Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Красноярский государственный аграрный университет»
Ачинский филиал

В. И. Иванов

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Методические указания

Красноярск 2016

Рецензент

С.В. Александрова, канд. биол. наук, доц. каф.
«Высшая математика и компьютерное моделирование»
Красноярского ГАУ

Иванов, В.И.

Комплексные числа: метод. указания / В.И. Иванов; Краснояр. гос. аграр. ун-т, Ачинский ф-л. – Красноярск, 2016. – 23 с.

Подготовлены в соответствии с рабочей программой дисциплины «Математика». Содержат краткое изложение основных вопросов теории, примеры применения теории для выполнения заданий.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 35.03.06 «Агроинженерия» и 38.03.02 «Менеджмент» очной и заочной форм обучения.

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Красноярского государственного аграрного университета

© Иванов В.И., 2016
© ФГБОУ ВО «Красноярский государственный аграрный университет», Ачинский ф-л, 2016

ВВЕДЕНИЕ

Понятие о комплексных числах появилось в середине XVI века в связи с попытками математиков того времени получить формулу, выражающую корни кубического уравнения через его коэффициенты.

В 1545 г. была издана книга «Великое искусство, или об алгебраических преобразованиях», в которой Джероламо Кардано (**Girolamo Cardano,** 1501–1576, итальянский математик, инженер, философ, медик и астролог) опубликовал формулу для корней кубического уравнения, открытую его современниками Сципионом дель Ферро (**Scipione del Ferro**, 1465–1526, итальянский математик) и Никколо Тартальей (**Niccolò Fontana Tartaglia**, 1500–1557, итальянский математик). Обнаружилось, что в случае, когда кубическое уравнение имеет три действительных корня, в формуле Кардано появляются квадратные корни из отрицательных чисел. В «Алгебре» Раффаэлле Бомбелли (**Bombelli**, около 1530–1572, итальянский математик и инженер), вышедшей в 1572 г., было показано, что вычисление выражений, содержащих квадратные корни из отрицательных чисел, по определённым правилам позволяет получать достоверные результаты. Квадратные корни из отрицательных чисел назвали мнимыми числами. Название «мнимые числа» ввел в 1637 году французский математик и философ Рене Декарт (**Ren Descartes**, 1596–1650, французский математик, философ, физик и физиолог).

В течение XVII века продолжалось обсуждение арифметической природы мнимых чисел и возможности дать им геометрическое обоснование. Постепенно развивалась техника операций над мнимыми числами. На рубеже XVII и XVIII веков была построена общая теория корней n-х степеней сначала из отрицательных, а затем из любых комплексных чисел, основанная на формуле английского математика Абрахама де Муавра (**Abraham de Moivre**, 1667–1754, английский математик французского происхождения): $z^n = r^n(\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi)$. С помощью этой формулы были выведены формулы для косинусов и синусов кратных дуг. В 1748 году Леонард Эйлер (**Leonhard Euler**, 1707–1783, швейцарец по происхождению, математик, механик и физик) вывел замечательную формулу $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$, которая связала воедино показательную функцию с тригонометрическими функциями. С помощью формулы Л. Эйлера можно возводить число ***e*** в любую комплексную степень, находить sin и cos от комплексных чисел, вычислять логарифмы комплексных чисел, т. е. строить теорию функций комплексного переменного (ТФКП).

В 1777 году Л. Эйлер предложил использовать первую букву французского слова *imaginaire* (мнимый) для обозначения числа $i = \sqrt{(-1)}$ (мнимой единицы). Этот символ вошел во всеобщее употребление благодаря Карлу Гауссу (**Johann Carl Friedrich Gauß**, 1777–1855, немецкий математик, астроном и физик). Термин «*комплексные числа*» был введен Гауссом в 1831 году. Слово комплекс (от латинского *complexus*) означает связь, сочетание, совокупность понятий, предметов, явлений и т. д., образующих единое целое. На рубеже XVIII и XIX веков К. Гаусс подробно исследовал мнимые числа, дал им геометрическую интерпретацию и доказал основную теорему алгебры, утверждающую, что каждый многочлен, степень которого не меньше единицы, имеет хотя бы один корень, действительный или комплексный.

В конце XVIII века Жозеф Луи Лагранж (**Joseph Louis Lagrange**, 1736–1813, французский математик и механик, член Парижской АН) смог сказать, что математический анализ уже не затрудняют мнимые величины. С помощью мнимых чисел научились выражать решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Такие уравнения встречаются, например, в теории колебаний материальной точки в сопротивляющейся среде. Еще раньше швейцарский математик Я́коб Берну́лли (**Jakob Bernoulli**, 1654–1705, швейцарский математик), применял комплексные числа для решения интегралов.

