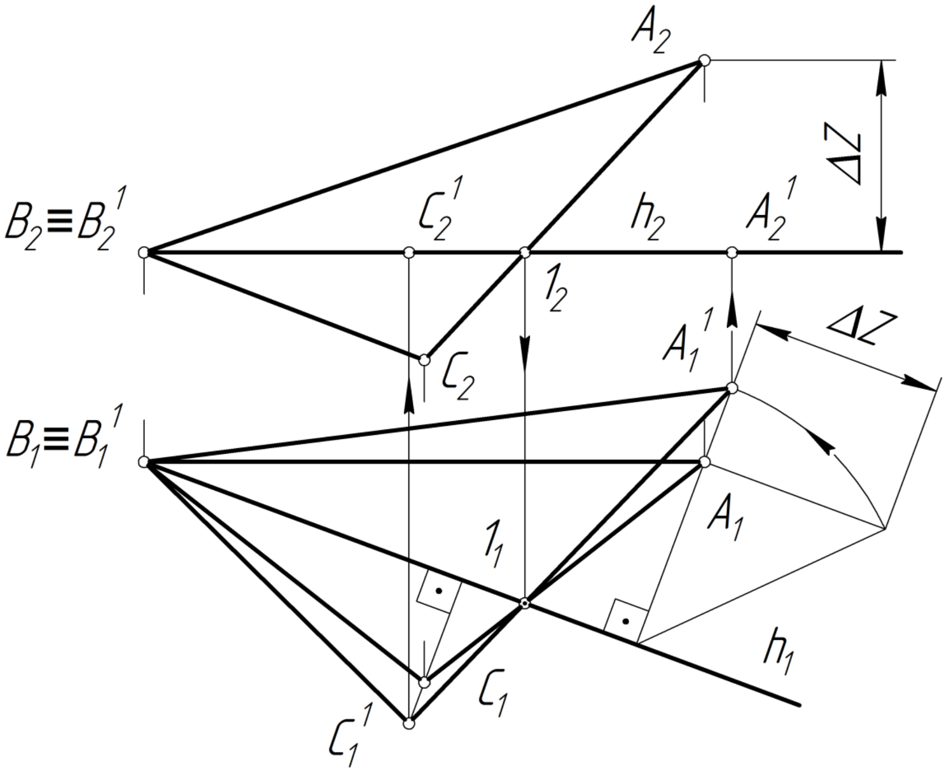


Рисунок 7.11 – Пример 7.4

Вопросы для самопроверки

1. Объяснить цель преобразования комплексного чертежа.
2. Описать сущность способа замены плоскостей проекций.
3. Что такое база отсчета?
4. Какие размеры переносятся на дополнительную плоскость проекций?
5. Описать сущность способов вращения вокруг проецирующей прямой и плоскопараллельного перемещения.
6. Для чего применяют способ вращения вокруг прямой уровня?
7. Как располагаются дополнительные плоскости относительно плоскостей проекций комплексного чертежа?
8. Сформулировать преимущества и недостатки каждого из способов преобразования комплексного чертежа.
9. Привести примеры практического применения способов преобразования комплексного чертежа.

8. ПОВЕРХНОСТИ

8.1. Формообразование поверхностей

В математике под поверхностью подразумевается непрерывное множество точек, если между координатами точек этого множества может быть установлена зависимость, определяемая уравнением вида $F(x, y, z)=0$, где $F(x, y, z)$ – многочлен n-й степени, или в форме какой-либо трансцендентной функции.

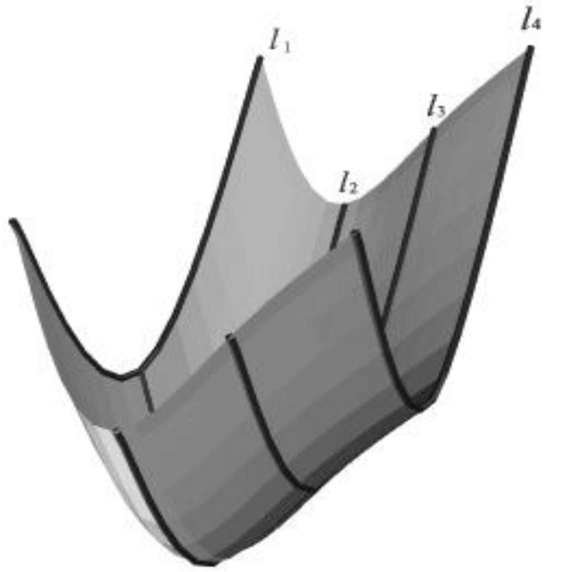


Рисунок 8.1 – Поверхность, образованная движением линии

В первом случае поверхности называются ***алгебраическими***, во втором – ***трансцендентными***.

Поверхность Φ представляет собой множество последовательных положений l_1, l_2 … линии l, движение и форма которой подчинены некоторому закону (рис. 8.1).

Эту линию принято называть ***образующей***. Закон перемещения образующей обычно задается неподвижными ***направляющими***.

Примером такого способа могут служить все технологические процессы обработки металлов режущей кромкой, когда поверхность изделия несет на себе «отпечаток» режущей кромки резца, то есть ее поверхность можно рассматривать как множество линий, конгруэнтных профилю резца. Этот способ образования поверхности называется ***кинематическим***.

8.2. Классификация поверхностей

По виду образующей различают поверхности ***линейчатые*** и ***нелинейчатые***, образующая первых – прямая линия, вторых – кривая.

Линейчатые поверхности, в свою очередь, разделяют на так называемые ***развертывающиеся***, которые можно без складок и разрывов развернуть на плоскость, и ***неразвертывающиеся***.

Значительный класс поверхностей формируется движением окружности постоянного или переменного радиуса. Это так называемые ***циклические*** поверхности (рис. 8.2).

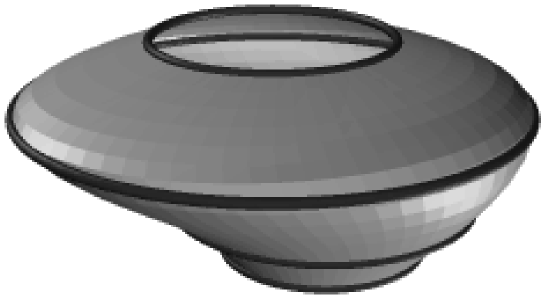


Рисунок 8.2 – Циклическая поверхность

Если же группировать поверхности по закону движения образующей линии и производящей поверхности, то большинство встречающихся в технике поверхностей можно разделить:

- на поверхности вращения;
- винтовые поверхности;
- поверхности с плоскостью параллелизма;
- поверхности переноса.

Особое место занимают такие нелинейчатые поверхности, образование которых не подчинено никакому закону. Оптимальную форму таких поверхностей определяют теми физическими условиями, в которых они работают и устанавливают ее форму экспериментально (поверхности лопастей турбин, обшивка каркасов морских и воздушных судов и т. д.).

Множество линий, заполняющих поверхность так, что через каждую точку поверхности проходит в общем случае одна линия этого множества, называется ***каркасом*** поверхности. Поверхность может быть задана и конечным множеством точек, которое принято называть ***точечным каркасом***.

Проекции каркаса могут быть построены, если задан ***определитель*** поверхности – совокупность независимых условий, задающих поверхность в пространстве и на чертеже.

Различают две части определителя: геометрическую и алгоритмическую.

Геометрическая часть определителя представляет собой набор постоянных геометрических элементов (точек, прямых, плоскостей и т. п.), которые могут и не входить в состав поверхности.

Вторая часть – алгоритмическая (описательная) – содержит перечень операций, позволяющий реализовать переход от фигуры постоянных элементов к непрерывному каркасу. Определитель произвольной поверхности имеет следующую структурную форму: Ф(Г)[А], где (Г) – геометрическая часть, [А]– алгоритмическая часть.

8.3. Многогранники

Многогранником называется совокупность таких плоских многоугольников, у которых каждая сторона одного является одновременно стороной другого (но только одного).

1. **Пирамида** – это многогранник, одна грань которого многоугольник, а остальные грани – треугольники с общей вершиной (рис. 8.3). Пирамида называется правильной, если в основании лежит правильный многоугольник и высота пирамиды проходит через центр многоугольника. Пирамида называется усеченной, если вершина ее отсекается плоскостью.

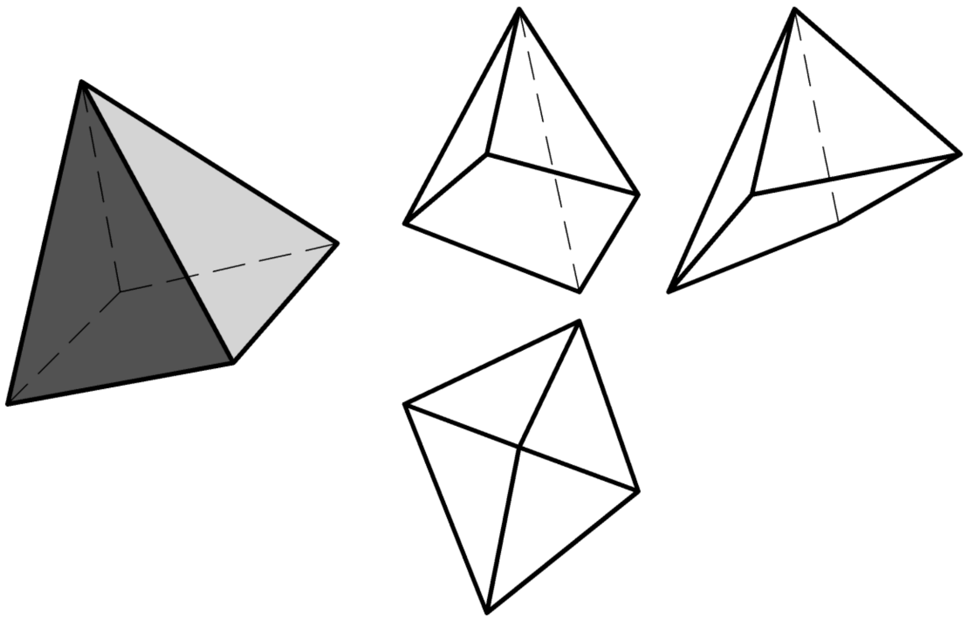


Рисунок 8.3 – Пирамида

2. **Призма** – многогранник, две грани которого (основания призмы) представляют собой равные многоугольники с взаимно параллельными сторонами, а все другие грани – параллелограммы (рис. 8.4). Призма называется прямой, если ее ребра перпендикулярны плоскости основания. Если основанием призмы является прямоугольник, призму называют параллелепипедом.

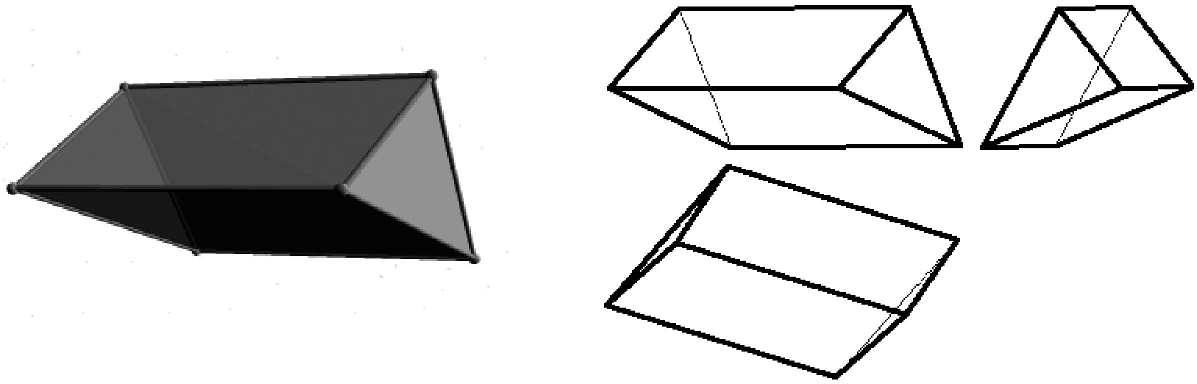


Рисунок 8.4 – Призма

3. **Призматоид** – многогранник, ограниченный двумя многоугольниками, расположенными в параллельных плоскостях (они являются его основаниями); его боковые грани представляют собой треугольники и трапеции, вершины которых являются и вершинами многоугольников оснований (рис. 8.5).

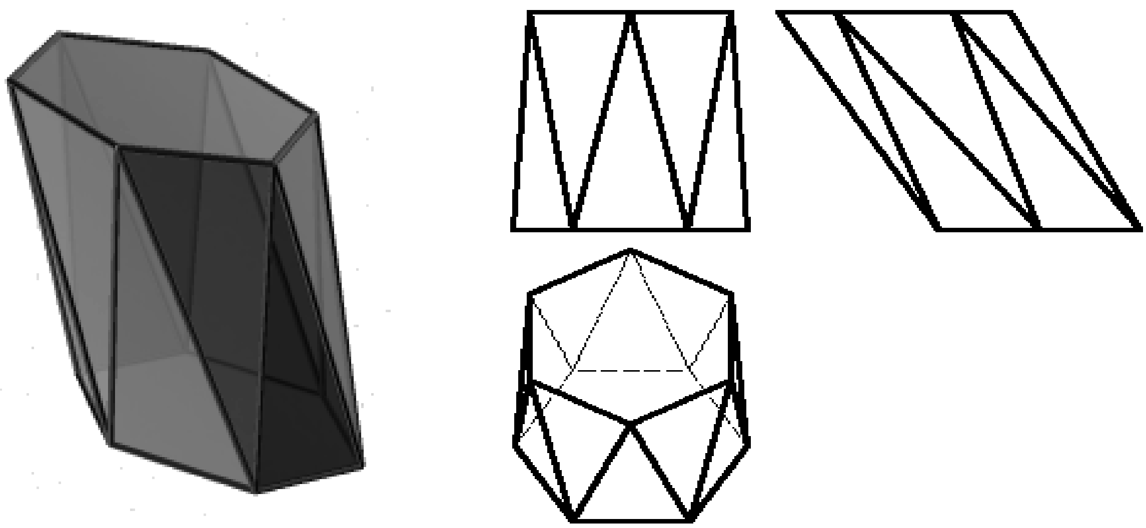


Рисунок 8.5 – Призматоид

4. **Тела Платона.** Многогранник, все грани которого представляют собой правильные и равные многоугольники, называют ***правильным.*** Углы при вершинах такого многогранника равны между собой.

Существует пять типов правильных многогранников. Эти многогранники и их свойства были описаны более двух тысяч лет назад древнегреческим философом Платоном, чем и объясняется их общее название.

Каждому правильному многограннику соответствует другой правильный многогранник с числом граней, равным числу вершин данного многогранника. Число ребер у обоих многогранников одинаково.

Тетраэдр – правильный четырехгранник (рис. 8.6). Он ограничен четырьмя равносторонними треугольниками (это правильная треугольная пирамида).

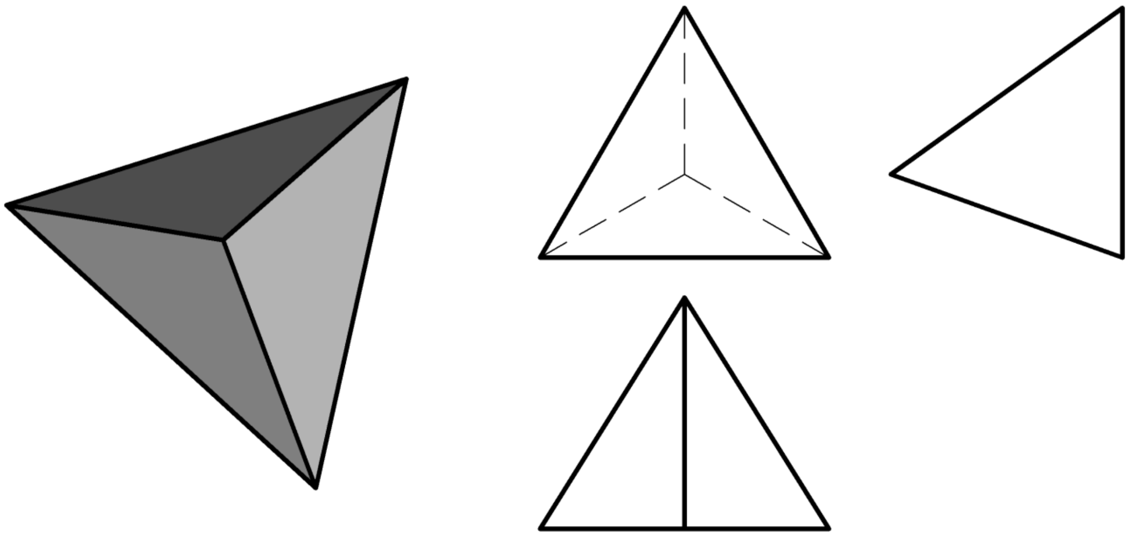


Рисунок 8.6 – Тетраэдр

Гексаэдр – правильный шестигранник. Это куб, состоящий из шести равных квадратов (рис. 8.7).

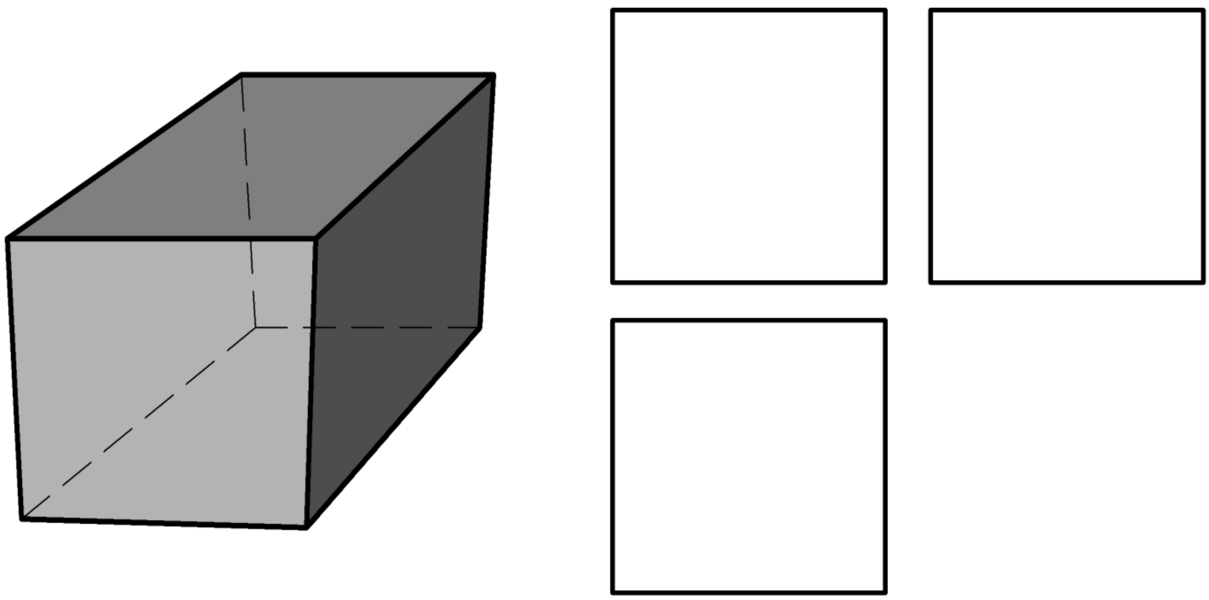


Рисунок 8.7 – Гексаэдр

Октаэдр – правильный восьмигранник. Он состоит из восьми равносторонних и равных между собой треугольников, соединенных по четыре у каждой вершины (рис. 8.8).

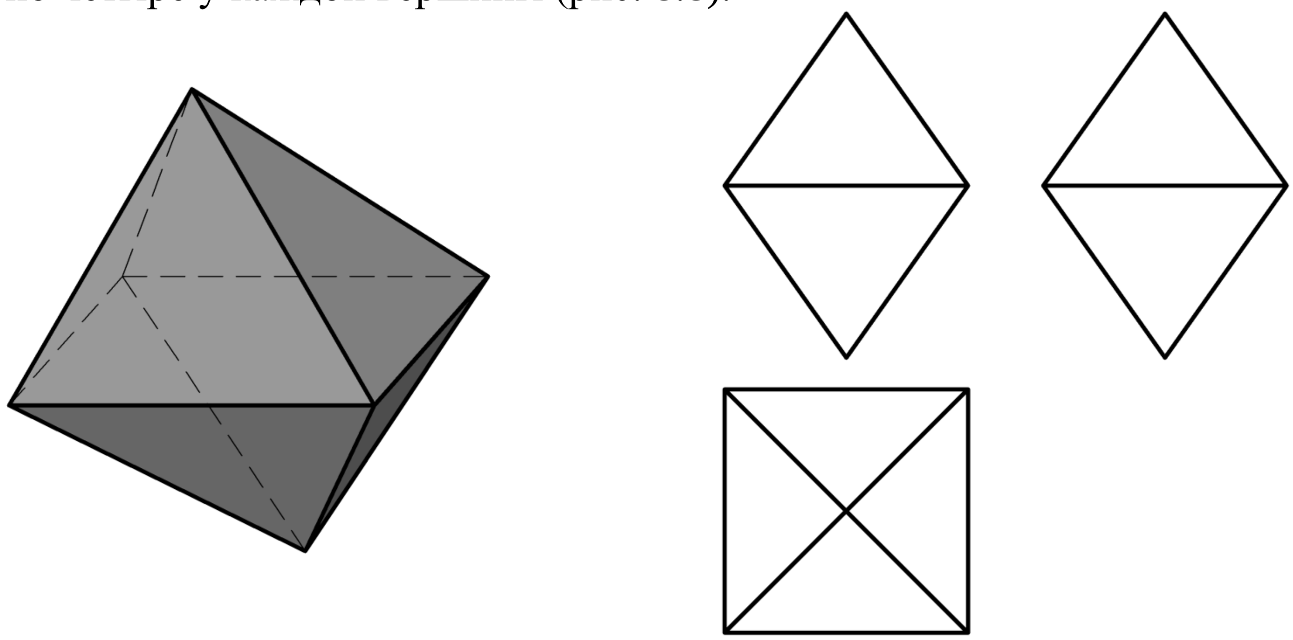


Рисунок 8.8 – Октаэдр

Додекаэдр – правильный двенадцатигранник, состоит из двенадцати правильных и равных пятиугольников, соединенных по три около каждой вершины (рис. 8.9).

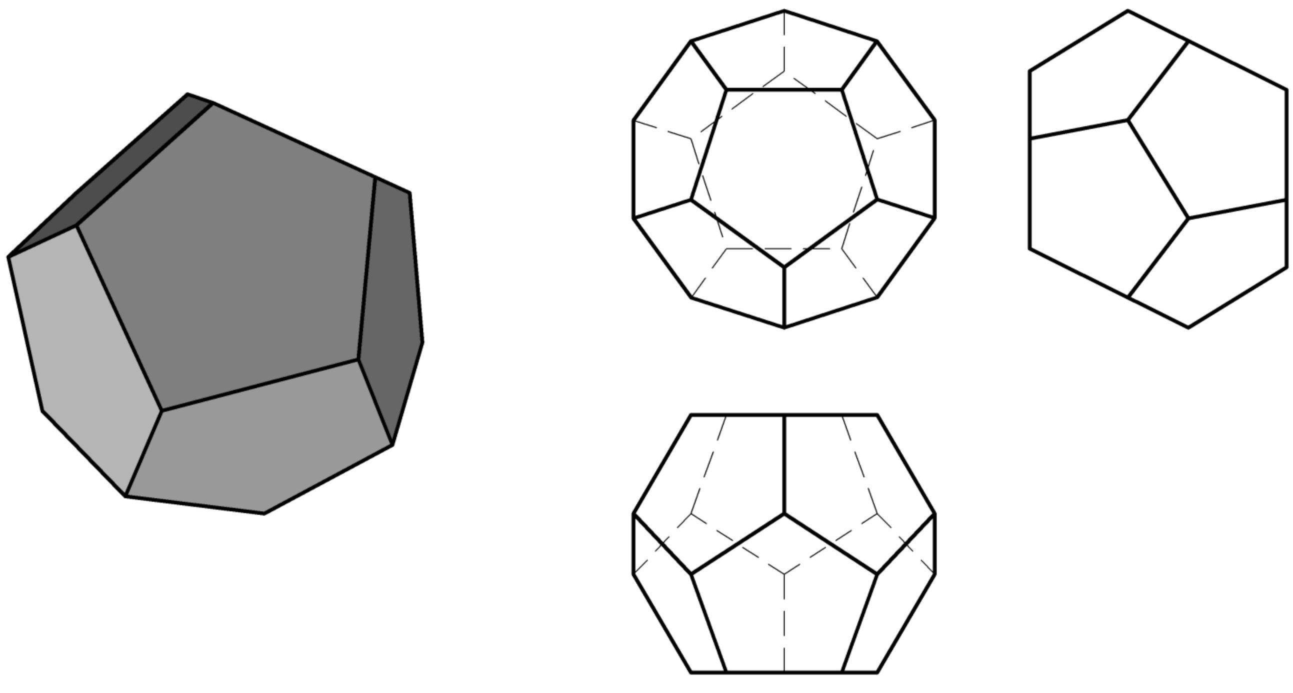


Рисунок 8.9 – Додекаэдр

Икосаэдр – состоит из 20 равносторонних и равных треугольников, соединенных по пять около каждой вершины (рис. 8.10).

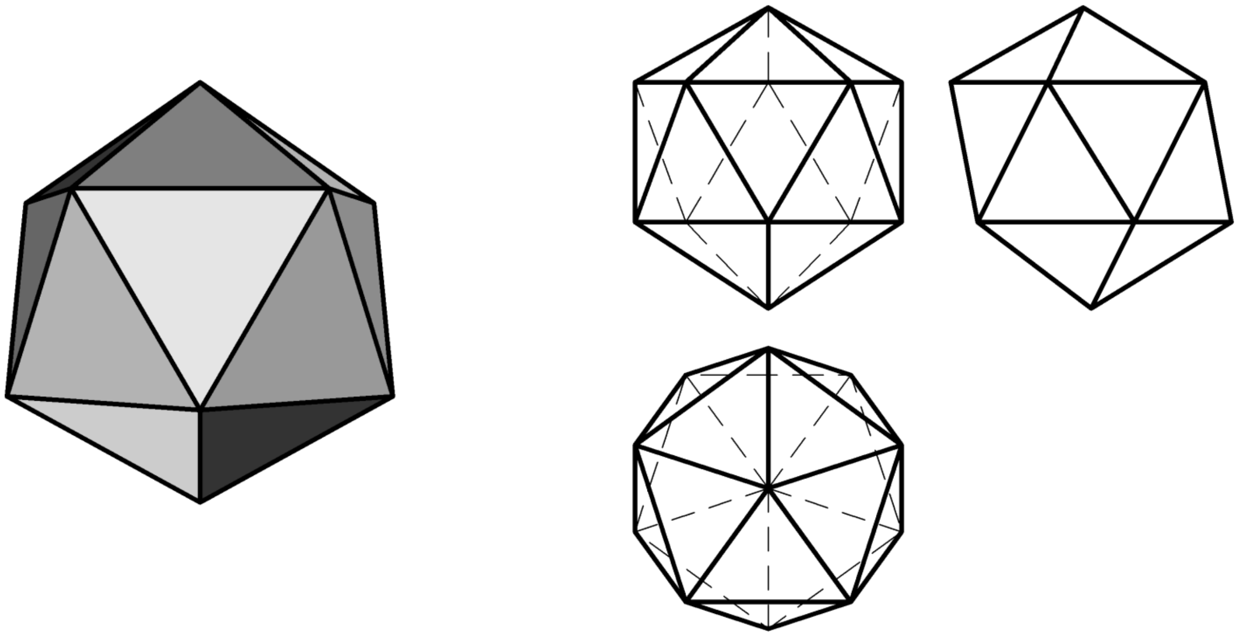


Рисунок 8.10 – Икосаэдр

Звездчатые формы и соединения тел Платона. Кроме правильных выпуклых многогранников существуют и правильные выпукло-вогнутые многогранники. Их называют звездчатыми (самопересекающимися). Рассматривая пересечения продолжения граней платоновых тел, мы будем получать звездчатые многогранники. На рисунке 8.11 приведен ***звездчатый октаэдр,*** а на рисунке 8.12 – ***малый звездчатый додекаэдр.***

Рисунок 8.11 – Звездчатый октаэдр

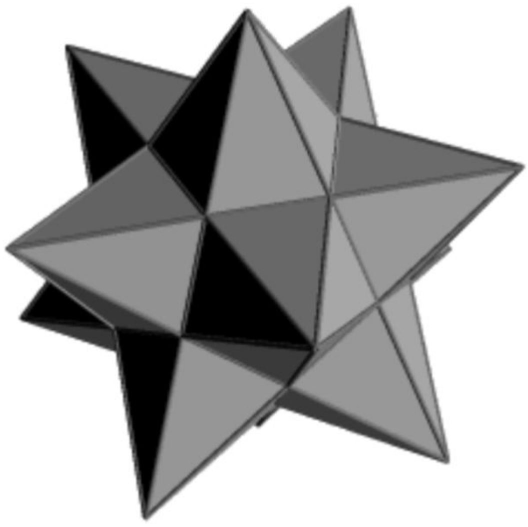


Рисунок 8.12 – Малый звездчатый додекаэдр

8.4. Пересечение прямой линии с многогранником

При определении точек пересечения прямой линии с многогранником задача сводится к нахождению точек пересечения прямой с плоскостями граней (рис. 8.13). Алгоритм решения задачи:

1. Проводят вспомогательную проецирующую плоскость Σ через одну из проекций прямой линии $m \in \Sigma$.

2. Строят сечение многогранника плоскостью Σ.

3. Определяют искомые точки пересечения полученного сечения с прямой *m* (точки *K* и *M*).

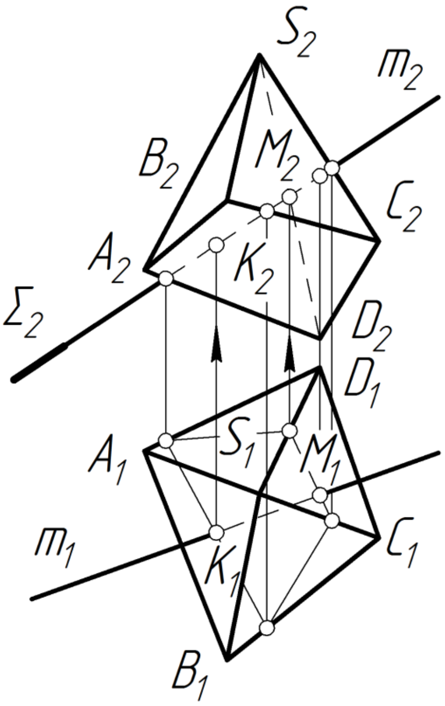


Рисунок 8.13 – Построение точек пересечения прямой линии с поверхностью многогранника

8.5. Поверхности вращения

Поверхности вращения – это поверхности, созданные вращением образующей *m* вокруг оси *i* (рис. 8.14).

Геометрическая часть определителя состоит из двух линий: образующей *m* и оси *i*. Алгоритмическая часть включает две операции:

- на образующей *m* выделяют ряд точек *A, B, C, …, F*;
- каждую точку вращают вокруг оси *i*.

Так создается каркас поверхности, состоящей из множества окружностей (рис. 8.15), плоскости которых расположены перпендикулярно оси *i*. Эти окружности называются ***параллелями***; наименьшая параллель называется ***горлом***, наибольшая – ***экватором***.

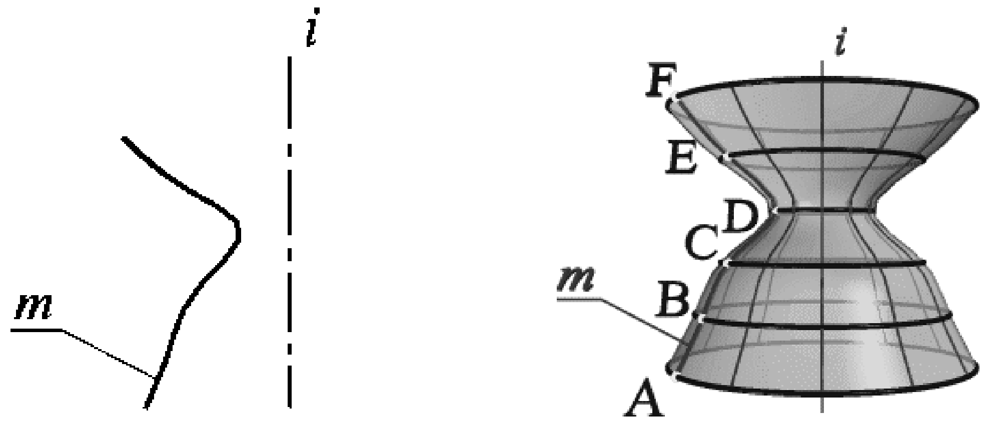


Рисунок 8.14 – Образование поверхности вращения

Из закона образования поверхности вращения вытекают два основных свойства:

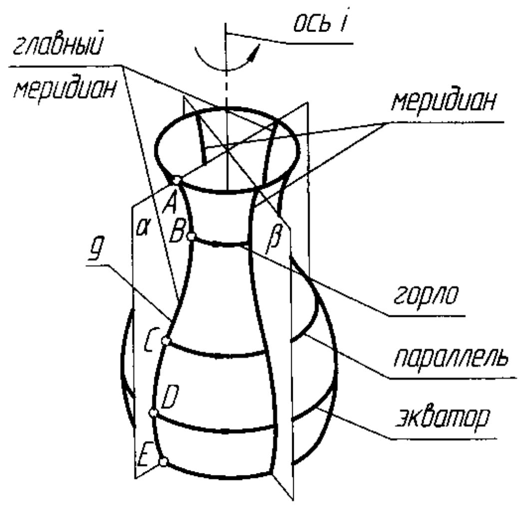


Рисунок 8.15 – Поверхность вращения

1. Плоскость, перпендикулярная оси вращения, пересекает поверхность по окружности – ***параллели***.

2. Плоскость, проходящая через ось вращения, пересекает поверхность по двум симметричным относительно оси линиям – ***меридианам***.

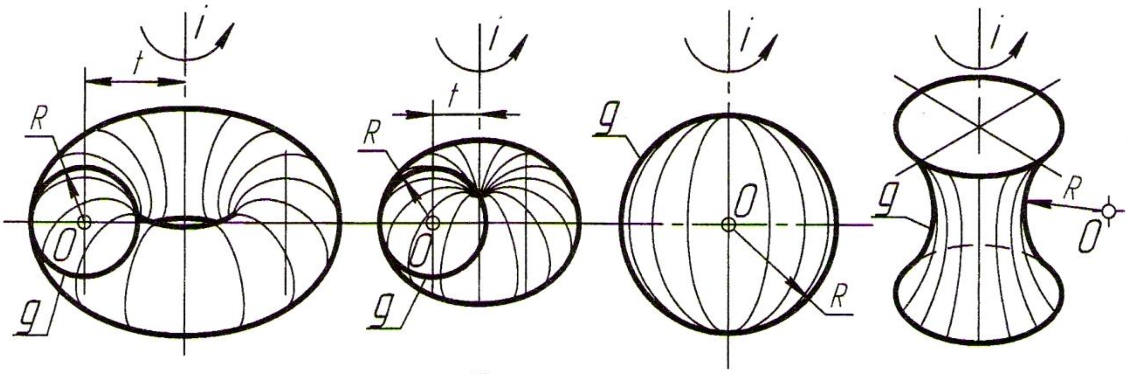
Плоскость, проходящая через ось параллельно фронтальной плоскости проекций, называется ***плоскостью главного меридиана***, а линия, полученная в сечении, – ***главным меридианом***.

Рассмотрим наиболее распространенные поверхности вращения с криволинейными образующими.

Тор – поверхность тора формируется при вращении окружности (или дуги окружности) вокруг оси, не проходящей через центр окружности (рис. 8.16*, а, б, г*).

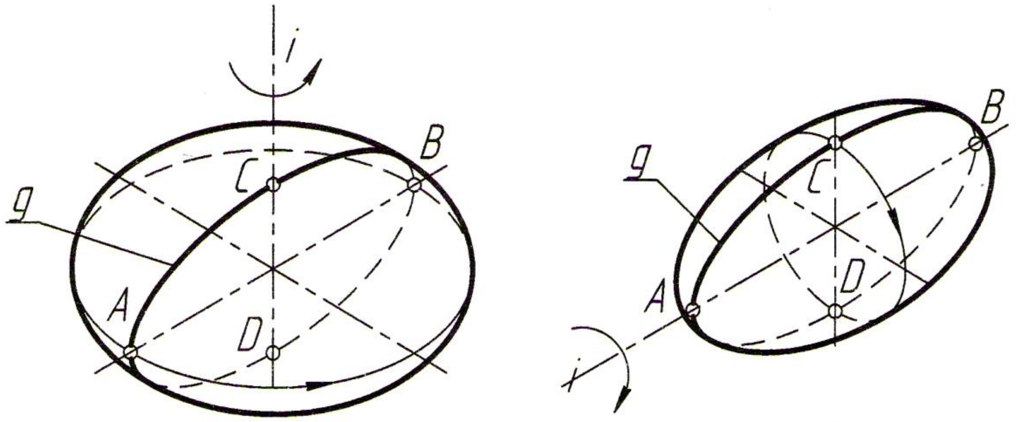
Сфера – это поверхность, образованная вращением окружности вокруг ее диаметра (рис. 8.16*, в*).

При сжатии или растяжении сферы она преобразуется в ***эллипсоиды***, которые могут быть получены вращением эллипса вокруг одной из осей: если вращение вокруг большой оси, то эллипсоид называется ***вытянутым*** (рис. 8.17, *б*), если вокруг малой – ***сжатым*** или ***сфероидом*** (рис. 8.17, *а*).



а б в г

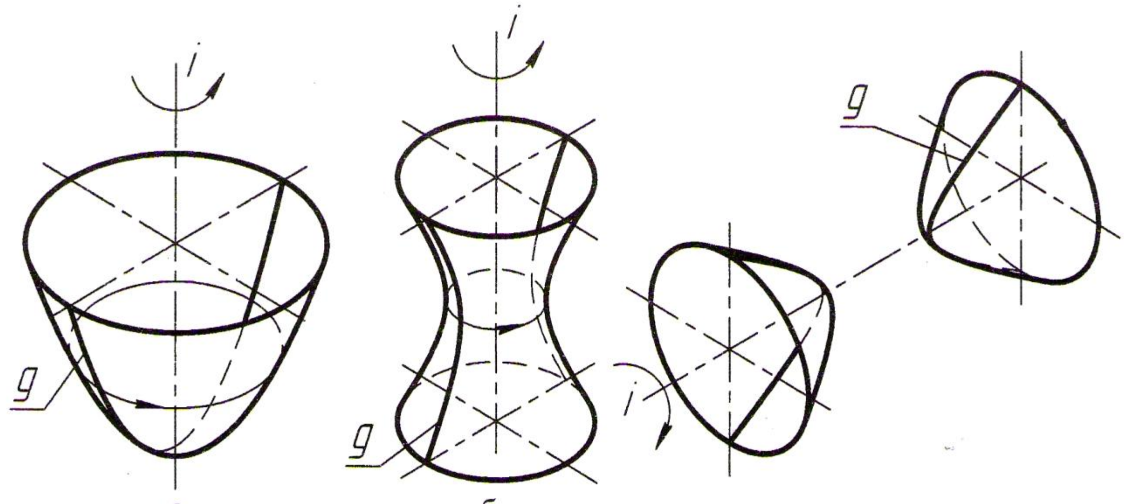
Рисунок 8.16 – Сфера и тор



а б

Рисунок 8.17 – Эллипсоиды

Параболоид вращения – образуется при вращении параболы вокруг своей оси (рис. 8.18, *а*).



а б в

Рисунок 8.18 – Параболоид и гиперболоиды вращения

Гиперболоид вращения – различают одно- и двуполостный гиперболоиды вращения. Первый получается при вращении гиперболы вокруг мнимой оси (рис. 8.18, *б*), а второй – вращением гиперболы вокруг действительной оси (рис. 8.18, *в*).

8.6. Винтовые поверхности

Винтовые поверхности образуются винтовым движением некоторой линии – образующей.

Под винтовым движением понимается совокупность двух движений: поступательного параллельно некоторой оси, и вращательного вокруг той же оси.

При этом поступательное и угловое перемещение находятся в определенной зависимости $\Delta h = k\Delta v$,

где Δh – линейное перемещение за время Δt;

Δv – угловое перемещение за то же время;

k – коэффициент пропорциональности. Если $k=const$, то шаг поверхности постоянный.

Геометрическая часть определителя винтовой поверхности ничем не отличается от поверхности вращения и состоит из двух линий: образующей m и оси i (рис. 8.19).

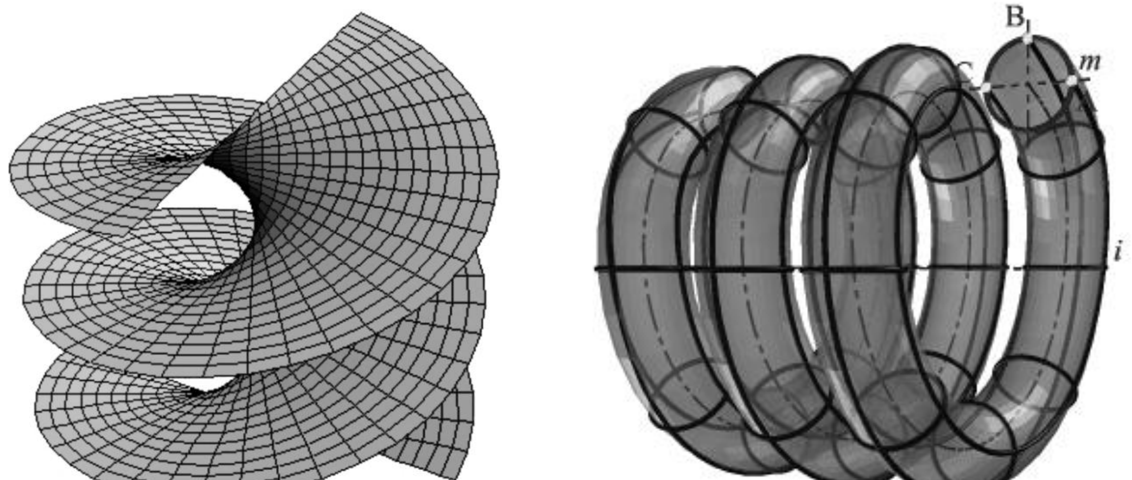


Рисунок 8.19 – Винтовые поверхности

Алгоритмическая часть:

1. На образующей m выделяют ряд точек A, B, C, … .

2. Строят винтовые линии заданного шага и направления, по которым перемещаются заданные точки.

8.7. Линейчатые поверхности с плоскостью параллелизма

Поверхность с плоскостью параллелизма представляет собой множество прямых линий ***l*** (образующих), параллельных некоторой плоскости ***α*** (плоскости параллелизма) и пересекающих две данные направляющие *m*, *n* (рис. 8.20).

В зависимости от формы направляющих образуются три частных вида поверхностей с плоскостью параллелизма:

1. ***Цилиндроид*** – поверхность, образованная движением прямолинейной образующей по двум направляющим кривым линиям, при этом образующая во всех положениях параллельна плоскости параллелизма (рис. 8.20).

2. ***Коноид*** – поверхность, образованная движением прямолинейной образующей по двум направляющим, одна из которых кривая линия, а другая – прямая, при этом образующая во всех положениях параллельна плоскости параллелизма (рис. 8.21).

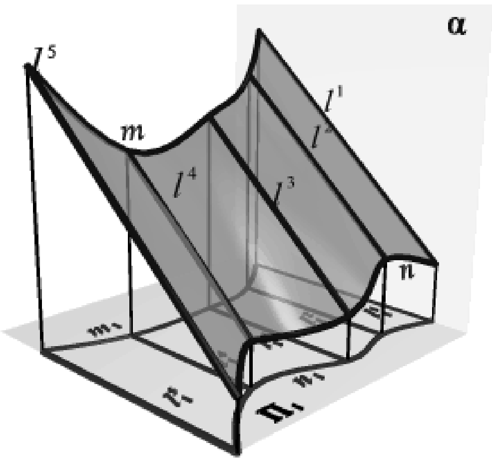


Рисунок 8.20 – Цилиндроид

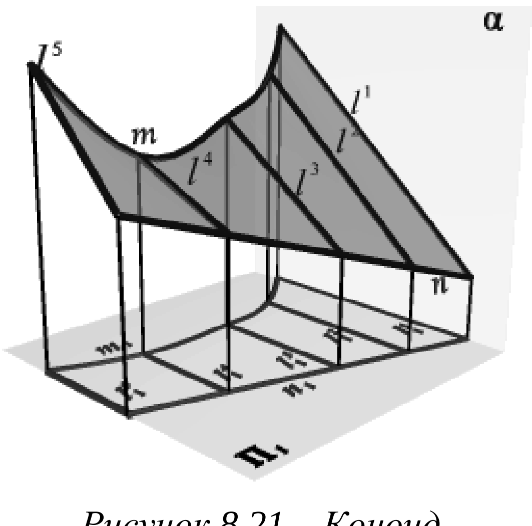


Рисунок 8.21 – Коноид

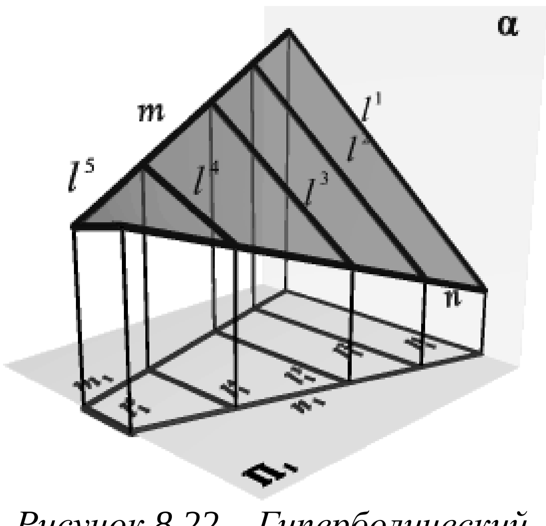


Рисунок 8.22 – Гиперболический параболоид

3. ***Гиперболический параболоид*** (или ***косая плоскость***) – поверхность, образованная движением прямолинейной образующей, параллельной плоскости параллелизма, по двум направляющим линиям, являющимся скрещивающимися прямыми (рис. 8.22).