В настоящее время комплексные числа широко используются в математике, физике и технике; их применение часто упрощает решение самых разных задач.

1. Множество комплексных чисел

Известно, что любое уравнение $ax+b=0$ имеет решение при $a\neq 0$. С другой стороны, квадратное уравнение не всегда имеет решение. Так, уравнение $x^2+1=0$ решения не имеет. А нельзя ли сделать так, чтобы любое квадратное уравнение имело решение? Предположим, что уравнение $x^2+1=0$ имеет решение. Число, которое будет являться решением, обозначим буквой i, т. е. $i^2=-1$ или $i=\sqrt{(-1)}$. Мы должны иметь возможность умножать это число на любое вещественное число. Значит, должны появиться числа вида ib, где b – вещественное число. Для них должна быть возможность сложения с любым вещественным числом. Поэтому должны появиться числа вида $a+ib$.

Определение 1. Числа вида $a+ib$, где a и b – вещественные числа, называются *комплексными числами*.

Посмотрим, какие действия арифметики можно производить с комплексными числами.

1.1. Сложение комплексных чисел

Сложение чисел должно удовлетворять обычным правилам арифметики, поэтому:

$$(a+ib)+(c+id)=a+ib+c+id=a+c+ib+id=(a+c)+i(b+d).$$

Определение 2. Суммой z_1+z_2 двух комплексных чисел $a+ib=z_1$ и $c+id=z_2$ называется комплексное число, определяемое равенством

$$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d). \qquad (1)$$

Сложение комплексных чисел обладает переместительным, или коммутативным, и сочетательным, или ассоциативным, свойствами:

$$\begin{gathered} z_1+z_2=z_2+z_1, \\ (z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3). \end{gathered} \qquad (2)$$

1.2. Вычитание комплексных чисел

Аналогично не сложно определить операцию вычитания для двух комплексных чисел z_1 и z_2:

$$(a+ib)-(c+id)=a+ib-c-id=a-c+ib-id=(a-c)+(ib-id),$$

$$(a+ib)-(c+id)=(a-c)+i(b-d). \qquad (3)$$

1.3. Произведение комплексных чисел

При вычислении произведения двух комплексных чисел $z_1 \cdot z_2$ скобки раскроем привычным способом:

$$(a+ib)\cdot(c+id)=ac+iad+ibc+i^2bd=ac+i(ad+bc)+i^2bd.$$

Поскольку $i^2=-1$, то получим

$$(a+ib)\cdot(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc). \qquad (4)$$

Умножение комплексных чисел обладает переместительным, сочетательным и распределительным, или дистрибутивным, свойствами:

$$\begin{gathered} z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1, \\ (z_1 \cdot z_2)\cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3), \\ z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3. \end{gathered} \qquad (5)$$

1.4. Деление комплексных чисел

Рассмотрим операцию деления $\dfrac{z_1}{z_2}$ при $z_2 \neq 0$. Учтем, что при умножении числителя и знаменателя дроби на одно и то же число величина дроби не меняется:

$$\frac{a+ib}{c+id}=\frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}=\frac{ac+ibc-iad-i^2bd}{c^2-i^2d^2}=$$

$$=\frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

$$\frac{a+ib}{c+id}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}. \qquad (6)$$

Как видно из полученной формулы, деление нельзя выполнить лишь тогда, когда $c=d=0$, но в этом случае делитель $z_2=c+id$ тоже равен нулю. Следовательно, невозможно лишь деление на нуль, что соответствует обычным правилам действий с числами.

Итак, предположив, что есть такое число i, при котором $i^2=-1$, мы расширили множество вещественных чисел. А, может быть, его на самом деле нет? Чтобы исправить этот пробел, используем для построения комплексных чисел уже существующее множество.

Пусть P – множество пар вещественных чисел: $P=\{\ (a,b)\ |\ a,b\in R\}$. На этом множестве определим операции:

1) сложения $(a,b)+(c,d)=(a+c,\ b+d);$

2) вычитания $(a,b)-(c,d)=(a-c,\ b-d);$

3) умножения $(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,\ bc+ad);$

4) деления $\dfrac{(a,b)}{(c,d)}=\left(\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2},\ \dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\right).$

Очевидно, что комплексное число $a+ib$ – просто другая форма записи пары вещественных чисел *(a, b)*, где вместо запятой стоит «+», а второй элемент пары выделяется умножением на букву i. В новой форме записи вещественные числа – это пары *(a, 0)*; числу i соответствует пара *(0, 1)*; сложение, вычитание, умножение и деление *пар чисел* и *комплексных чисел* происходят по одинаковым правилам. То есть *комплексные числа* – это реально существующее множество.

Однако в математике традиционно используется запись комплексного числа z в виде $a+ib$. При этом принято считать, что

$$a+i\cdot 0=a, \quad 0+i\cdot b=ib, \quad 0+i\cdot 0=0, \quad i\cdot 1=i.$$

Можно проверить, что множество комплексных чисел образует поле. В нем обратным элементом к комплексному числу $a+ib$ служит результат деления **1** на $a+ib$:

$$\frac{1}{a+ib}=\frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)}=\frac{a-ib}{a^2-i^2b^2}=\frac{a-ib}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}+i\frac{-b}{a^2+b^2}.$$

Это поле называется полем комплексных чисел и обозначается С.

Число $i=\sqrt{(-1)}$ называется мнимой единицей, числа ib – мнимыми числами. Если $z=a+ib$, то число a называется вещественной частью комплексного числа и обозначается $\operatorname{Re} z$, число b называется мнимой частью и обозначается $\operatorname{Im} z$: $a=\operatorname{Re} z$, $b=\operatorname{Im} z$. Число $(a-ib)$ называется сопряженным числу z и обозначается $\bar{z}$, т. е. $\bar{z}=\overline{a+ib}=a-ib$.

Примечание 1. В электротехнике, где буква i обозначает ток, мнимую единицу обозначают буквой j.

Если операции сложения, вычитания и умножения комплексных чисел соответствуют обычным правилам раскрытия скобок, то для выполнения деления нужно или запомнить формулу (6), или каждый раз при выполнении деления умножать числитель и знаменатель дроби на число, сопряженное знаменателю.

Пример 1. Вычислить z_1+z_2, z_1-z_2, $z_1\cdot z_2$ и $\dfrac{z_1}{z_2}$,

если $z_1=2-3i$ и $z_2=1+4i$.

Решение:

$z_1+z_2=(2-3i)+(1+4i)=2-3i+1+4i=(2+1)+(-3+4)i=3+i$,

$z_1-z_2=(2-3i)\text{-}(1+4i)=2\text{-}3i-1-4i=2-1-3i-4i=1-7i$,

$z_1\cdot z_2=(2-3i)\cdot(1+4i)=2+8i-3i-12i^2=2+5i+12=14+5i$,

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(1+4i)\cdot(2+3i)}{(2-3i)\cdot(2+3i)}=\frac{2+3i+8i+12i^2}{4-9i^2}=\frac{2+11i-12}{4+9}=-\frac{10}{13}+\frac{11}{13}i.$$

Вычислим еще для интереса $\dfrac{1}{i}$: $\quad \dfrac{1}{i}=\dfrac{1\cdot(-i)}{i\cdot(-i)}=\dfrac{-i}{1}=-i$.

2. Решение квадратных уравнений с вещественными коэффициентами

Вернемся к задаче, поставленной в разделе 1: можно ли в поле комплексных чисел решить любое квадратное уравнение (пока только с вещественными коэффициентами)? Для квадратного уравнения $x^2+1=0$ мы одно решение знаем: $x_1=i$. Поскольку $(-i)^2=i^2=-1$, то появляется и второе решение: $x_2=-i$.

Примечание 2. Числа i и $-i$ в поле комплексных чисел абсолютно равноправны. Если бы число $-i$ обозначить i^* и построить с этим обозначением новое поле комплексных чисел, то оно будет в точности таким же, как и исходное.

Рассмотрим уравнение $x^2+c=0$, где c – вещественное положительное число. Его корнями являются $x_1=\sqrt{c}\cdot i$ и $x_2=-\sqrt{c}\cdot i$, где $\sqrt{c}$ – обычный арифметический корень.