8.8. Поверхности параллельного переноса

Поверхностью параллельного переноса называется поверхность, образованная поступательным плоскопараллельным перемещением образующей – плоской кривой линии *m* по криволинейной направляющей *n* (рис. 8.23).

Геометрическая часть определителя состоит из двух кривых линий: образующей *m* и направляющей *n*.

Алгоритмическая часть определителя содержит следующий перечень операций:

1. На направляющей *n* выбирают ряд точек *A*, *B*, *C*, … .
2. Строят векторы *AB*, *BC*, … .
3. Осуществляют параллельный перенос линии *m* по векторам *AB*, *BC*, … .

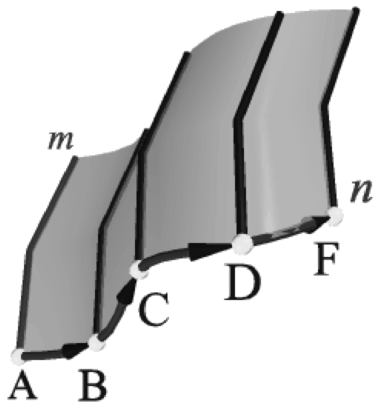


Рисунок 8.23 – Поверхность параллельного переноса

Наглядным примером поверхности параллельного переноса может служить скользящая опалубка, применяемая в строительстве.

8.9. Линия и точка, принадлежащие поверхности

Для определения принадлежности точки и линии поверхности рассмотрим следующие позиционные задачи:

Задача 1. Построение линии, принадлежащей поверхности, если одна из проекций линии задана (рис. 8.24).

Дано: поверхность *Ф*, заданная проекциями каркаса, состоящего из образующих линий *l* и направляющей *n*.

Проекция линии m_2, принадлежащей поверхности *Ф*.

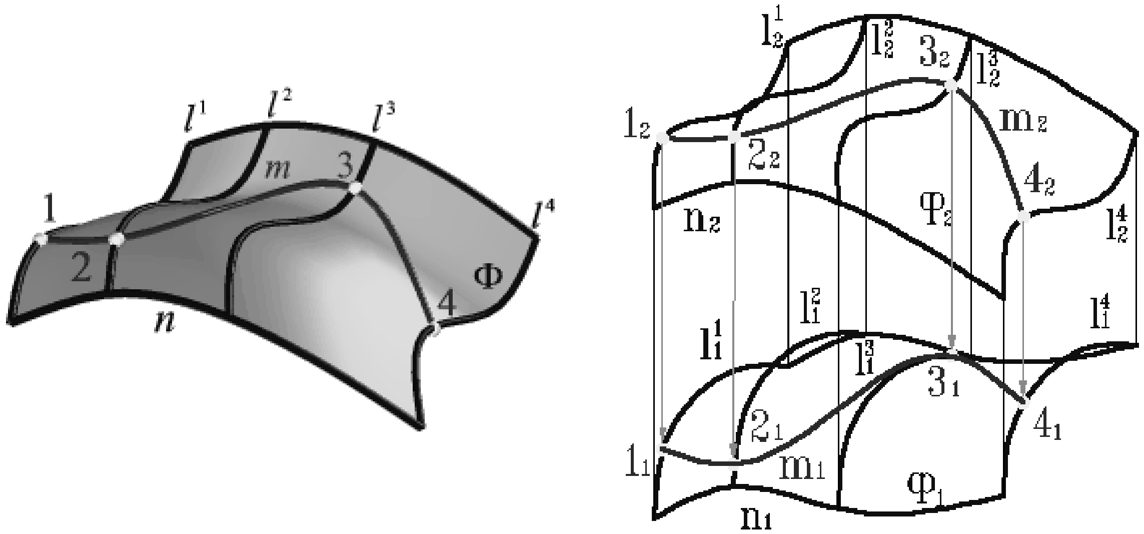


Рисунок 8.24 – Линия на поверхности

Алгоритм решения задачи:

1. Находят точки 1_2, 2_2, 3_2, 4_2 пересечения проекции линии m_2 с проекцией каркаса поверхности, то есть соответственно с проекциями линий $l^1{}_2$, $l^2{}_2$, $l^3{}_2$, $l^4{}_2$.

2. По линиям связи находят проекции точек 1_1, 2_1, 3_1, 4_1, как точки, лежащие на проекциях образующих каркаса, соответственно $l^1{}_1$, $l^2{}_1$, $l^3{}_1$, $l^4{}_1$, и определяющих положение проекции линии m_1 на поверхности *Ф*.

Задача 2. По одной проекции точки, принадлежащей поверхности, найти недостающие проекции точки на поверхности (рис. 8.25).

Дано: поверхность *Ф*, заданная проекциями каркаса, состоящего из образующих l и направляющих n.

Проекция точки K_1, принадлежащей поверхности *Ф*.

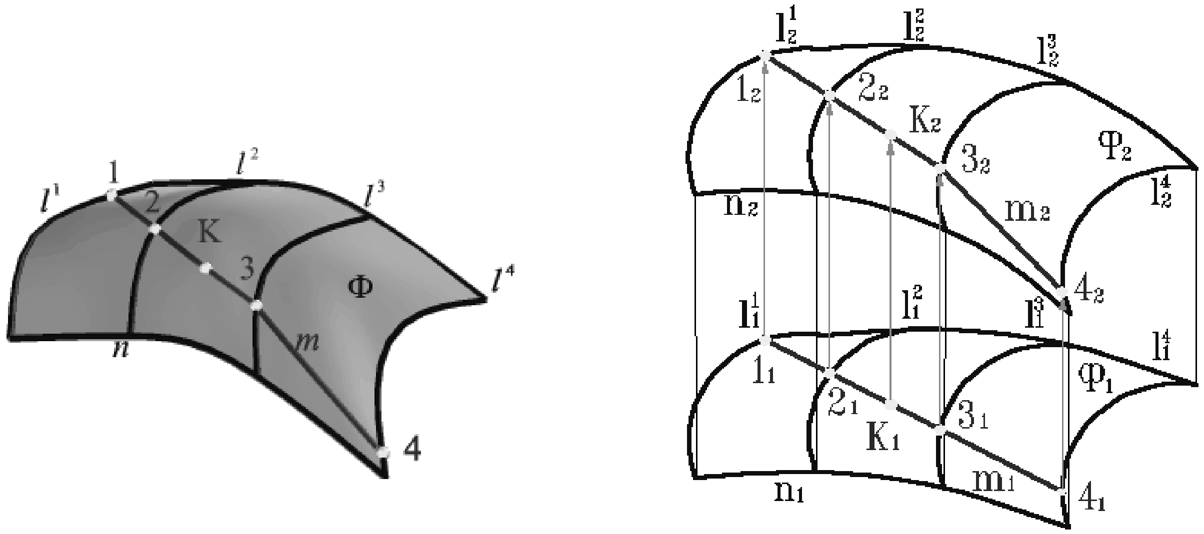


Рисунок 8.25 – Точка на поверхности

Алгоритм решения задачи:

1. Через заданную проекцию точки K_1 проводят одноименную проекцию произвольной вспомогательной линии m_1, принадлежащей поверхности Φ.

2. Находят вспомогательную линию m на поверхности Φ по алгоритму решения задачи 1.

3. По линии связи находят положение точки K, как точку, принадлежащую вспомогательной линии m.

8.10. Пересечение линии с поверхностью

В общем случае для графического определения точек пересечения линии с поверхностью (рис. 8.26) необходимо выполнить ряд геометрических построений, описываемых следующим алгоритмом:

1. Заключаем линию l в некоторую вспомогательную поверхность Δ.

2. Строим линию m пересечения данной поверхности Φ и вспомогательной поверхности Δ.

3. Определяем искомую точку K пересечения линий l и m (точка может быть не единственная).

В качестве вспомогательной поверхности целесообразно использовать проецирующую цилиндрическую поверхность, направляющей которой должна служить заданная линия, а прямолинейными образующими – проецирующие прямые.

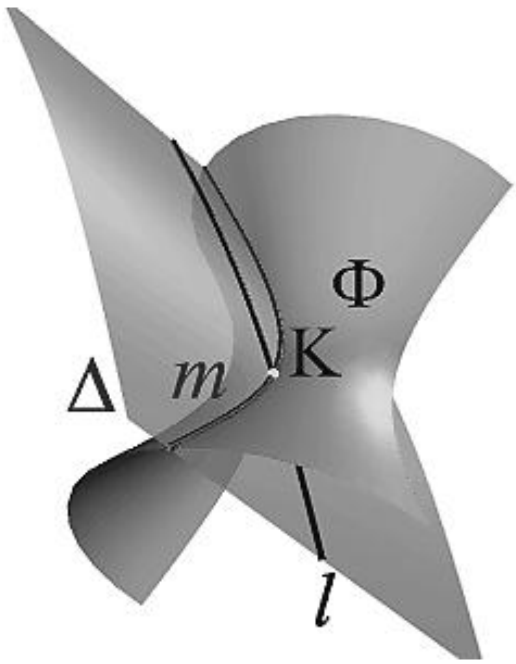


Рисунок 8.26 – Пересечение линии с поверхностью

Определим точки пересечения прямой линии с поверхностью конуса вращения и видимость прямой по отношению к конусу.

Если в качестве вспомогательной секущей поверхности выбрать горизонтально проецирующую или фронтально проецирующую плоскости, то в сечении получатся соответственно гипербола или эллипс. Построение кривых линий значительно усложняет задачу.

Поэтому в качестве вспомогательной секущей плоскости целесообразно выбрать такую плоскость, которая бы включала прямую *l* и пересекала конус по образующим (рис. 8.27).

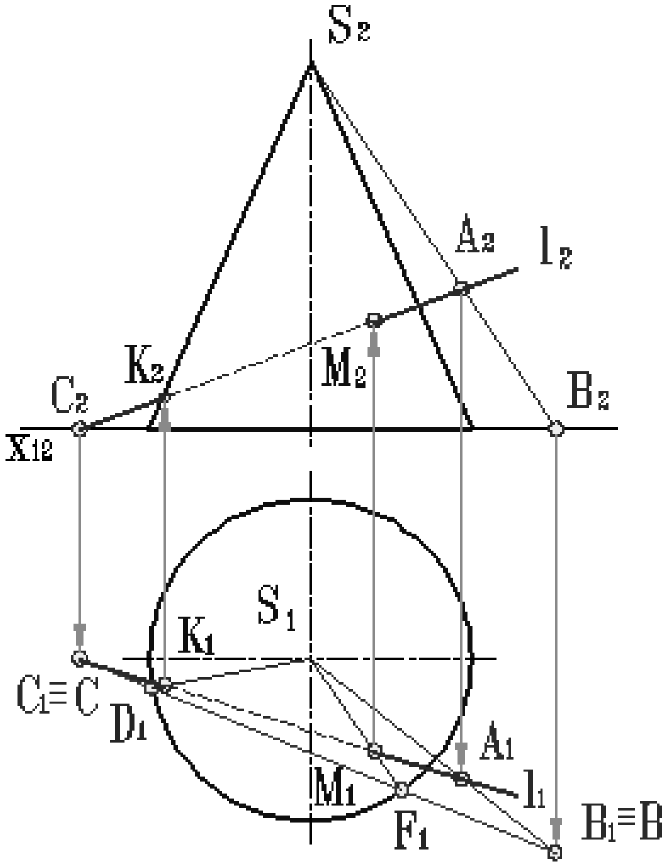


Рисунок 8.27 – Пересечение прямой линии с конусом

Очевидно, что такая плоскость определяется прямой *l* и точкой *S* – вершиной конуса. Пусть основание конуса лежит в горизонтальной плоскости проекций, тогда линия пересечения вспомогательной секущей плоскости и горизонтальной плоскости проекций *BC* пересекает основание конуса в точках *D* и *F*. Таким образом, в сечении конуса вспомогательной секущей плоскостью получится треугольник *DFS*. Так как полученный треугольник и прямая *l* лежат в одной плоскости, точки их пересечения *K*, *M* и есть точки пересечения прямой с конусом.

8.11. Пересечение многогранника плоскостью

Построение сечения многогранника требует многократного решения задачи о нахождении точки пересечении прямой с плоскостью. Точки, в которых ребра многогранника пересекаются с заданной плоскостью, будут вершинами искомого сечения.

Тот же результат можно получить, сведя задачу к построению линий пересечения плоскости с гранями тела.

В качестве примера дана призма и плоскость общего положения, заданная двумя пересекающимися прямыми *а* и *в.* Необходимо найти сечение призмы данной плоскостью. Решение задачи приводится на рисунке 8.28.

Задача решается путем нахождения точек пересечения ребер призмы с плоскостью. Для этого через горизонтальные проекции ребер проведем вспомогательные секущие плоскости α, β и γ.

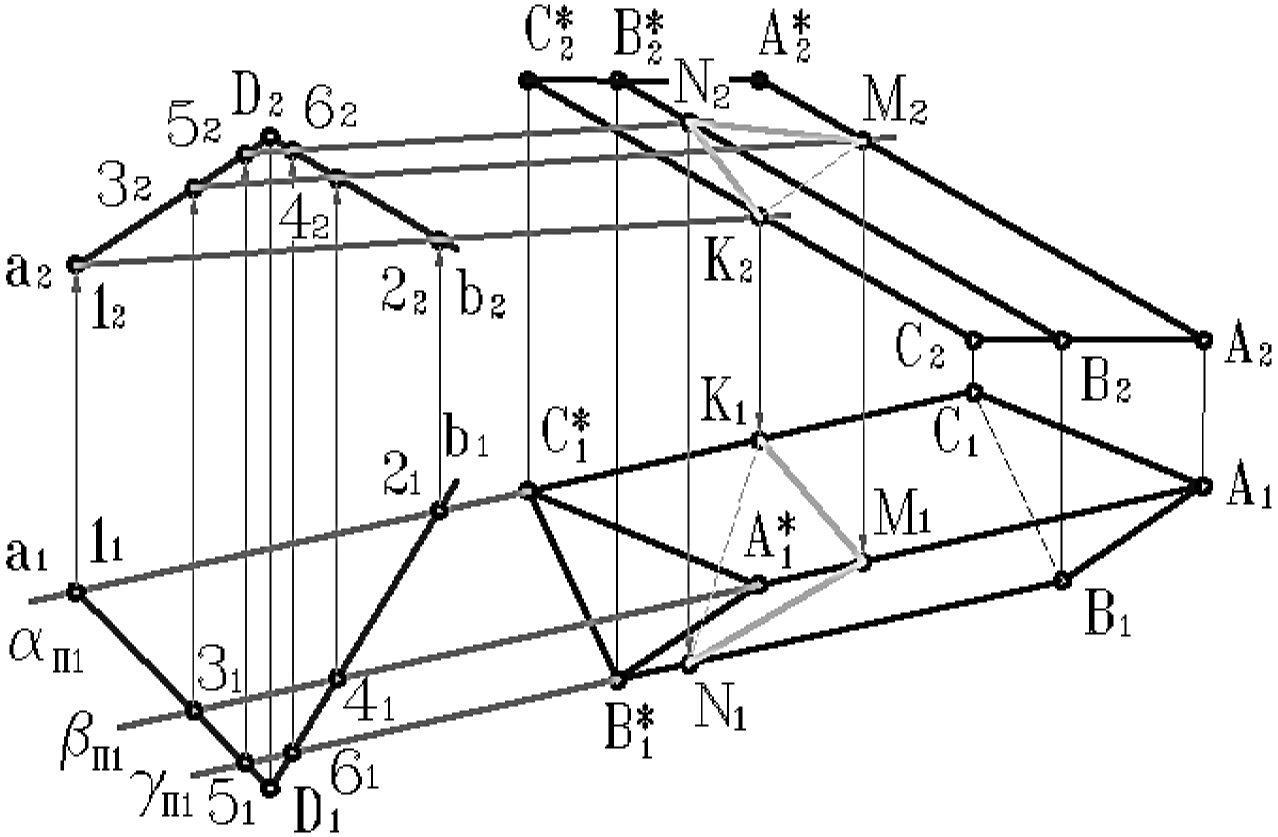


Рисунок 8.28 – Построение линии пересечения многогранника плоскостью

Построив линии пересечения вспомогательных плоскостей с заданной, находим на фронтальной проекции точки пересечения их с соответствующими ребрами призмы. K_2, M_2 и N_2 – вершины фронтальной проекции сечения призмы. По линиям связи находим горизонтальные проекции этих точек. Полученные точки соединяем прямыми линиями с учетом видимости.

При решении вопроса о видимости сторон построенного сечения следует иметь в виду достаточно очевидное правило: *точка и линия, лежащие на поверхности многогранника, видимы только в том случае, если они расположены на видимой грани.*

8.12. Пересечение кривой поверхности плоскостью

Линия пересечения кривой поверхности плоскостью представляет собой плоскую кривую, которая может распадаться и на прямые линии в случае пересечения плоскости с линейчатой поверхностью по ее образующим. Обычно построение этой линии производят по отдельным точкам.

В зависимости от положения плоскости по отношению к плоскостям проекций сложность решения позиционной задачи по определению линии пересечения ее с поверхностью существенно меняется. Наиболее простым представляется случай, когда плоскость проецирующая. Рассмотрим решение задачи по определению линии пересечения сферы фронтально проецирующей плоскостью α (рис. 8.29).

Окружность, по которой плоскость α пересекает сферу, проецируется на плоскости Π_1 и Π_3 в виде эллипса, а на плоскость Π_2 – в прямую линию, ограниченную очерком сферы.

Охарактеризуем выбранные для построения точки:

- *1, 8* – две вершины эллипса, определяющие положение малой оси, их фронтальные проекции определяют пересечение следа плоскости α с очерком сферы, а горизонтальные проекции являются соответственно высшей и низшей точками сечения.
- *2, 3* – фронтальные проекции этих точек лежат на вертикальной оси сферы, а профильные проекции будут лежать на очерке сферы и определять зону видимости при построении эллипса на Π_3.
- *4, 5* – две вершины эллипса, определяющие положение большой оси эллипса, положение их фронтальной проекции определяет перпендикуляр, опущенный из центра сферы к следу плоскости.
- *6, 7* – фронтальные проекции этих точек лежат на горизонтальной оси сферы, то есть принадлежат экватору сферы, их гори-

зонтальная проекция лежит на очерке сферы и определяет зону видимости при построении эллипса на Π_1.

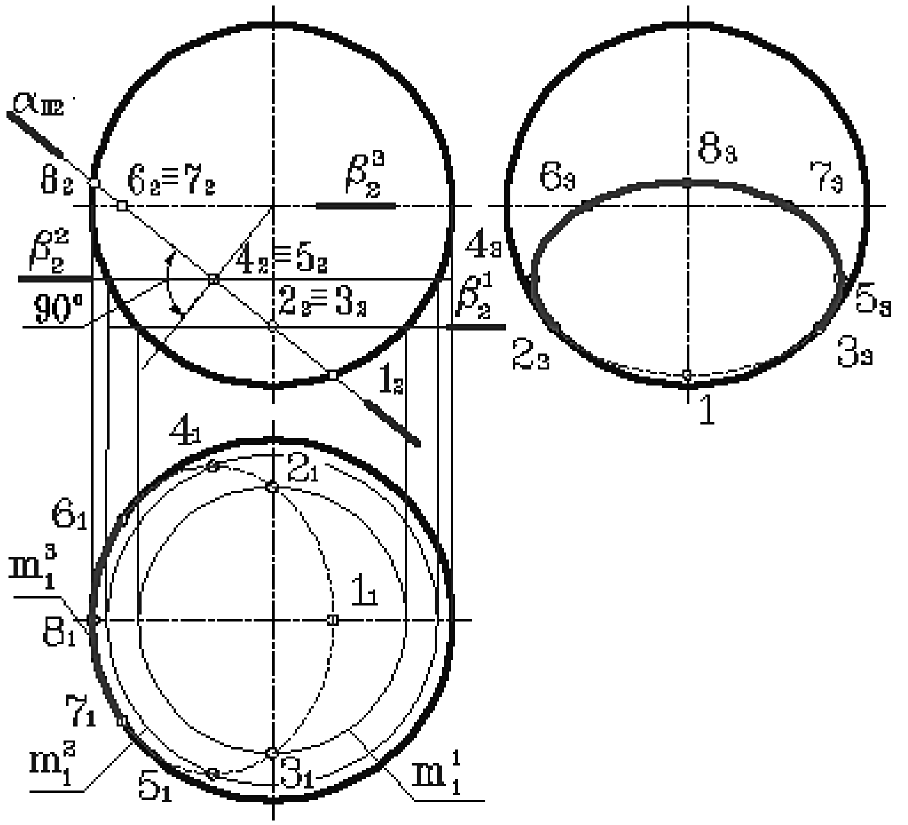


Рисунок 8.29 – Пересечение сферы фронтально проецирующей плоскостью

Линия пересечения плоскости α и сферы на фронтальной плоскости проекций совпадает со следом плоскости, на ней отмечаем точки $1_2 \ldots 8_2$. Для нахождения горизонтальных проекций этих точек в общем случае используется способ вспомогательных секущих плоскостей (β – горизонтальные плоскости уровня). Например, через точки 2_2, 3_2 проведем след плоскости $\beta^1{}_2$, на горизонтальной плоскости проекций линией пересечения плоскости β^1 и сферы будет окружность $m^1{}_1$, а точки 2_1 и 3_1 лежат на этой окружности по линии связи (в данном случае – осевой линии). Таким образом находятся все точки, кроме 1_1 и 8_1, которые, ввиду своего положения на очерке фронтальной проекции сферы, будут принадлежать горизонтальной осевой линии на плоскости Π_1. Построенные точки $1_1 \ldots 8_1$ соединим плавной кривой линией с учетом видимости.

Задача, когда сферу пересекает плоскость общего положения, например, заданная двумя пересекающимися прямыми $\alpha(h \cap f)$, решается следующим образом (рис. 8.30).

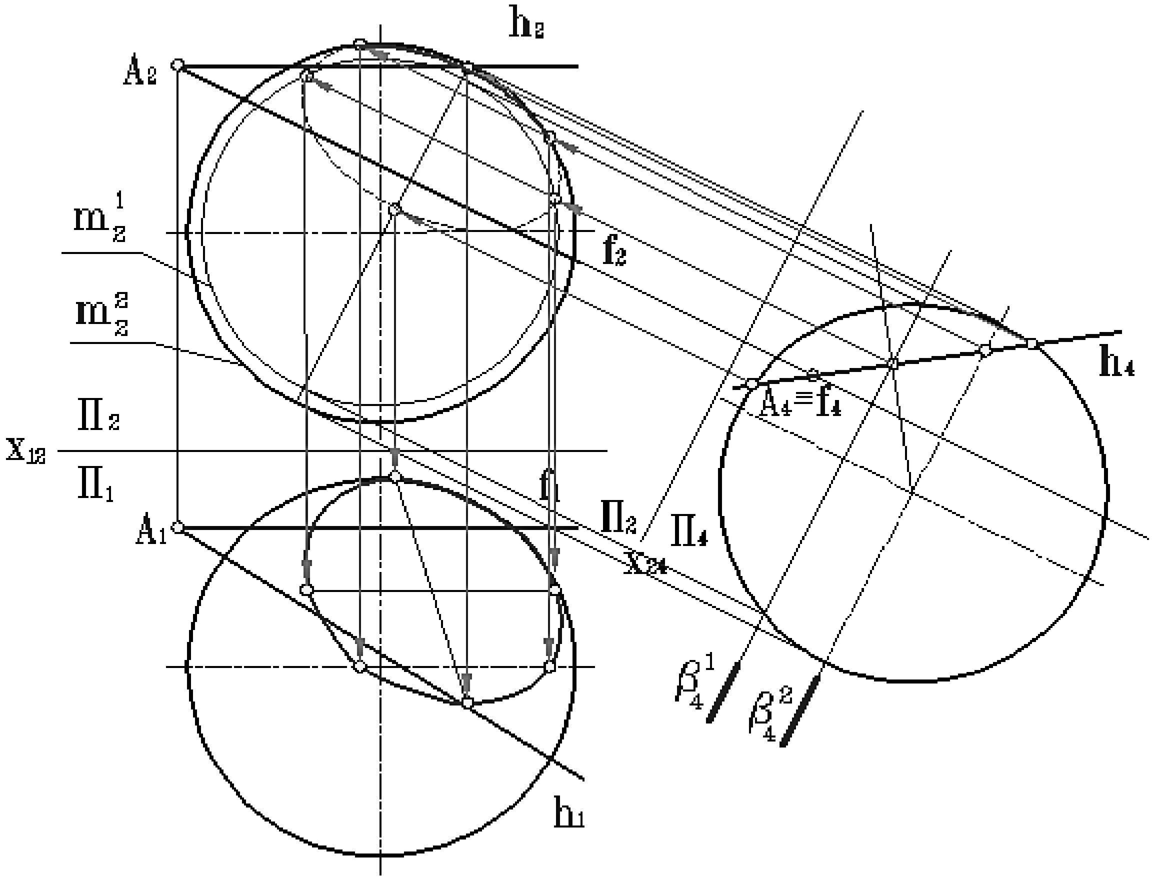


Рисунок 8.30 – Пересечение сферы плоскостью общего положения

Произведем замену плоскостей проекций таким образом, чтобы плоскость α стала проецирующей, то есть переведем плоскость общего положения в частное. Чтобы перевести плоскость α в положение проецирующей плоскости, необходимо выбрать новую плоскость проекций либо перпендикулярно горизонтальной проекции горизонтали h_1, либо перпендикулярно фронтальной проекции фронтали f_2.

Дальнейшее решение аналогично предыдущей задаче.

8.13. Цилиндрические и конические сечения

Весьма часто заранее известен вид кривой, получающейся в сечении поверхности плоскостью. В этом случае линия пересечения может быть построена при помощи основных элементов, определяющих эту кривую.

Цилиндр вращения пересекается плоскостью в общем случае по эллипсу. Если же секущая плоскость параллельна или перпендикулярна оси цилиндра, то в сечении получается соответственно прямоугольник или окружность (рис. 8.31).

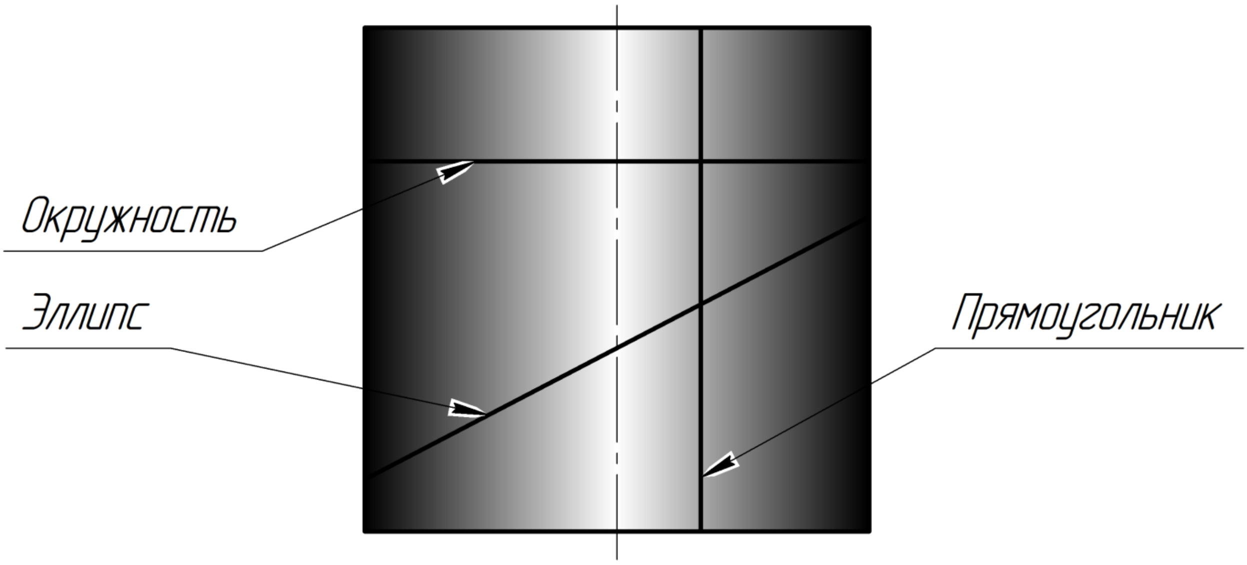


Рисунок 8.31 – Цилиндрические сечения

В зависимости от положения секущей плоскости линиями сечения конической поверхности могут быть (рис. 8.32): эллипс, парабола, гипербола, а в частных случаях: окружность, прямая, две пересекающиеся прямые и точка.

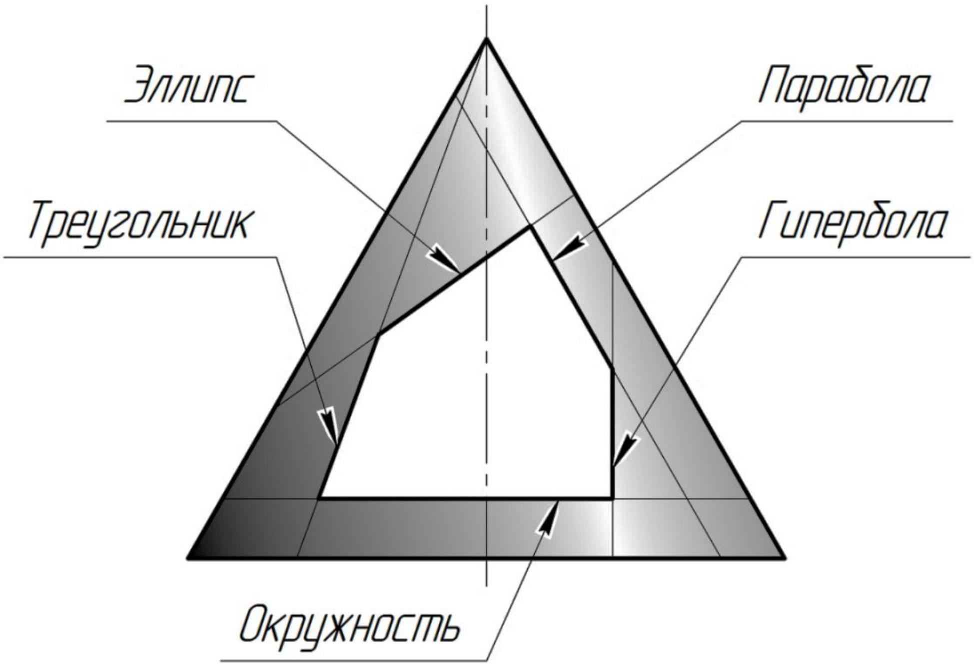


Рисунок 8.32 – Конические сечения

Если плоскость пересекает все образующие поверхности конуса вращения, то линией сечения является *эллипс*. При этом секущая плоскость не параллельна ни одной из образующих поверхности конуса.

В частном случае (плоскость перпендикулярна оси вращения конуса) такая плоскость пересекает поверхность конуса по *окружности*; и сечение вырождается в *точку*, если плоскость проходит через вершину конуса.

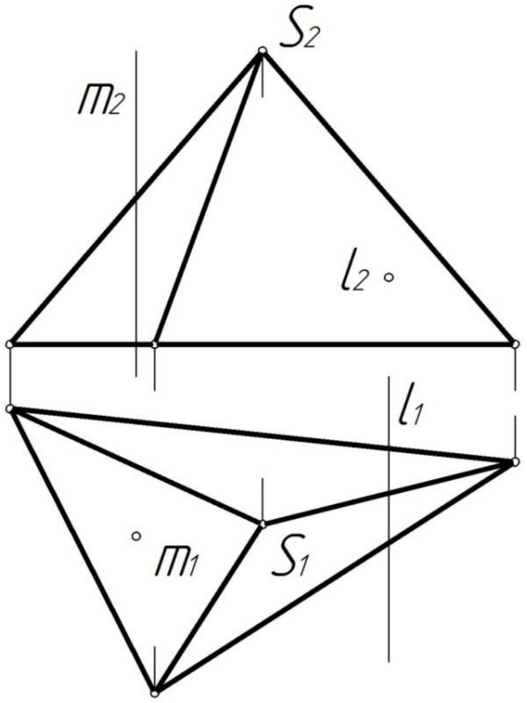
Если плоскость параллельна одной образующей поверхности конуса, то линией пересечения является *парабола*. В частном случае (плоскость является касательной к поверхности конуса) сечение вырождается в *прямую*.

Если плоскость параллельна двум образующим поверхности конуса (в частном случае параллельна оси конуса), то линией сечения является *гипербола*. В случае прохождения плоскости через вершину конической поверхности фигурой сечения могут быть сами образующие, то есть гипербола вырождается в две пересекающие прямые. На поверхности конуса такое сечение представляет собой треугольник.

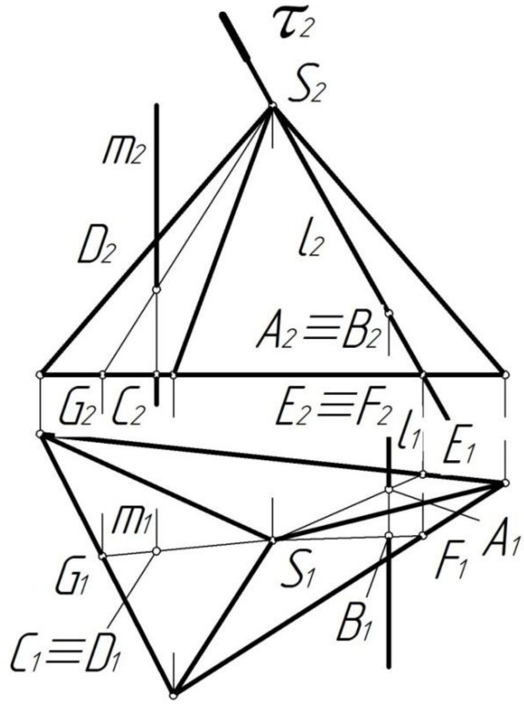
Примеры решения задач

Пример 8.1.

Задание: определить точки встречи прямых *m* и *l* с пирамидой и видимость участков прямой (рис. 8.33, *а*).



а



б

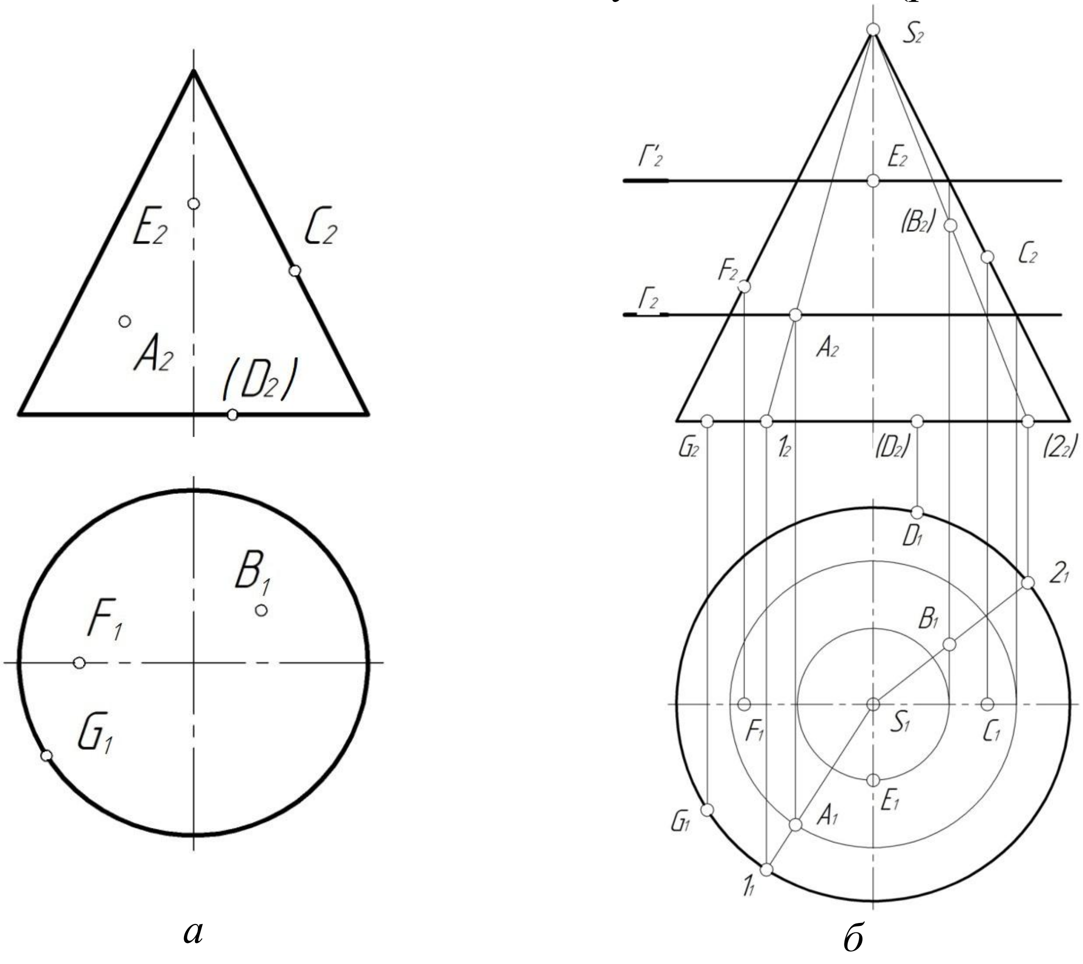
Рисунок 8.33 – Пример 8.1

Решение: для прямой *m* (рис. 8.33, *б*) в качестве посредника удобно воспользоваться прямой линией. Целесообразно на горизонтальной проекции провести проекцию прямой GS, проходящей через проекции вершины пирамиды S_1, проекцию прямой m_1 и проекцию точки на основании пирамиды G_1. Далее показываем фронтальную проекцию этой прямой и определяем проекцию верхней точки пересечения D_2. Проекция нижней точки C_2 находится на основании пирамиды. Горизонтальные проекции точек C и D находятся на проекции прямой m_1.

Для прямой l целесообразно через фронтальную проекцию вершины пирамиды провести фронтально проецирующую плоскость, пересекающую основание пирамиды по фронтально проецирующей прямой, которой принадлежат точки E и F. Пересечение треугольника $E_1F_1S_1$ и прямой l_1 определяет горизонтальные проекции точек A и B, которые будут точками пересечения прямой l и пирамиды. По линии связи определяем фронтальные проекции этих точек. Видимость определяем известными способами.

Пример 8.2.

Задание: на конической поверхности определить недостающие проекции точек *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* и *G* двумя способами (рис. 8.34, *а*).



а *б*

Рисунок 8.34 – Пример 8.2

Решение: первый способ: проводим горизонтальные плоскости уровня, перпендикулярные оси вращения, через проекции точек *A*, *E*. Линиями пересечения конуса с этими плоскостями будут окружности, проекции которых показываем на горизонтальной плоскости проекций. Точки пересечения окружностей и линий связи будут горизонтальными проекциями точек *A* и *E*.

Так как точка *D* принадлежит основанию конуса, то ее горизонтальную проекцию определим по линии связи на горизонтальной проекции основания конуса. Аналогично определяется фронтальная проекция точки *G*.

Фронтальная проекция точки *C* расположена на правой образующей, а горизонтальная – на диаметре, параллельном оси *x*, там же, где и проекция точки *F*, фронтальная проекция которой расположена на левой образующей конуса.

Второй способ: проводим прямую (образующую), проходящую через вершину конуса и проекцию точки, до пересечения с проекцией основания конуса. Находим вторую проекцию данной образующей (линия пересечения поверхности плоскостью, проходящей через вершину поверхности вращения) и по линиям связи определяем недостающие проекции точек *A* и *E*.

Решение задачи выполнено с учетом видимости проекций точек.

Пример 8.3.

Задание: построить горизонтальную и профильную проекции линии пересечения пирамиды плоскостью τ (рис. 8.35).

Решение выполняем *способом ребер:*

1. Показываем фронтальные проекции точек пересечения ребер плоскостью τ.

2. По линиям связи определяем горизонтальные и профильные проекции точек пересечения.

3. Соединяем соответствующие проекции точек пересечения и показываем проекции линии пересечения, одновременно обозначая видимость.

При определении точек пересечения в качестве посредника выбираем проецирующую плоскость.

Пример 8.4.

Нужно построить линию пересечения призмы с плоскостью общего положения $\Sigma(f \cap h)$ (рис. 8.36).

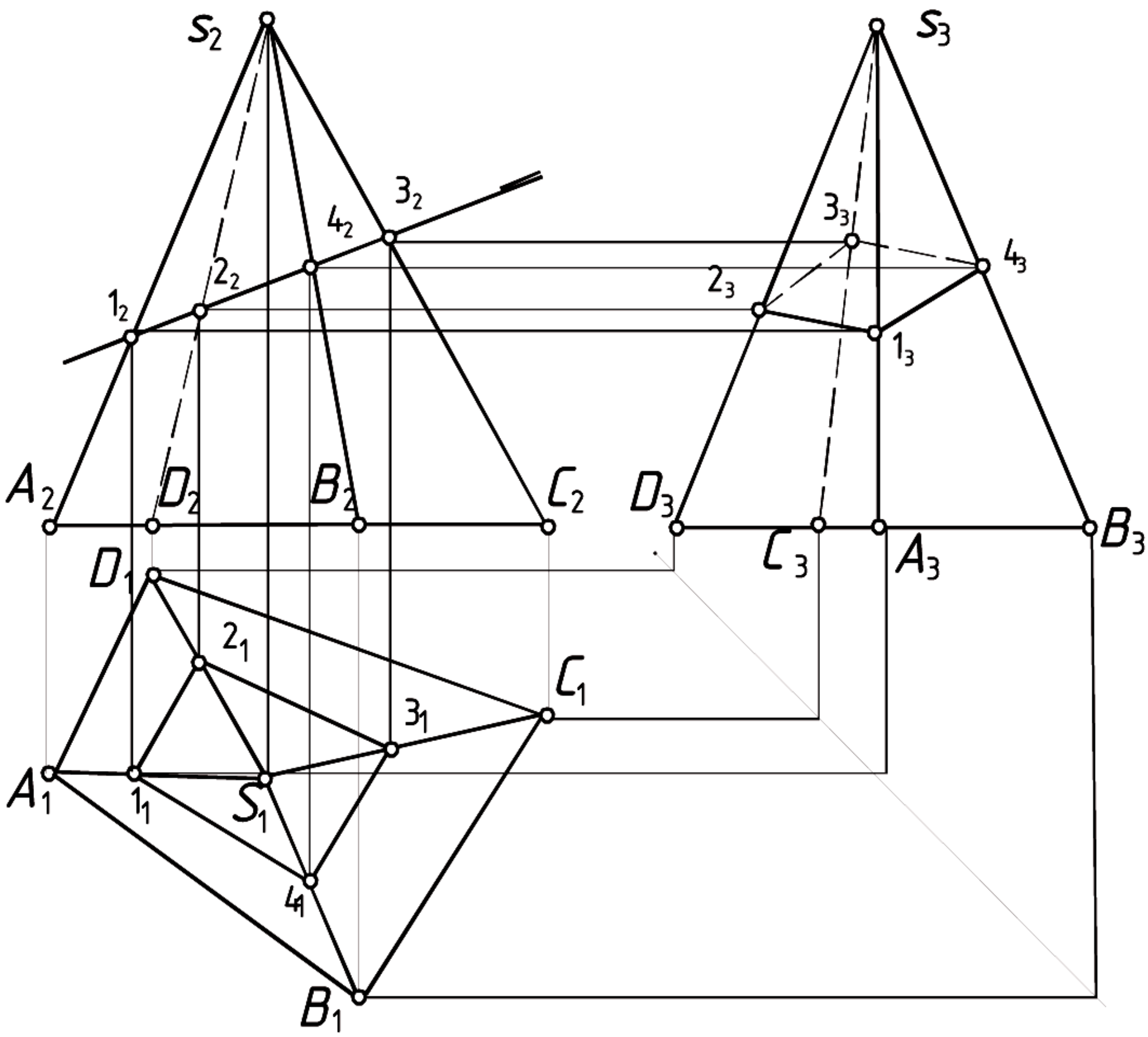


Рисунок 8.35 – Пример 8.3

Решение выполним способом ребер. Находим точки пересечения ребер плоскостью $\Sigma(f \cap h)$. В качестве плоскостей-посредников выбираем фронтально проецирующие плоскости. Отметим, что горизонтальные проекции линий пересечения проецирующих плоскостей, проведенных через ребра *1*, *2* и *3*, с плоскостью $\Sigma(f \cap h)$ будут параллельны. Таким образом, задача сводится к определению точки пересечения прямой и плоскости общего положения. Ребро *1* пересечет плоскость в точке *B*, ребро *2* – в точке *D*, а ребро *3* – в точке *C*.