Решим уравнение $ax^2+bx+c=0$, где a,b,c – вещественные числа, $a\neq 0$ и дискриминант D отрицателен: $D=b^2-4ac<0$. Для этого выделим в правой части полный квадрат:

$$a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}=0,$$

$$(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}=0.$$

Если $x+\dfrac{b}{2a}$ обозначить как y, а $\dfrac{4ac-b^2}{4a^2}$ обозначить за d, то получим уравнение предыдущего типа $y^2+d=0$, его решениями будут

$$y_1=\sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a^2}}\cdot i=\frac{\sqrt{|D|}}{2a}\cdot i \quad \text{и} \quad y_2=-\frac{\sqrt{|D|}}{2a}\cdot i.$$

Поэтому решением уравнения $ax^2+bx+c=0$ являются

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{|D|}\cdot i}{2a}.$$

Итак, если $D<0$, то корни уравнения находятся по формулам

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{|D|}\cdot i}{2a},\quad x_2=\frac{-b+\sqrt{|D|}\cdot i}{2a}. \tag{7}$$

Пример 2. Решить уравнение $x^2+2x+5=0$.

Решение. Видим, что $a=1$, $b=2$, $c=5$, поэтому дискриминант $D=2^2-4\cdot1\cdot5=4-20=-16<0$, а $|D|=16$.

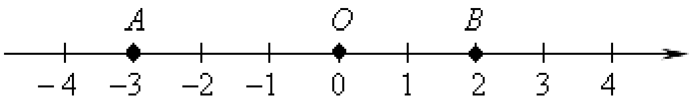
Находим корни:

$$x_1=\frac{-2-\sqrt{16i}}{2}=-1-2i,\quad x_2=\frac{-2+\sqrt{16i}}{2}=-1+2i.$$

Ответ: $x_1=-1-2i$, $x_2=-1+2i$.

3. Изображение комплексных чисел

Действительные числа изображаются точками на числовой прямой:



Здесь точка A означает число –3, точка B – число 2, и O – ноль. В отличие от этого комплексные числа изображаются точками на координатной плоскости. Рассмотрим на плоскости декартову прямоугольную систему координат xOy. Каждому комплексному числу $z=a+ib$ можно сопоставить точку с координатами (a,b), и наоборот, каждой точке с координатами (c,d) можно сопоставить комплексное число $w=c+id$. Таким образом, между точками плоскости и множеством комплексных чисел устанавливается взаимно однозначное соответствие. Поэтому комплексные числа можно изображать как точки плоскости. Плоскость, на которой изображают комплексные числа, обычно называют комплексной плоскостью.

Пример 3. Изобразить на комплексной плоскости числа $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 3i$, $z_3 = -3 + 2i$, $z_4 = -1 - i$ (рис. 1).

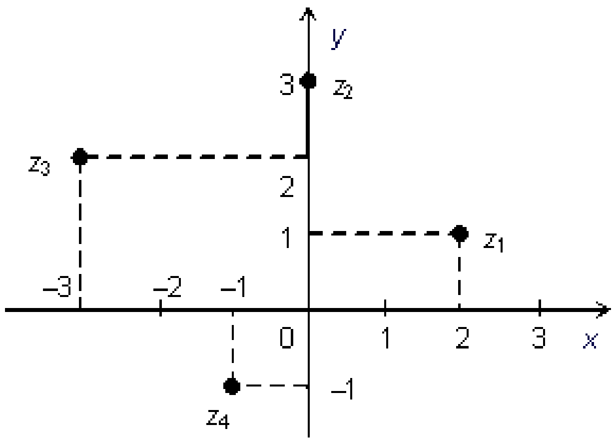


Рис. 1. Изображение комплексных чисел точками плоскости

Однако чаще комплексные числа изображают в виде вектора с началом в точке O, а именно: комплексное число $z = a + ib$ изображается радиус-вектором точки с координатами (a,b). В этом случае изображение комплексных чисел из примера 3 будет таким, как изображено на рисунке 2.

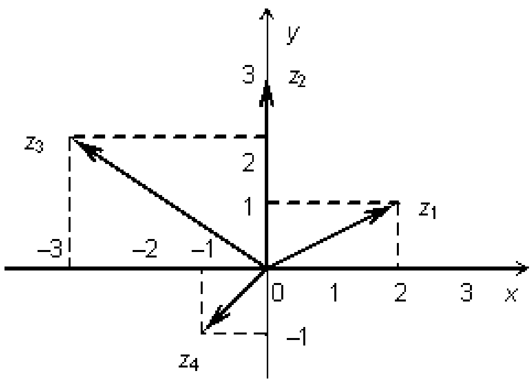


Рис. 2. Изображение комплексных чисел векторами

Отметим, что изображением суммы двух комплексных чисел z и w является вектор, равный сумме векторов, изображающих числа

z и w. Иными словами, при сложении комплексных чисел складываются и изображающие их векторы (рис. 3).

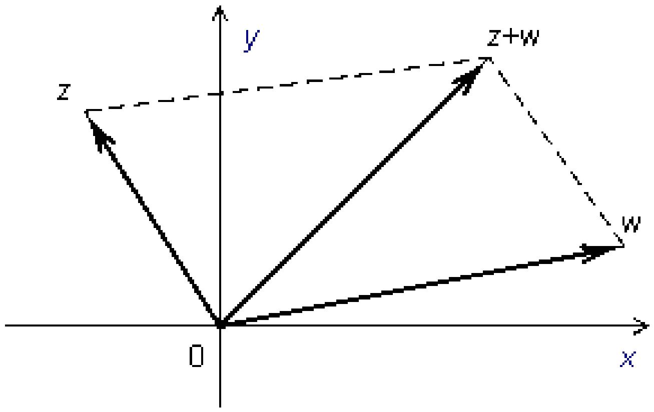


Рис. 3. Изображение суммы комплексных чисел

Из равенства (3) следует, что геометрически комплексные числа вычитаются как векторы (рис. 4).

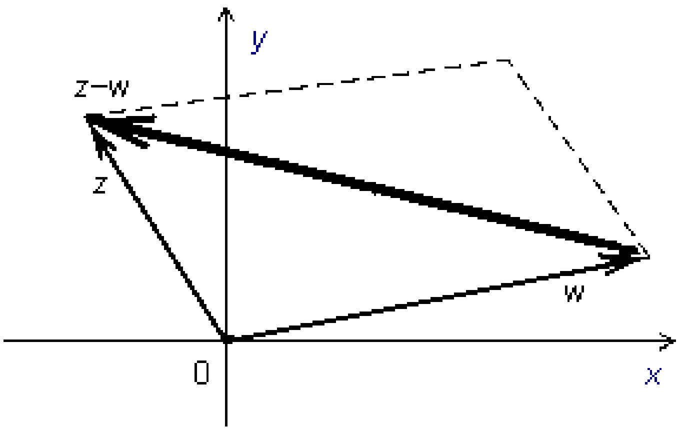


Рис. 4. Изображение разности комплексных чисел

4. Модуль и аргумент комплексного числа

Пусть комплексное число $z = a + ib$ изображается радиус-вектором. Тогда длина этого вектора называется модулем числа z и обозначается $|z|$. Из рисунка 5 видно, что

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}\,. \tag{8}$$

Непосредственно из рисунка 3 видно, что $|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$. Это соотношение называется неравенством треугольника.

Из рисунка 4 видно, что $|z_1-z_2| \ge |z_1|-|z_2|$. Более того, модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию l между точками, изображающими эти числа на плоскости:

$$|z_1-z_2| = \sqrt{(a-b)^2+(c-d)^2} = l. \tag{9}$$

Поэтому, например, равенство $z - 2i = 1$ определяет на комплексной плоскости множество точек $z - 2i = 1$, находящихся на расстоянии 1 от точки $z_0 = 2i$, т. е. окружность с центром в $z_0 = 2i$ и радиусом 1.

Угол, образованный радиус-вектором числа z с осью Ox, называется аргументом числа z и обозначается $\arg z$. Аргумент числа определяется не однозначно, а с точностью до числа, кратного 2π.

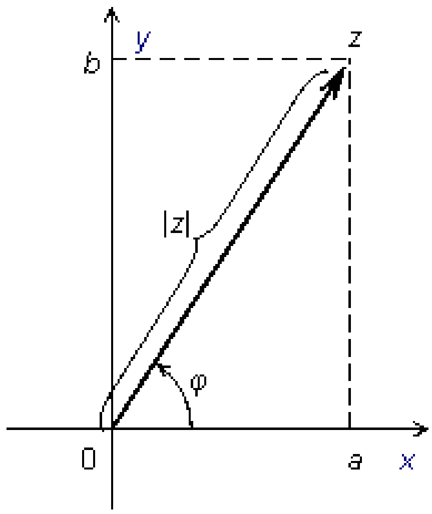


Рис. 5. Модуль и аргумент комплексного числа

Обычно же аргумент указывают в диапазоне от 0 до 2π или в диапазоне от $-\pi$ до π. Кроме того у числа $z=0$ аргумент не определен. На рисунке 5 $\arg z$ равен углу φ, при этом $tg\varphi = \dfrac{b}{a}$. С помощью этого соотношения следует находить аргумент комплексного числа:

$$\arg z = arctg\frac{b}{a} \quad \text{или} \quad \arg z = \pi + arctg\frac{b}{a}, \qquad (10)$$

причем первая формула действует, если изображение числа z находится в первой или четвертой четверти, а вторая – если во второй или третьей. Если $a = 0$, то комплексное число изображается вектором на оси Oy и его аргумент равен $\frac{\pi}{2}$ или $\frac{3\pi}{2}$.