Видимость линий определяем по видимости ребер, на которых находятся точки сечения. Так, $[B_1C_1]$ и $[C_1D_1]$ будут невидимыми, потому что проекция точки *C* находится на невидимом ребре. На горизонтальной проекции видно, что грань *13* находится дальше от наблюдателя. Поэтому на фронтальной проекции линия пересечения на этой грани будет не видна.

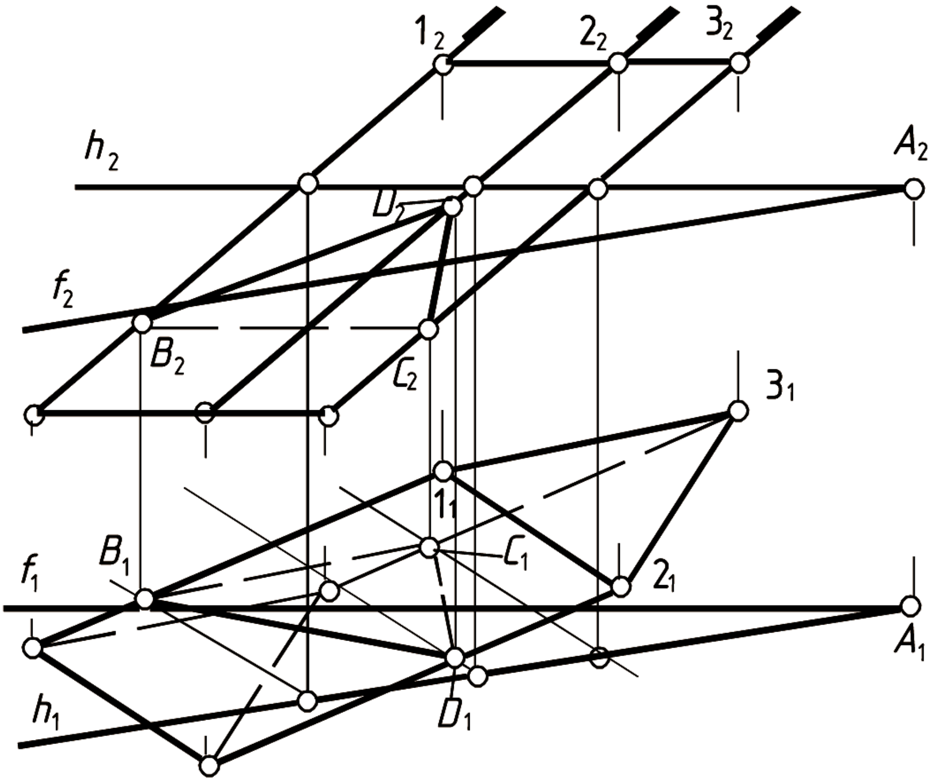


Рисунок 8.36 – Пример 8.4

Пример 8.5.

Задание: определить линию пересечения пирамиды *SDEF* плоскостью общего положения $\Sigma(\Delta ABC)$ (рис. 8.37).

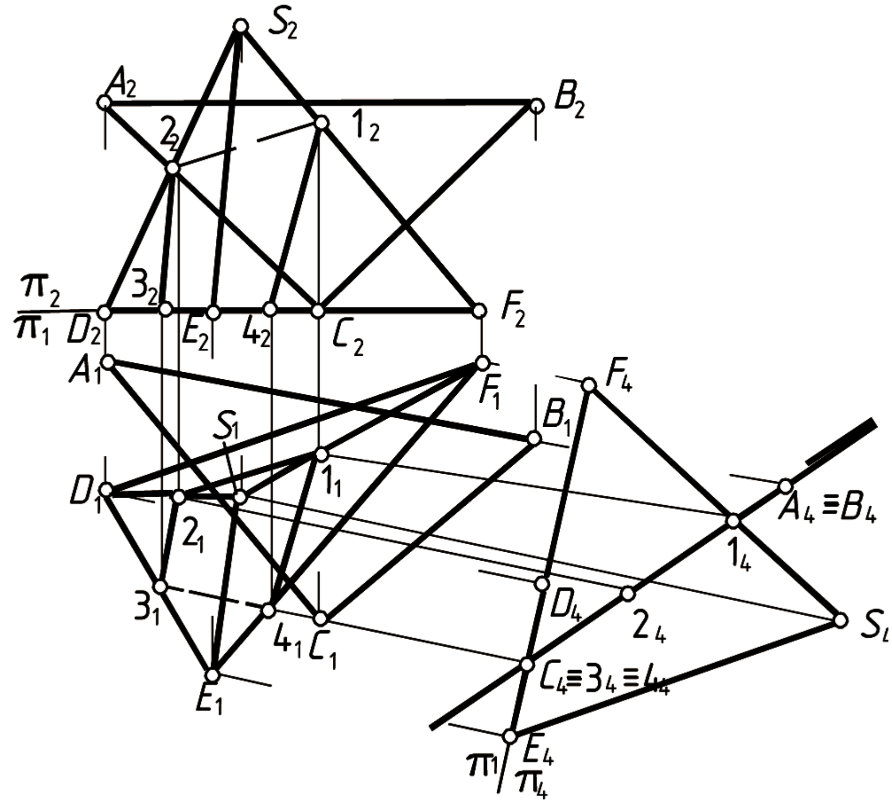


Рисунок 8.37 – Пример 8.5

Решение: необходимо преобразовать комплексный чертеж таким образом, чтобы плоскость $\Sigma(\Delta ABC)$ стала проецирующей. Дополнительную плоскость проекций выбираем перпендикулярно плоскости проекций Π_1 и стороне $[AB]$. Последняя будет параллельна горизонтальной прямой уровня, так как ее фронтальная проекция горизонтальна. На дополнительной плоскости проекций Π_4 отрезок $[AB]$ будет проецироваться в точку, а значит ΔABC – в прямую линию. Проекции точек линии пересечения *1, 2* определяем способом ребер.

Проекции точек *3* и *4* определяем способом граней: находим линию пересечения двух плоскостей – заданной ΔABC и основания (грани) пирамиды *DEF* как двух проецирующих плоскостей.

Пример 8.6.

Задание: определить линию пересечения призмы *1234* и плоскости, заданной в виде треугольника *ABC* (рис. 8.38).

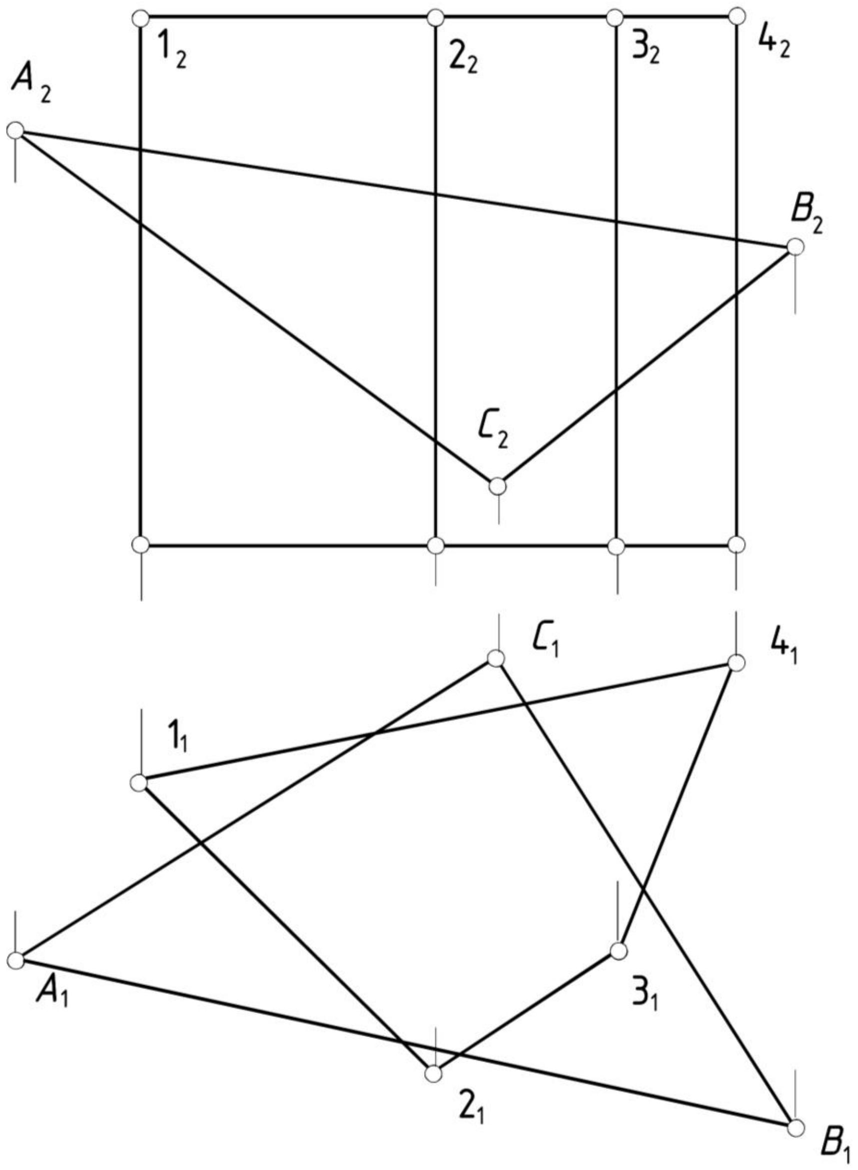


Рисунок 8.38 – Задание примера 8.6

Решение задачи можно провести двумя способами: способом ребер и способом граней. Рассмотрим оба способа.

По способу граней будем находить линии пересечения грани и плоскости (рис. 8.39). Грани являются горизонтально проецирующими, поэтому линия пересечения определена на горизонтальной плоскости проекций: естественно, она лежит на поверхности призмы, то есть на четырехугольнике $1_1 2_1 3_1 4_1$.

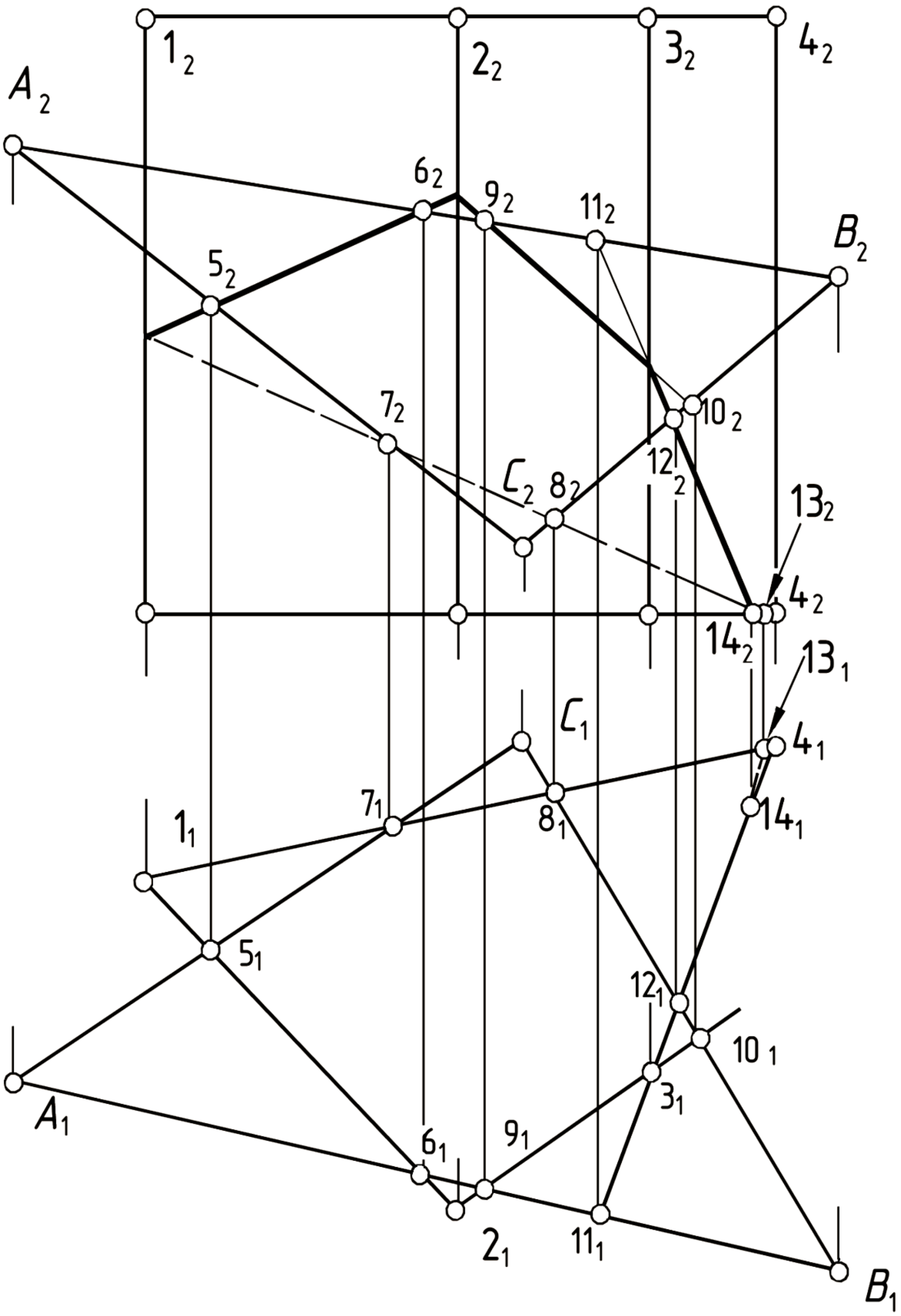


Рисунок 8.39 – Первое решение примера 8.6 способом граней

Если плоскость пересечет основание призмы, то тогда эта линия будет проходить по основанию призмы, что определится в ходе решения задачи.

Таким образом, задача сводится к определению фронтальной проекции линии пересечения. Для ребра *12* линия определится по двум точкам *5* и *6*. Точка *5* лежит на стороне треугольника AC, а точка *6* на стороне AB. Определяем их положения по горизонтальной проекции, а затем по линиям связи на фронтальной проекции. Соединяя точки 5_2 и 6_2, получаем отрезок на грани *12*. По точкам *7* и *8* определяем линию пересечения на грани *14*. Для того чтобы определить линию пересечения с гранью *23*, необходимо продлить ее горизонтальную проекцию до пересечения с CB. Отметим, что часть отрезка линии $11_2 12_2$ не принадлежит призме. Аналогично определяем линию пересечения с гранью *34*. По фронтальной проекции видим, что плоскость пересекает призму по точкам *13* и *14*. По линиям связи определяем положение их горизонтальных проекций.

Второе решение выполняем способом ребер. Находим точки пересечения каждого ребра плоскостью $\Sigma(\Delta ABC)$ (рис. 8.40). На ребре *1* располагается точка D. На горизонтальной проекции видно, что ее проекция совпадает с проекцией ребра *1*. Так как точка D принадлежит плоскости $\Sigma(\Delta ABC)$, то проводим линию a, проходящую через проекции точек D_1 и B_1.

Далее находим фронтальную проекцию линии a по точке 5_2, проведя линию связи $5_1 – 5_2$. На пересечении линий a_2 и 1_2 отмечаем точку D_2. Для ребра *2* на горизонтальной проекции показываем линию d_1, которая проходит через проекции точки C_1 и ребра 2_1. На этой линии располагается проекция точки E_1. По линии связи находим ее фронтальную проекцию на проекции линии d_2.

Произведя подобные построения для остальных ребер, находим положения точек F и K. Причем точка K находится ниже основания призмы, что говорит о том, что плоскость $\Sigma(\Delta ABC)$ пересекает основание (см. рис. 8.41). Соединяем найденные точки пересечения и показываем фронтальную проекцию линии пересечения призмы и плоскости $\Sigma(\Delta ABC)$.

По горизонтальной проекции определяем, что грань призмы *14* находится дальше от наблюдателя, значит, на фронтальной проекции она не будет видна, соответственно, не видны будут все линии, расположенные на ней. Значит, линия пересечения $D_2 13_2$ также будет не видна.

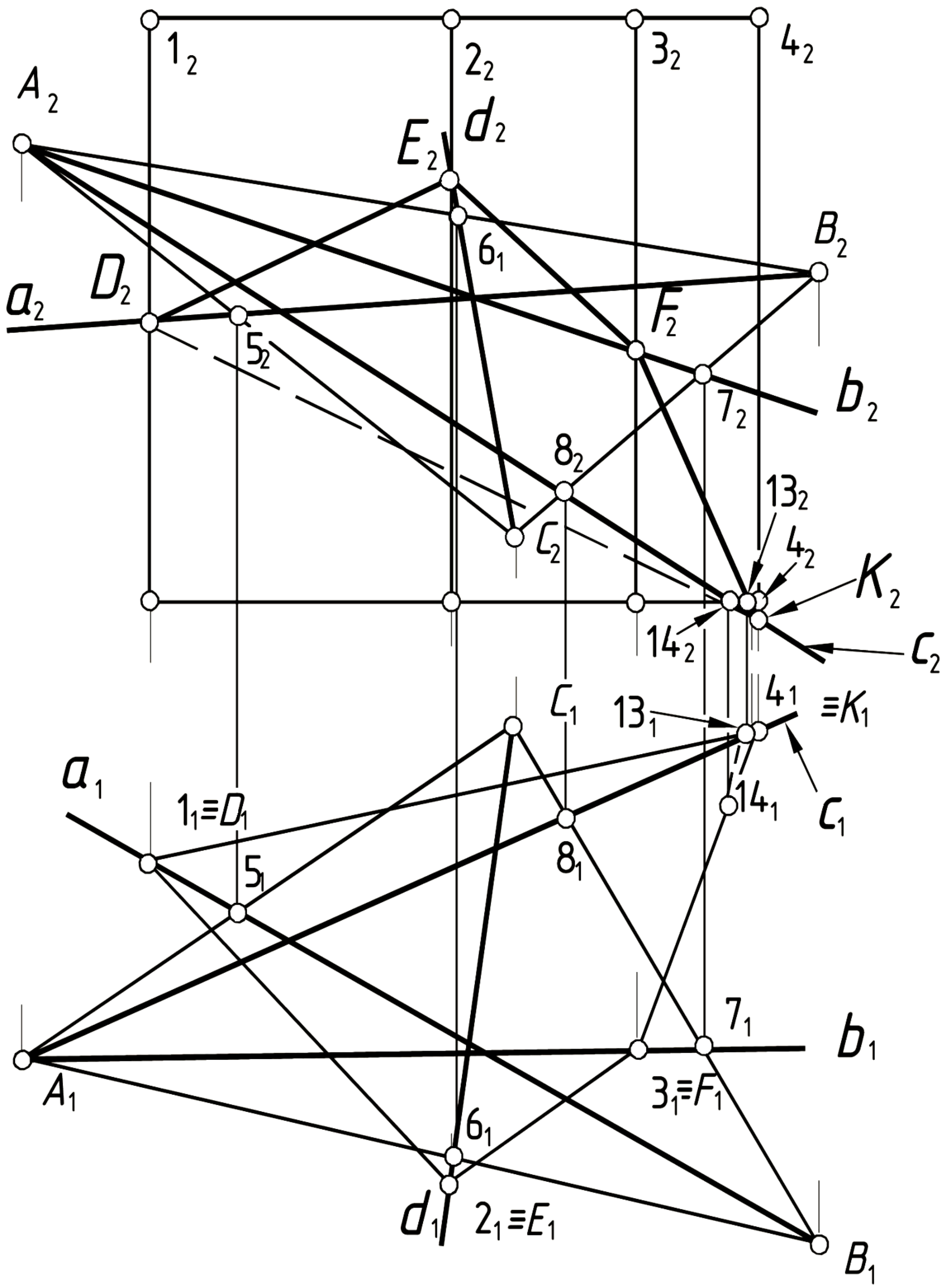


Рисунок 8.40 – Второе решение примера 8.6 способом ребер

Пример 8.7.

Задание: построить проекции линии сечения конической поверхности плоскостью общего положения Σ (Δ*ABC*) (рис. 8.41).

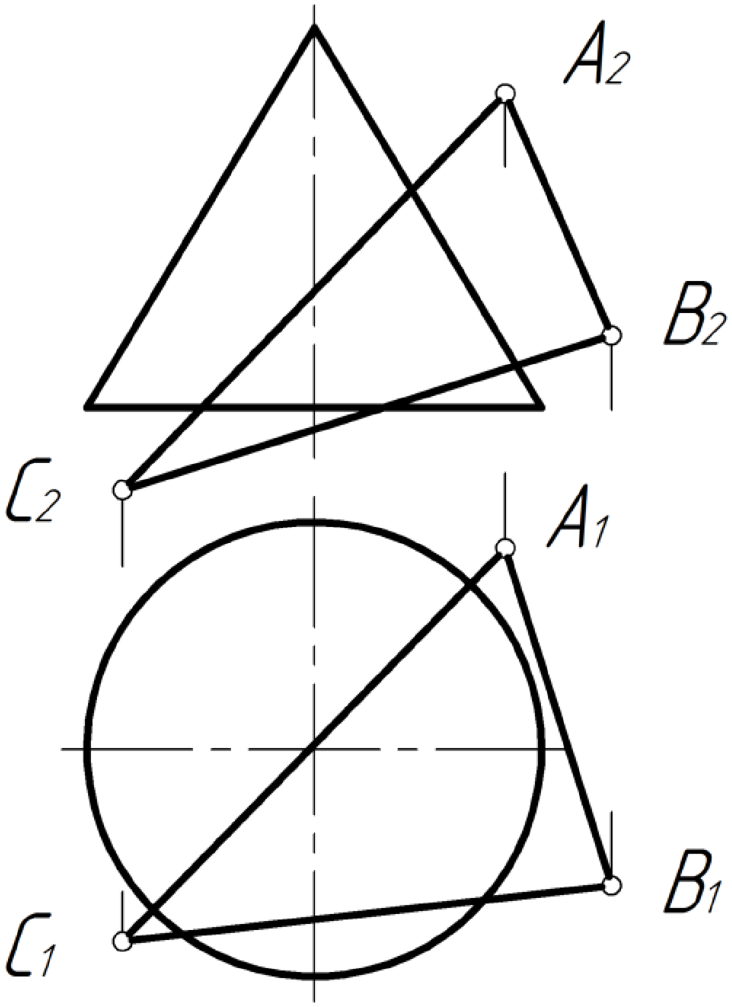


Рисунок 8.41 – Задание примера 8.7

Решение: чтобы упростить решение задачи, осуществим замену плоскости $П_2$ плоскостью $П_4$, перпендикулярной к $П_1$ (рис. 8.42). Дополнительную плоскость проекций выбираем таким образом, чтобы по отношению к ней секущая плоскость Σ заняла проецирующее положение. Спроецируем на плоскость $П_4$ коническую поверхность и плоскость Σ (Δ*ABC*). Выполненные преобразования позволили свести решение задачи к случаю, рассмотренному ранее. Линией пересечения конуса и плоскости является эллипс, большая ось которого *12* (на плоскости проекции $П_4$ – $1_4 2_4$). Определяем проекцию оси эллипса на горизонтальную плоскость проекций – $1_1 2_1$. Эллипс является лекальной кривой линией, горизонтальную проекцию которой вычерчиваем по проекциям принадлежащих ей точек.

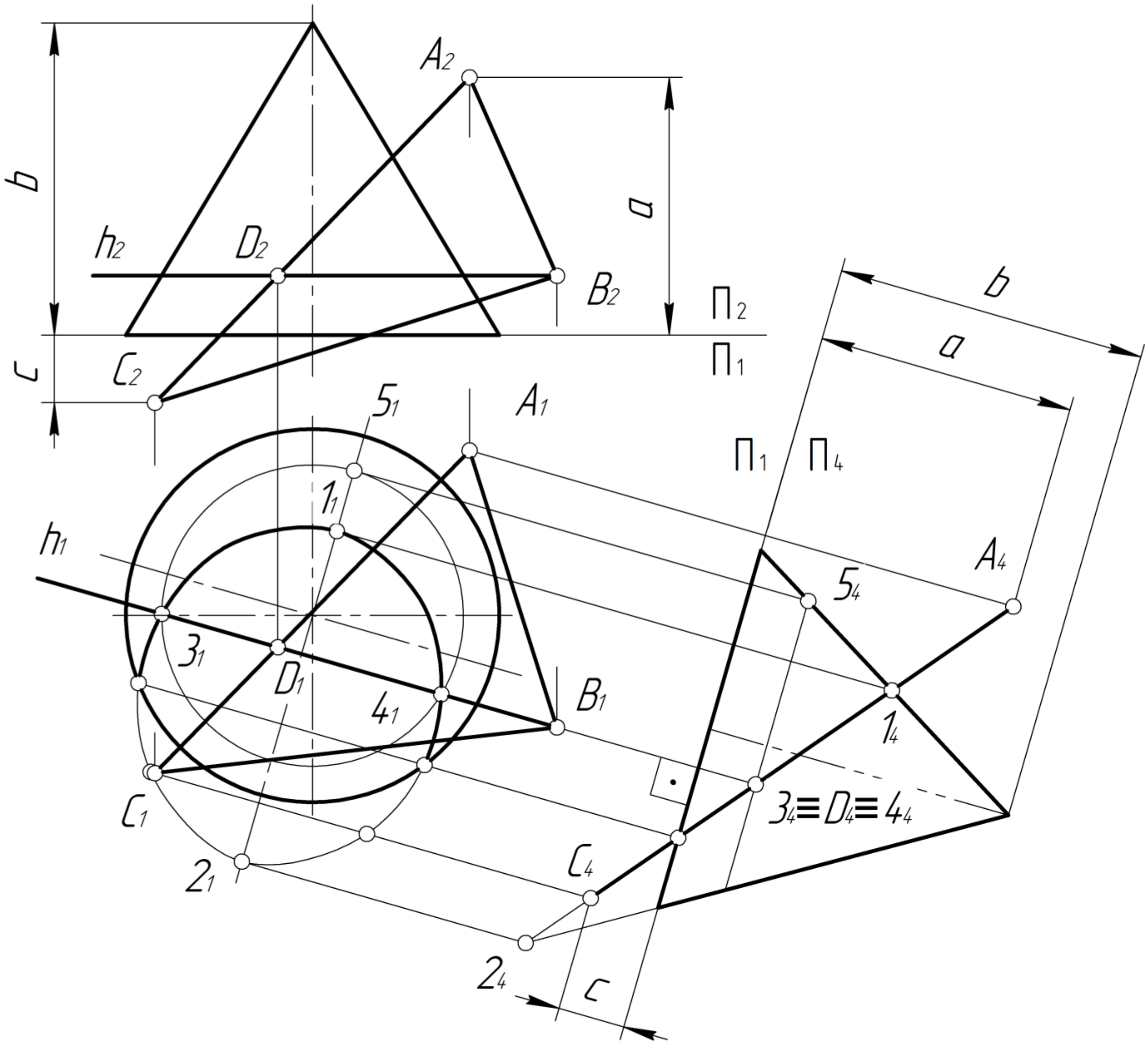


Рисунок 8.42 – Определение горизонтальной проекции линии пересечения

Используя проекции на плоскость $П_1$, определяем фронтальную проекцию линии пересечения (рис. 8.43). Для построения фронтальной проекции сечения определяем опорные точки: *5* и *6* – нижние точки, лежащие на основании конуса; *1* и *2* – крайние точки большой оси эллипса (точка *1* принадлежит действительной линии сечения, точка *2* – отсеченной плоскостью основания конуса части эллипса); *3* и *4* – крайние точки малой оси эллипса. Кроме этих точек, определяем точки границы видимости фронтальной проекции линии *7* и *8*, которые расположены на образующих конуса.

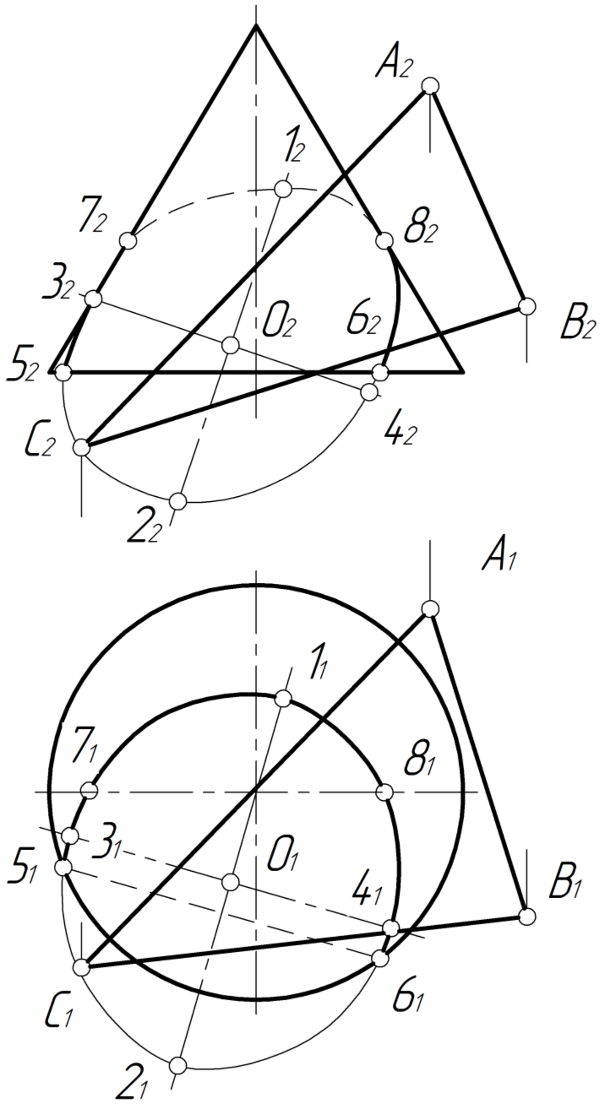


Рисунок 8.43 – Решение примера 8.7

Вопросы для самопроверки

1. Что называют многогранником?
2. В чем состоит сущность способа ребер?
3. В чем состоит сущность способа граней?
4. Как определяются точки пересечения поверхности с прямой линией?
5. Какими характерными признаками обладает куб на комплексном чертеже?
6. Перечислить элементы многогранника.
7. Назвать характерные признаки прямого и правильного многогранника.
8. Что такое меридиан и параллель?
9. Что такое опорные (экстремальные) точки?
10. Какие параллели называют экватором и горлом?

9. ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

9.1. Общие положения

Линией пересечения двух поверхностей является множество точек, общих для данных поверхностей. Из этого множества выделяют характерные (опорные, или главные) точки, с которых следует начинать построение этой линии. Они позволяют увидеть, в каких границах можно изменять положение вспомогательных секущих поверхностей для определения остальных точек.

К таким точкам относятся:

- экстремальные точки – верхняя и нижняя относительно той или иной плоскости проекций;
- точки, расположенные на очерковых образующих некоторых поверхностей;
- пограничные точки зоны видимости и т. д.

Следует иметь в виду, что линия пересечения двух поверхностей в проекциях всегда располагается в пределах контура наложения проекций двух пересекающихся поверхностей.

Иногда целесообразно воспользоваться преобразованием чертежа, чтобы представить пересекающиеся поверхности (или одну из них) в частном положении.

Для определения этих точек часто пользуются вспомогательными секущими поверхностями. Поверхности-посредники пересекают данные поверхности по линиям, которые, в свою очередь, пересекаются в точках линии пересечения данных поверхностей.

Вспомогательные секущие поверхности-посредники выбираются так, чтобы они, пересекаясь с данными поверхностями, давали простые для построения линии, например прямые и окружности.

Из общей схемы построения линии пересечения поверхностей выделяют два основных способа – способ секущих плоскостей и способ секущих сфер.

В общем случае решение задачи на построение линии пересечения двух поверхностей может быть сведено к рассмотренным ранее задачам по определению:

- точек пересечения линии с поверхностью;
- линии пересечения плоскости и поверхности;
- комбинации первой и второй задачи.

9.2. Взаимное пересечение многогранников

Построение линии взаимного пересечения гранных поверхностей можно производить двумя способами, комбинируя их между собой или выбирая из них тот, который в зависимости от условий задания дает более простые построения. Эти способы следующие.

1. ***Определяют точки, в которых ребра одной из многогранных поверхностей пересекают грани другой и ребра второй пересекают грани первой*** (задача на пересечение прямой с плоскостью). Через найденные точки в определенной последовательности проводят ломаную линию, представляющую собой линию пересечения данных многогранников. При этом можно соединять прямыми проекции лишь тех полученных в процессе построения точек, которые лежат в одной и той же грани.

2. ***Определяют отрезки прямых, по которым грани одной поверхности пересекают грани другой*** (задача на пересечение двух плоскостей между собой). Эти отрезки являются звеньями ломаной линии, получаемой при пересечении гранных поверхностей.

На рисунке 9.1 показано пересечение поверхности треугольной призмы *DEFD*E*F** с треугольной пирамидой *ABCS*. Построение основано на нахождении точек пересечения ребер одного многогранника с гранями другого.

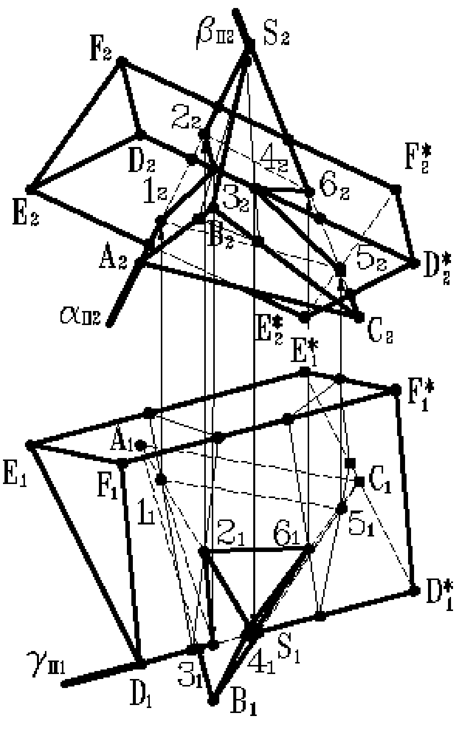


Рисунок 9.1 – Построение линии взаимного пересечения двух многогранников

9.3. Способ вспомогательных секущих плоскостей

Вспомогательные секущие плоскости чаще всего выбирают проецирующими или параллельными одной из плоскостей проекций – плоскостями уровня. Этот способ рекомендуется применять тогда, когда обе пересекающиеся поверхности можно пересечь по графически простым линиям некоторой совокупностью проецирующих плоскостей или, в частности, совокупностью плоскостей уровня.

Рассмотрим построение линии пересечения треугольной призмы с конусом (рис. 9.2). Пусть ось вращения конуса перпендикулярна плоскости Π_1, а грани призмы перпендикулярны плоскости Π_2.

В этом случае призму можно рассматривать как три плоскости α, β, γ, проходящие через ее грани, а задача сводится к нахождению линий пересечения этих плоскостей с конусом. При этом в соответствии с характерными сечениями конуса известно, что плоскость α пересекает конус по окружности, параллельной Π_1, β – по гиперболе, параллельной Π_3, а γ – по эллипсу.

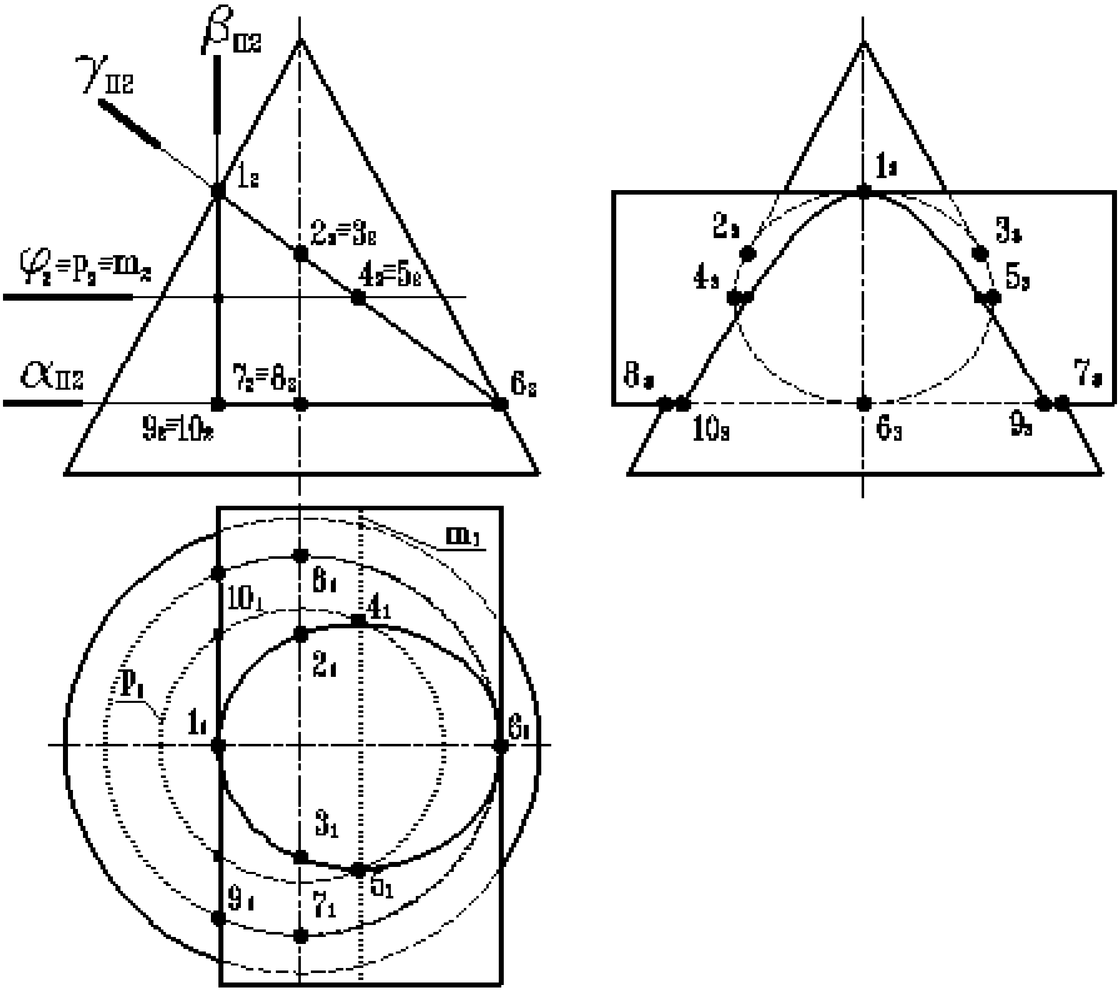


Рисунок 9.2 – Пересечение конуса и призмы

На плоскость $П_2$ линии пересечения от всех плоскостей проецируются в прямые, совпадающие со следами плоскостей α, β, и γ.

Для построения проекций этих линий на плоскости $П_1$ и $П_3$ отметим характерные точки на уже имеющейся фронтальной проекции линий пересечения.

Точки 1_2 и 6_2 – пересечения плоскости γ с очерком проекции конуса на плоскость $П_2$ (главным меридианом). Эти точки определяют положение большой оси эллипса. Кроме того, точка 1_2 – проекция точки вершины гиперболы одновременно принадлежит конусу (лежит на очерке фронтальной проекции конуса) и ребру призмы (линии пересечения плоскостей α и β), а точка 6_2 – проекция точки, одновременно принадлежащей конусу и ребру призмы (линии пересечения плоскостей α и γ). Точки *2, 3, 7* и *8* характерны тем, что их профильные проекции лежат на очерке проекции конуса. 4_2, 5_2 – точки, лежащие на середине отрезка 1_26_2 (большой оси эллипса), определяют положение малой оси эллипса. *9, 10* – точки, одновременно принадлежащие конусу и ребру призмы (образованному пересечением плоскостей α и β).

Рассмотрим последовательность нахождения проекций точек *4* и *5*. Через фронтальные проекции этих точек проведем вспомогательную секущую плоскость φ. Эта плоскость пересекает конус по параллели p, а грань призмы – по прямой линии m, параллельной ребру. На горизонтальной плоскости проекций пересечение p_1 и m_1 определяет положение проекций точек 4_1 и 5_1.

Для точного построения кривых линий пересечения поверхностей обозначенных точек недостаточно, необходимо ввести в решение задачи ряд промежуточных точек.

После нахождения проекций всех точек их необходимо соединить с учетом видимости.

Рассмотрим пересечение двух поверхностей вращения – сферы и эллиптического цилиндра (рис. 9.3). В данном примере вспомогательные плоскости уровня выбираются параллельными плоскости проекций $П_2$. В этом случае они пересекают сферу по окружности, а цилиндр – по прямолинейным образующим.

Одна из таких плоскостей α пересекается с поверхностями по дуге окружности a и прямой линии b. Точка *1* пересечения дуги окружности a и прямой b принадлежит искомой кривой. С помощью вспомогательной секущей плоскости β (плоскости главного фронтального меридиана полусферы) найдены точки *2* и *3* как точки пересечения главного фронтального меридиана полусферы – дуги окружности c с линиями d и g. Плоскость γ – плоскость главного фронтального меридиана цилиндра, пересекает полусферу по дуге окружности k, которая, в свою очередь, пересекаясь с фронтальными меридианами цилиндра l и m, определяет положение точек *4* и *5*. Аналогично, с помощью плоскости φ, найдены точки *6* и *7*.

Точка *8* найдена с помощью фронтально проецирующей плоскости ω, параллельной горизонтальной плоскости проекций, которая пересекает полусферу по окружности – экватору h, а цилиндр – по окружности основания s.

Характерными точками в данном случае являются точки *1…5* и *8*, лежащие на очерках проекций поверхностей. Кроме того, точки *1* и *8* определяют границу зоны видимости кривой на плоскости Π_1, а точки *4* и *5* – границу зоны видимости на плоскости Π_2.

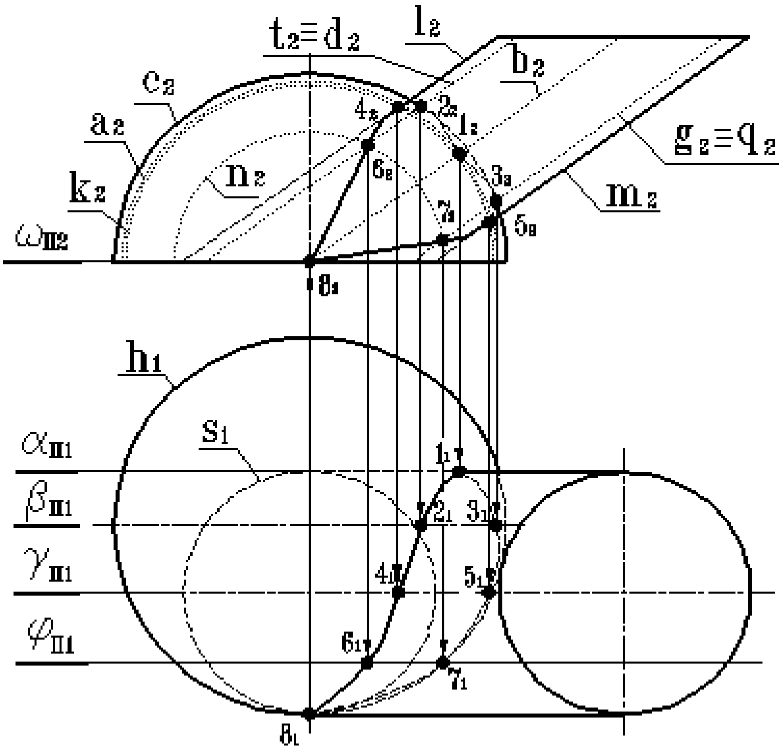


Рисунок 9.3 – Пересечение полусферы и эллиптического цилиндра

9.4. Способ концентрических сфер

Для определения линии пересечения двух поверхностей вращения при их особом взаимном расположении не всегда рационально применять вспомогательные секущие плоскости. В некоторых случаях применяют вспомогательные секущие сферы, концентрические или эксцентрические.

Концентрические сферические посредники (сферы с постоянным центром) применяются при определении линии пересечения двух поверхностей вращения с пересекающимися осями.

Способ концентрических сфер можно применять для построения линии пересечения двух поверхностей, у которых имеется общая плоскость симметрии и каждая из которых содержит семейство окружностей, по которым ее могут пересекать концентрические сферы, общие для обеих поверхностей. Применению способа концентрических сфер должно предшествовать такое преобразование чертежа, в результате которого оси обеих поверхностей должны быть расположены параллельно одной и той же плоскости проекций (рис. 9.4) или одна из осей становится проецирующей прямой, а вторая – прямой уровня (рис. 9.5).