Получим еще ряд полезных формул. Если $z = a + i$, то $\bar{z} = a - ib$ и тогда $z \cdot \bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2$. С учетом формулы (8) получим, что $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ или $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$.

Пример 4. Найти модуль и аргумент комплексных чисел

$$z_1 = -1 + i, \ , \ z_2 = -2 - 3i, \ z_3 = 9i, \ z_4 = 7, \ z_5 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Решение. Запишем числа со строгим указанием действительной и мнимой части: $z_1 = -1 + 1 \cdot i$, $z_2 = -2 - 3 \cdot i$, $z_3 = 0 + 9 \cdot i$, $z_4 = 7 + 0 \cdot i$, $z_5 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$.

Тогда по формулам (8) и (10) находим

$$|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \qquad \arg z_1 = \pi + arctg\frac{1}{-1} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4};$$

$$|z_2| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}, \qquad \arg z_2 = \pi + arctg\frac{-3}{-2} = \pi + arctg\frac{3}{2};$$

$$|z_3| = \sqrt{0^2 + 9^2} = 9, \qquad \arg z_3 = arctg\frac{9}{0} = \frac{\pi}{2};$$

$$|z_4| = \sqrt{7^2 + 0^2} = 7, \qquad \arg z_4 = arctg\frac{0}{7} = 0;$$

$$|z_5| = \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + (-\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = 1,$$

$$\arg z_5 = \pi + arctg\left(\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) : \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

5. Тригонометрическая форма комплексного числа

Пусть $z = a + ib$. Положим $r = |z|$ и $\varphi = \arg z$. Из рисунка 5 видно, что $a = r \cdot \cos\varphi$, $b = r \cdot \sin\varphi$ и тогда $z = r \cdot \cos\varphi + i \cdot (r \cdot \sin\varphi)$. Это выражение запишем в виде

$$z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi). \tag{11}$$

Последняя запись называется *тригонометрической формой* комплексного числа. В отличие от неё запись числа в виде $a + ib$ называют *алгебраической формой* комплексного числа.

Отметим, что тригонометрическая форма – это указание числа по двум его характеристикам: модулю и аргументу. Поэтому вместо формулы (11) можно было бы просто записывать пару (r, φ), но запись (11) принята в силу традиции.

Примечание 3. При записи числа в тригонометрической форме ***нельзя*** вычислять значения $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$, иначе мы потеряем явное указание аргумента z и снова вернемся к алгебраической форме. Кроме того, если угол φ получается отрицательным, то знак « – » ***нельзя*** выносить за знак синуса и ***нельзя*** убирать его под знаком косинуса.

Пример 5. Записать в тригонометрической форме числа $z_1 = 7$, $z_2 = \sqrt{3} - i$, $z_3 = -i$, $z_4 = 2 + 2i$.

Решение. Находим модуль и аргумент заданного числа, а затем прописываем его тригонометрическую форму:

$|z_1| = \sqrt{7^2 + 0^2} = 7$, $\qquad \arg z_1 = 0$,

$$z_1 = 7(\cos 0 + i \sin 0);$$

$|z_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$, $\qquad \arg z_2 = arctg\dfrac{-1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\pi}{6}$,

$$z_2 = 2\left(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i \sin(-\frac{\pi}{6})\right);$$

$|z_3| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$, $\qquad \arg z_3 = arctg\dfrac{-1}{0} = -\dfrac{\pi}{2}$,

$$z_3 = \left(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2})\right);$$

$|z_4| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, $\qquad \arg z_4 = arctg\dfrac{2}{2} = \dfrac{\pi}{4}$,

$$z_4 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Выведем правила умножения и деления комплексных чисел.

Пусть $z_1 = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)$.