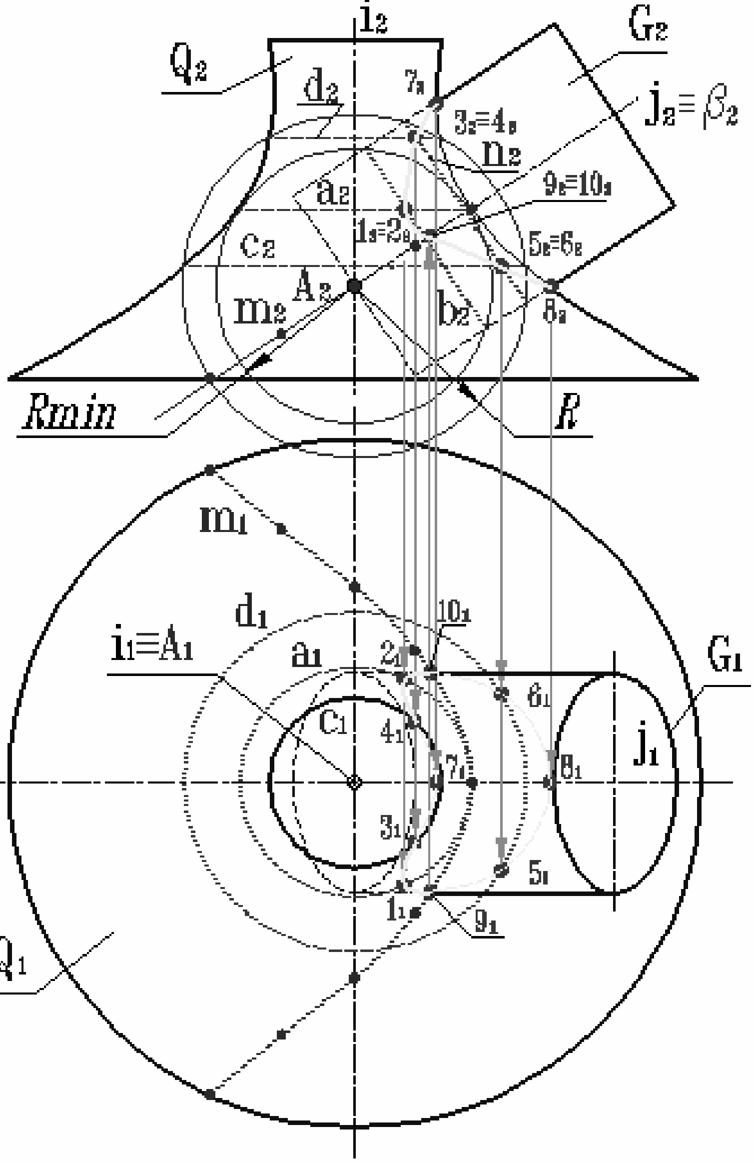


Рисунок 9.4 – Пересечение поверхностей вращения, оси которых параллельны фронтальной плоскости проекций

Оси поверхностей G и Q параллельны фронтальной плоскости проекций и пересекаются в точке A (см. рис. 9.4). Эта точка принимается за центр всех вспомогательных концентрических сфер. Каждая из концентрических сфер пересекает поверхности по окружностям – параллелям (a, b, c, d, n), фронтальные проекции которых являются прямыми линиями (a_2, b_2, c_2, d_2, n_2). Проекции точек 1_2, 2_2, 3_2, 4_2, 5_2 и 6_2 пересечения проекций параллелей принадлежат проекции искомой линии пересечения поверхностей. Пересечение главных меридианов определяют крайние точки *7* и *8*.

Для точного построения линии пересечения поверхностей необходимо найти точки *9* и *10*, которые определяют границу зоны видимости линии пересечения поверхностей на горизонтальной проекции. Для этой цели использовалась вспомогательная секущая плоскость β, которая пересекает поверхность Q по линии m, а поверхность G – по образующим, горизонтальные проекции которых, пересекаясь, определяют положение искомых точек.

Соединив найденные точки *1...10* с учетом видимости, получим линию пересечения поверхностей.

9.5. Способ эксцентрических сфер

Эксцентрические сферические посредники (сферы, имеющие различные центры) применяются при определении точек линии пересечения поверхностей, имеющих общую плоскость симметрии, причем каждая из этих поверхностей должна содержать семейство окружностей, по которым ее могут пересекать эксцентрические сферы, общие для обеих поверхностей. Вспомогательные эксцентрические сферы пересекаются с данными поверхностями по окружностям.

Рассмотрим на примере определения линии пересечения конуса Q и сферы G (см. рис. 9.5) применение эксцентрических сфер как поверхностей-посредников. Центры сфер – точки A^1, A^2 и A^3 расположены на оси конуса. Сфера радиуса R^1 с центром в точке A^1 пересекает конус и сферу по окружностям *а* и *в*, которые пересекаются в точках *1* и *2*, принадлежащих искомой линии пересечения. С помощью сферы R^2 с центром A^2 и сферы R^3 с центром A^3 определено положение точек *3*, *4* и *5*, *6* соответственно. Точки *7* и *8* найдены с помощью вспомогательной секущей плоскости α (плоскости фронтального меридиана), пересекающей конус и сферу по главным фронтальным меридианам k и l. Точки *9* и *10*, определяющие границу зоны видимости линии пересечения на горизонтальной плоскости проекций, найдены с помощью вспомогательной секущей плоскости β (горизонтальной плоскости уровня), пересекающей сферу G по экватору s, а конус Q – по окружности p. Найденные с помощью вспомогательных поверхностей-посредников точки *1...10* определяют линию пересечения конуса и сферы.

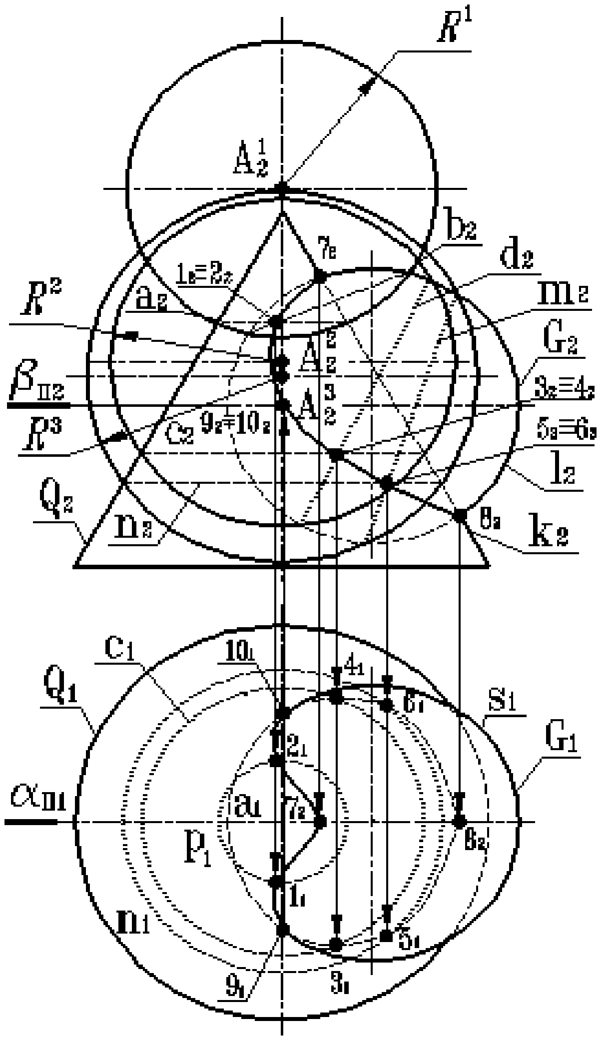


Рисунок 9.5 – Пересечение конуса со сферой

9.6. Особые случаи пересечения поверхностей второго порядка

Поверхностью второго порядка называется множество точек пространства, декартовы координаты которых удовлетворяют алгебраическому уравнению второй степени.

Две поверхности второго порядка в общем случае пересекаются по пространственной линии четвертого порядка. В частных случаях линия пересечения поверхностей второго порядка может распадаться, причем особый интерес представляет случай ее распадения на пару плоских кривых второго порядка.

Опуская доказательства, приведем некоторые теоремы и примеры, иллюстрирующие их применение.

Теорема* 1**. ***Если две поверхности второго порядка пересекаются по одной плоской кривой, то существует и другая плоская кривая, по которой они пересекаются.

На рисунке 9.6 рассмотрен пример, к которому приложима данная теорема. Фронтальные проекции Θ_2 сферы Θ и Ω_2 эллиптического цилиндра Ω имеют общую окружность m (m_2) с центром O (O_2).

Плоскость σ, определяемая центром сферы C и осью i цилиндра, является плоскостью симметрии заданных поверхностей и параллельна фронтальной плоскости проекций.

Общая окружность радиуса r – одна из плоских кривых второго порядка распавшейся линии пересечения. Остается построить вторую кривую, плоскость α которой должна быть в условиях данного примера перпендикулярна плоскости симметрии σ, а следовательно, и Π_2. Вторая линия пересечения (окружность) проецируется на Π_2 в виде отрезка прямой n_2. Для ее построения следует воспользоваться точками A_2 и B_2, принадлежащими очеркам заданных поверхностей.

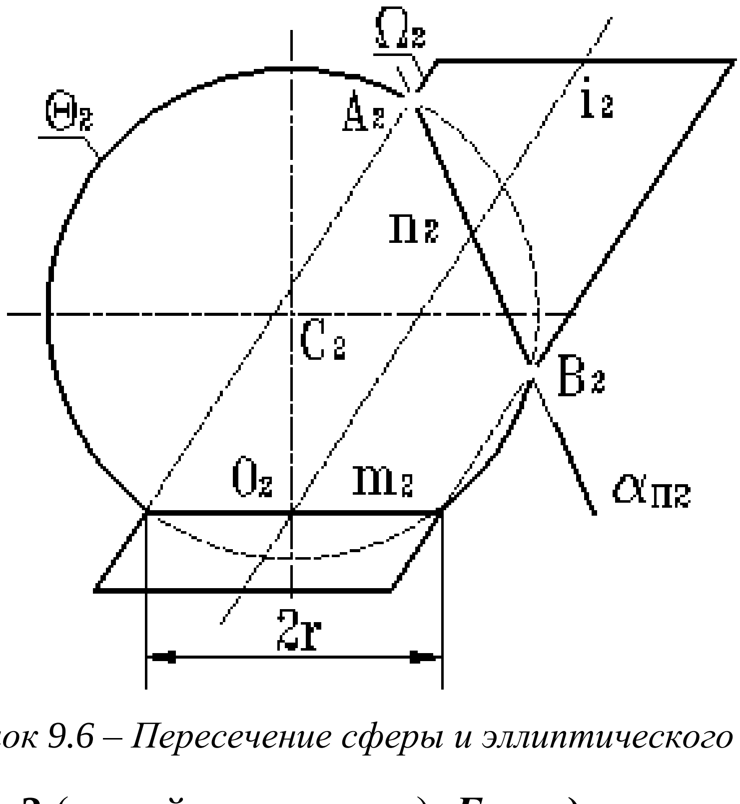


Рисунок 9.6 – Пересечение сферы и эллиптического цилиндра

Теорема* 2** (о двойном касании). ***Если две поверхности второго порядка имеют касание в двух точках A и B, то линия их пересечения распадается на две плоские кривые второго порядка, плоскость которых проходит через отрезок [AB], соединяющий точки касания.

Например, по двум окружностям m и n пересекаются сфера Σ и эллиптический цилиндр Θ (рис. 9.7). Точки касания и касательные плоскости обозначены соответственно через A, B, α, β. Окружности, на которые распалась линия пересечения поверхностей, расположены во фронтально проецирующих плоскостях γ и δ.

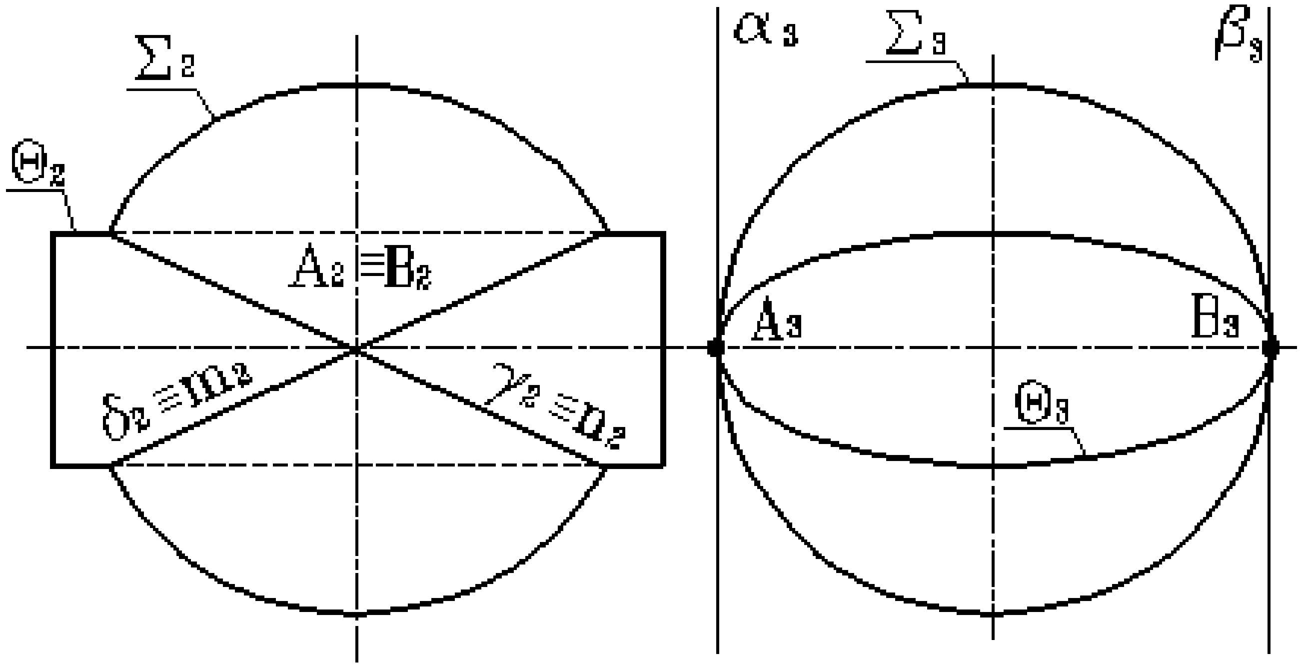


Рисунок 9.7 – Пересечение сферы и эллиптического цилиндра, имеющих две точки касания

Теорема* 3** (теорема Монжа). ***Если две поверхности второго порядка описаны около третьей поверхности второго порядка или вписаны в нее, то линия их пересечения распадается на две плоские кривые второго порядка. Плоскости этих кривых проходят через прямую, соединяющую точки линий касания.

В соответствии с этой теоремой линии пересечения конуса Φ' и цилиндра Φ (рис. 9.8), описанных около сферы γ, будут плоскими кривыми – эллипсами (расположенными в плоскостях α и β), фронтальные проекции которых изображаются прямыми E_2D_2 и C_2F_2.

Теорема* 4. *Если две поверхности второго порядка имеют общую плоскость симметрии, то линия их пересечения проецируется на эту плоскость в виде кривой второго порядка.

Плоскость симметрии определена осью симметрии цилиндра Θ и центром сферы Σ (рис. 9.9). Плоскости принадлежат и симметричные сами себе точки A, B, C и D линий пересечения. Проекция же линий на фронтальную плоскость имеет форму параболы m_2 и аналитически описывается формулой параболы.

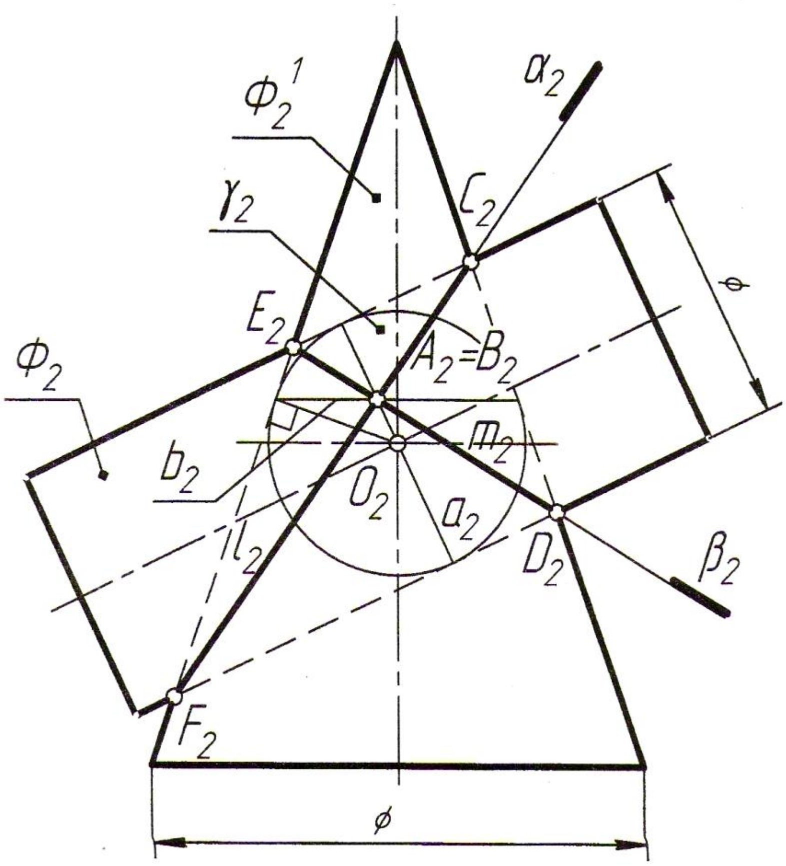


Рисунок 9.8 – Пересечение конуса и цилиндра

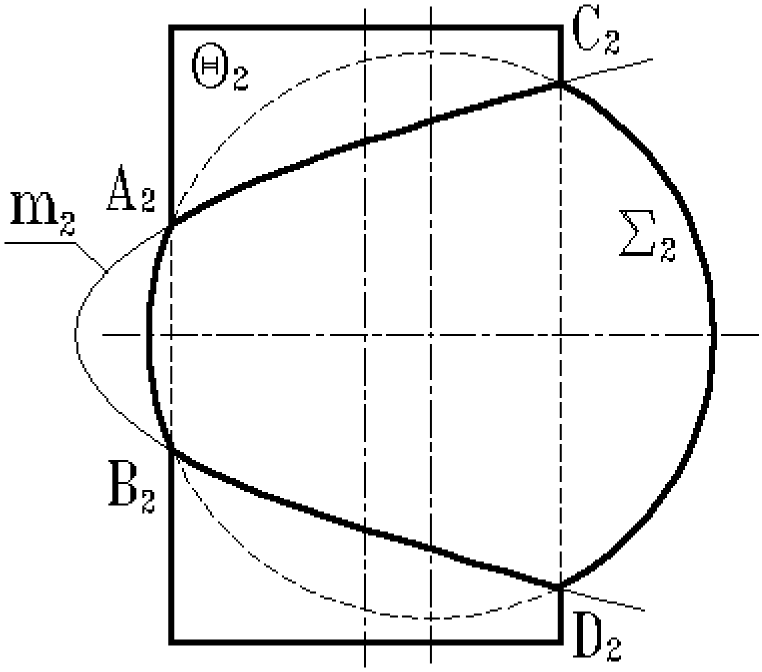


Рисунок 9.9 – Пересечение сферы и цилиндра

Примеры решения задач

Пример 9.1.

Задание: построить проекции линии пересечения цилиндра и конуса (рис. 9.10).

Решение. Две поверхности имеют параллельные оси вращения. Пересечение поверхностей имеет две линии.

Первая – пересечение цилиндра и конуса по верхней плоскости основания цилиндра. Так как эта плоскость располагается перпендикулярно осям вращения, то линией пересечения цилиндра и конуса будет окружность диаметром *DK*.

Вторая линия расположена ниже первой. Ее горизонтальная проекция совпадает с частью проекции горизонтального очерка основания цилиндра (окружность).

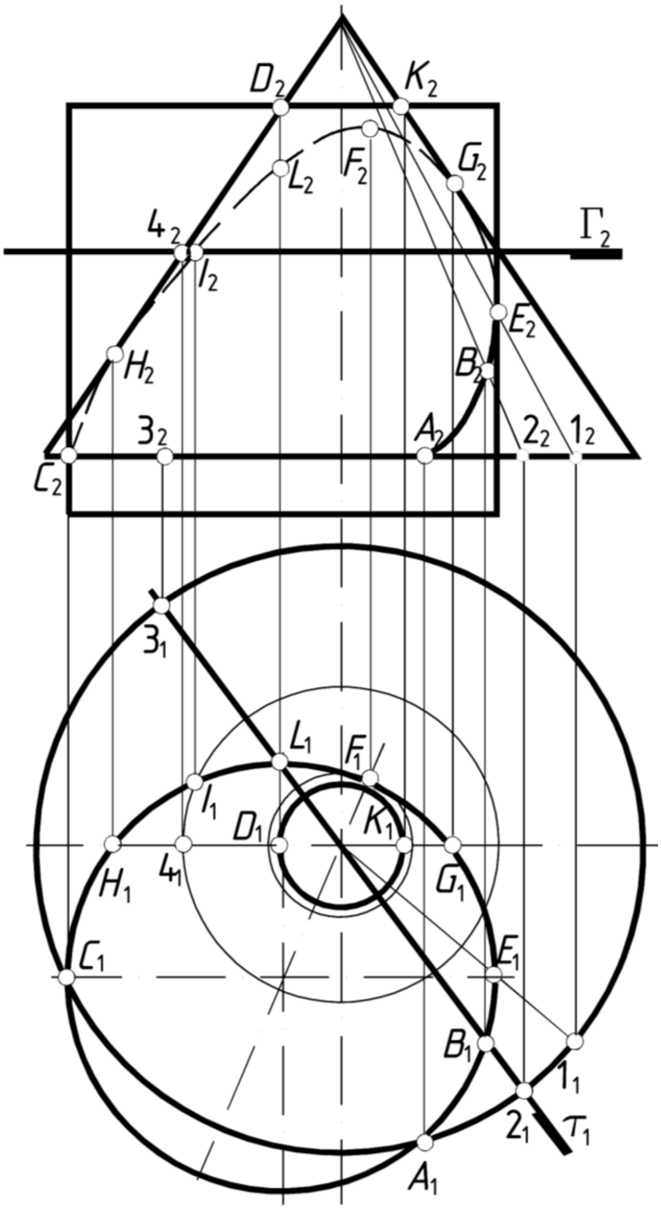


Рисунок 9.10 – Пример 9.1

Найдем опорные точки: нижние точки C и A определяются по горизонтальной проекции как точки пересечения очерков оснований цилиндра и конуса. Высшая точка F этой линии будет располагаться на меридиане, который находится в горизонтально проецирующей плоскости, проходящей через проекции осей цилиндра и конуса и параллели a.

Самая правая точка линии пересечения E будет точкой пересечения правой образующей цилиндра и меридиана [$1S$]. Сначала определяем горизонтальную проекцию E_1, а затем по линии связи для точки $1 – E_2$.

Проекции точек B и L определим при помощи горизонтально проецирующей плоскости τ, которая пересечет конус по меридианам [$2S$] и [$3S$]. Пересечение их горизонтальных проекций с горизонтальной проекцией цилиндра позволит найти горизонтальные проекции B_1 и L_1. Фронтальные проекции этих точек определим на пересечении линий связи и проекций меридианов [2_2S_2] и [3_2S_2].

При помощи горизонтальной плоскости уровня $Г$ определяем проекции точки I, горизонтальная проекция которой есть точка пересечения горизонтальной проекции параллели b и горизонтальной проекции цилиндра.

Проекции точек G и H определим по горизонтальным проекциям как пересечение проекций главных меридианов конуса (правый и левый меридиан на горизонтальной плоскости проекций проецируются в виде диаметра, параллельного плоскости проекций $П_2$).

Таким образом, на рассмотренном примере показано расположение поверхностей-посредников – проецирующих плоскостей, расположенных:

а) $Г$ – перпендикулярно оси вращения, что дает как для конуса, так и для цилиндра линию пересечения в виде окружностей – параллелей;

б) τ – параллельно оси вращения, что дает при пересечении конуса пересекающиеся прямые, а цилиндра – параллельные прямые.

Такая возможность возникает потому, что простейшие линии с точки зрения простоты их построения для цилиндра и конуса будут при пересечении их плоскостями, параллельной и перпендикулярной осям вращения.

Таким образом, задачу можно решить тремя способами: при помощи горизонтальной плоскости уровня, фронтально проецирующей плоскости-посредника и меридиана-посредника конуса.

Пример 9.2.

Задание: построить линию пересечения конуса и полусферы (рис. 9.11).

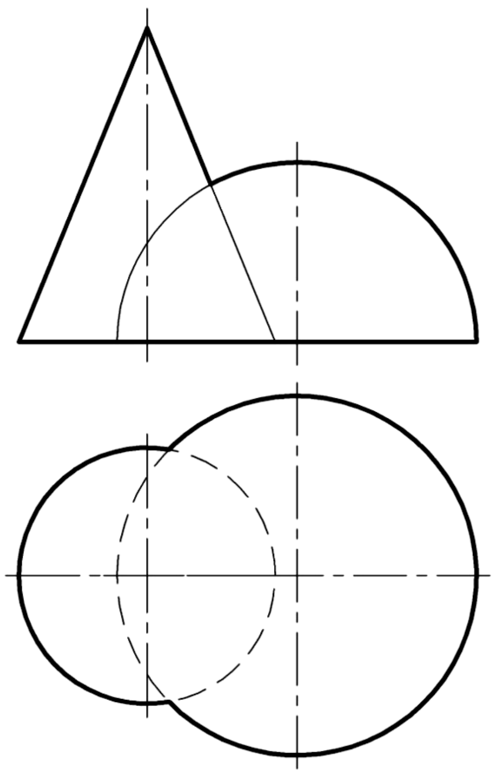


Рисунок 9.11 – Задание примера 9.2

Решение: для определения линии пересечения поверхностей используют вспомогательные секущие поверхности. Поверхности-посредники пересекают данные поверхности по простым (с точки зрения построения) линиям, которые, в свою очередь, пересекаются в точках, принадлежащих линии пересечения данных поверхностей. Для данной задачи в качестве поверхности-посредника выбираем плоскость, так как оси вращения обоих тел параллельны и при пересечении их плоскостями, перпендикулярными к осям вращения, получаем плоскую линию – окружность. Общая точка окружностей полусферы и конуса будет принадлежать линии пересечения этих тел.

Показываем (рис. 9.12) опорные точки *1* и *2*, а потом определяем промежуточные точки *3*, *4* и *5* при помощи трех плоскостей-посредников. Для горизонтальной плоскости уровня, дающей на горизонтальной плоскости проекций штриховые линии, точка *4* будет общей для параллелей конуса и сферы. На горизонтальной поверхности пересечение этих параллелей (штриховые окружности) даст точку *4*, принадлежащую линии пересечения конуса и полусферы. Фронтальную проекцию определяем по линии связи на проекции плоскости-посредника. Аналогичным образом получаем положение точек *3* и *5*.

Положение дальней части линии пересечения на фронтальной проекции будет совпадать с проекцией ближней части линии пересечения, а на горизонтальной проекции дальняя часть (на чертеже она находится выше горизонтальной оси симметрии) будет зеркальным отображением ближней части линии пересечения.

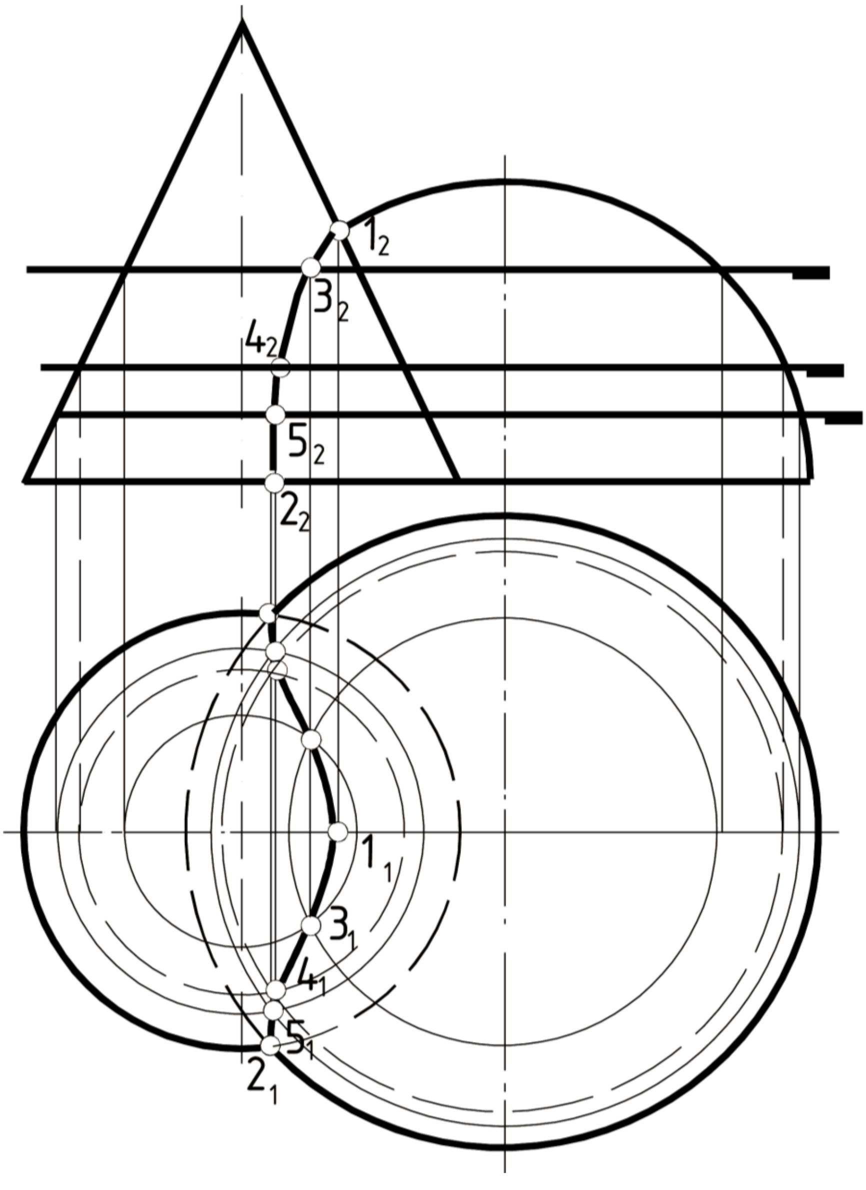


Рисунок 9.12 – Решение примера 9.2

Пример 9.3.

Задание: построить проекции линии пересечения цилиндра и конуса.

Решение примера выполняется при помощи способа секущих концентрических сфер-посредников. На рисунке 9.13 показано определение линии пересечения цилиндра и конуса для фронтальной проекции, которая распадается на две кривые – *AB* и *DC*. Центр сфер-посредников – точка пересечения осей конуса и цилиндра – точка *O*.

Определим точки верхней кривой *A* и *B* на пересечении главных меридианов (образующих) конуса и цилиндра. Точка *A* – наивысшая точка. Впишем в цилиндр сферу, касательную к его поверхности. На этой сфере находится низшая точка верхней линии пересечения и высшая точка на нижней линии пересечения. Пересечение указанной сферы конуса будет по окружностям *1-2* – сверху и *3-4* на нижней части конуса. Эта же сфера коснется цилиндра по точкам *5-6*. Пересечение проекций окружностей сферы и цилиндра дают фронтальные проекции точек *E* и *G*. Радиус следующей сферы выбран произвольно для нахождения проекций промежуточных точек. Сфера пересечет конус по окружностям *7-8* и *9-10*, а цилиндр – *11-12* и *13-14*. Это позволит определить проекции точек *F, M* и *H*.

Максимальная для решения задачи сфера касается основания конуса. С ее помощью определяем фронтальную проекцию точки *N*. Точка *D* является самой низшей и находится на продолжении образующих цилиндра и конуса.

Соединяя плавными лекальными кривыми низшие и высшие проекции полученных точек, показываем фронтальные проекции верхней и нижней линии пересечения.

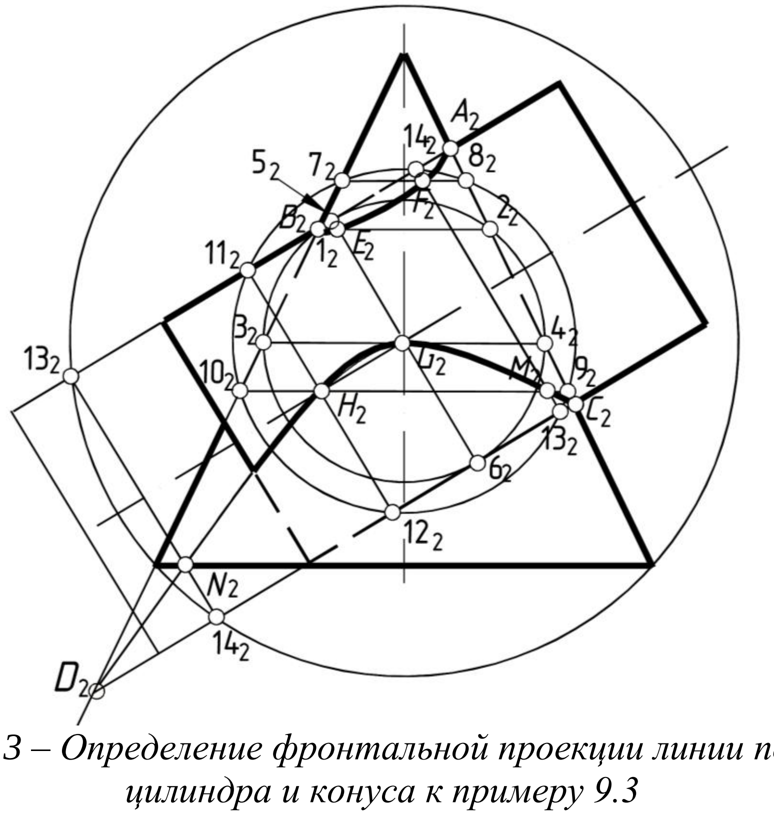


Рисунок 9.13 – Определение фронтальной проекции линии пересечения цилиндра и конуса к примеру 9.3

На рисунке 9.14 показано определение горизонтальных проекций линий пересечения. Эти проекции покажем на поверхности конуса. Причем верхнюю линию пересечения определяем при помощи меридианов, нижнюю линию – при помощи параллелей.

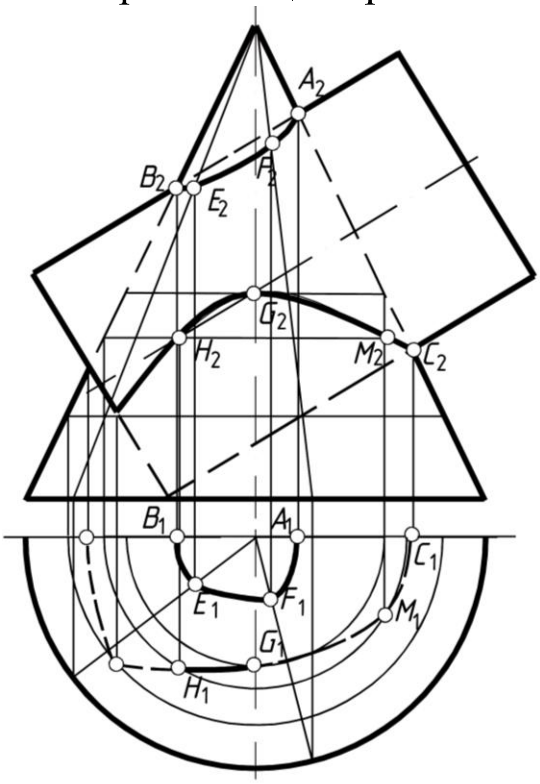


Рисунок 9.14 – Определение горизонтальных проекций линий пересечения цилиндра и конуса к примеру 9.3

Пример 9.4.

Задание: построить линию пересечения двух конусов.

Решение: для определения фронтальной проекции (рис. 9.15) линии пересечения в качестве поверхностей-посредников примем сферы, центры которых находятся в точке пересечения осей вращения обоих конусов. Показываем опорные точки *1* и *2* – верхняя и нижняя. Проекции линий пересечения со сферой I конусов A – (b_2) и B – (a_2) пересекутся в точке 4_2, которая будет принадлежать фронтальной проекции линии пересечения конусов. Горизонтальную проекцию этой точки определим по линии связи на горизонтальной проекции линии a_1. Аналогичные построения для сферы II позволят определить точку *3*, принадлежащую линии пересечения конусов. Увеличение количества сфер-посредников позволит увеличить точность построения линии. Точки *4* и *5* будут точками перехода от видимой части горизонтальной проекции линии пересечения к невидимой, так как принадлежат самой близкой и самой дальней образующим конуса A.

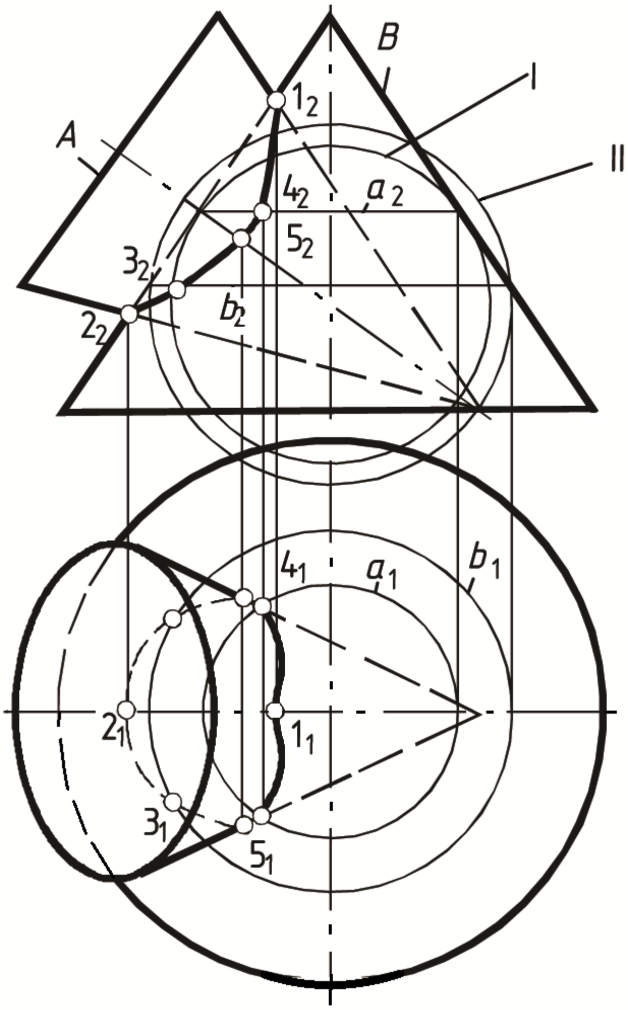


Рисунок 9.15 – Пример 9.4

Горизонтальную проекцию линии пересечения можно определить по горизонтальным проекциям параллелей соответствующих точек либо по проекциям меридианов конуса *B*.

Пример 9.5.

Задание: построить проекции линии пересечения конуса и тора способом эксцентрических сфер-посредников.

Решение: на рисунке 9.16 приведено решение задачи, выполненное на комплексном чертеже. Показываем фронтальные проекции опорных точек *A* и *B* как высшую и низшую линии пересечения соответственно. Промежуточные точки определяем при помощи сфер-посредников, центр которых будет находиться на пересечении оси вращения конуса и перпендикуляра, восстановленного к центру окружности, полученной в результате пересечения вспомогательной фронтально проецирующей плоскости, проведенной через ось вращения тора.

Определяем центр сферы-посредника α. Через фронтальную проекцию оси вращения тора O_2 проводим фронтально проецирующую плоскость τ^{α}, которая пересечет тор по окружности *1–2*. Перпендикулярно центру последней проведем прямую до пересечения с осью вращения конуса. Точка пересечения O^{α} будет центром сферы-посредника радиусом R^{α} (от центра O_{α} до точки пересечения τ^{α} с фронтальной проекцией тора). Сфера пересечет тор по окружности, проходящей через точки *1*, *2*, а конус – по окружности, проходящей через точки *3*, *4*. Точка пересечения фронтальных проекций данных окружностей (точка D_2) будет проекцией точки, принадлежащей как тору, так и конусу. Горизонтальную проекцию точки *D* найдем, показав горизонтальную проекцию окружности *c*, определив ее по точке *3*. Аналогично находим проекции точек *E* и *F*: показываем фронтально проецирующую плоскость τ^{β}; сфера-посредник (центр O^{β}) пересечет конус по двум окружностям, которые позволят определить проекции двух точек – точки *E* (пересечение d_2 и τ_2^{β}) и точки *F* (пересечение e_2 и τ_2^{β}).

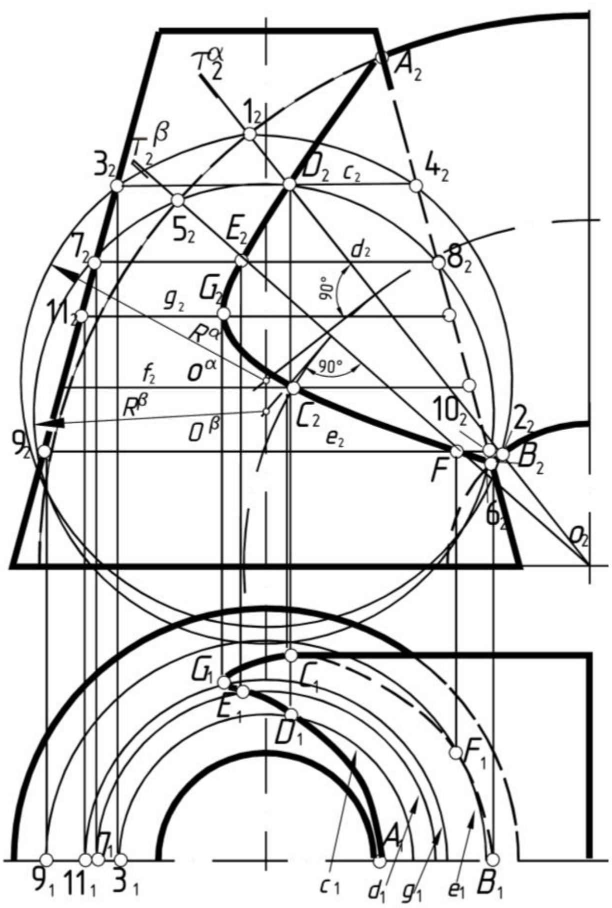


Рисунок 9.16 – Пример 9.5

Фронтальная проекция точки *C* (разграничение видимой части горизонтальной проекции линии пересечения) определяется по фронтальной проекции на штрихпунктирной линии тора (на фронтальной проекции эта линия совпадет с самой ближней и дальней образующей тора), ниже которой все точки тора не видны сверху. Для определения точки C_2 необходимо показать фронтальную проекцию окружности f_2 диаметром, равным диаметру образующей ($d_f = d_h$). Пересечение этой окружности со штрихпунктирной линией тора будет фронтальной проекцией точки *C*. Ее горизонтальную проекцию определим по линии связи.

Пример 9.6.

Задание: определить линию пересечения двух конусов, оси которых пересекаются, но не перпендикулярны.

Решение: сферу γ впишем в конические поверхности α и β (рис. 9.17).

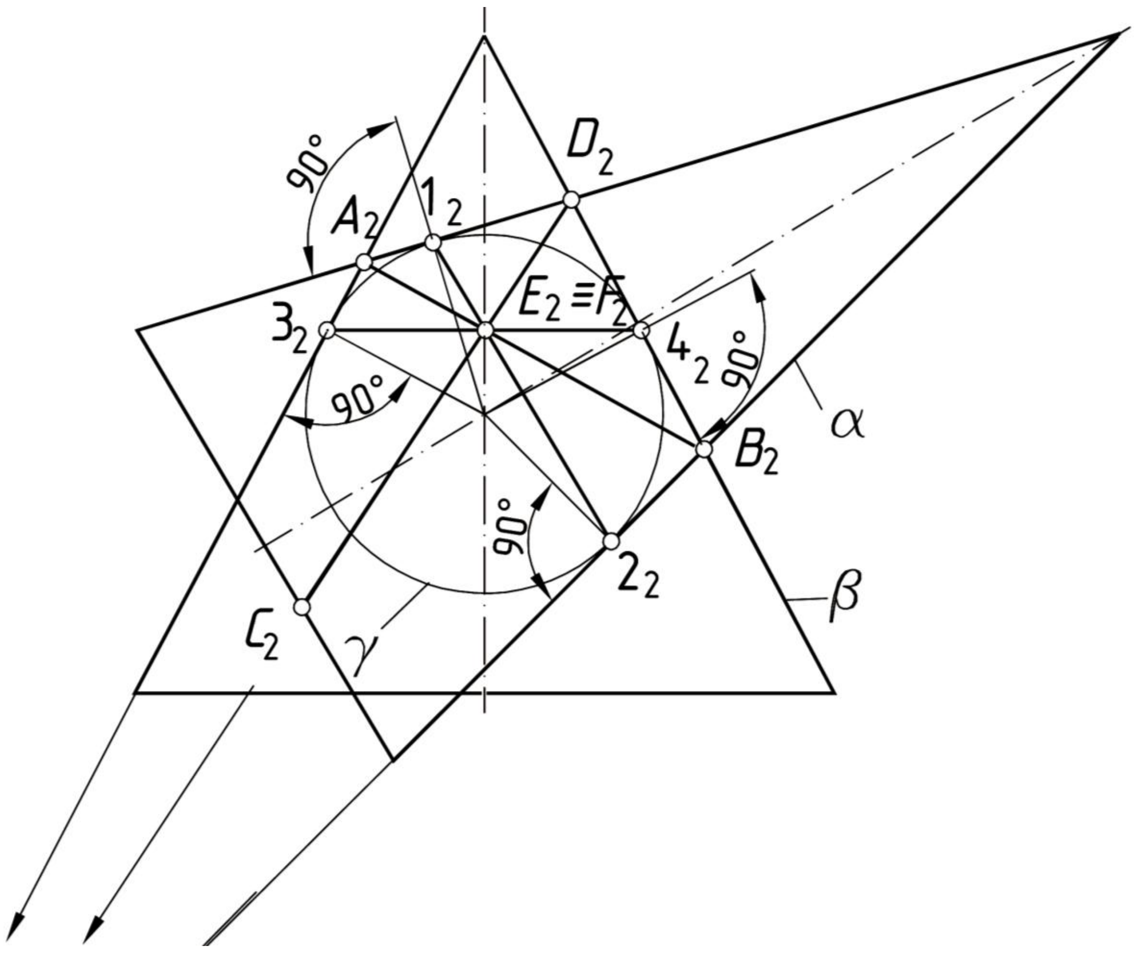


Рисунок 9.17 – Пример 9.6

Поверхность α соприкасается со сферой γ по окружности, проходящей через точки *1* и *2*, а с поверхностью β – по окружности, проходящей через точки *3* и *4*. Точки пересечения этих окружностей *E* и *F* являются точками соприкосновения поверхностей α и β.

Показанные на рисунке конические поверхности α и β пересекаются по двум плоским кривым: *AB* – эллипс, *CD* – часть эллипса *GD*. Точка *G* (большой оси эллипса) находится на пересечении главных меридианов конусов α и β.

Вопросы для самопроверки

1. Сформулировать алгоритм построения линии пересечения поверхностей вращения.

2. Описать способы секущих плоскостей и сферических посредников при определении линии пересечения поверхностей.

3. Сформулировать теорему Монжа.

4. Привести практические примеры применения теоремы Монжа в машиностроении.

5. С каким условием выбираются поверхности-посредники для определения линии пересечения поверхностей вращения?

6. В чем принципиальное отличие способа концентрических сфер от способа эксцентрических сфер?

7. В каком случае линией пересечения сферы и поверхности вращения будет окружность?

8. Какие точки сечения называются опорными, случайными?

9. Сформулировать правило построения линии взаимного пересечения поверхностей многогранников.

10. Что представляет собой линия взаимного пересечения поверхностей многогранников в случаях, когда:

– все ребра одного многогранника пересекаются с гранями другого;

– не все ребра одного многогранника пересекаются с гранями другого?

11. Сформулировать правило построения линии пересечения многогранника с поверхностью вращения.

12. Что представляет линия пересечения многогранника с поверхностью вращения?

13. Как выбрать вспомогательные плоскости-посредники при построении линии пересечения:

– двух конусов,

– двух цилиндров,

– конуса и цилиндра?

10. РАЗВЕРТКИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

10.1. Развертка поверхности

Разверткой называется плоская фигура, полученная при совмещении поверхности геометрического тела с одной плоскостью (без наложения граней или иных элементов поверхности друг на друга).

Представляя поверхность в виде гибкой, но нерастяжимой пленки, можно говорить о таком преобразовании поверхности, при котором поверхность совмещается с плоскостью без складок и разрывов. Не каждая поверхность допускает такое преобразование. Поверхность, допускающая такое преобразование, называется ***развертывающейся***, а фигура на плоскости, в которую поверхность преобразуется, называется ***разверткой поверхности***.

Основные свойства развертки:

- длины двух соответствующих линий поверхности и ее развертки равны между собой;
- угол между линиями на поверхности равен углу между соответствующими им линиями на развертке;
- прямой на поверхности соответствует также прямая на развертке;
- параллельным прямым на поверхности соответствуют также параллельные прямые на развертке;
- если линии, принадлежащей поверхности и соединяющей две точки поверхности, соответствует прямая на развертке, то эта линия является геодезической.

10.2. Развертка поверхности многогранников

Разверткой гранной поверхности называется плоская фигура, получаемая последовательным совмещением всех граней поверхности с плоскостью.

Так как все грани гранной поверхности изображаются на развертке в натуральную величину, построение ее сводится к определению величины отдельных граней поверхности – плоских многоугольников.

Существует три способа построения развертки гранных поверхностей:

1) способ нормального сечения;

2) способ раскатки;

3) способ треугольников, или триангуляции.

При построении развертки пирамиды (рис. 10.1) применяется способ триангуляции. Развертка боковой поверхности пирамиды представляет собой плоскую фигуру, состоящую из треугольников – граней пирамиды и многоугольника – основания. Поэтому построение развертки пирамиды сводится к определению натуральной величины основания и граней пирамиды. Грани пирамиды можно построить по трем сторонам треугольников их образующих. Для этого необходимо знать натуральную величину ребер и сторон основания.

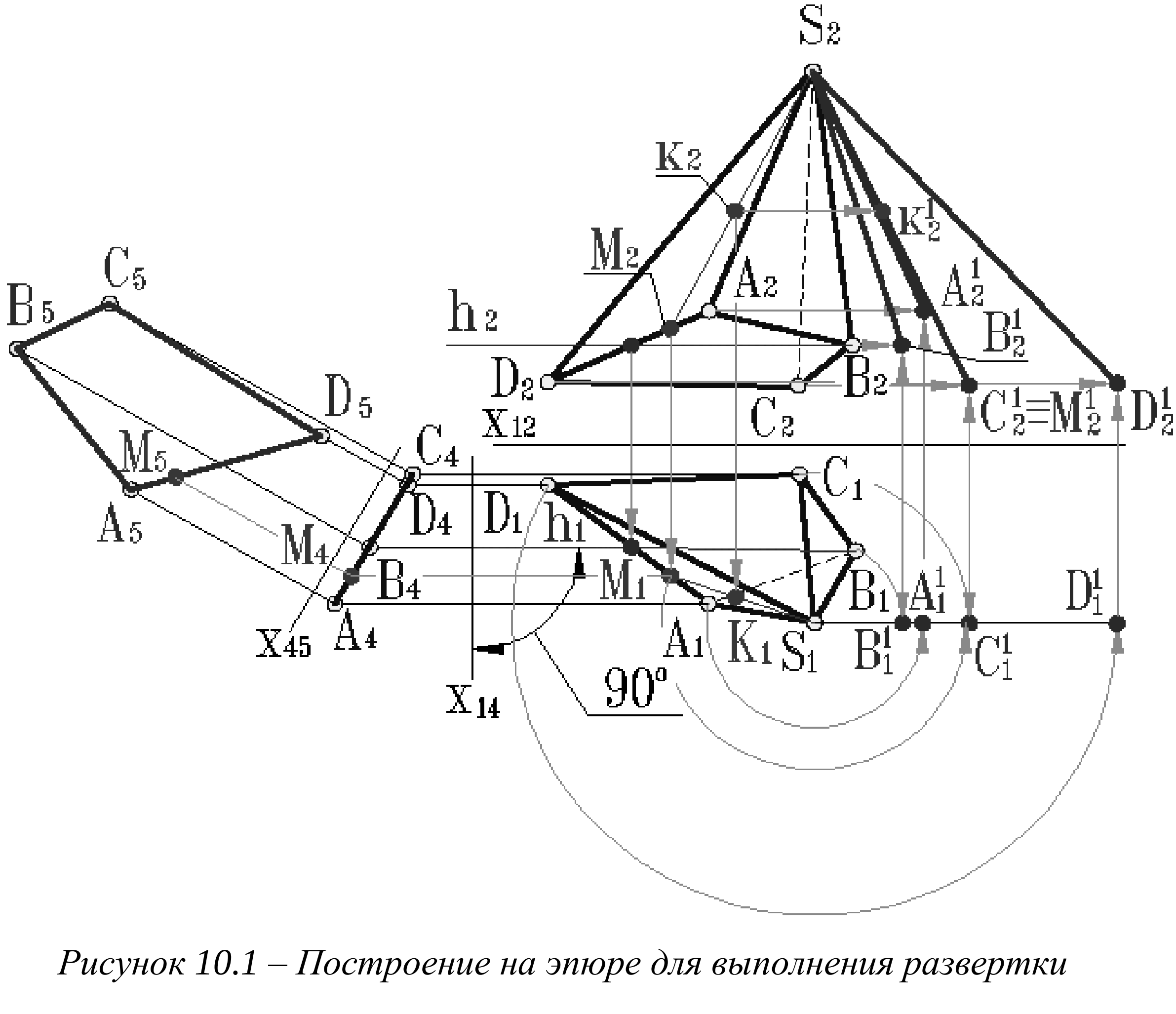


Рисунок 10.1 – Построение на эпюре для выполнения развертки

Алгоритм построения можно сформулировать следующим образом:

1. Определяют натуральную величину основания пирамиды (например, способом замены плоскостей проекций).

2. Определяют истинную величину всех ребер пирамиды любым из известных способов (на рисунке 10.1 натуральная величина всех ребер пирамиды определена способом вращения вокруг оси, перпен-

дикулярной горизонтальной плоскости проекций и проходящей через вершину пирамиды S).

3. Строят основание пирамиды и по найденным трем сторонам строят одну из боковых граней, последовательно пристраивая к ней следующие (рис. 10.2).

Точки, расположенные внутри контура развертки, находят во взаимно однозначном соответствии с точками поверхности многогранника. Но каждой точке тех ребер, по которым многогранник разрезан, на развертке соответствуют две точки, принадлежащие контуру развертки.

Примером первой точки на рисунках служит точка $K_0 \in SAD$, а иллюстрацией второго случая являются точки M_0 и M_0*. Для определения точки K_0 на развертке пришлось по ее ортогональным проекциям найти длины отрезков AM (способ замены плоскостей проекций) и SK (способ вращения).

Эти отрезки были использованы затем при построении на развертке сначала прямой S_0M_0*, потом точки K_0.

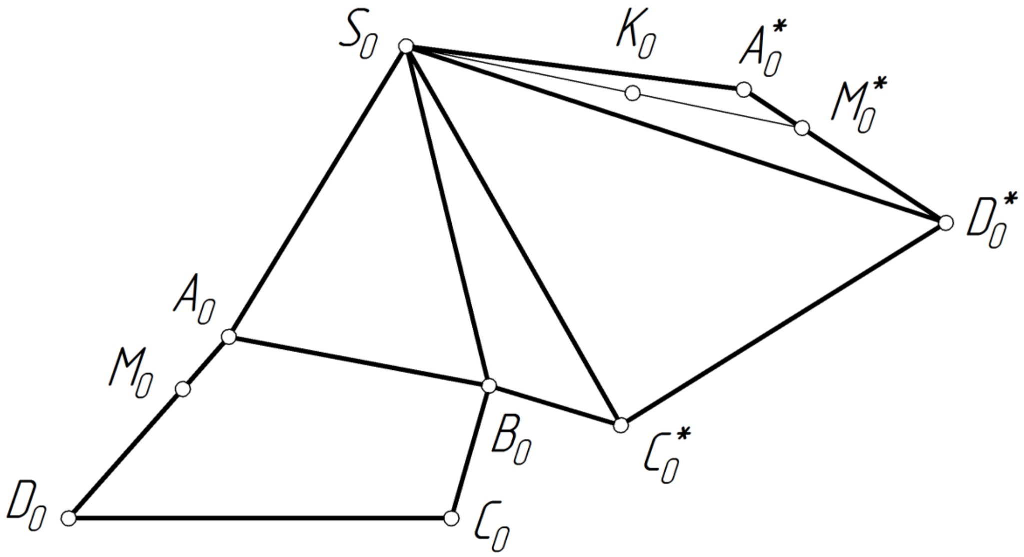


Рисунок 10.2 – Развертка пирамиды

Развертка призмы в общем случае выполняется следующим образом. Преобразуют эпюр так, чтобы ребра призмы стали параллельны новой плоскости проекций (рис. 10.3). Тогда на эту плоскость ребра проецируются в натуральную величину.

Пересекая призму вспомогательной плоскостью α, перпендикулярной ее боковым ребрам (способ нормального сечения), строят проекции фигуры нормального сечения – треугольника *1, 2, 3*, а затем определяют истинную величину этого сечения. На примере она найдена способом вращения.

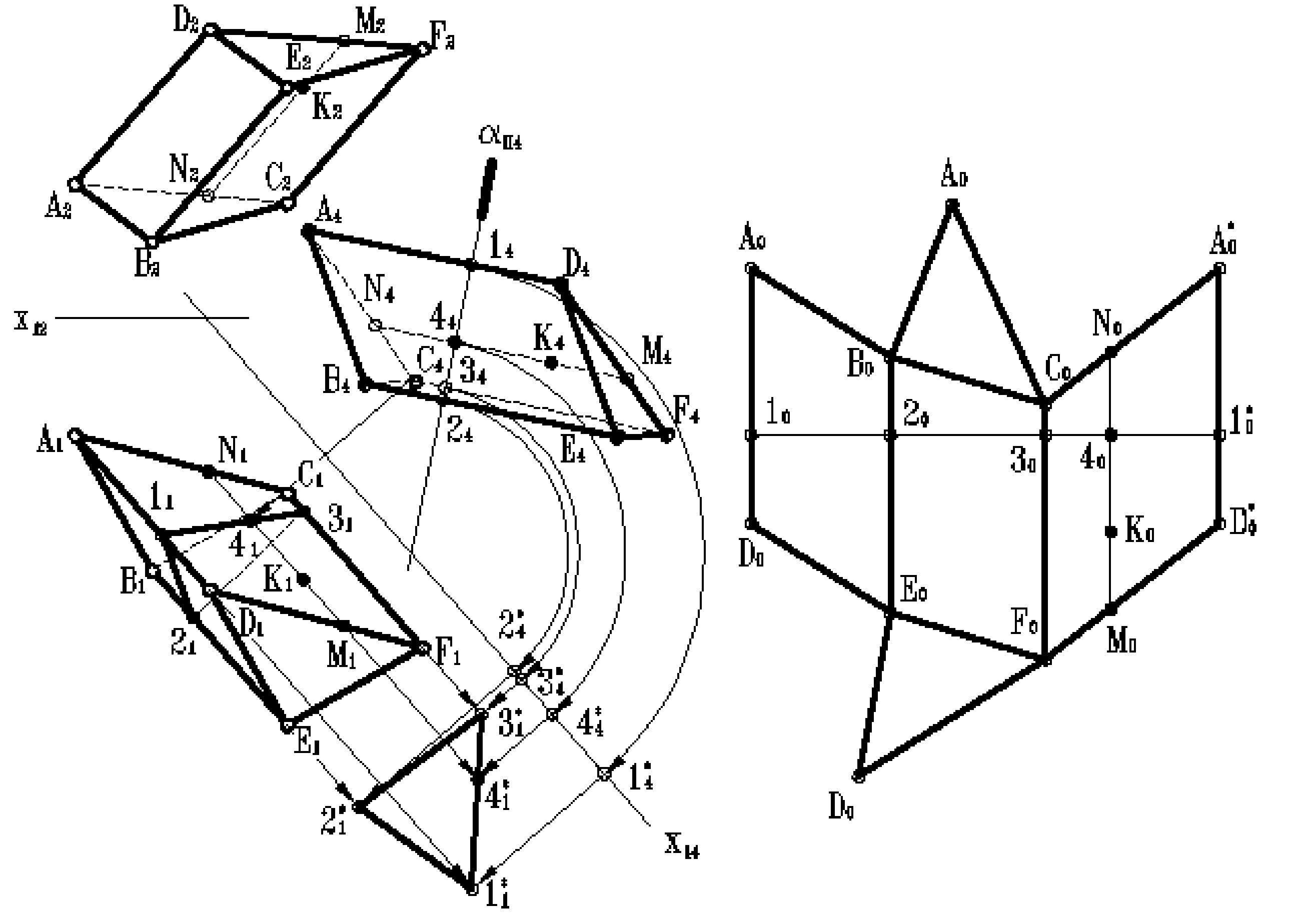


Рисунок 10.3 – Построение развертки призмы способом нормального сечения

В дальнейшем строят отрезок 1_0-1_0^*, равный периметру нормального сечения. Через точки 1_0, 2_0, 3_0 и 1_0^* проводят прямые, перпендикулярные 1_0-1_0^*, на которых откладывают соответствующие отрезки боковых ребер призмы, беря их с новой фронтальной проекции. Так, на перпендикуляре, проходящем через точку 1_0, отложены отрезки $1_0D_0=1_4D_4$ и $1_0A_0=1_4A_4$.

Соединив концы отложенных отрезков, получают развертку боковой поверхности призмы. Затем достраивают основание.

Если основание призмы на одну из плоскостей проекций отображается в натуральную величину, то построение развертки проводится способом раскатки (рис. 10.4). Этот способ заключается в следующем. Сначала, как и в предыдущем примере, преобразуют эпюр так, чтобы боковые ребра призмы стали параллельны одной из плоскостей проекций.

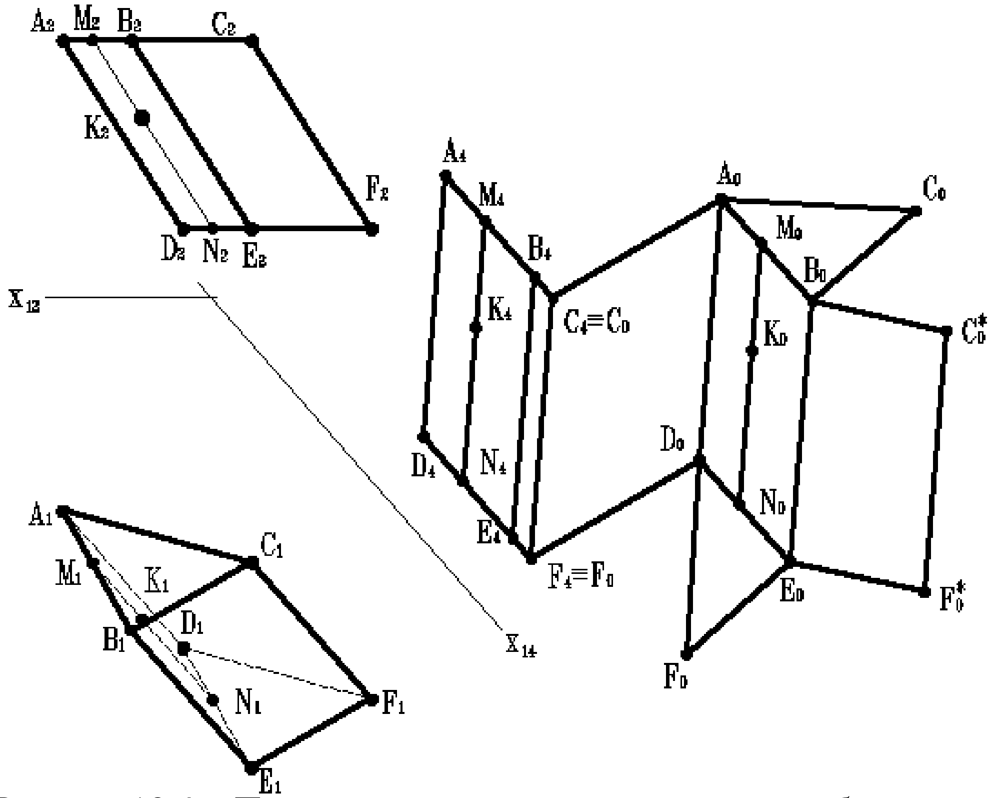


Рисунок 10.4 – Построение развертки призмы способом раскатки

Затем новую проекцию призмы вращают вокруг ребра C_4F_4 до тех пор, пока грань *ACDF* не станет параллельной плоскости $П_4$. При этом положение ребра C_4F_4 остается неизменным, а точки, принадлежащие ребру *AD*, перемещаются по окружностям, радиус которых определяется натуральной величиной отрезков *AC* и *DF* (так как основания призмы параллельны $П_1$, то на эту плоскость проекций они проецируются без искажения, то есть $R=A_1C_1=D_1F_1$), расположенных в плоскостях, перпендикулярных ребру C_4F_4. Таким образом, траектории движения точек *A* и *D* на плоскость $П_4$ проецируются в прямые, перпендикулярные ребру C_4F_4.

Когда грань *ACDF* станет параллельна плоскости $П_4$, она спроецируется на нее без искажения, то есть вершины *A* и *D* окажутся удаленными от неподвижных вершин *C* и *F* на расстояние, равное натуральной величине отрезков *AC* и *DF*. Таким образом, пересекая перпендикуляры, по которым перемещаются точки A_4 и D_4 дугой радиуса $R=A_1C_1=D_1F_1$, можно получить искомое положение точек развертки A_0 и D_0.

Следующую грань *ABDE* вращают вокруг ребра *AD*. На перпендикулярах, по которым перемещаются точки B_4 и E_4, делают засечки из точек A_0 и D_0 дугой радиуса $R=A_1B_1=D_1E_1$. Аналогично строится развертка последней боковой грани призмы.

Процесс последовательного нахождения граней призмы вращением вокруг ребер можно представить как раскатку призмы на плоскость, параллельную Π_4 и проходящую через ребро C_4F_4.

Построение на развертке точки K, принадлежащей боковой грани $ABDE$, ясно из рисунка. Предварительно через эту точку по грани провели прямую NM, параллельную боковым ребрам, которая затем построена на развертке.

10.3. Развертка цилиндрической поверхности

Развертка цилиндрической поверхности выполняется аналогично развертке призмы. Предварительно в заданный цилиндр вписывают n-угольную призму. Чем больше углов в призме, тем точнее развертка (при $n \to \infty$ призма преобразуется в цилиндр) (рис. 10.5).

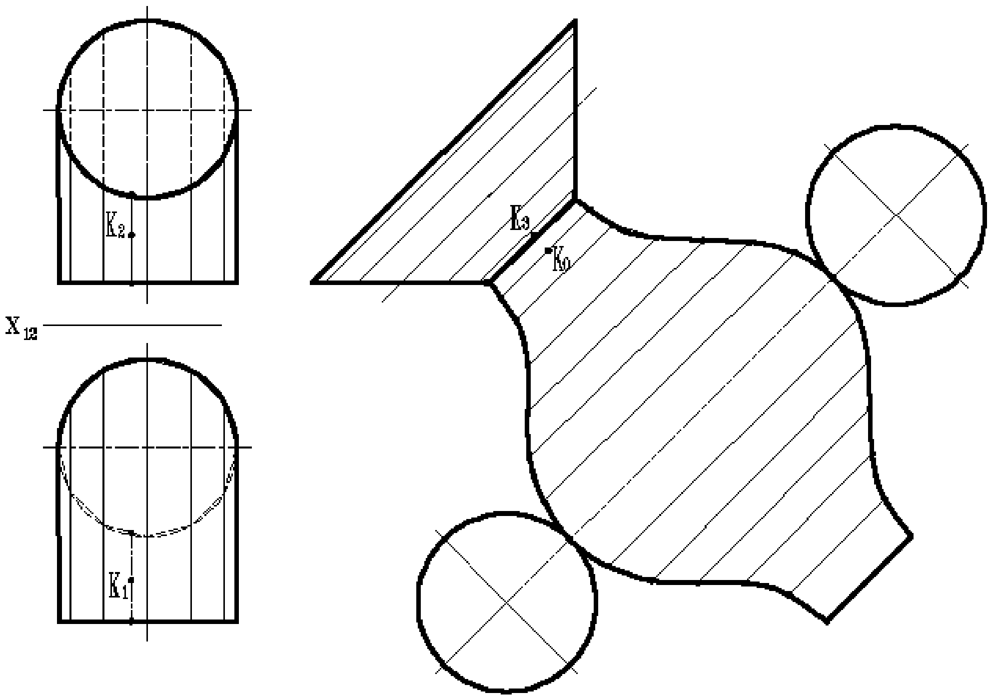


Рисунок 10.5 – Развертка цилиндрической поверхности

10.4. Развертка конической поверхности

Развертка конической поверхности выполняется аналогично развертке пирамиды, предварительно вписав в конус n-угольную пирамиду (рис. 10.6).

Если задана поверхность прямого конуса, то развертка его боковой поверхности представляет круговой сектор, радиус которого равен длине образующей конической поверхности l, а центральный угол $\varphi=360^{\circ} r / l$, где r – радиус окружности основания конуса.

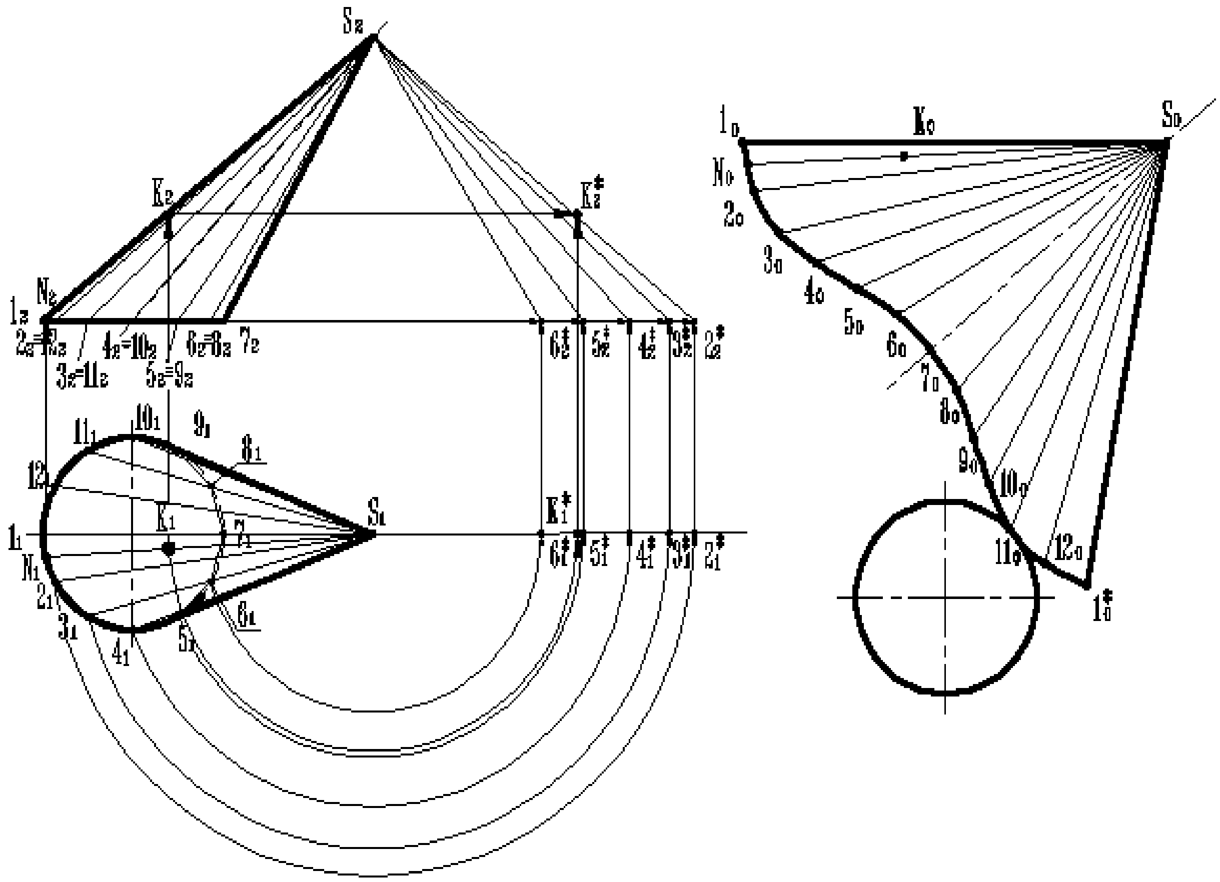


Рисунок 10.6 – Развертка конической поверхности

10.5. Условная развертка поверхностей

Для неразвертываемых поверхностей применяют условную развертку. Для таких поверхностей при их изготовлении из листового материала, кроме изгибания, приходится осуществлять сжатие или растяжение отдельных участков. Поэтому при решении задач на построение условной развертки этих поверхностей отсеки заданной поверхности аппроксимируются отсеками развертывающихся поверхностей – гранными, цилиндрическими или коническими.

Вопросы для самопроверки

1. Какие поверхности называются развертывающимися?
2. Какие поверхности обладают свойством развертываемости?
3. Какие существуют способы построения условных разверток?
4. Что представляет собой развертка многогранника?
5. Перечислить способы разверток гранных поверхностей.
6. В чем сущность способов нормального сечения и раскатки?
7. Как построить условную развертку неразвертывающихся поверхностей?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Стремясь успешно усвоить теоретический материал предложенного учебного курса, студент должен задаться вопросом, на какие ключевые моменты следует обратить особое внимание?

Если в процессе изложения теоретического материала сначала рассматривались частные вопросы и лишь впоследствии делались обобщения и выводы, то на этапе закрепления необходимых сведений рекомендуется обратный образ действий. Это означает, что в качестве ключевых моментов следует избрать наиболее общие идеи и выводы, относящиеся ко всему курсу. Таких общих идей наберется сравнительно немного, и они достаточно просты. В качестве некоторых опорных позиций можно предложить следующие.

1. Любой пространственный объект может заменить геометрическая модель, представленная в виде графического изображения.

2. Изменение конкретных условий задачи не влияет на общую схему алгоритма решения, но порождает разнообразные частные его варианты.

3. Задачи делятся на два больших класса: позиционные и метрические. Решение позиционных производится на основе общих принципов, не зависящих от конкретной модели, а решение метрических существенно зависит от вида выбранной модели.

4. Использование моделей в границах инженерного проектирования должно подчиняться заранее установленным техническим стандартам. Знание действующей системы стандартов, умение ориентироваться внутри нее и выходить к необходимым справочным материалам определяет компетентность специалиста в области инженерной графики.

5. Кроме чисто теоретических знаний, важную роль играет уровень общей графической культуры инженера, позволяющий создавать полноценно оформленные проекты.

При последующей детализации опорных позиций возникает ряд закономерностей, правил, типовых геометрических построений. Некоторые наиболее общие приемы следует отрабатывать в практических упражнениях с тем, чтобы взять их на постоянное вооружение. Другие операции нужно научиться выводить по мере надобности самостоятельно, исходя из базовых данных. Наконец, третью группу факторов допустимо отнести к области справочного материала, который можно почерпнуть в соответствующей справочной литературе.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бударин, О.С. Начертательная геометрия: учеб. пособие / О.С. Бударин. – 2-е изд., испр. – СПб.: Лань, 2009. – 352 с.

2. Гордон, В.О. Курс начертательной геометрии: учеб. пособие для втузов / В.О. Гордон, М.А. Семенцов-Огиевский. – 29-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2009. – 270 с.

3. Дудкина, Л.А. Начертательная геометрия: учеб. / Л.А. Дудкина, С.О. Немолотов, Б.Ф. Тарасов. – СПб.: Лань, 2012. – 256 с.

4. Корниенко, В.В. Начертательная геометрия. Теоретические основы чертежа: курс лекций / В.В. Корниенко; Краснояр. гос. аграр. ун-т. – Красноярск, 2011. – 130 с.

5. Корниенко, В.В. Начертательная геометрия: учеб. пособие. – 4-е изд., испр. и доп. / В.В. Корниенко [и др.]. – СПб.: Лань, 2013. – 192 с.

6. Королев, Ю.И. Инженерная графика. Стандарт третьего поколения: учеб. для вузов / Ю.И. Королев, С.Ю. Устюжанина. – СПб.: Питер, 2011. – 464 с.

7. Лагерь, А.И. Основы начертательной геометрии: учеб. / А.И. Лагерь, А.Н. Мота, К.С. Рушелюк. – 2-е изд., доп. – М.: Высш. шк., 2007. – 281 с.

8. Лагерь, А.И. Начертательная геометрия: ЭУМКД / А.И. Лагерь, О.В. Дерягина, Т.Е. Скоробогатова; Краснояр. гос. аграр. ун-т. – Красноярск, 2014. – 332 с.

9. Лызлов, А.Н. Начертательная геометрия. Задачи и решения: учеб. пособие / А.Н. Лызлов, М.В. Ракитская, Д.Е. Тихонов-Бугров. – СПб.: Лань, 2011. – 96 с.

10. Нартова, Л.Г. Начертательная геометрия: учеб. для вузов / Л.Г. Нартова, В.И. Якунин. – 3-е изд., испр.– М.: Академия, 2011. – 192 с.

11. Талалай, П.Г. Начертательная геометрия. Инженерная графика. Интернет-тестирование базовых знаний: учеб. пособие / П.Г. Талалай. – СПб.: Лань, 2010. – 256 с.

12. Фролов, С.А. Сборник задач по начертательной геометрии / С.А. Фролов. – 4-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2012. – 192 с.

13. Чекмарев, А.А. Задачи и задания по инженерной графике: учеб. пособие / А.А. Чекмарев. – М.: Академия, 2005. – 128 с.

14. Чекмарев, А.А. Начертательная геометрия и черчение: учеб. / А.А. Чекмарев. – 4-е изд., испр. и доп. – М.: Юрайт, 2012. – 471 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение А (обязательное)

Варианты заданий

Задание 01. Точка. Прямая.
Вариант 01 Задана прямая АВ координатами точек: А(145, 25, 50), В(25, 95, 90). 1. Построить точку С, расположенную относительно точки А правее на 50 мм, дальше на 15 мм и выше на 30 мм. 2. Построить точку D, расположенную относительно точки С правее на 60 мм, ближе на 25 мм и ниже на 50 мм. 3. Через точку D провести прямую DF, параллельную прямой АВ. 4. Через точку С провести прямую СЕ, параллельную плоскости $П_1$ и пересекающую прямую АВ. Назвать эту прямую и записать натуральную величину отрезка [СЕ]. 5. Определить взаимное положение прямых АВ и CD и доказать это на чертеже. 6. Разделить отрезок [АВ] точкой К в отношении АК:КВ=3:2. 7. Пересечь прямую АВ горизонтально проецирующей прямой MN. Координаты точек Е, F, M, N взять произвольно.
Вариант 02 Задана прямая АВ координатами точек: А(160, 90, 95), В(40, 50, 25). 1. Построить точку С, расположенную относительно точки А правее на 70 мм, ближе на 10 мм и ниже на 55 мм. 2. Построить точку D, расположенную относительно точки С левее на 60 мм, ближе на 50 мм и ниже на 25 мм. 3. Через точку D провести прямую DF, параллельную прямой АВ. 4. Через точку С провести прямую СЕ, параллельную плоскости $П_1$ и пересекающую прямую АВ. Назвать эту прямую и записать натуральную величину отрезка [СЕ]. 5. Определить взаимное положение прямых АВ и CD и доказать это на чертеже. 6. Разделить отрезок [АВ] точкой К в отношении АК:КВ=5:1. 7. Пересечь прямую АВ фронтально проецирующей прямой MN. Координаты точек Е, F, M, N взять произвольно.

Задание 01. Точка. Прямая.

Вариант 03

1. Построить проекции пересекающихся прямых AB и CD, заданных координатами точек A (130, 80, 60) и B (30, 60, 100).
2. Построить точку C, расположенную относительно точки A правее на 80 мм, ближе на 40 мм и выше на 5 мм.
3. Построить точку D (150, 30, ?), найти недостающую координату точки D и записать ее.
4. Через точку D провести прямую DF, параллельную прямой AB.
5. Через точку C провести прямую CE, параллельную плоскости Π_1 и пересекающую прямую AB. Назвать эту прямую и записать натуральную величину отрезка [CE].
6. Разделить отрезок [AB] точкой K в отношении AK:KB=3:2.
7. Пересечь прямую AB горизонтально проецирующей прямой MN.

Координаты точек E, F, M, N взять произвольно.

Вариант 04

Задана прямая AB координатами точек: A(180, 25, 35), B(40, 110, 80).

1. Построить точку C, расположенную относительно точки A правее на 70 мм, ближе на 60 мм и ниже на 25 мм.
2. Построить точку D, расположенную относительно точки C правее на 70 мм, дальше на 60 мм и выше на 65 мм.
3. Через точку C провести прямую CF, параллельную прямой AB.
4. Через точку C провести прямую CE, параллельную плоскости Π_2 и пересекающую прямую AB. Назвать эту прямую и записать натуральную величину отрезка [CE].
5. Определить взаимное положение прямых AB и CD и доказать это на чертеже.
6. Разделить отрезок [AB] точкой K в отношении AK:KB=5:2.
7. Пересечь прямую AB профильно проецирующей прямой MN.

Координаты точек E, F, M, N взять произвольно.

Задание 01. Точка. Прямая.

Вариант 05

1. Построить проекции пересекающихся прямых AB и CD, заданных координатами точек A (140, 45, 25) и B (80, 105, 95).
2. Построить точку C, расположенную относительно точки A правее на 105 мм, дальше на 40 мм и выше на 10 мм.
3. Построить точку D (155, ?, 40), найти недостающую координату точки D и записать ее.
4. Через точку D провести прямую DF, параллельную прямой AB.
5. Через точку C провести прямую CE, параллельную плоскости $П_1$ и пересекающую прямую AB. Назвать эту прямую и записать натуральную величину отрезка [CE].
6. Разделить отрезок [AB] точкой K в отношении AK:KB=4:3.
7. Пересечь прямую AB горизонтально проецирующей прямой MN.

Координаты точек E, F, M, N взять произвольно.

Вариант 06

1. Построить проекции пересекающихся прямых AB и CD, заданных координатами точек A (165, 80, 105) и B (30, 35, 25).
2. Построить точку C, расположенную относительно точки A правее на 40 мм, ближе на 60 мм и ниже на 95 мм.
3. Построить точку D (90, ?, 90), найти недостающую координату и записать ее.
4. Через точку D провести прямую DF, параллельную прямой AB.
5. Через точку D провести прямую DE, параллельную плоскости $П_1$ и пересекающую прямую AB. Назвать эту прямую и записать натуральную величину отрезка [DE].
6. Разделить отрезок [AB] точкой K в отношении AK:KB=3:4.
7. Пересечь прямую AB фронтально проецирующей прямой MN.

Координаты точек E, F, M, N взять произвольно.

Задание 01. Точка. Прямая.

Вариант 07

Задана прямая AB координатами точек: A(70, 85, 80), B(170, 50, 35).

1. Построить точку C, расположенную относительно точки A левее на 35 мм, ближе на 85 мм и ниже на 75 мм.
2. Построить точку D, расположенную относительно точки B правее на 40 мм, дальше на 30 мм и выше на 35 мм.
3. Через точку C провести прямую CF, параллельную прямой AB.
4. Через точку D провести прямую DE, параллельную плоскости $П_1$ и пересекающую прямую AB. Назвать эту прямую и записать натуральную величину отрезка [DE].
5. Определить взаимное положение прямых AB и CD и доказать это на чертеже.
6. Разделить отрезок [AB] точкой K в отношении AK:KB=4:1.
7. Пересечь прямую AB горизонтально проецирующей прямой MN.

Координаты точек E, F, M, N взять произвольно.

Вариант 08

Задана прямая AB координатами точек: A(145, 10, 75), B(45, 35, 25).

1. Построить точку C, расположенную относительно точки A правее на 5 мм, ближе на 80 мм и ниже на 55 мм.
2. Построить точку D, расположенную относительно точки B левее на 10 мм, ближе на 20 мм и выше на 35 мм.
3. Через точку C провести прямую CF, параллельную прямой AB.
4. Через точку D провести прямую DE, параллельную плоскости $П_1$ и пересекающую прямую AB. Назвать эту прямую и записать натуральную величину отрезка [DE].
5. Определить взаимное положение прямых AB и CD и доказать это на чертеже.
6. Разделить отрезок [AB] точкой K в отношении AK:KB=2:3.
7. Пересечь прямую AB фронтально проецирующей прямой MN.

Координаты точек E, F, M, N взять произвольно.

Задание 01. Точка. Прямая.

Вариант 09

Задана прямая AB координатами точек: A (150, 90, 60), B (15, 30, 10).

1. Построить точку C, расположенную относительно точки A правее на 75 мм, дальше на 10 мм и ниже на 45 мм.
2. Построить точку D, расположенную относительно точки B левее на 120 мм, дальше на 5 мм и выше на 80 мм.
3. Через точку D провести прямую DF, параллельную прямой AB.
4. Через точку C провести прямую CE, параллельную плоскости $П_2$ и пересекающую прямую AB. Назвать эту прямую и записать натуральную величину отрезка [CE].
5. Определить взаимное положение прямых AB и CD и доказать это на чертеже.
6. Разделить отрезок [AB] точкой K в отношении AK:KB=3:5.
7. Пересечь прямую AB горизонтально проецирующей прямой MN.

Координаты точек E, F, M, N взять произвольно.

Вариант 10

Задана прямая AB координатами точек: A (150, 5, 45), B (25, 55, 115).

1. Построить точку C, расположенную относительно точки A правее на 45 мм, ближе на 45 мм и ниже на 35 мм.
2. Построить точку D, расположенную относительно точки B левее на 25 мм, дальше на 35 мм и выше на 35 мм.
3. Через точку D провести прямую DF, параллельную прямой AB.
4. Через точку C провести прямую CE, параллельную плоскости $П_2$ и пересекающую прямую AB. Назвать эту прямую и записатьнатуральную величину отрезка [CE].
5. Определить взаимное положение прямых AB и CD и доказать это на чертеже.
6. Разделить отрезок [AB] точкой K в отношении AK:KB=2:5.
7. Пересечь прямую AB профильно проецирующей прямой MN.

Координаты точек E, F, M, N взять произвольно.

Задание 01. Точка. Прямая.

Вариант 11

Задана прямая AB координатами точек: A (160, 65, 95), B (40, 50, 20).

1. Построить точку C, расположенную относительно точки B левее на 110 мм, дальше на 45 мм и выше на 40 мм.
2. Построить точку D, расположенную относительно точки A правее на 55 мм, ближе на 15 мм и ниже на 85 мм.
3. Через точку D провести прямую DF, параллельную прямой AB.
4. Через точку C провести прямую CE, параллельную плоскости $П_1$ и пересекающую прямую AB. Назвать эту прямую и записать натуральную величину отрезка [CE].
5. Определить взаимное положение прямых AB и CD и доказать это на чертеже.
6. Разделить отрезок [AB] точкой K в отношении AK:KB=4:1.
7. Пересечь прямую AB горизонтально проецирующей прямой MN.

Координаты точек E, F, M, N взять произвольно.

Вариант 12

1. Построить проекции пересекающихся прямых AB и CD, заданных координатами точек A (125, 95, 120) и B (25, 60, 45).
2. Построить точку C, расположенную относительно точки A левее на 35 мм, дальше на 30 мм и ниже на 40 мм.
3. Построить точку D (65, 105, ?), найти недостающую координату и записать ее.
4. Через точку D провести прямую DF, параллельную прямой AB.
5. Через точку C провести прямую CE, параллельную плоскости $П_2$ и пересекающую прямую AB. Назвать эту прямую и записать натуральную величину отрезка [CE].
6. Разделить отрезок [AB] точкой K в отношении AK:KB=2:3.
7. Пересечь прямую AB фронтально проецирующей прямой MN.

Координаты точек E, F, M, N взять произвольно.

Задание 01. Точка. Прямая.

Вариант 13

Задана прямая AB координатами точек: A (165, 65, 95), B (40, 20, 15).

1. Построить точку C, расположенную относительно точки A правее на 35 мм, дальше на 25 мм и ниже на 65 мм.
2. Построить точку D, расположенную относительно точки B левее на 30 мм, ближе на 5 мм и выше на 65 мм.
3. Через точку D провести прямую DF, параллельную прямой AB.
4. Через точку C провести прямую CE, параллельную плоскости Π_2 и пересекающую прямую AB. Назвать эту прямую и записать натуральную величину отрезка [CE].
5. Определить взаимное положение прямых AB и CD и доказать это на чертеже.
6. Разделить отрезок [AB] точкой K в отношении AK:KB=1:3.
7. Пересечь прямую AB фронтально проецирующей прямой MN.

Координаты точек E, F, M, N взять произвольно.

Вариант 14

1. Построить проекции пересекающихся прямых AB и CD, заданных координатами точек A (75, 10, 40) и B (130, 105, 100).
2. Построить точку C, расположенную относительно точки A ближе на 50 мм и выше на 50 мм.
3. Построить точку D (135, 40, ?), найти недостающую координату и записать ее.
4. Через точку D провести прямую DF, параллельную прямой AB.
5. Через точку C провести прямую CE, параллельную плоскости Π_2 и пересекающую прямую AB. Назвать эту прямую и записать натуральную величину отрезка [CE].
6. Разделить отрезок [AB] точкой K в отношении AK:KB=3:4.
7. Пересечь прямую AB горизонтально проецирующей прямой MN.

Координаты точек E, F, M, N взять произвольно.

Вариант 15

Задана прямая AB координатами точек: A (125, 105, 100), B (20, 15, 25).

1. Построить точку C, расположенную относительно точки A левее на 5 мм, дальше на 65 мм и ниже на 70 мм.
2. Построить точку D, расположенную относительно точки B левее на 20 мм, ближе на 60 мм и ниже на 10 мм.
3. Через точку D провести прямую DF, параллельную прямой AB.
4. Через точку C провести прямую CE, параллельную плоскости $П_2$ и пересекающую прямую AB. Назвать эту прямую и записать натуральную величину отрезка [CE].
5. Определить взаимное положение прямых AB и CD и доказать это на чертеже.
6. Разделить отрезок [AB] точкой K в отношении AK:KB=5:1.
7. Пересечь прямую AB горизонтально проецирующей прямой MN.