1. Определим **произведение** $z_1 \cdot z_2$:

$$z_1 \cdot z_2 = [r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1)] \cdot [r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)] =$$
$$= r_1 \cdot r_2 \cdot \left(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + i \cdot \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + i^{2} \cdot \sin\varphi_1 \sin\varphi_2\right) =$$
$$= r_1 \cdot r_2 \cdot \left(\left(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2\right) + i \cdot \left(\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2\right)\right).$$

Заметим, что во внутренних скобках стоят формулы косинуса и синуса суммы аргументов. Поэтому

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot \left[\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + i \cdot \sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)\right]. \qquad (12)$$

Последняя запись является тригонометрической формой комплексного числа $z_1 \cdot z_2$. Значит,

$$\begin{aligned} &|z_1 \cdot z_2| = r_1 \cdot r_2 = |z_1| \cdot |z_2|, \\ &\arg\left(z_1 \cdot z_2\right) = \varphi_1 + \varphi_2 = \arg z_1 + \arg z_2 \end{aligned}, \qquad (13)$$

т. е. при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

2. Определим **частное** $\dfrac{z_1}{z_2}$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1)}{r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i \cdot \sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i \cdot \sin\varphi_2)} =$$
$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) - i \cdot (\cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cos\varphi_2)}{(\cos\varphi_2)^2 + (\sin\varphi_2)^2} =$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2+\sin\kappa_1\sin\varphi_2)+i\cdot(\sin\varphi_1\cos\varphi_2-\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2)^2+(\sin\varphi_2)^2}=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\cdot\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\cdot\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right].$$

Последняя запись является тригонометрической формой комплексного числа $\frac{z_1}{z_2}$. Значит

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},\qquad \arg\frac{z_1}{z_2}=\arg z_1-\arg z_2. \tag{14}$$

т. е. при делении комплексных чисел их модули делятся один на другой, а аргументы вычитаются.

Если $z=r\cdot(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)$, то $\overline{z}=r\cdot(\cos(-\varphi)+i\cdot\sin(-\varphi))$.

Используя правило умножения комплексных чисел в тригонометрической форме, получим формулу для возведения комплексного числа в степень n, где n – натуральное число.

Пусть $z=r\cdot(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)$. Тогда

$$z^2=z\cdot z=r^2\cdot\left[\cos(\varphi+\varphi)+i\cdot\sin(\varphi+\varphi)\right]=r^2\cdot(\cos2\varphi+i\cdot\sin2\varphi);$$
$$z^3=z^2\cdot z=r^3\cdot\left[\cos(2\varphi+\varphi)+i\cdot\sin(2\varphi+\varphi)\right]=r^3\cdot(\cos3\varphi+i\cdot\sin3\varphi);$$
$$z^4=z^3\cdot z=r^4\cdot\left[\cos(3\varphi+\varphi)+i\cdot\sin(3\varphi+\varphi)\right]=r^4\cdot(\cos4\varphi+i\cdot\sin4\varphi).$$

Продолжая умножения дальше, придем к формуле

$$z^n=r^n\cdot(\cos n\varphi+i\cdot\sin n\varphi). \tag{15}$$

Эта формула называется ***формулой Муавра***.

Пример 6. Вычислить z^6, если $z=1-i$.

Решение. Найдем тригонометрическую форму числа z^6:

$r=|z|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$;

$\varphi=\arg z=arctg\,\frac{-1}{1}=-\frac{\pi}{4}$;

$$z=\sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})\right).$$

По формуле Муавра получаем

$$z^6=(\sqrt{2})^6\left(\cos(-\frac{6\pi}{4})+i\sin(-\frac{6\pi}{4})\right)=8\left(\cos(-\frac{3\pi}{2})+i\sin(-\frac{3\pi}{2})\right).$$

Переходим к алгебраической форме записи, поскольку $\cos(-\frac{3\pi}{2})=0$ и $\sin(-\frac{3\pi}{2})=1$, то $z^6=8i$.

Ответ: $z^6=8i$.

6. Показательная форма комплексного числа

Тригонометрическая и показательная функции в области комплексных чисел связаны между собой формулой

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi, \qquad (16)$$

которая носит название ***формулы Эйлера***. Обосновать ее можно с помощью теории степенных рядов. Эта теория изложена в курсе математического анализа и рассматриваться нами не будет.

Пусть комплексное число z в тригонометрической форме имеет вид $z=r\cdot(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)$. На основании формулы Эйлера выражение в скобках можно заменить на показательное выражение

$$z=r\cdot e^{i\varphi}. \qquad (17)$$

Эта запись называется *показательной формой* комплексного числа. Так же, как и в тригонометрической форме записи, здесь $r=|z|$ и $\varphi=\arg z$.