Координаты точек E, F, M, N взять произвольно.

Вариант 16

Задана прямая AB координатами точек: A (150, 90, 60), B (15, 30, 10).

1. Построить точку C, расположенную относительно точки A правее на 75 мм, дальше на 10 мм и ниже на 45 мм.
2. Построить точку D, расположенную относительно точки B левее на 120 мм, дальше на 5 мм и выше на 80 мм.
3. Через точку D провести прямую DF, параллельную прямой AB.
4. Через точку C провести прямую CE, параллельную плоскости $П_2$ и пересекающую прямую AB. Назвать эту прямую и записать натуральную величину отрезка [CE].
5. Определить взаимное положение прямых AB и CD и доказать это на чертеже.
6. Разделить отрезок [AB] точкой K в отношении AK:KB=2:5.
7. Пересечь прямую AB фронтально проецирующей прямой MN.

Координаты точек E, F, M, N взять произвольно.

Задание 01. Точка. Прямая.

Вариант 17

Задана прямая CD координатами точек: C (145, 25, 50), D (25, 95, 90).

1. Построить точку A, расположенную относительно точки C правее на 110 мм, ближе на 10 мм и ниже на 20 мм.
2. Построить точку B, расположенную относительно точки D левее на 60 мм, дальше на 25 мм и выше на 10 мм.
3. Через точку D провести прямую DF, параллельную прямой AB.
4. Через точку A провести прямую AE, параллельную плоскости Π_2 и пересекающую прямую CD. Назвать эту прямую и записать натуральную величину отрезка [AE].
5. Определить взаимное положение прямых AB и CD и доказать это на чертеже.
6. Разделить отрезок [AB] точкой K в отношении AK:KB=1:6.
7. Пересечь прямую AB горизонтально проецирующей прямой MN.

Координаты точек E, F, M, N взять произвольно.

Вариант 18

Задана прямая CD координатами точек: C (40, 50, 25), D (160, 90, 95).

1. Построить точку A, расположенную относительно точки C левее на 50 мм, дальше на 30 мм и выше на 55 мм.
2. Построить точку B, расположенную относительно точки A левее на 60 мм, ближе на 100 мм и ниже на 80 мм.
3. Через точку B провести прямую BF, параллельную прямой CD.
4. Через точку A провести прямую AE, параллельную плоскости Π_1 и пересекающую прямую CD. Назвать эту прямую и записать натуральную величину отрезка [AE].
5. Определить взаимное положение прямых AB и CD и доказать это на чертеже.
6. Разделить отрезок [AB] точкой K в отношении AK:KB=5:2.
7. Пересечь прямую AB фронтально проецирующей прямой MN.

Координаты точек E, F, M, N взять произвольно.

Вариант 19

Задана прямая AB координатами точек: A (40, 50, 25), B (140, 80, 80).

1. Построить точку D, расположенную относительно точки A левее на 70 мм, дальше на 40 мм и выше на 72 мм.
2. Построить точку C, расположенную относительно точки D ближе на 60 мм и ниже на 80 мм.
3. Через точку B провести прямую BF, параллельную прямой CD.
4. Через точку A провести прямую AE, параллельную плоскости $П_2$ и пересекающую прямую CD. Назвать эту прямую и записать натуральную величину отрезка [AE].
5. Определить взаимное положение прямых AB и CD и доказать это на чертеже.
6. Разделить отрезок [AB] точкой K в отношении AK:KB=2:3.
7. Пересечь прямую AB горизонтально проецирующей прямой MN.

Координаты точек E, F, M, N взять произвольно.

Вариант 20

1. Построить проекции пересекающихся прямых AB и CD. Заданы координаты точек A (30, 30, 100) и B (130, 80, 25).
2. Построить точку C, расположенную относительно точки A левее на 120 мм, ближе на 30 мм и ниже на 60 мм.
3. Построить точку D (90, 53, ?), найти недостающую координату и записать ее.
4. Через точку D провести прямую DF, параллельную прямой AB.
5. Через точку C провести прямую CE, параллельную плоскости $П_1$ и пересекающую прямую AB. Назвать эту прямую и записать натуральную величину отрезка [CE].
6. Разделить отрезок [AB] точкой K в отношении AK:KB=3:5.
7. Пересечь прямую AB горизонтально проецирующей прямой MN.

Координаты точек E, F, M, N взять произвольно.

Вариант 21

Задана прямая AB координатами точек: A (40, 110, 80), B (180, 25, 35)

1. Построить точку C, расположенную относительно точки A левее на 20 мм, дальше на 50 мм и выше на 17 мм.
2. Построить точку D, расположенную относительно точки B правее на 70 мм, ближе на 75 мм и ниже на 25 мм.
3. Через точку D провести прямую DF, параллельную прямой AB.
4. Через точку C провести прямую CE, параллельную плоскости $П_2$ и пересекающую прямую AB. Назвать эту прямую и записать натуральную величину отрезка [CE].
5. Определить взаимное положение прямых AB и CD и доказать это на чертеже.
6. Разделить отрезок [AB] точкой K в отношении AK:KB=2:5.
7. Пересечь прямую AB горизонтально проецирующей прямой MN.

Координаты точек E, F, M, N взять произвольно.

Вариант 22

1. Построить проекции пересекающихся прямых AB и CD. Заданы координаты точек A (80, 105, 80) и B (140, 45, 25).
2. Построить точку C, расположенную относительно точки A левее на 75 мм, дальше на 25 мм и ниже на 40 мм.
3. Построить точку D (135, 42, ?), найти недостающую координату и записать ее.
4. Через точку D провести прямую DF, параллельную прямой AB.
5. Через точку C провести прямую CE, параллельную плоскости $П_2$ и пересекающую прямую AB. Назвать эту прямую и записать натуральную величину отрезка [CE].
6. Разделить отрезок [AB] точкой K в отношении AK:KB=3:2.
7. Пересечь прямую AB профильно проецирующей прямой MN.

Координаты точек E, F, M, N взять произвольно.

Задание 01. Точка. Прямая.

Вариант 23

Задана прямая АВ координатами точек: А (170, 50, 35), В (70, 85, 80).

1. Построить точку С, расположенную относительно точки А правее на 40 мм, ближе на 20 мм и выше на 35 мм.
2. Построить точку D, расположенную относительно точки С правее на 25 мм, ближе на 60 мм и ниже на 65 мм.
3. Через точку D провести прямую DF, параллельную прямой АВ.
4. Через точку С провести прямую СЕ, параллельную плоскости $П_1$ и пересекающую прямую АВ. Назвать эту прямую и записать натуральную величину отрезка [СЕ].
5. Определить взаимное положение прямых АВ и CD и доказать это на чертеже.
6. Разделить отрезок [АВ] точкой К в отношении АК:КВ=3:5.
7. Пересечь прямую АВ фронтально проецирующей прямой MN.

Координаты точек E, F, M, N взять произвольно.

Вариант 24

1. Построить проекции пересекающихся прямых АВ и CD. Заданы координаты точек А (30, 35, 25) и В (165, 80, 105).
2. Построить точку С, расположенную относительно точки А левее на 20 мм, ближе на 30 мм и выше на 55 мм.
3. Построить точку D (132, 38, ?), найти недостающую координату и записать ее.
4. Через точку D провести прямую DF, параллельную прямой АВ.
5. Через точку С провести прямую СЕ, параллельную плоскости $П_1$ и пересекающую прямую АВ. Назвать эту прямую и записать натуральную величину отрезка [СЕ].
6. Разделить отрезок [АВ] точкой К в отношении АК:КВ=3:4.
7. Пересечь прямую АВ горизонтально проецирующей прямой MN.

Координаты точек E, F, M, N взять произвольно.

Задание 01. Точка. Прямая.

Вариант 25

Заданапрямая АВ координатами точек: А (45, 35, 25), В (145, 10, 75).

1. Построить точку С, расположенную относительно точки В правее на 90 мм, ближе на 45 мм и ниже на 15 мм.
2. Построить точку D, расположенную относительно точки А левее на 85 мм, дальше на 10 мм и ниже на 5 мм.
3. Через точку D провести прямую DF, параллельную прямой АВ.
4. Через точку С провести прямую СЕ, параллельную плоскости $П_1$ и пересекающую прямую АВ. Назвать эту прямую и записать натуральную величину отрезка [СЕ].
5. Определить взаимное положение прямых АВ и CD и доказать это на чертеже.
6. Разделить отрезок [АВ] точкой К в отношении АК:КВ=1:5.
7. Пересечь прямую АВ горизонтально проецирующей прямой MN.

Координаты точек Е, F, M, N взять произвольно.

Вариант 26

Задана прямая АВ координатами точек: А (15, 30, 10), В (150, 60, 45).

1. Построить точку С, расположенную относительно точки В дальше на 36 мм и выше на 45 мм.
2. Построить точку D, расположенную относительно точки А левее на 60 мм, ближе на 30 мм и ниже на 10 мм.
3. Через точку С провести прямую CF, параллельную прямой АВ.
4. Через точку D провести прямую DE, параллельную плоскости $П_2$ и пересекающую прямую АВ. Назвать эту прямую и записать натуральную величину отрезка [DE].
5. Определить взаимное положение прямых АВ и CD и доказать это на чертеже.
6. Разделить отрезок [АВ] точкой К в отношении АК:КВ=4:2.
7. Пересечь прямую АВ фронтально проецирующей прямой MN.

Координаты точек Е, F, M, N взять произвольно.

Задание 01. Точка. Прямая.

Вариант 27

Задана прямая AB координатами точек: A (25, 55, 115), B (150, 5, 45).

1. Построить точку C, расположенную относительно точки A левее на 65 мм, дальше на 45 мм и ниже на 15 мм.
2. Построить точку D, расположенную относительно точки B правее на 45 мм, ближе на 45 мм и ниже на 35 мм.
3. Через точку C провести прямую CF, параллельную прямой AB.
4. Через точку D провести прямую DE, параллельную плоскости $П_2$ и пересекающую прямую AB. Назвать эту прямую и записать натуральную величину отрезка [DE].
5. Определить взаимное положение прямых AB и CD и доказать это на чертеже.
6. Разделить отрезок [AB] точкой K в отношении AK:KB=5:2.
7. Пересечь прямую AB фронтально проецирующей прямой MN.

Координаты точек E, F, M, N взять произвольно.

Вариант 28

1. Построить проекции пересекающихся прямых AB и CD. Заданы координаты точек C (80, 105, 80) и B (150, 45, 25).
2. Построить точку A, расположенную относительно точки C левее на 75 мм, дальше на 24 мм и ниже на 40 мм.
3. Построить точку D (132, 38, ?), найти недостающую координату и записать ее.
4. Через точку B провести прямую BF, параллельную прямой CD.
5. Через точку A провести прямую AE, параллельную плоскости $П_2$ и пересекающую прямую CD. Назвать эту прямую и записать натуральную величину отрезка [AE].
6. Разделить отрезок [CD] точкой K в отношении CK:KD=3:5.
7. Пересечь прямую AB горизонтально проецирующей прямой MN.

Координаты точек E, F, M, N взять произвольно.

Задание 01. Точка. Прямая.

Вариант 29

Задана прямая CD координатами точек: C (40, 50, 25), D (140, 82, 80).

1. Построить точку B, расположенную относительно точки C левее на 70 мм, дальше на 40 мм и выше на 70 мм.
2. Построить точку A, расположенную относительно точки B ближе на 60 мм и ниже на 80 мм.
3. Через точку D провести прямую DF, параллельную прямой AB.
4. Через точку C провести прямую CE, параллельную плоскости Π_2 и пересекающую прямую AB. Назвать эту прямую и записать натуральную величину отрезка [CE].
5. Определить взаимное положение прямых AB и CD и доказать это на чертеже.
6. Разделить отрезок [CD] точкой K в отношении CK:KD=2:7.
7. Пересечь прямую AB профильно проецирующей прямой MN.

Координаты точек E, F, M, N взять произвольно.

Вариант 30

1. Построить проекции пересекающихся прямых AB и CD. Заданы координаты точек C (140, 45, 25) и D (80, 106, 95).
2. Построить точку A, расположенную относительно точки C правее на 105 мм, дальше на 40 мм и выше на 10 мм.
3. Построить точку B (152, ?, 40), найти недостающую координату и записать ее.
4. Через точку B провести прямую BF, параллельную прямой CD.
5. Через точку A провести прямую AE, параллельную плоскости Π_1 и пересекающую прямую CD. Назвать эту прямую и записать натуральную величину отрезка [AE].
6. Разделить отрезок [CD] точкой K в отношении CK:KD=3:4.
7. Пересечь прямую AB горизонтально проецирующей прямой MN.

Координаты точек E, F, M, N взять произвольно.

Задание 01. Точка. Прямая.

Вариант 31

Задана прямая CD координатами точек: C (45, 55, 30), D (160, 90, 95).

1. Построить точку A, расположенную относительно точки C левее на 50 мм, дальше на 30 мм и выше на 55 мм.
2. Построить точку B, расположенную относительно точки A левее на 60 мм, ближе на 100 мм и ниже на 80 мм.
3. Через точку B провести прямую BF, параллельную прямой CD.
4. Через точку A провести прямую AE, параллельную плоскости $П_1$ и пересекающую прямую CD. Назвать эту прямую и записать натуральную величину отрезка [AE].
5. Определить взаимное положение прямых AB и CD и доказать это на чертеже.
6. Разделить отрезок [AB] точкой К в отношении AK:KB=5:2.
7. Пересечь прямую AB фронтально проецирующей прямой MN.

Координаты точек E, F, M, N взять произвольно.

Вариант 32

1. Построить проекции пересекающихся прямых AB и CD. Заданы координаты точек C (135, 40, 20) и D (80, 106, 95).
2. Построить точку A, расположенную относительно точки C правее на 100 мм, дальше на 40 мм и выше на 15 мм.
3. Построить точку B (155, ?, 45), найти недостающую координату и записать ее.
4. Через точку B провести прямую BF, параллельную прямой CD.
5. Через точку A провести прямую AE, параллельную плоскости $П_2$ и пересекающую прямую CD. Назвать эту прямую и записать натуральную величину отрезка [AE].
6. Разделить отрезок [CD] точкой К в отношении CK:KD=3:2.
7. Пересечь прямую AB профильно проецирующей прямой MN.

Координаты точек E, F, M, N взять произвольно.

Задание 02. Пересечение прямой с плоскостью.

Построить две проекции плоскости, заданной координатами точек A, B, C, и прямой, заданной координатами точек D и E. Найти точку их пересечения, определить и доказать видимость прямой

Вар.	**A**			**B**			**C**			**D**			**E**		
	x	***y***	***z***	***x***	***y***	***z***	***x***	***y***	***z***	***x***	***y***	***z***	***x***	***y***	***z***
1	160	65	95	40	50	95	90	4	20	125	0	40	40	90	80
2	163	80	105	30	75	25	100	20	0	165	15	15	50	70	50
3	160	90	90	25	40	75	135	0	0	180	0	50	25	75	35
4	125	95	130	25	60	45	165	5	5	160	75	45	35	30	66
5	150	111	45	15	75	77	75	30	0	130	5	90	15	90	30
6	135	50	20	55	95	90	75	0	7	40	35	70	130	90	10
7	166	30	10	30	30	70	120	90	105	165	60	90	30	60	12
8	30	32	25	120	15	120	75	120	0	135	45	30	15	60	60
9	160	20	50	55	90	90	80	5	0	123	20	95	45	75	35
10	75	80	85	170	100	60	105	0	4	127	5	110	90	100	0
11	130	80	75	30	60	103	90	5	0	170	35	60	40	40	40
12	70	80	80	170	98	60	106	0	5	130	5	110	90	110	0
13	160	103	85	25	80	35	110	0	10	185	80	25	70	60	85
14	145	10	75	45	60	77	130	90	20	135	45	20	60	90	90
15	170	66	70	50	80	60	95	0	10	170	90	40	50	0	30
16	150	60	80	30	70	65	60	10	0	32	35	135	120	70	0
17	170	65	30	25	95	105	105	12	0	160	90	90	25	55	45
18	165	30	0	32	30	70	120	90	105	165	60	90	30	63	10
19	150	0	90	50	90	25	110	99	0	160	35	16	65	105	40
20	175	10	40	130	105	100	60	40	15	110	0	100	150	90	0
21	150	5	45	25	5	135	105	70	10	185	20	30	25	20	100
22	155	15	85	55	25	45	105	85	15	40	85	35	153	10	23
23	182	26	82	42	112	83	111	0	9	60	60	95	150	30	16
24	138	44	24	81	104	96	34	6	36	154	72	94	63	70	22
25	150	15	40	120	100	90	60	50	15	45	40	90	140	90	0
26	180	0	50	55	100	50	95	0	0	25	15	25	165	60	40
27	172	75	26	36	75	105	105	20	0	150	90	70	4	15	20
28	170	6	80	15	30	20	110	95	20	120	10	80	50	60	5
29	75	85	80	170	56	100	110	11	0	36	41	55	170	32	32
30	130	80	82	30	100	56	90	0	12	40	7	111	110	100	0
31	75	80	85	170	100	60	105	0	5	125	5	110	90	100	0
32	165	30	0	30	30	70	120	90	105	165	60	90	30	65	10

Задание 03. Задачи метрические.

Задача 1. По заданным координатам точек построить проекции прямых AB и CS. Способом замены плоскостей проекций определить кратчайшее расстояние между прямыми.

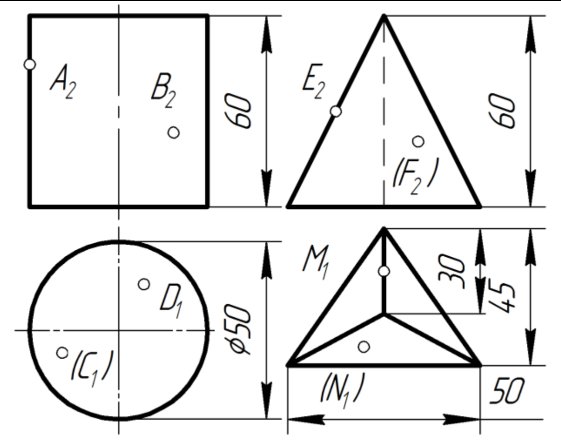
Задача 2. Построить две проекции плоскости, заданной координатами точек A, B, C. Способом прямоугольного треугольника определить расстояние от плоскости до точки S

Вар.	**A**			**B**			**C**			**S**		
	x	***y***	***z***	***x***	***y***	***z***	***x***	***y***	***z***	***x***	***y***	***z***
1	45	5	55	5	45	10	70	15	0	65	65	50
2	75	25	0	30	15	50	10	50	20	60	45	36
3	45	55	5	5	10	50	70	0	20	75	55	65
4	40	55	5	0	10	50	65	0	20	70	55	65
5	10	10	20	55	10	50	80	60	0	20	45	50
6	65	0	20	0	50	60	10	10	0	35	60	4
7	65	20	10	0	60	20	55	50	35	35	5	50
8	80	0	20	10	15	12	60	30	50	70	45	0
9	75	50	15	35	0	0	10	20	45	70	5	35
10	75	0	20	5	15	10	55	30	50	65	45	0
11	36	60	35	5	25	10	60	30	6	55	10	50
12	60	65	20	45	10	66	5	10	20	75	25	10
13	45	55	5	6	10	45	70	0	16	66	50	64
14	75	0	25	30	50	15	10	20	50	60	40	45
15	45	5	56	5	50	9	70	20	0	75	65	55
16	80	20	11	45	0	70	0	45	40	10	0	16
17	60	0	55	0	25	25	75	65	10	35	60	70
18	65	19	0	0	60	20	55	50	35	35	5	50
19	45	60	21	0	19	10	60	30	65	60	25	20
20	0	5	15	40	25	60	30	50	5	65	0	20
21	40	5	55	0	50	10	65	20	0	71	65	56
22	8	20	10	55	50	10	80	0	60	20	50	45
23	35	35	60	5	10	25	60	5	30	55	50	0
24	60	20	65	45	60	10	5	20	10	75	10	25
25	20	10	55	5	65	16	70	50	50	70	25	5
26	75	16	50	35	0	0	10	45	20	70	50	5
27	75	20	0	5	10	16	55	50	32	65	0	44
28	80	10	20	45	70	0	0	40	45	10	16	0
29	45	56	14	0	25	5	60	10	60	60	20	9
30	4	40	60	0	6	14	60	30	64	34	64	20
31	45	7	55	5	50	10	70	20	0	75	63	54
32	38	55	5	0	10	50	65	3	18	70	55	65

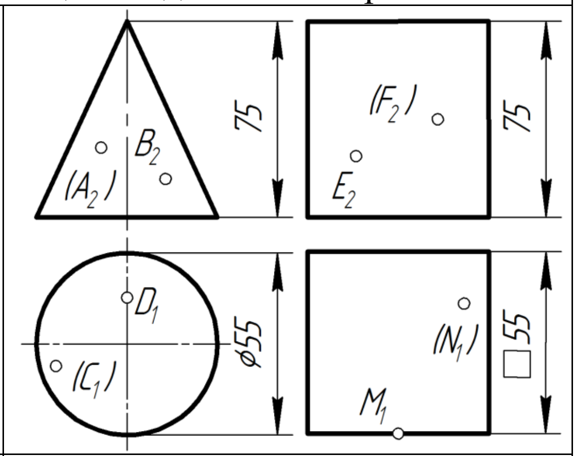
Задание 04. Точки на поверхностях.

Определить положение точек на трех проекциях заданных поверхностей

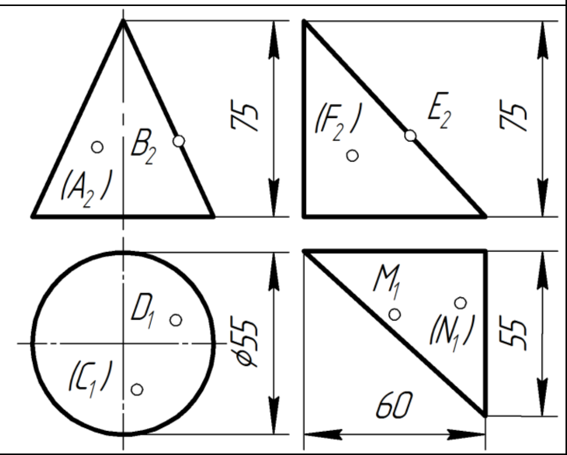
Вариант 1



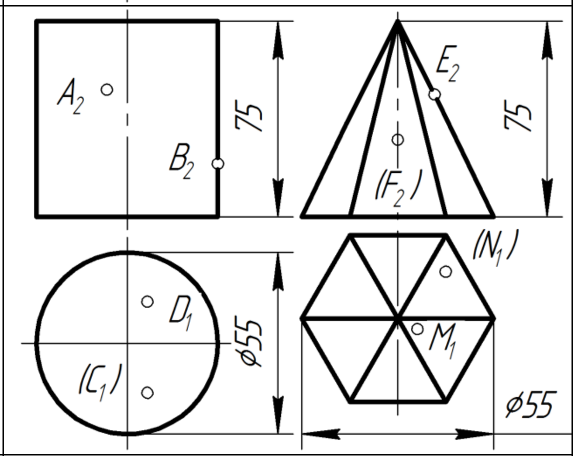
Вариант 2



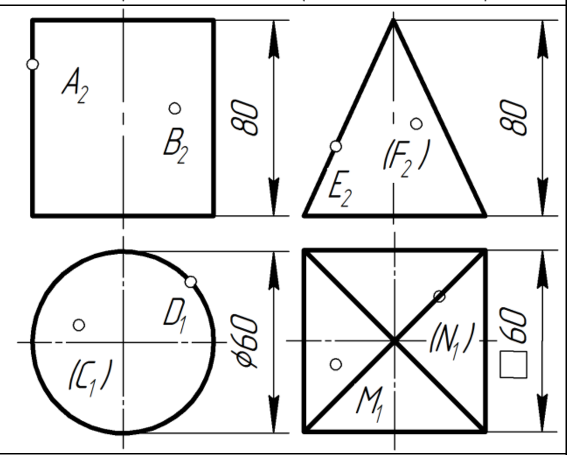
Вариант 3



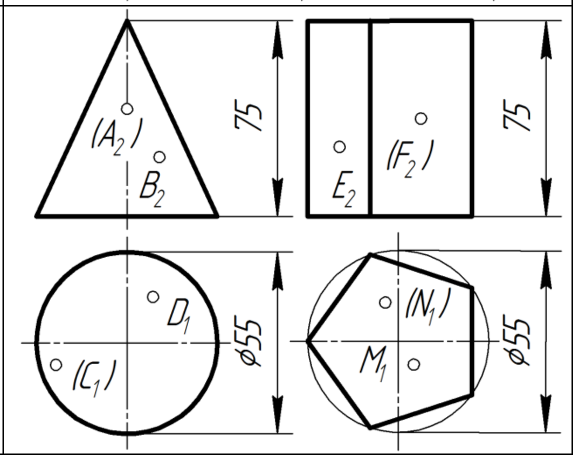
Вариант 4



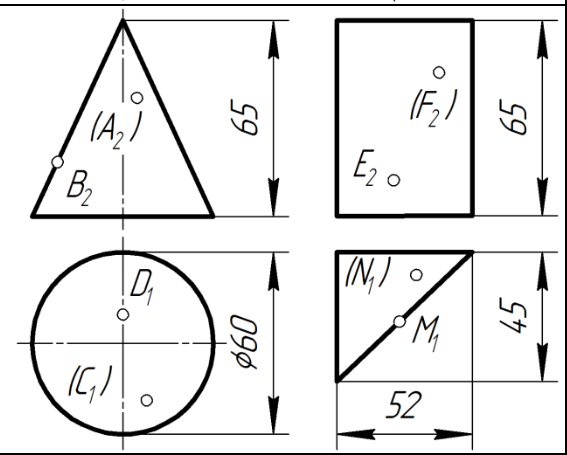
Вариант 5



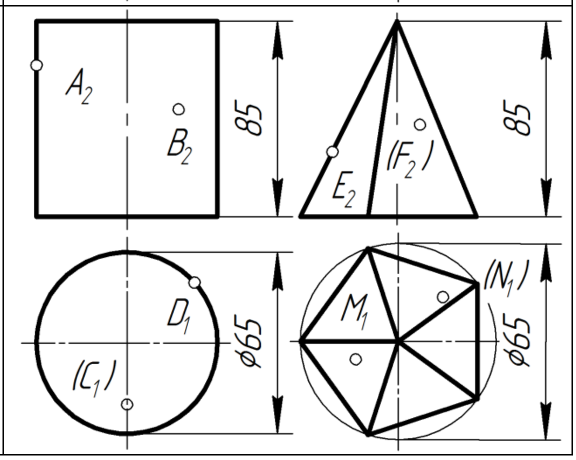
Вариант 6



Вариант 7



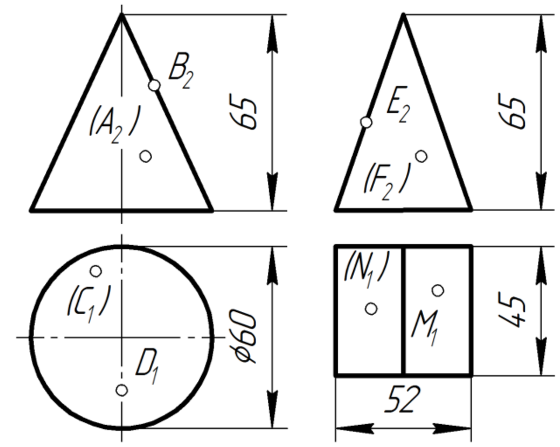
Вариант 8



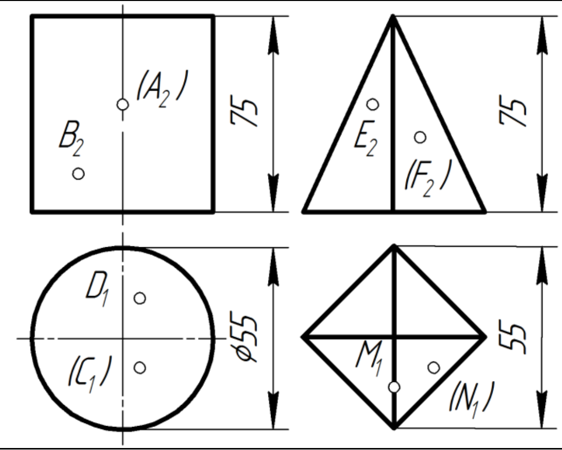
Задание 04. Точки на поверхностях.

Определить положение точек на трех проекциях заданных поверхностей

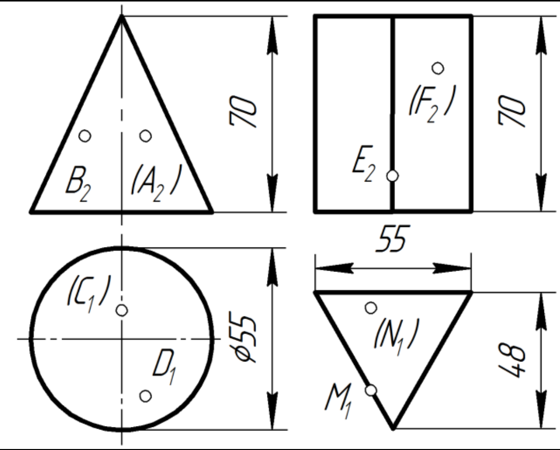
Вариант 9



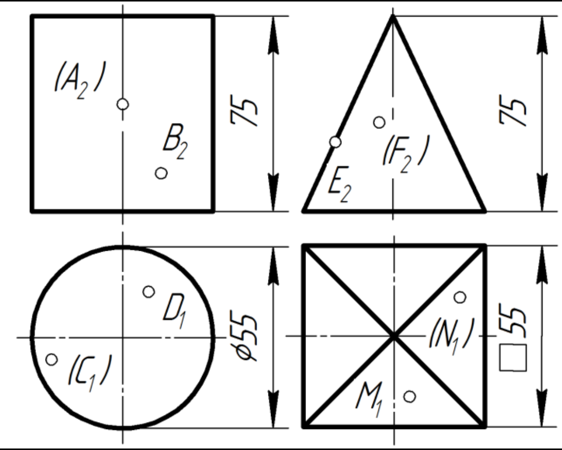
Вариант 10



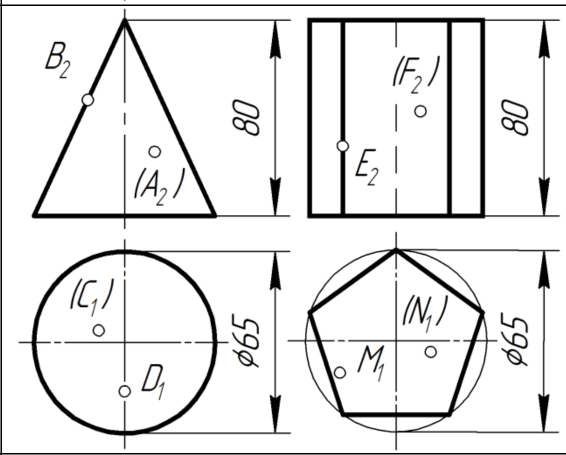
Вариант 11



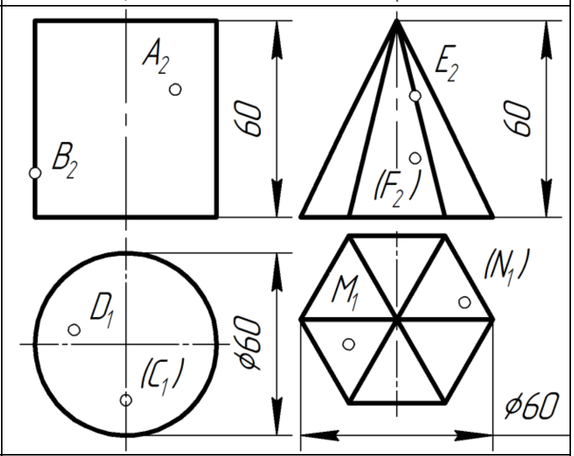
Вариант 12



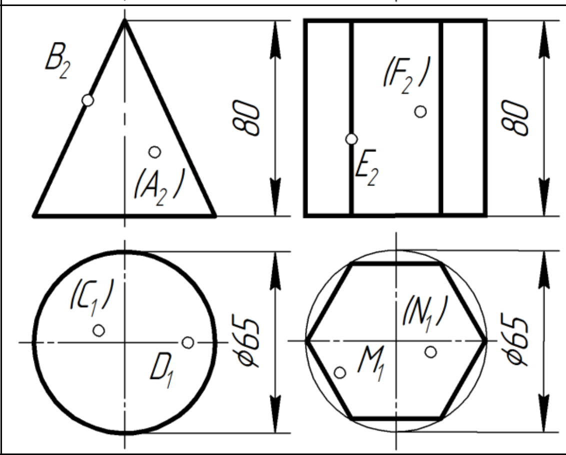
Вариант 13



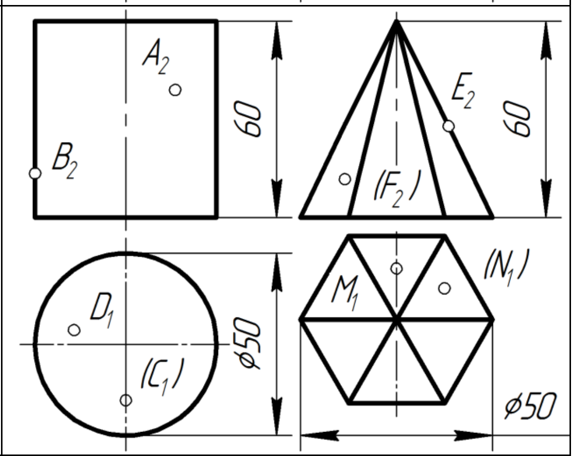
Вариант 14



Вариант 15



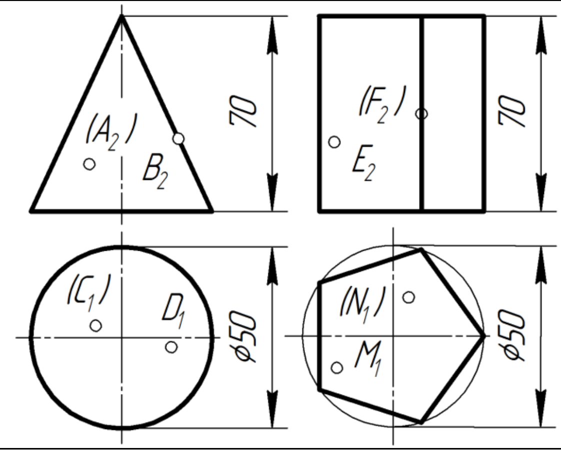
Вариант 16



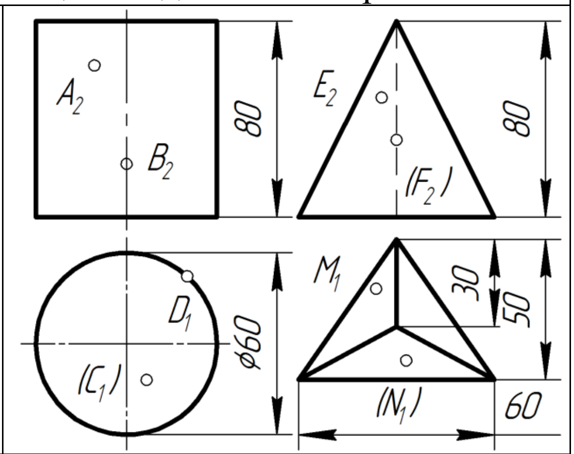
Задание 04. Точки на поверхностях.

Определить положение точек на трех проекциях заданных поверхностей

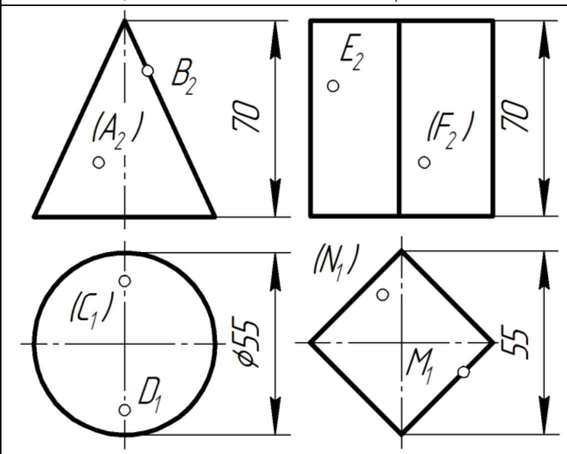
Вариант 17



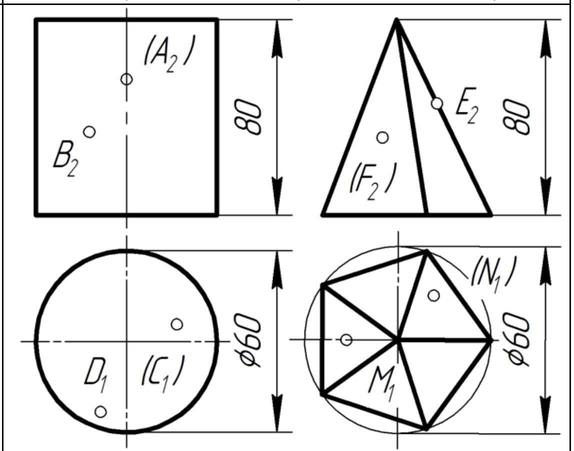
Вариант 18



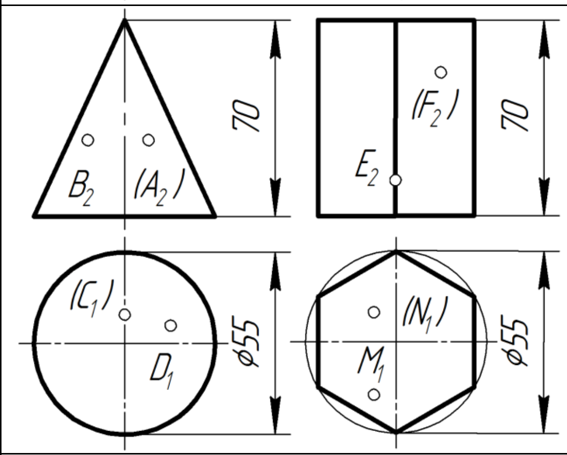
Вариант 19



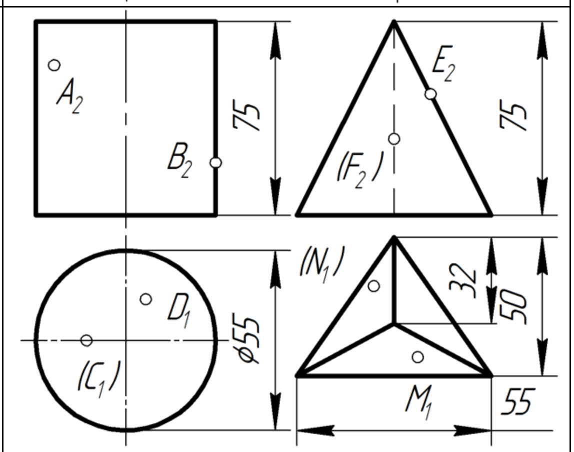
Вариант 20



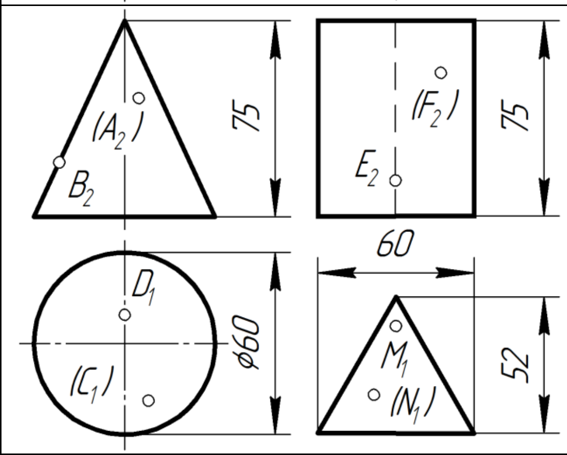
Вариант 21



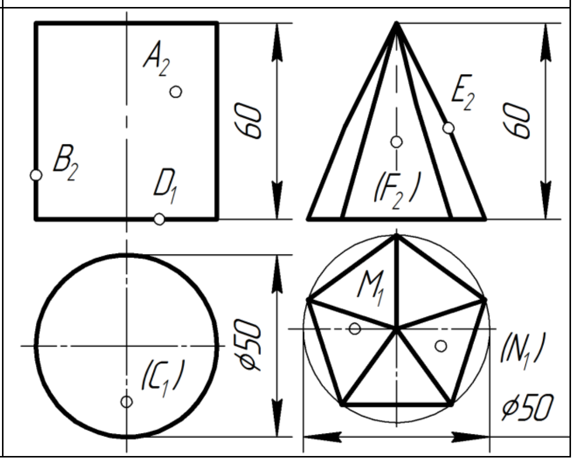
Вариант 22



Вариант 23



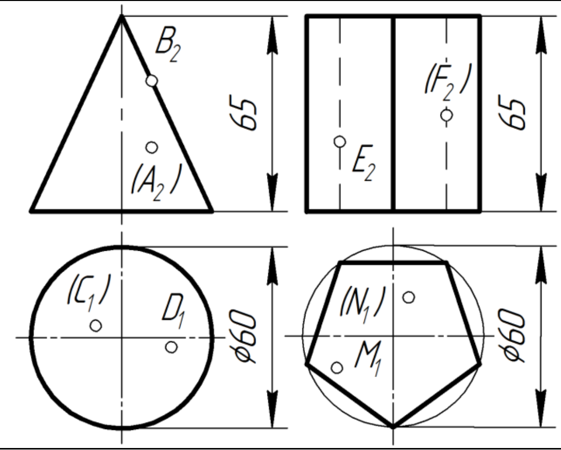
Вариант 24



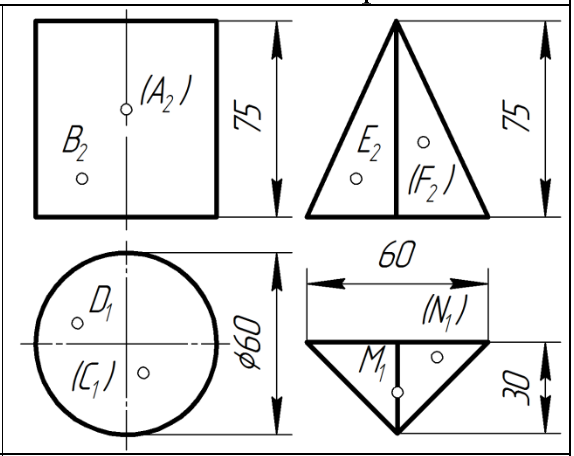
Задание 04. Точки на поверхностях.

Определить положение точек на трех проекциях заданных поверхностей

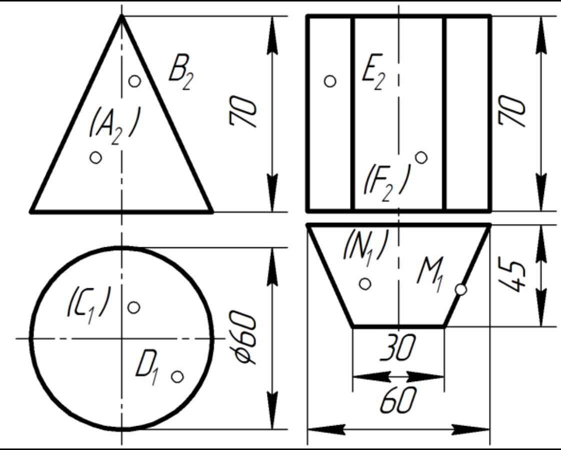
Вариант 25



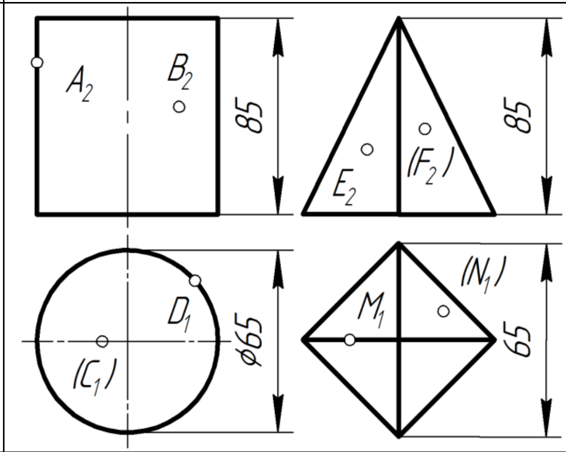
Вариант 26



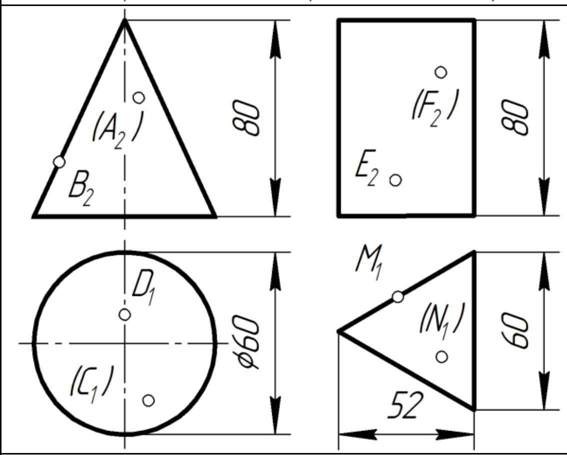
Вариант 27



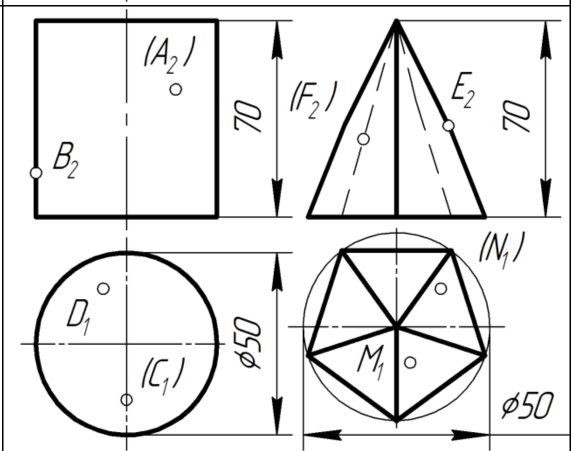
Вариант 28



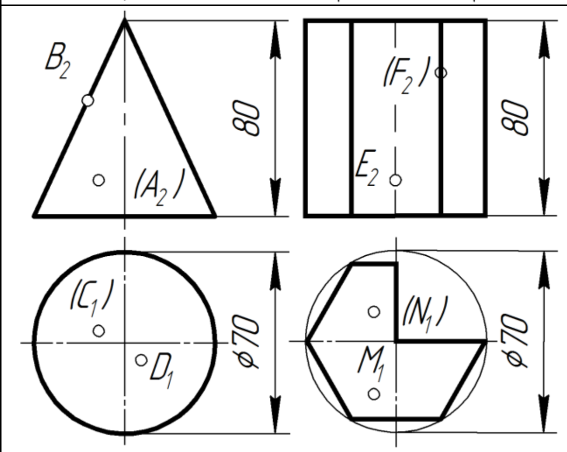
Вариант 29



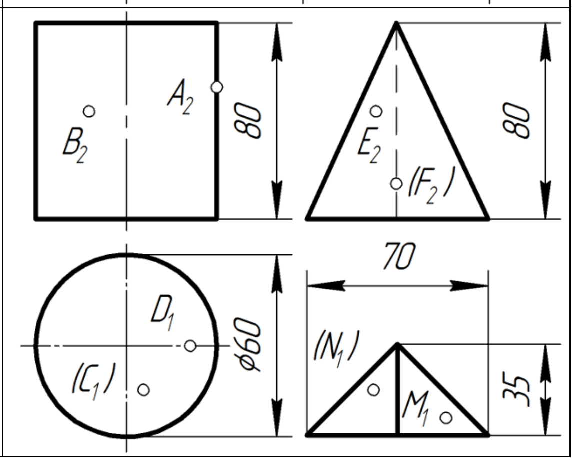
Вариант 30



Вариант 31



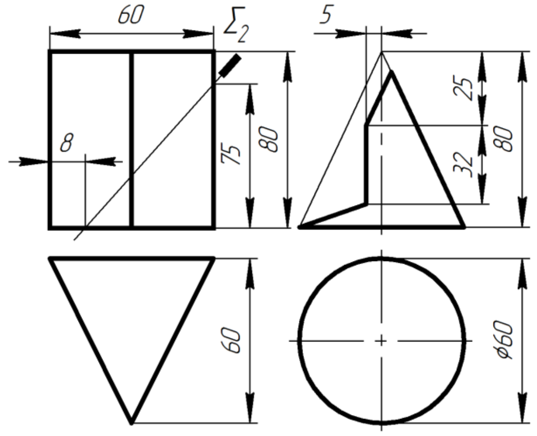
Вариант 32



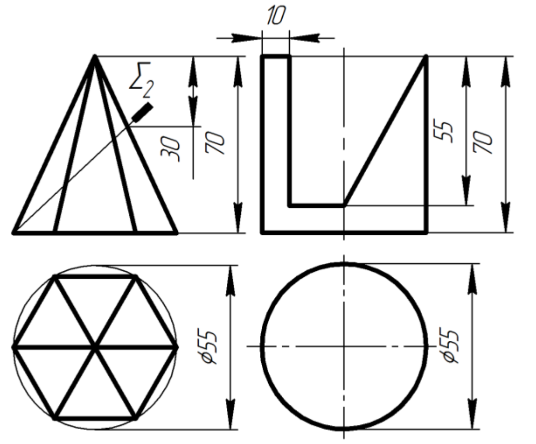
Задание 05. Сечение поверхностей плоскостями.

Начертить три проекции тела с вырезом и усеченной поверхности, определить натуральную величину сечения способом вращения

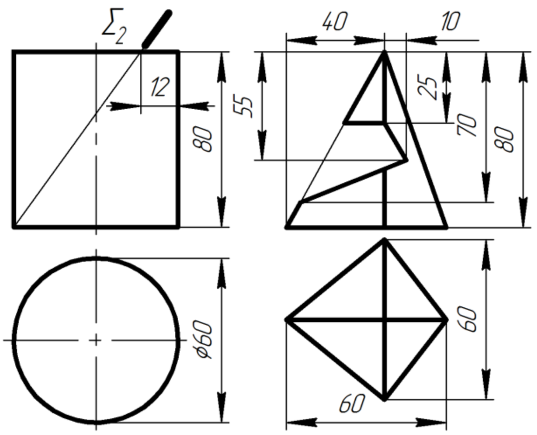
Вариант 1



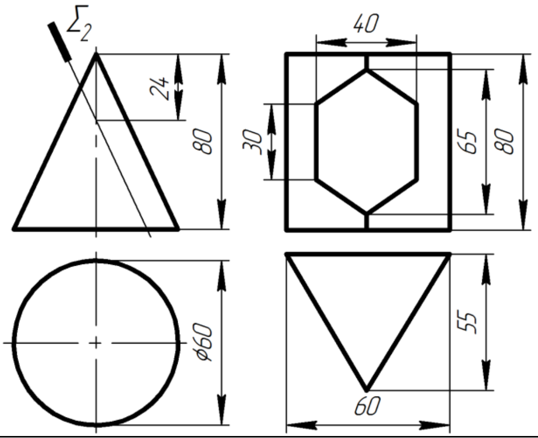
Вариант 2



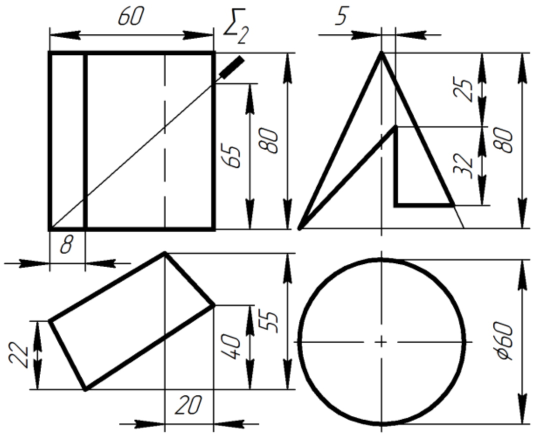
Вариант 3



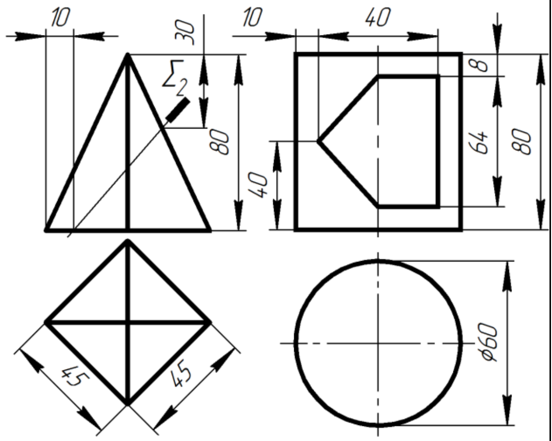
Вариант 4



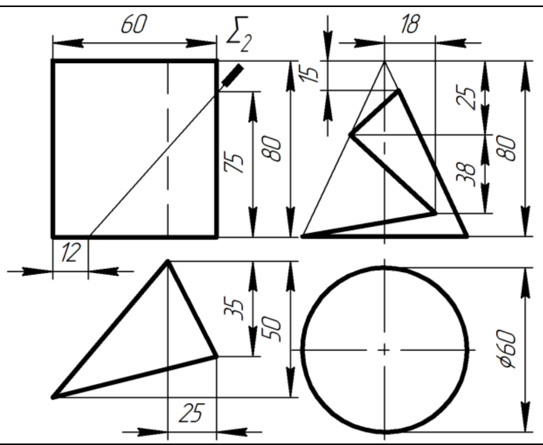
Вариант 5



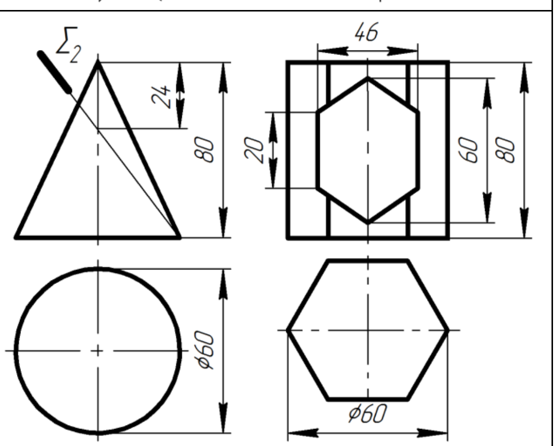
Вариант 6



Вариант 7



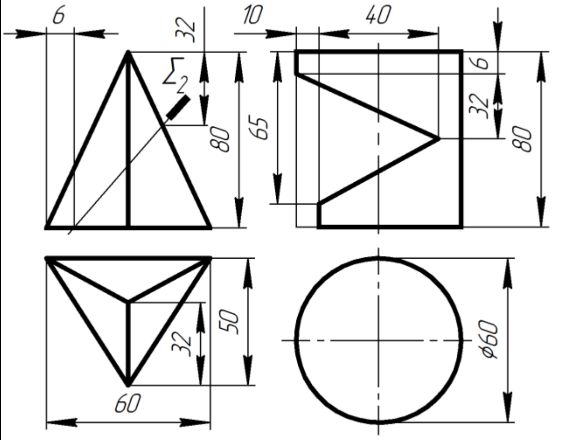
Вариант 8



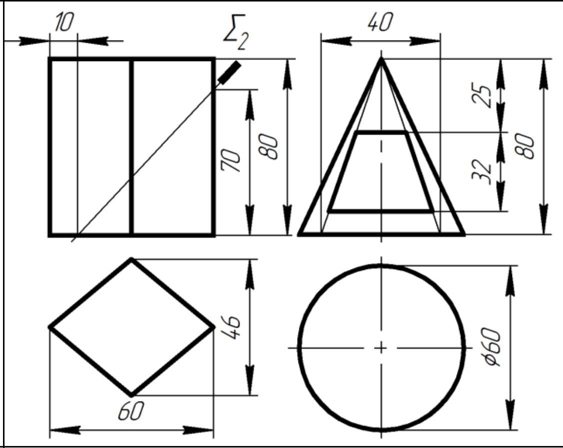
Задание 05. Сечение поверхностей плоскостями.

Начертить три проекции тела с вырезом и усеченной поверхности, определить натуральную величину сечения способом вращения

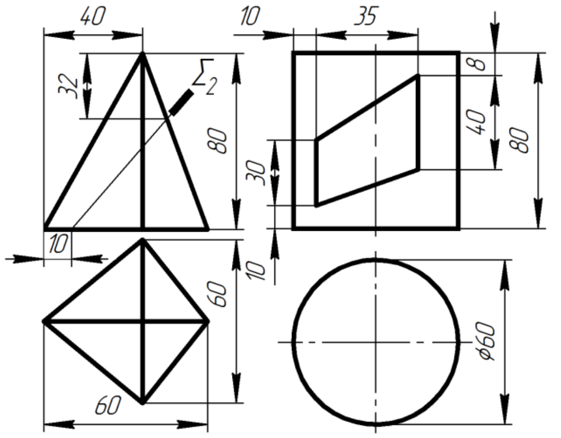
Вариант 9



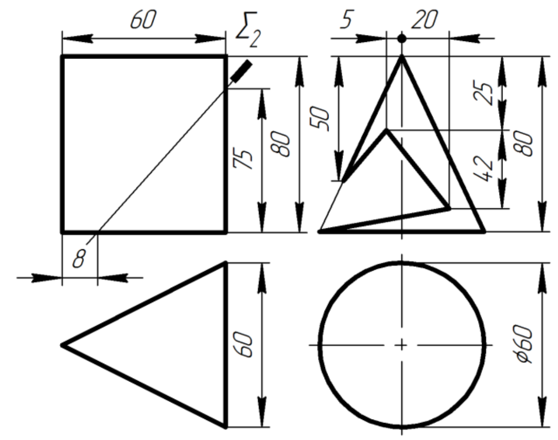
Вариант 10



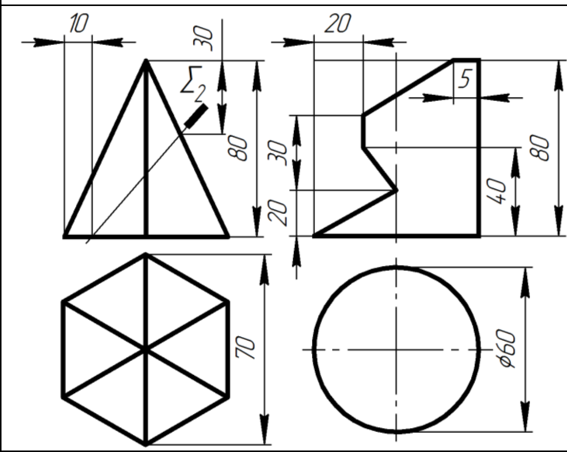
Вариант 11



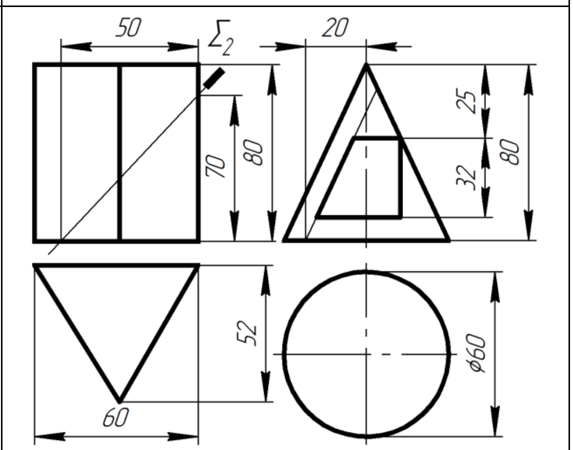
Вариант 12



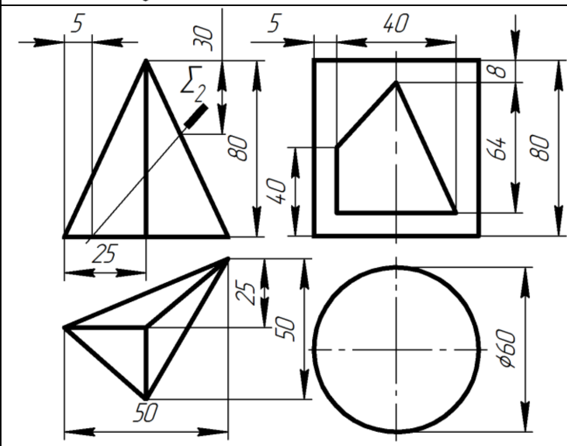
Вариант 13



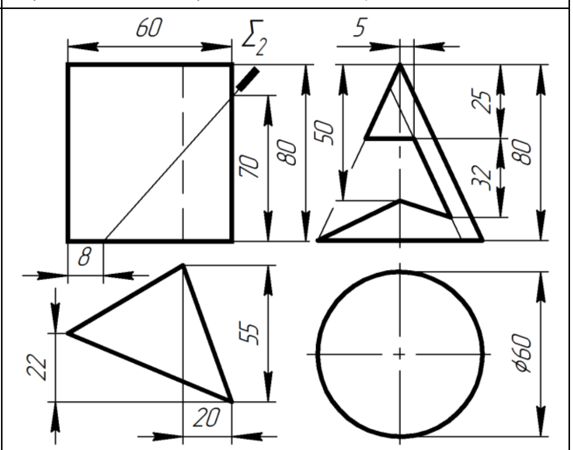
Вариант 14

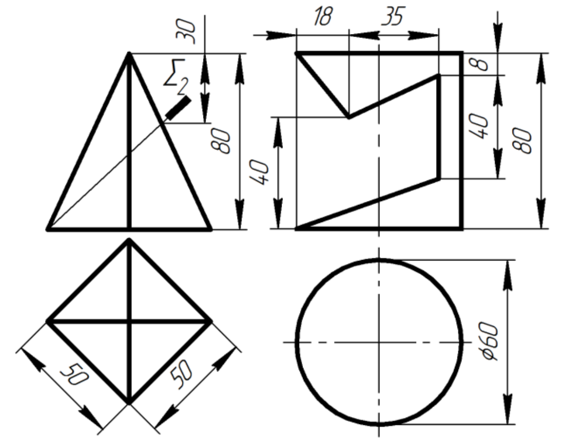
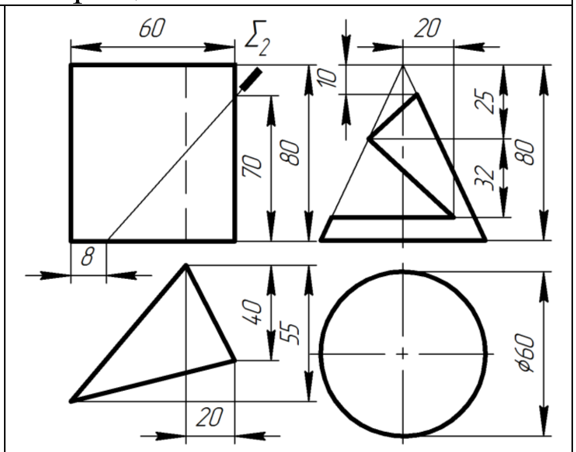
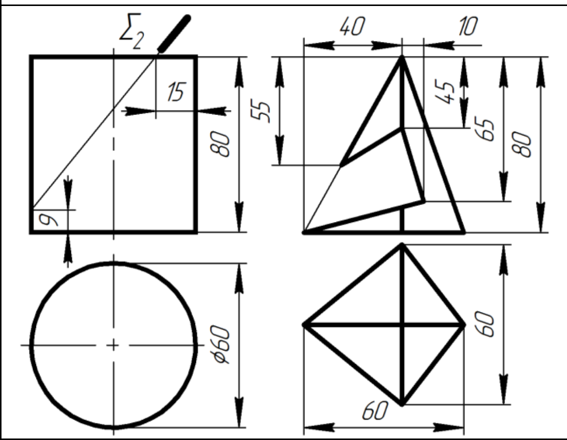
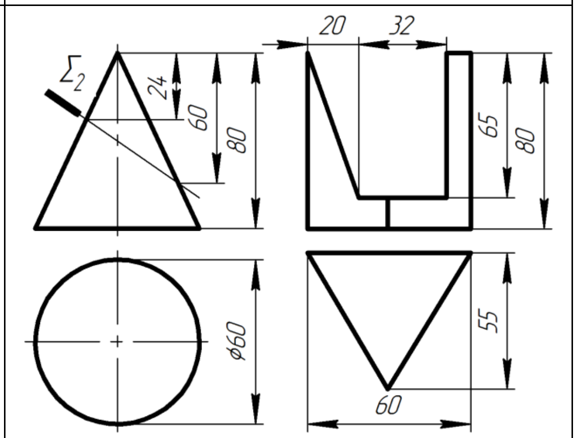
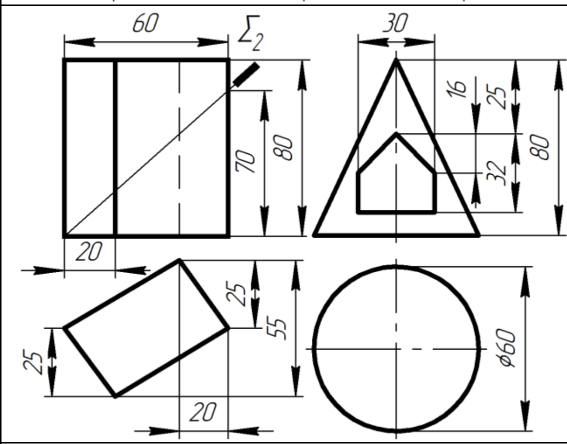
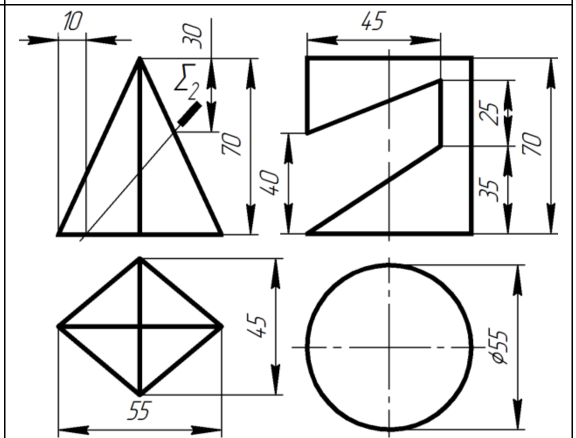
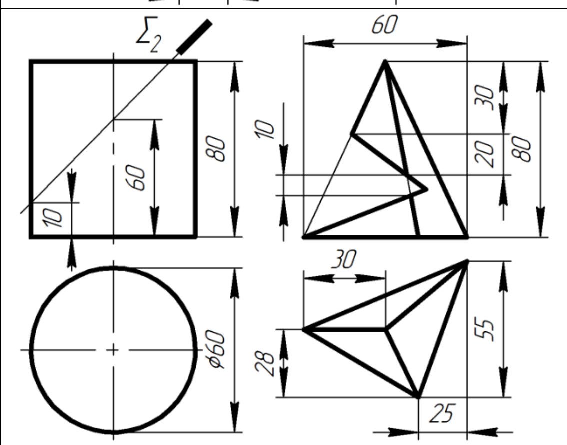
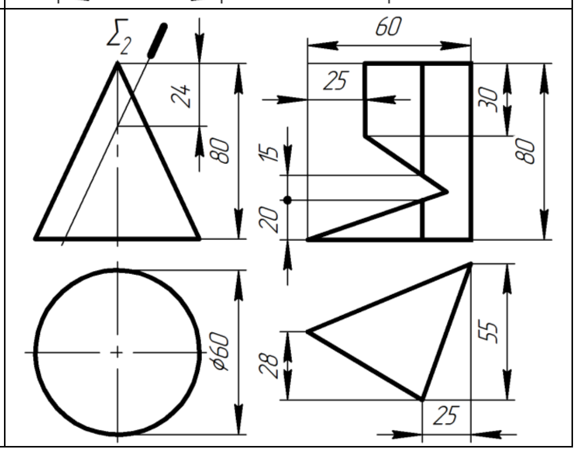


Вариант 15



Вариант 16

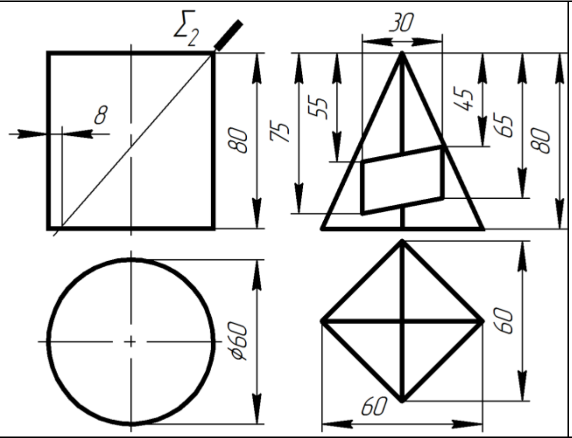


Задание 05. Сечение поверхностей плоскостями.			
Начертить три проекции тела с вырезом и усеченной поверхности, определить натуральную величину сечения способом вращения			
Вариант 17		Вариант 18	
Вариант 19		Вариант 20	
Вариант 21		Вариант 22	
Вариант 23		Вариант 24	

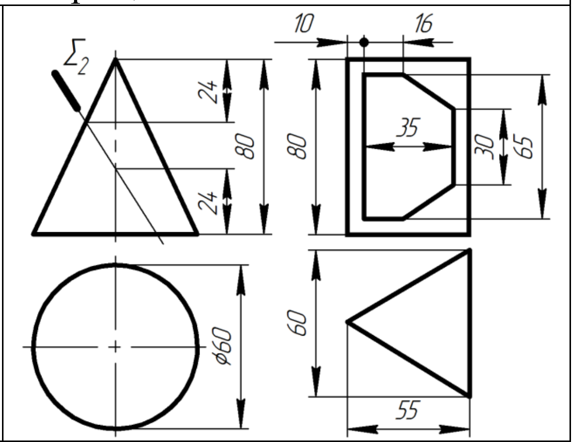
Задание 05. Сечение поверхностей плоскостями.

Начертить три проекции тела с вырезом и усеченной поверхности, определить натуральную величину сечения способом вращения

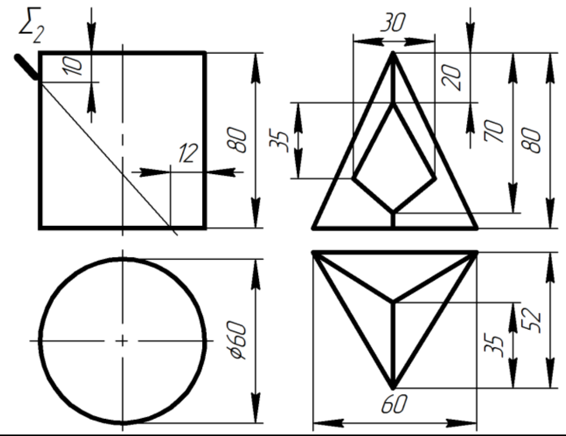
Вариант 25



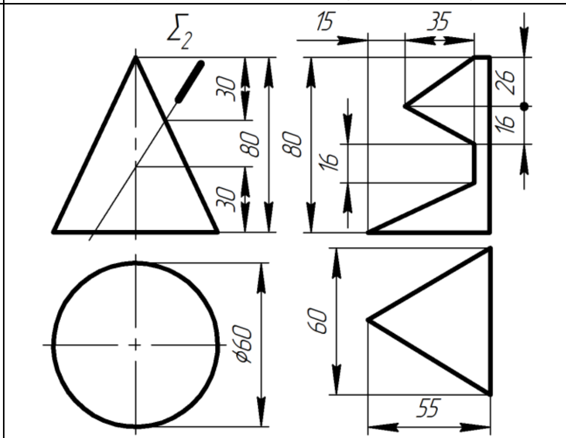
Вариант 26



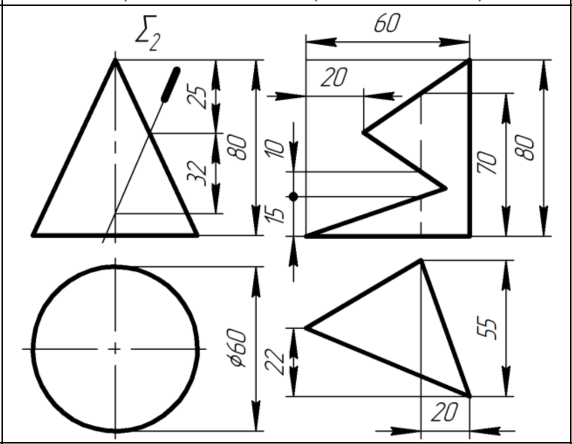
Вариант 27



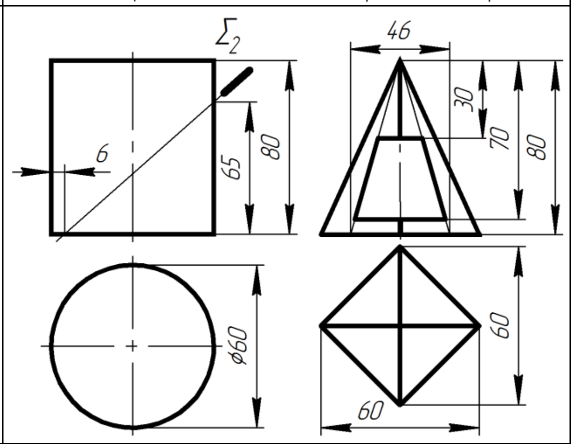
Вариант 28



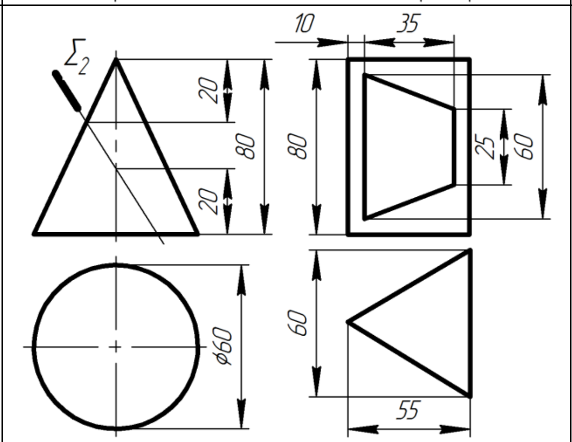
Вариант 29



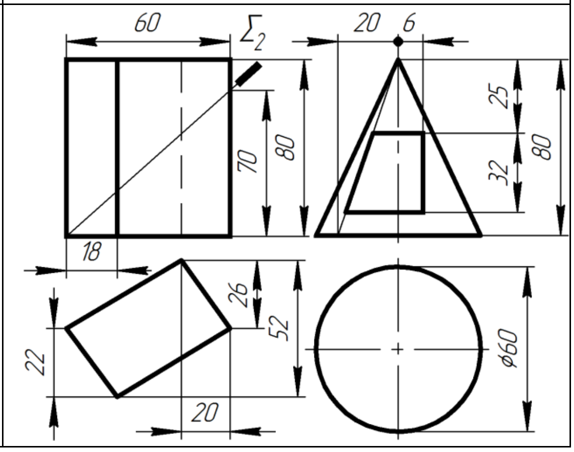
Вариант 30



Вариант 31



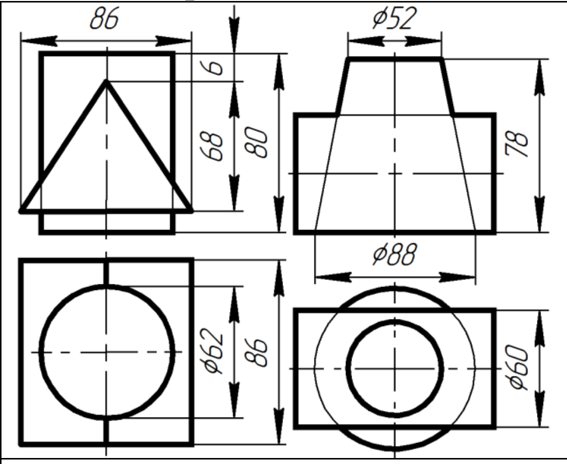
Вариант 32



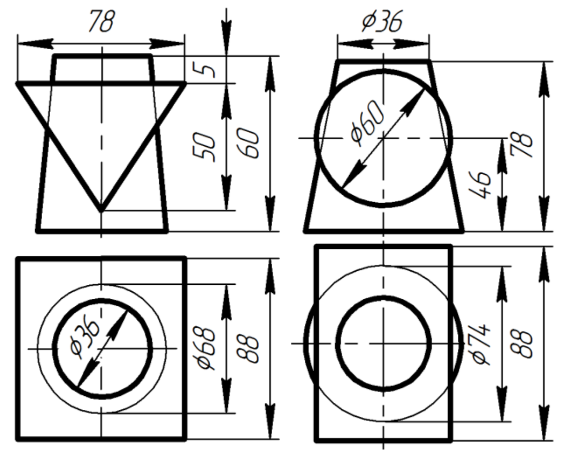
Задание 06. Пересечение поверхностей.

Начертить три проекции пересекающихся поверхностей, определить видимость линии пересечения

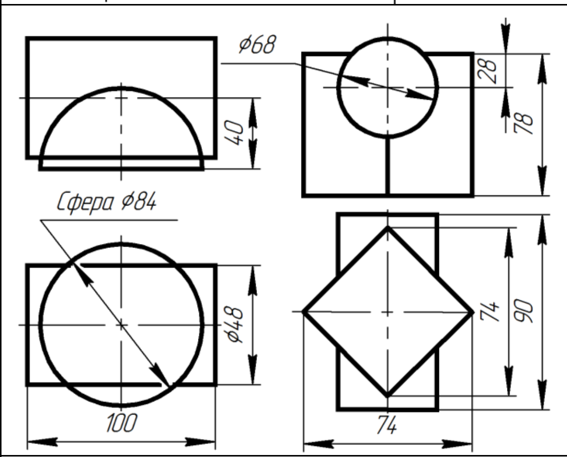
Вариант 1



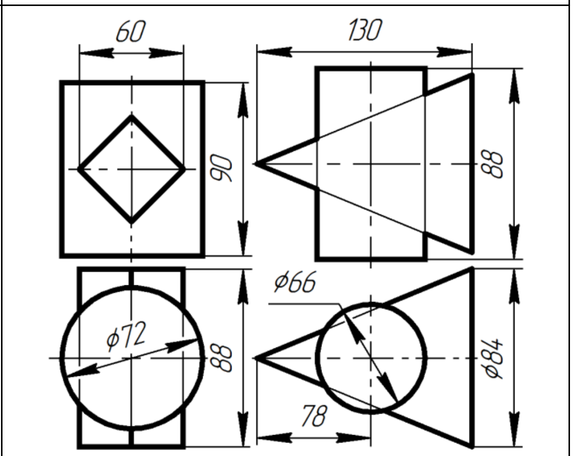
Вариант 2



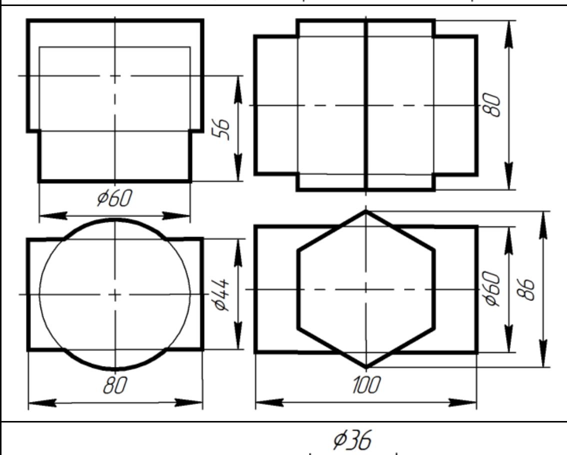
Вариант 3



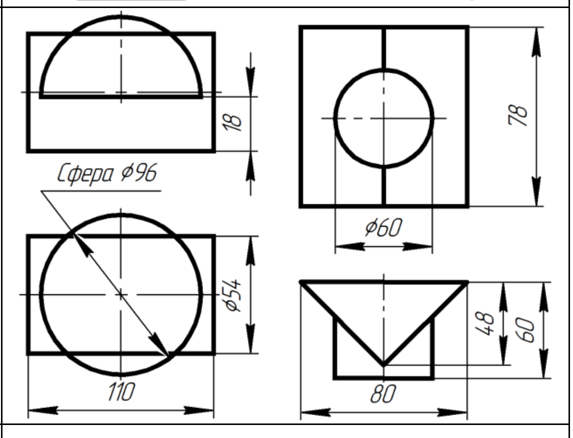
Вариант 4



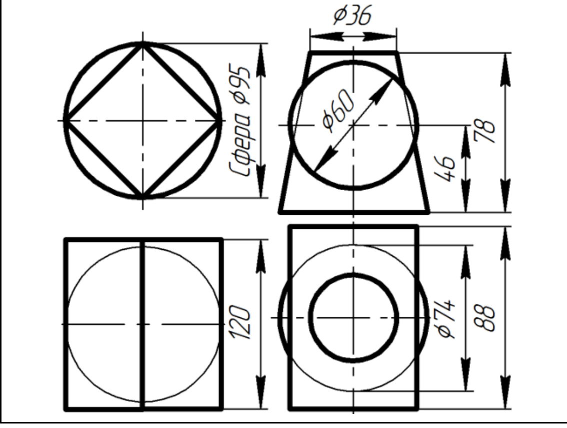
Вариант 5



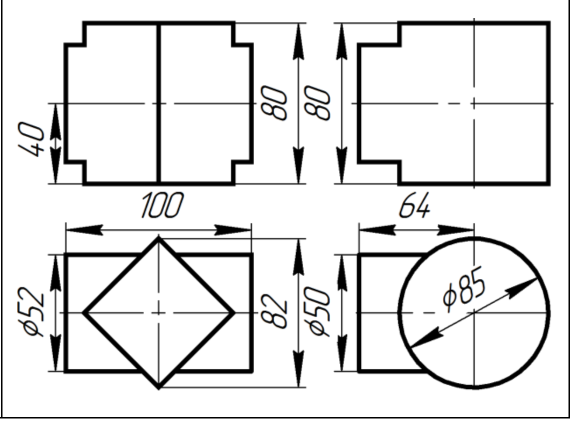
Вариант 6



Вариант 7

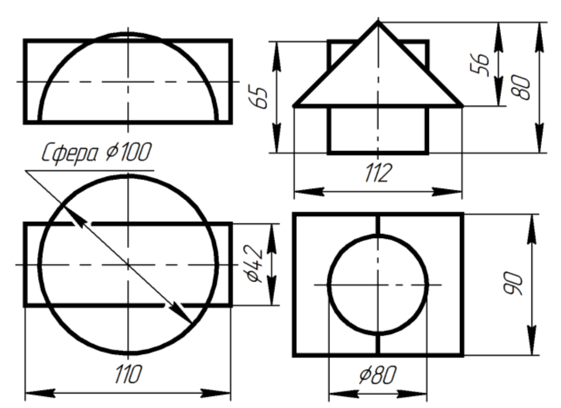
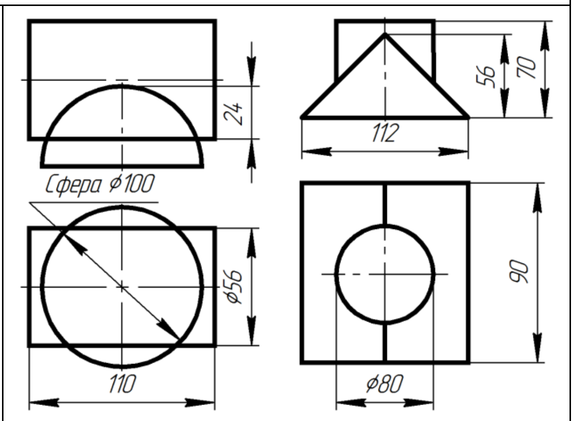
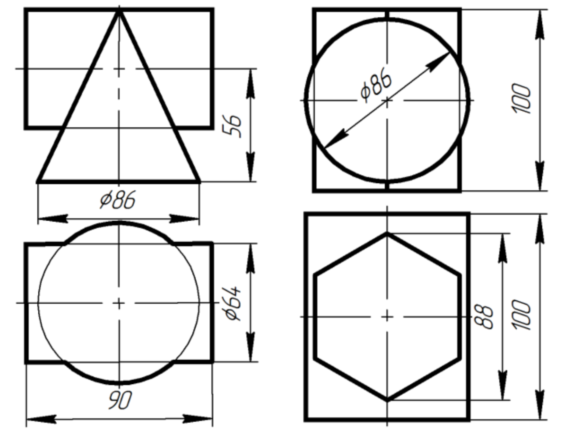
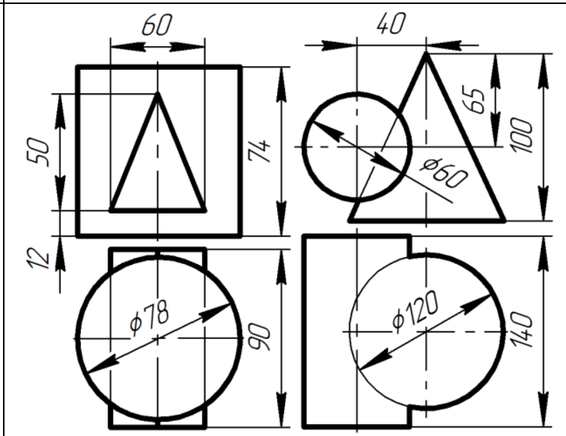
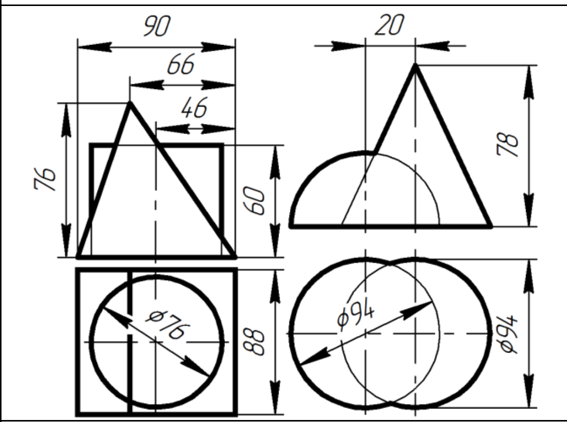
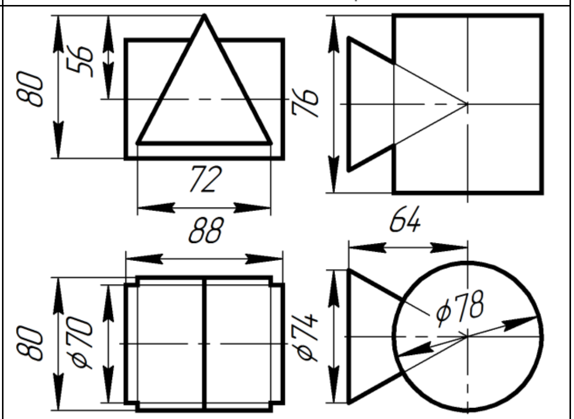
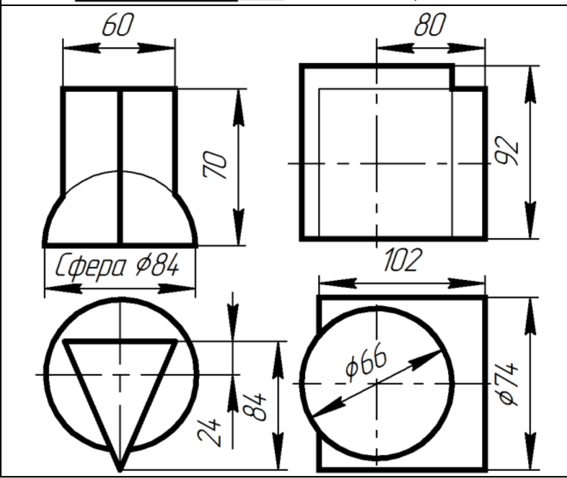
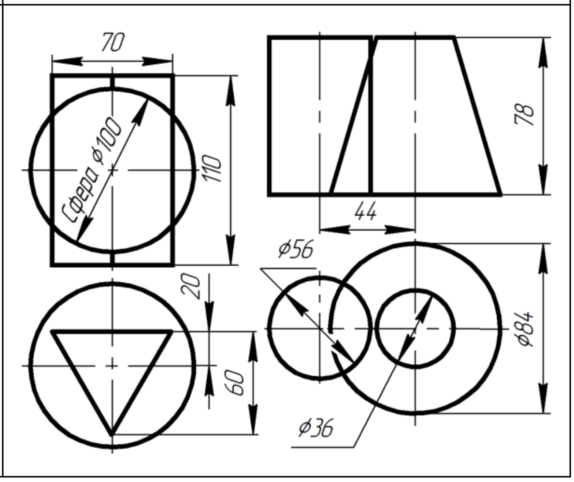


Вариант 8



Задание 06. Пересечение поверхностей.

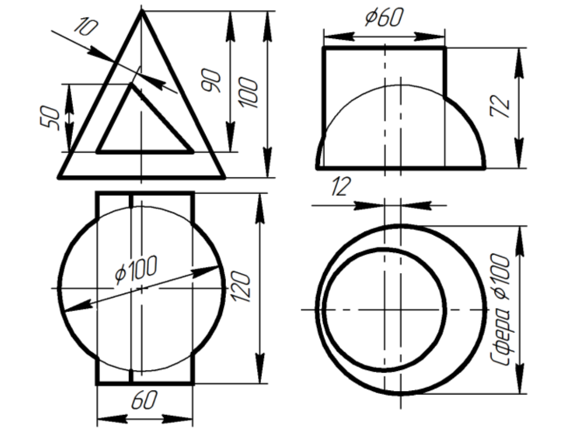
Начертить три проекции пересекающихся поверхностей, определить видимость линии пересечения

Вариант 9		Вариант 10	
Вариант 11		Вариант 12	
Вариант 13		Вариант 14	
Вариант 15		Вариант 16	

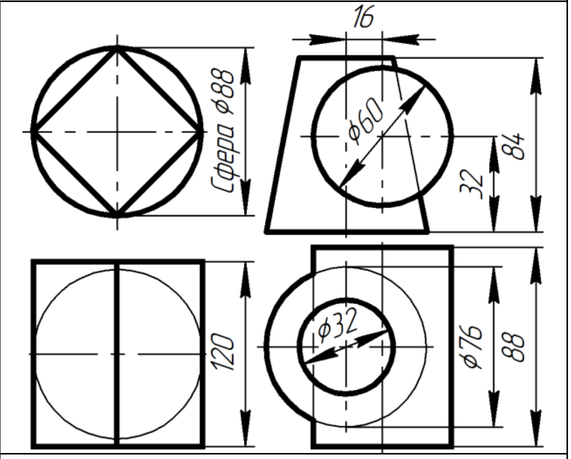
Задание 06. Пересечение поверхностей.