Пример 7. Записать показательную форму числа, если $z=-1+i$.

Решение. Находим модуль и аргумент числа:

$$r=|z|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2};$$

$$\varphi = \arg z = arctg\frac{1}{-1} = \frac{3\pi}{4}.$$

Показательной формой комплексного числа $z = -1 + i$ является $z = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Ответ: $z = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Пример 8. Комплексное число записано в показательной форме

$$z = 2 \cdot e^{\frac{i \cdot \pi}{6}}.$$

Найти его алгебраическую форму.

Решение. По формуле Эйлера находим

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i.$$

Ответ: $z = \sqrt{3} + i$.

С помощью формулы Эйлера можно определить показательную функцию комплексного аргумента.

Пусть $z = x + iy$. Тогда $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x\left(\cos y + i \sin y\right)$.

Например, $e^{3+i\frac{5\pi}{6}} = e^3 \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{6} + i \sin\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}e^3 + i\frac{e^3}{2}$.

Заменим в формуле Эйлера φ на $-\varphi$ получим

$$e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i \cdot \sin(-\varphi).$$

С учетом свойства тригонометрических функций имеем: $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i \cdot \sin\varphi$. Сложив последнюю формулу с ***формулой Эйлера***, получим: $e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2\cos\varphi$. Откуда

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}. \qquad (18)$$

Аналогично, с помощью вычитания, можно получить формулу

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\kappa} - e^{-i\varphi}}{2i}. \qquad (19)$$

С помощью полученных формул вычислим, например, $\sin(5i)$ и $\cos(5i)$:

$$\sin(5i) = \frac{e^{i(5i)} - e^{-i(5i)}}{2} = \frac{e^{-5} - e^{5}}{2} = 0,$$

$$\cos(5i) = \frac{e^{i(5i)} e^{-i(5i)}}{2} = \frac{e^{-5} + e^{5}}{2} \approx 74,21.$$

Таким образом, в комплексной области модуль косинуса может быть и больше **1**. Более того, в комплексной области функции $\sin z$ и $\cos z$, определяемые с помощью формул (18) и (19), являются неограниченными функциями. Действительно, из этих формул мы получаем

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= ch(i\varphi), \\ \sin\varphi &= -i \cdot sh(i\varphi). \end{aligned} \qquad (20)$$

Так как гиперболические косинус и синус являются неограниченными функциями, то и тригонометрические функции косинус и синус являются неограниченными функциями (в комплексной области).

Отметим также, что формулы (20) объясняют, почему для гиперболических функций многие соотношения очень похожи на соотношения между тригонометрическими функциями, например, основное тригонометрическое тождество, формулы двойного аргумента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Готман, Э.Г. Решение геометрических задач аналитическим методом / Э.Г. Готман, З.А. Скопец. — М.: Просвещение, 1979.

2. Кокстер, Г.С.М. Введение в геометрию / Г.С.М. Кокстер. – М.: Наука, 1966.

3. Лаудыня, Э.А. Применение комплексных чисел в задачах о правильных многоугольниках / Э.А. Лаудыня // Математика в школе. – 1968. – № 5. – С. 79–83.

4. Маркушевич, А.И. Комплексные числа и конформные отображения / А.И. Маркушевич. – М.: Наука, 1979.

5. Понарин, Я.П. Геометрия / Я.П. Понарин. – Ростов н/Д.: Феникс, 1997.

6. Скопец, З.А. Приложение комплексных чисел к задачам элементарной геометрии / З.А. Скопец // Математика в школе. – 1967. – № 1. – С. 63–71.

7. Шарова, О.П. Применение комплексных чисел к изучению геометрических преобразований / О.П. Шарова // Математика в школе. – 1970. – № 1. – С. 74–79.

8. Яглом, И.М. Комплексные числа / И.М. Яглом. – М.: Физматгиз, 1963.

ОГЛАВЛЕНИЕ

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Методические указания

Иванов Владимир Иванович

Редактор
О.Ю. Потапова

Санитарно-эпидемиологическое заключение № 24.49.04.953.П. 000381.09.03 от 25.09.2003 г.
Подписано в печать 19.01.2016. Формат 60 × 90/16. Бумага тип. № 1.
Печать – ризограф. Усл. печ. л. 1,75. Тираж 56 экз. Заказ №
Редакционно-издательский центр Красноярского государственного аграрного университета
660017, Красноярск, ул. Ленина, 117