Начертить три проекции пересекающихся поверхностей, определить видимость линии пересечения

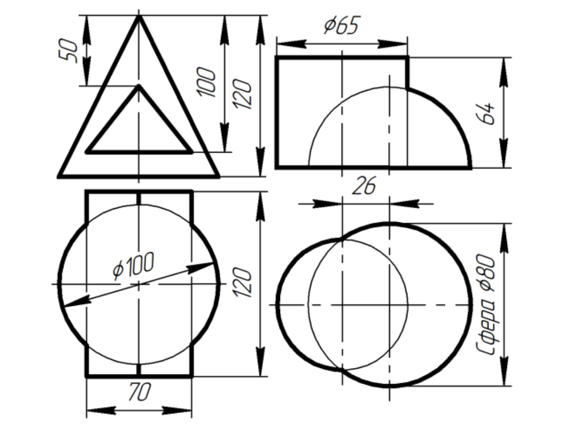
Вариант 17



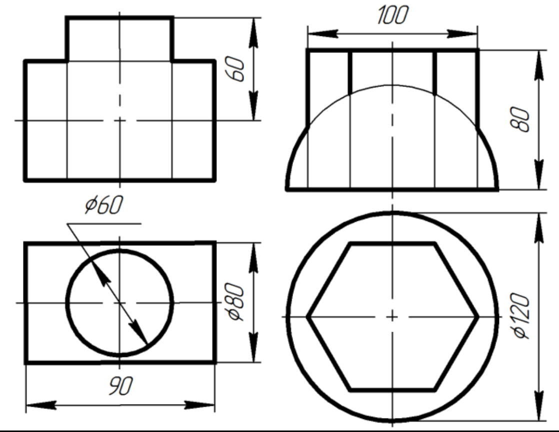
Вариант 18



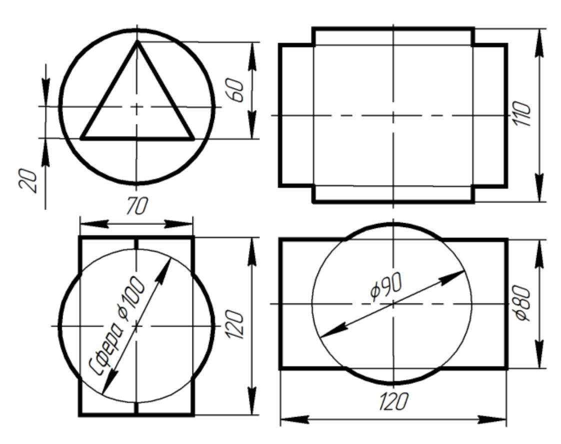
Вариант 19



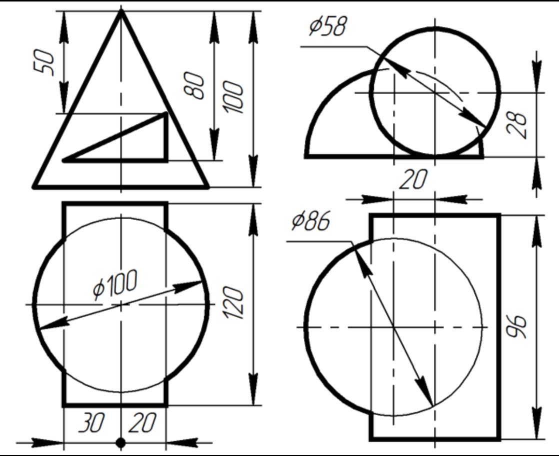
Вариант 20



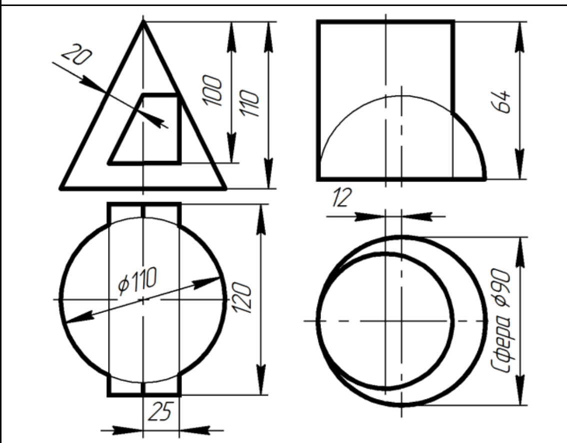
Вариант 21



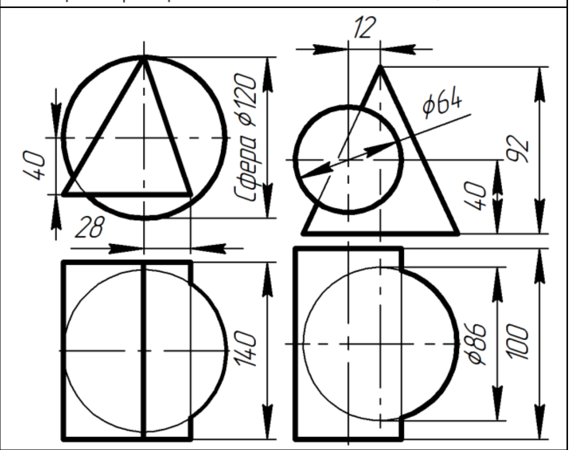
Вариант 22



Вариант 23



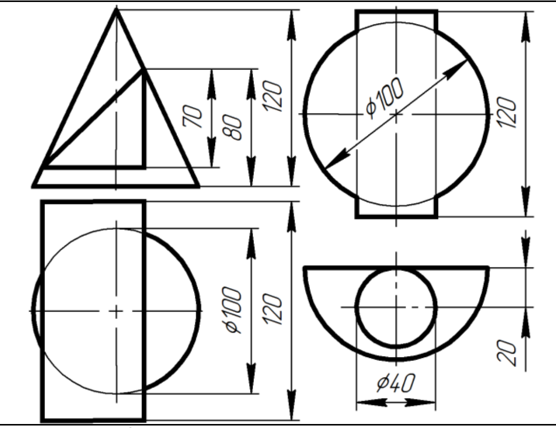
Вариант 24



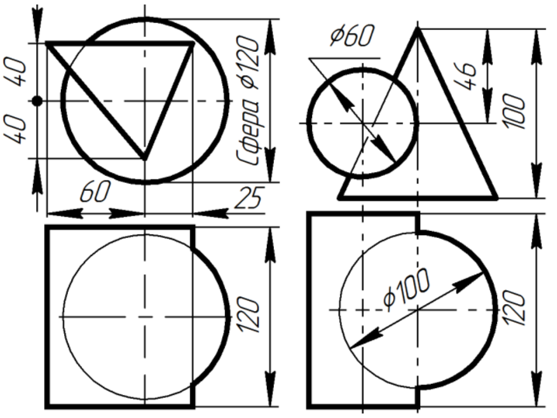
Задание 06. Пересечение поверхностей.

Начертить три проекции пересекающихся поверхностей, определить видимость линии пересечения

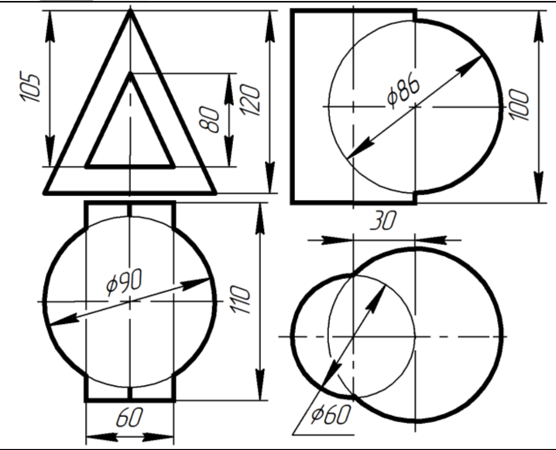
Вариант 25



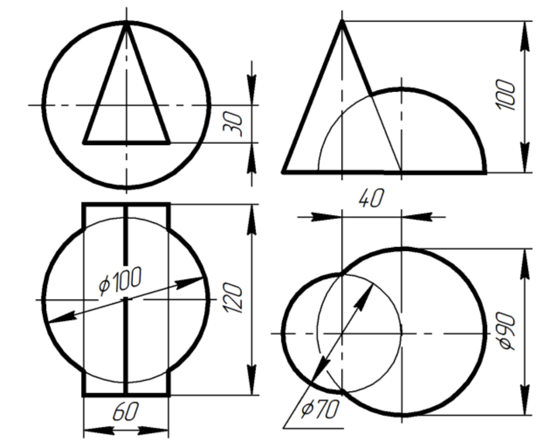
Вариант 26



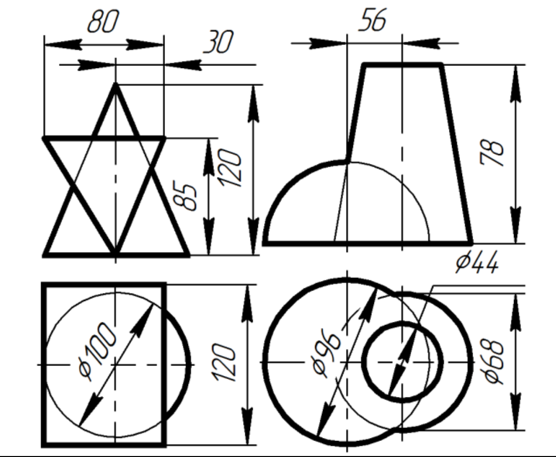
Вариант 27



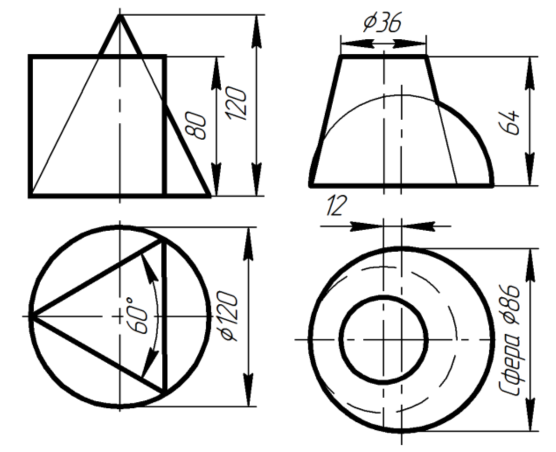
Вариант 28



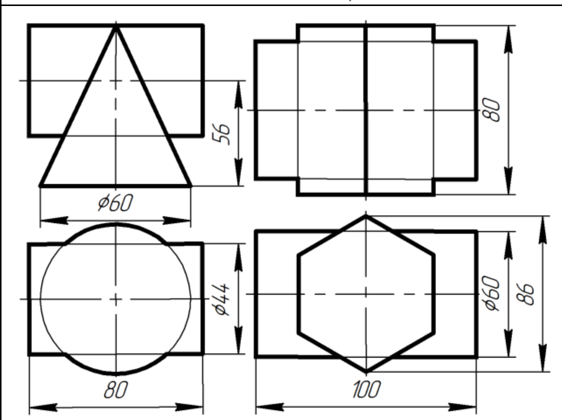
Вариант 29



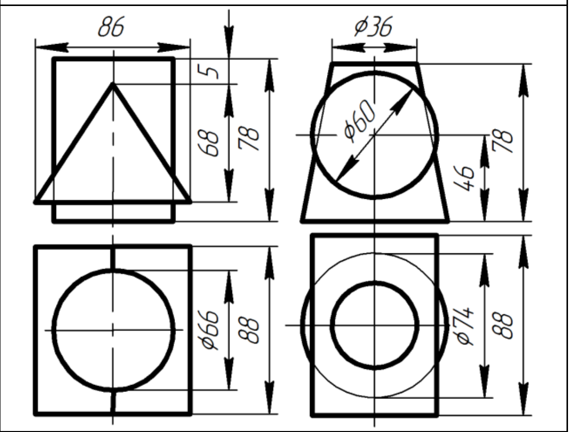
Вариант 30



Вариант 31



Вариант 32



Приложение Б (справочное)

Примеры выполнения графических работ

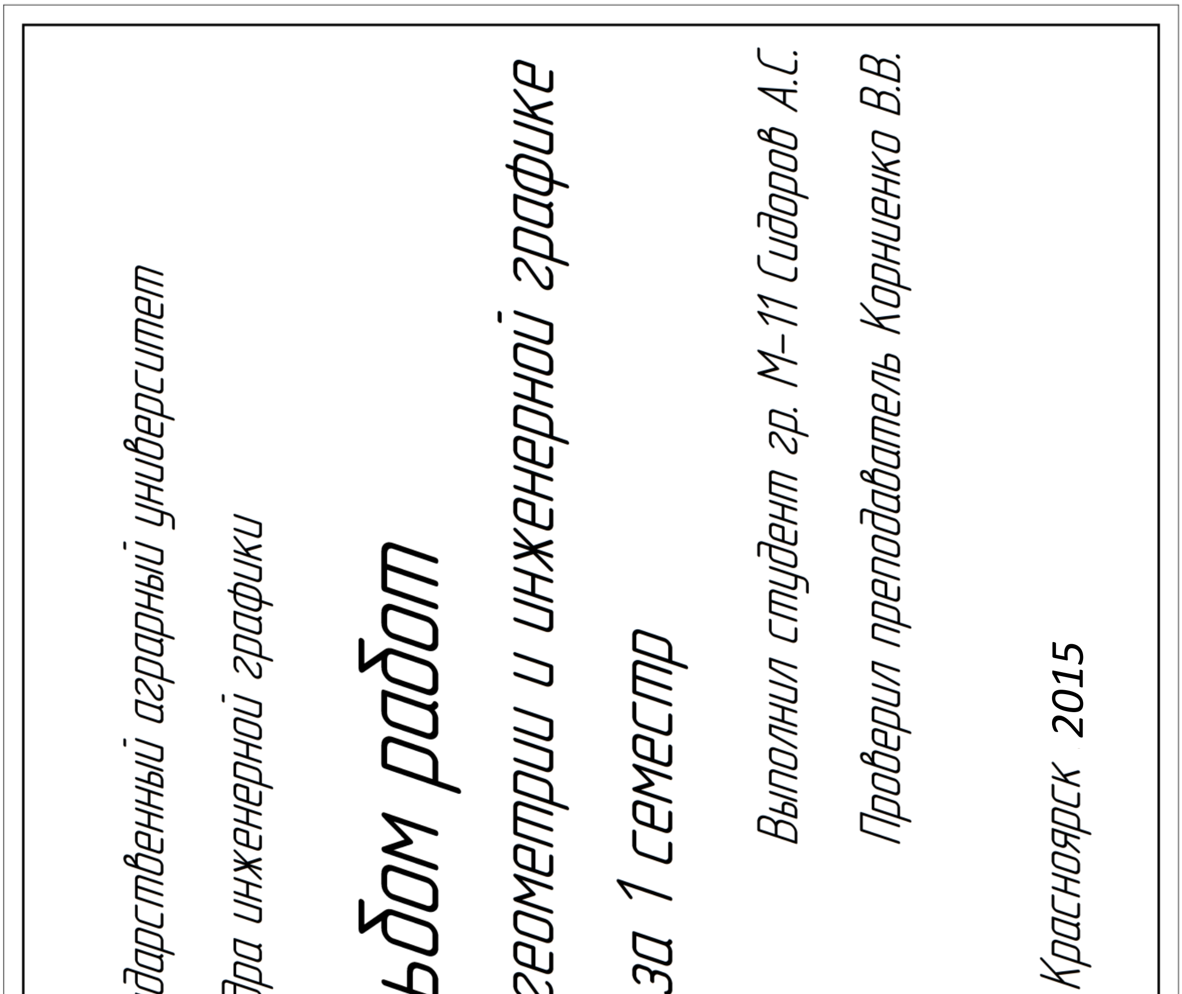


Рисунок Б.1 – Пример выполнения титульного листа к альбому графических работ

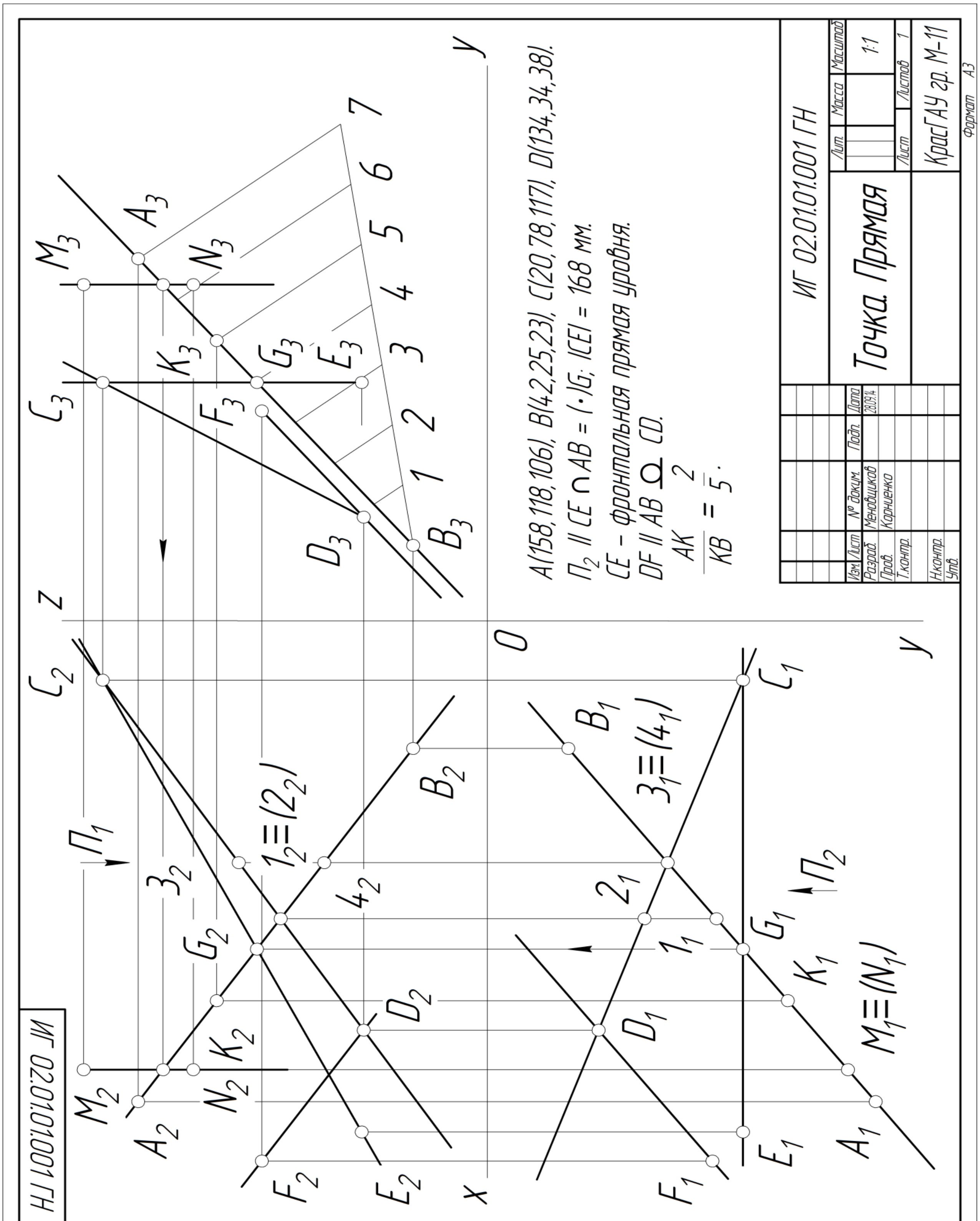


Рисунок Б.2 – Пример выполнения чертежа задания 01 «Точка. Прямая»

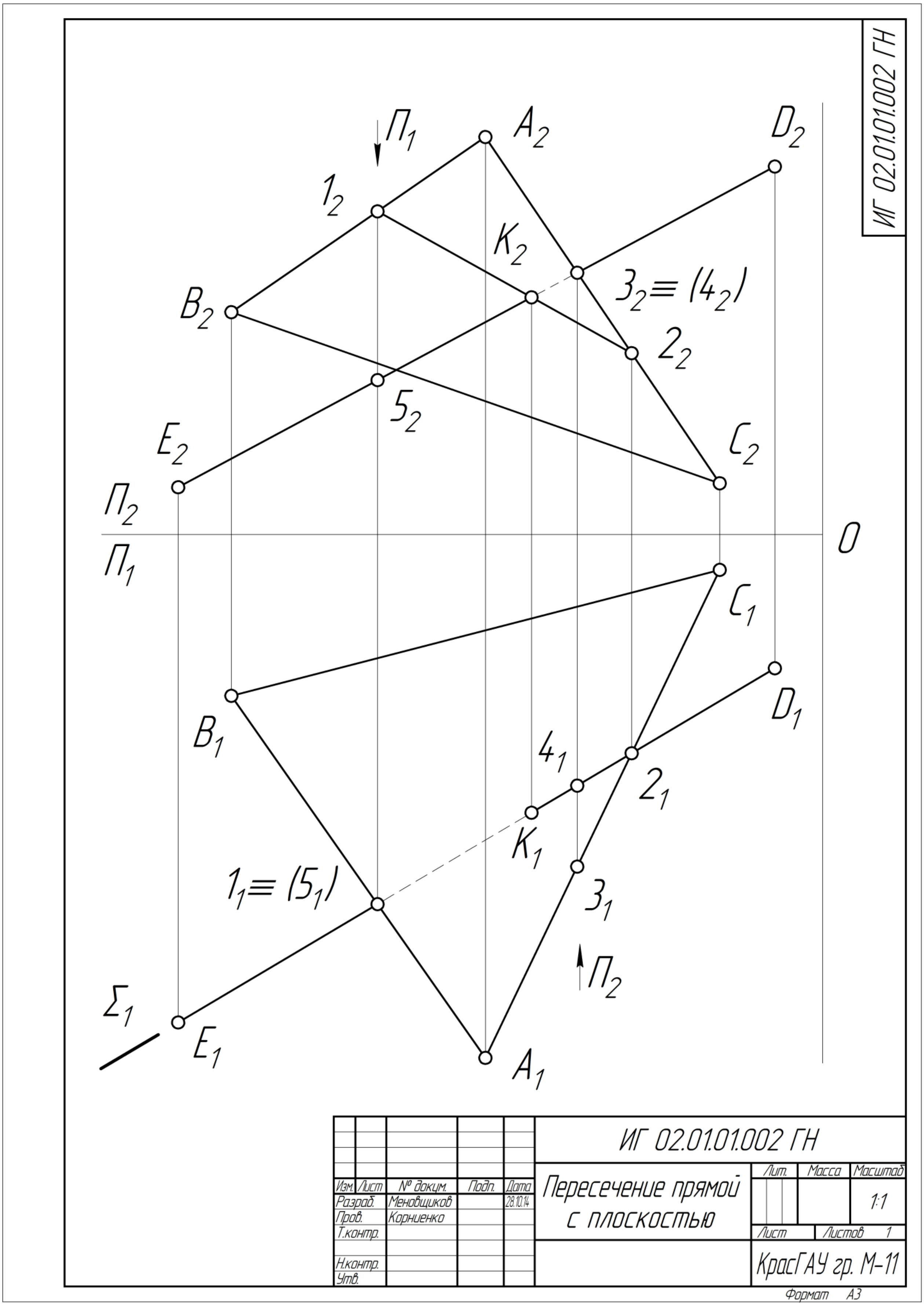


Рисунок Б.3 – Пример выполнения чертежа задания 02 «Пересечение прямой с плоскостью»

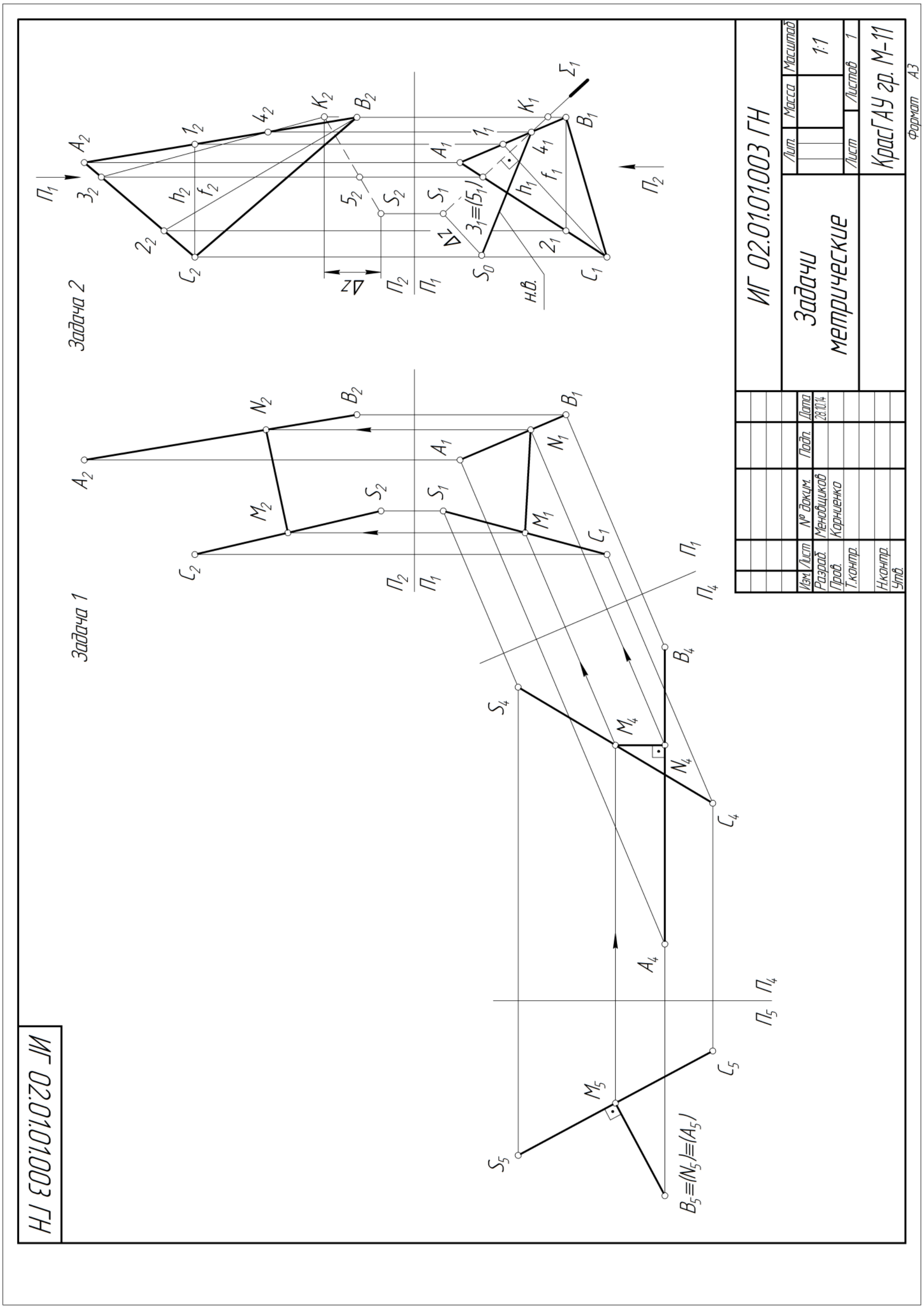


Рисунок Б.4 – Пример выполнения чертежа задания 03 «Задачи метрические»

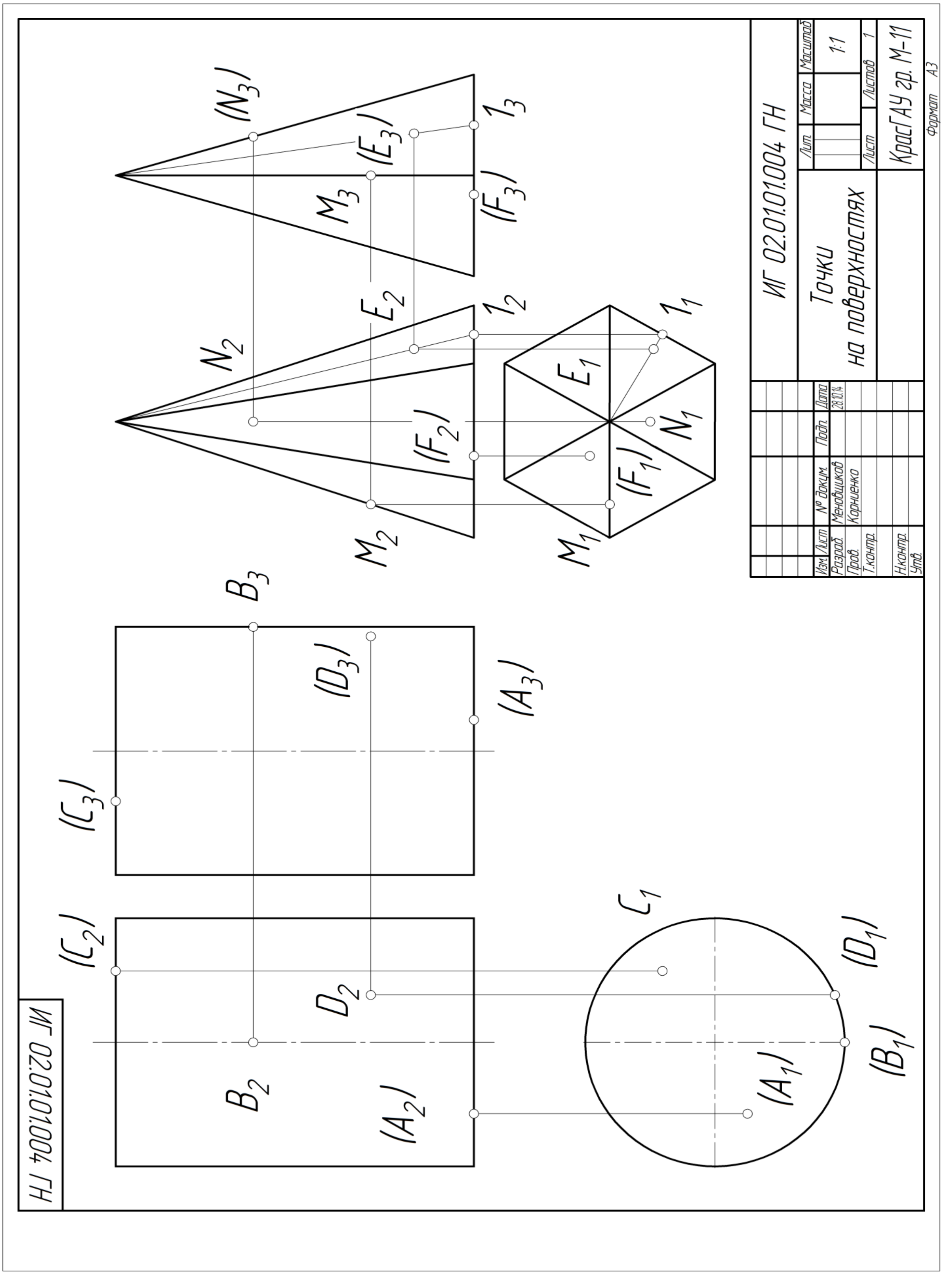


Рисунок Б.5 – Пример выполнения чертежа задания 04 «Точки на поверхностях»

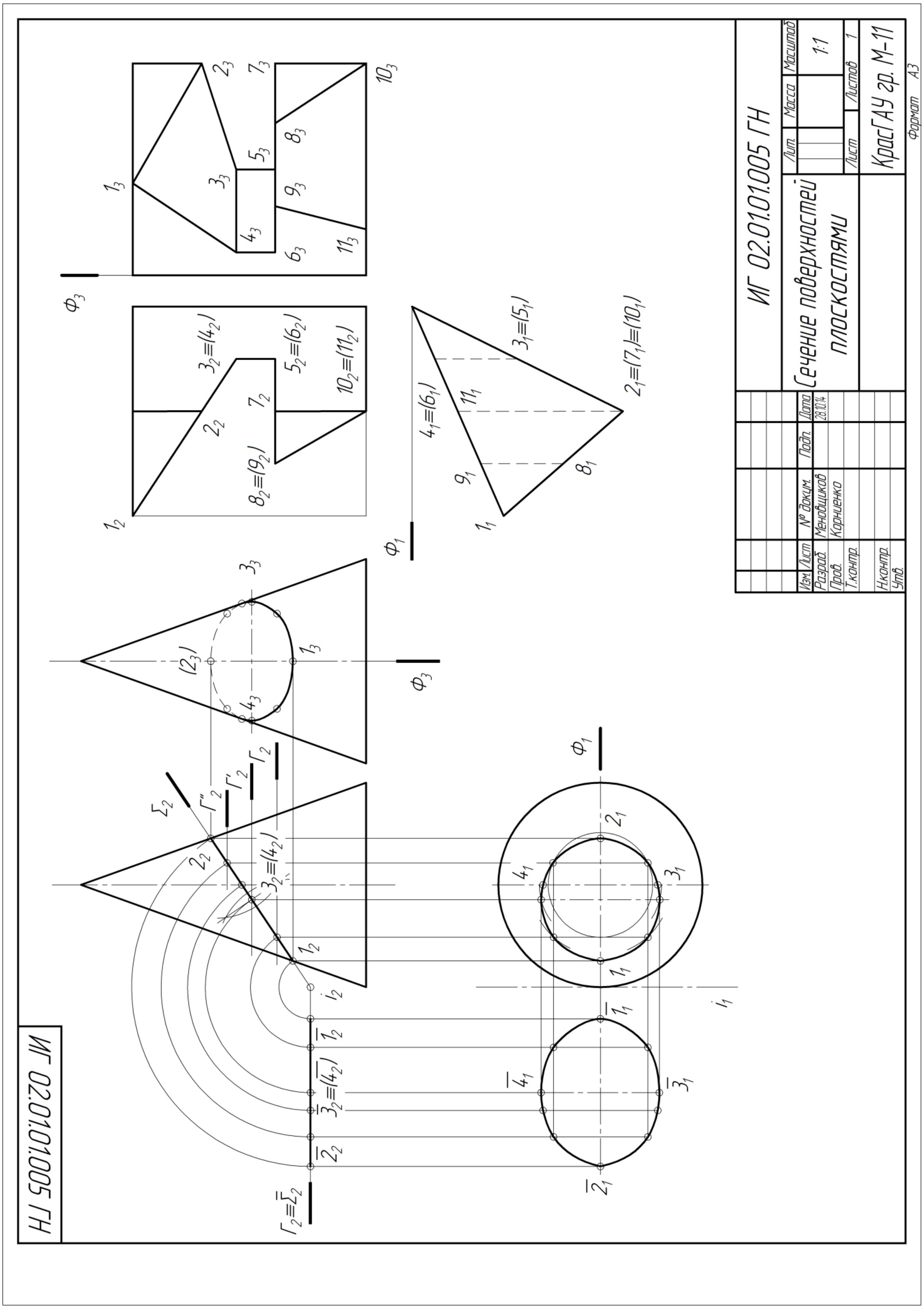


Рисунок Б.6 – Пример выполнения чертежа задания 05
«Сечение поверхностей плоскостями»

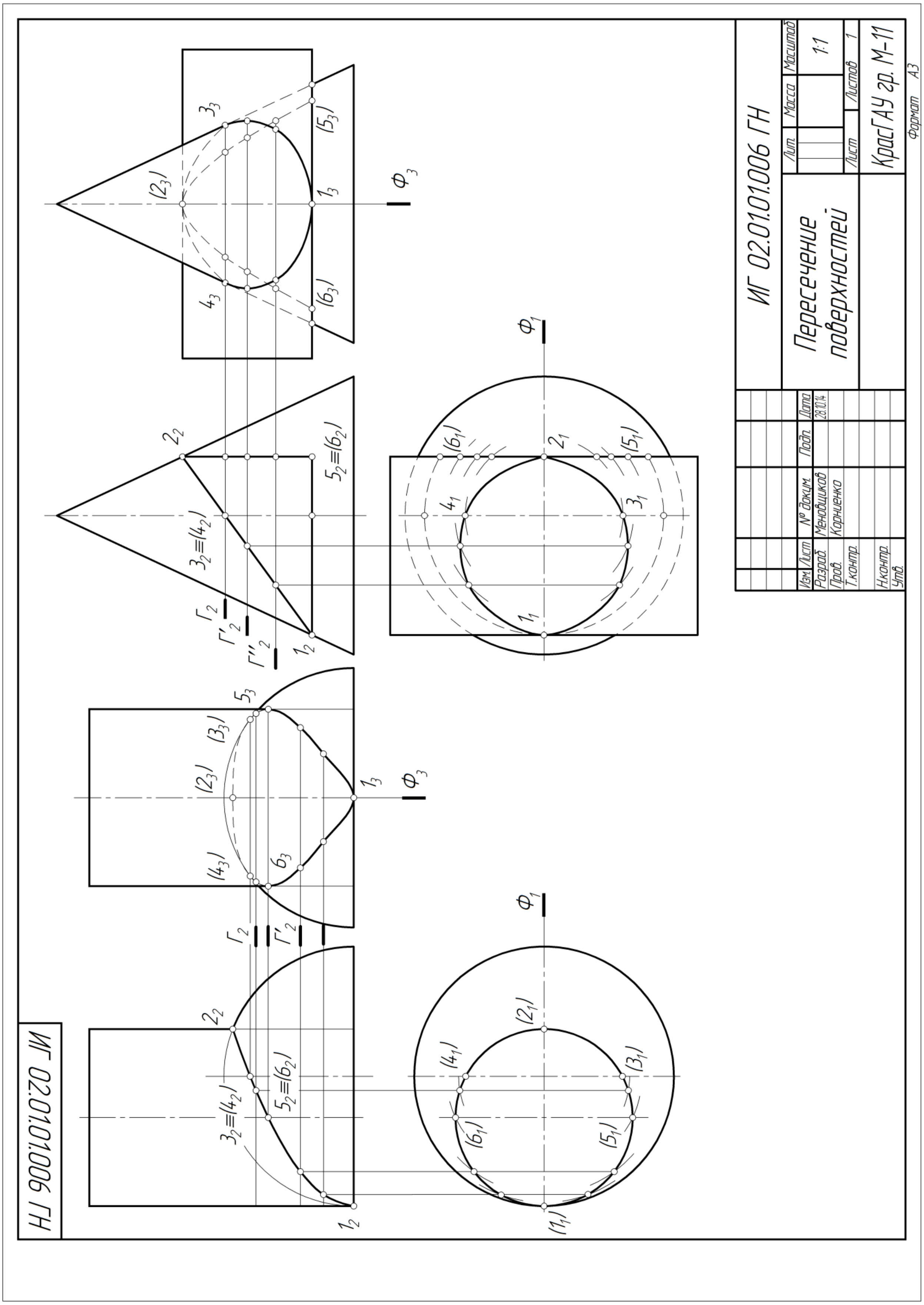


Рисунок Б.7 – Пример выполнения чертежа задания 06
«Пересечение поверхностей»

Приложение В (справочное)

Обозначения и символика начертательной геометрии

1. Геометрическая фигура – *Ф*.

2. Точки – прописные буквы латинского алфавита или арабские цифры: *A, B, C, D*, … или *1, 2, 3, 4*, … .

3. Линии, произвольно расположенные в пространстве по отношению к плоскостям проекций, – строчные буквы латинского алфавита: *a, b, c, d*, … .

Линии уровня: *h* – горизонталь; *f* – фронталь; *p* – профильная прямая линия уровня.

Кроме того, прямые линии обозначаются так:

(*AB*) – прямая, проходящая через точки *A* и *B*;

[*AB*) – луч с началом в точке *A*;

[*AB*] – отрезок прямой, ограниченный точками *A* и *B*;

|*AB*| – расстояние от точки *A* до точки *B* (длина отрезка);

|*Aa*| – расстояние от точки *A* до прямой линии *a;*

|*AФ*| – расстояние от точки *A* до плоскости *Ф*;

|*ΣΩ*| – расстояние между плоскостями *Σ* и *Ω*.

4. Углы обозначаются строчными буквами греческого алфавита – α, β, γ, … , ∠α, ∠β, ∠γ, а также ∠*ABC* – угол с вершиной в точке *B*.

5. Поверхности обозначаются прописными буквами греческого алфавита: *Δ, Θ, Σ, Ω*, … . Не рекомендуется для обозначения поверхностей применять буквы, начертания которых сходны с буквами латинского алфавита, например: *A, B, H, M*, … .

Для обозначения способа задания поверхности указывают геометрические элементы, которыми она определяется, например: *Ω* (*a*||*b*) – плоскость *Ω* задана двумя параллельными прямыми *a* и *b*; *Ω* (*g*, *i*) – поверхность определяется образующей *g* и осью вращения *i*.

Плоскости уровня имеют отдельные обозначения: *Г* – горизонтальная; *Ф* – фронтальная; *Ψ* – профильная плоскость уровня.

6. Центр и направление проецирования обозначаются *S* и $\vec{s}$ соответственно.

Плоскости проекций обозначаются греческой буквой *П* (π), причем: $П_1$, π_1 – горизонтальная плоскость проекций *x0y*;

$П_2$, π_2 – фронтальная плоскость проекций *x0z*;

$П_3$, π_3 – профильная плоскость проекций *y0z*.

При замене плоскостей проекций или введении новых плоскостей их обозначают как π_4, π_5 и т. д.

Оси проекций: x – ось абсцисс; y – ось ординат; z – ось аппликат.

7. Координаты точек A, B, … обозначаются как x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B, … .

8. Проекции точек, линий, поверхностей, любой геометрической фигуры обозначают теми же буквами (или цифрами), что и оригинал, с добавлением нижнего индекса, соответствующего плоскости проекции, на которой они получены:

A_1, B_1, C_1, … – горизонтальные проекции точек;

A_2, B_2, C_2, … – фронтальные проекции точек;

A_n, B_n, C_n, … – проекции точек на дополнительную (n-ю) плоскость проекций;

a_1, b_1, c_1, … – горизонтальные проекции линий;

a_2, b_2, c_2, … – фронтальные проекции линий;

a_n, b_n, c_n, … – проекции линий на дополнительную (n-ю) плоскость проекций.

9. Символы, обозначающие отношения между геометрическими фигурами, следующие:

$=$ – результат действия, знак равенства, например: $|AB| = |CD|$ – длины отрезков AB и CD равны;

$\equiv$ – совпадение, тождество, например: $A_1 \equiv B_1$ – горизонтальные проекции точек A и B совпадают;

$\cong$ – конгруэнтность (отношение эквивалентности на множестве геометрических фигур);

$\perp$ – перпендикулярность;

$\parallel$ – параллельность;

$/$ – скрещивание;

$\times$ или $\cap$ – пересечение;

$\Rightarrow$ – импликация (логическое следствие). Например, $a \Rightarrow b$ означает, что «если есть a, то есть и b, или из a следует b»;

$\in$, $\ni$ – принадлежность: например, $A \in a$ – точка A принадлежит прямой a; $A \ni a$ – прямая a проходит через точку A;

∞ – подобие;

$\supset$, $\subset$ – включение (содержит в себе), например: $\Omega \supset a$ – плоскость Ω содержит в себе прямую a; $a \subset \Omega$ – прямая проходит через плоскость Ω;

$\cup$ – объединение множеств. Так, $ABCD = [AB] \cup [BC] \cup [CD]$ – ломаная $ABCD$ состоит из отрезков AB, BC, CD;

$\not\subset$, $\notin$, $\neq$ – отрицание. Например, $A \notin a$ – точка A не принадлежит прямой a, или прямая a не проходит через точку A;

$\wedge$ – конъюнкция предложений, соответствует союзу «*и*»;

$\vee$ – дизъюнкция предложений, соответствует союзу «*или*»;

$\forall$ – квантор общности, читается так: «для всех, для любого». Выражение $\forall(x)\ P(x)$ означает – «для всякого x имеет место свойство $P(x)$»;

$\exists$ – квантор существования, читается так: «существует». Выражение $\exists(x)\ P(x)$ означает – «существует x, обладающее свойством $P(x)$»;

$\exists^1$ – квантор единственности существования, читается так: «существует единственное (-я, -й) … ». Выражение $(\exists^1 x)\ (Px)$ означает: существует единственное (только одно) x, обладающее свойством Px;

$(\overline{Px})$ – отрицание высказывания (Px). Например, $a \,⎛\, b \Rightarrow (\overline{\exists\alpha})\ (\Omega \supset a, b)$. Если прямые a и b скрещиваются, то не существует плоскости Ω, которая содержит их;

\ – отрицание знака.

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие

Корниенко Владимир Владимирович

Редактор Крицына И.Н.

Санитарно-эпидемиологическое заключение № 24.49.04.953.П. 000381.09.03 от 25.09.2003 г.
Подписано в печать 15.01.2015. Формат 60х84/16. Бумага тип. № 1.
Печать – ризограф. Усл. печ. л. 14,25. Тираж 110 экз. Заказ № 14
Издательство Красноярского государственного аграрного университета
660017, Красноярск, ул. Ленина, 117