Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Красноярский государственный аграрный университет»

А.В. Зотов, О.Е. Носкова

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Методические указания
для самостоятельной работы

Электронное издание

Красноярск 2016

Рецензент
И.О. Богульский, д-р физ.-мат. наук, профессор

Зотов А.В.
Динамика материальной точки: метод. указания для самостоятельной работы [Электронный ресурс] / А.В. Зотов, О.Е. Носкова; Краснояр. гос. аграр. ун-т. – Красноярск, 2016. – 26 с.

Издание включает два основных раздела динамики («Дифференциальные уравнения движения материальной точки» и «Общие теоремы динамики материальной точки») дисциплины «Теоретическая механика» с примерами решения задач и заданиями для самостоятельной работы.

Предназначено для студентов дневного и заочного отделений, обучающихся по направлениям подготовки 35.03.06 «Агроинженерия» и 20.03.01 «Техносферная безопасность».

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Теоретическая механика занимает особое место в ряду общетехнических дисциплин, изучаемых в высших учебных заведениях. Являясь наукой теоретической, она распространяет свои законы на всю практическую инженерную деятельность, на развитие других инженерных дисциплин.

Самым важным и более трудным для усвоения является раздел «Динамика», который синтезирует два других («Статика» и «Кинематика») и позволяет на новом качественном уровне описывать поведение механических систем.

Для более успешного усвоения материала необходимо провести большой объем самостоятельной работы, одной из форм которой является выполнение расчетно-графических заданий.

В данном издании, наряду с методикой и примерами решения задач, даны основные теоретические положения, необходимые для усвоения курса. К каждой задаче дается 10 схем и таблица (с тем же номером, что и задача), содержащая дополнительные условия к тексту задачи. Студент выбирает во всех задачах номер схемы по последней цифре номера зачетной книжки, а номер условия из таблицы – по предпоследней. Например, если номер зачетной книжки оканчивается числом 35, то берутся схема 5 и условия 3 из соответствующей таблицы.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ

Динамика – раздел теоретической механики, в котором изучается движение материальных точек и тел в зависимости от сил, их вызывающих.

Материальной точкой называется материальное тело, вращательным движением которого, по сравнению с поступательным, можно пренебречь. Таким образом, не обязательно понимать под материальной точкой тело очень малых размеров. Твердое тело, движущееся поступательно, рассматривается как материальная точка.

Материальная точка называется **свободной**, если на ее движение не наложено никаких ограничений.

В основе классической динамики лежат законы, сформулированные Исааком Ньютоном и называемые основными законами динамики. Все дальнейшие выводы динамики получаются при помощи математического анализа этих законов.

Первый закон (закон инерции). *Изолированная материальная точка находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения.*

Этот закон фактически утверждает наличие инерциальных систем. ***Инерцией*** называется свойство материальной точки оказывать сопротивление изменению ее скорости.

Второй закон (основной закон динамики). *Сила, действующая на свободную материальную точку, сообщает ей ускорение, которое в инерциальной системе отсчета пропорционально этой силе*:

$$m\overline{a} = \overline{F}\,. \qquad (1)$$

Уравнение (1) называется ***основным уравнением динамики***. Входящая в него величина m – масса материальной точки – является мерой инертности этой точки.

Третий закон (равенства действия и противодействия). *Силы взаимодействия тел всегда направлены по одной прямой противоположно друг другу и равны по модулю.*

Четвертый закон (независимости действия сил). *При одновременном действии нескольких сил ускорение материальной точки равно векторной сумме ускорений, которые имела бы эта точка при действии каждой из сил в отдельности (метод суперпозиции).*

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Дифференциальные уравнения движения материальной точки в проекциях на оси декартовых координат имеют вид

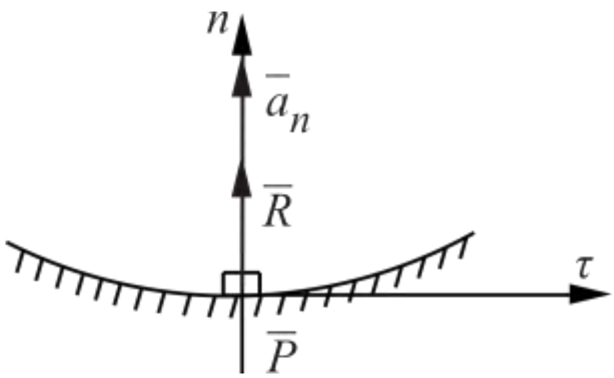
$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= \sum F_x; \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= \sum F_y; \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= \sum F_z, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

где $\dfrac{d^2x}{dt^2}, \dfrac{d^2y}{dt^2}, \dfrac{d^2z}{dt^2}$ – проекции ускорения;

F_x, F_y, F_z – проекции силы на соответствующие оси декартовых координат.

С помощью дифференциальных уравнений движения материальной точки можно решать две основные задачи динамики: ***прямую и обратную***.

Прямой *называется задача, когда по заданному закону движения необходимо определить силы его вызывающие* (пример 1).



Пример 1. Автомобиль массы *1210 кг* движется по дну оврага с постоянной по модулю скоростью $V = 10 м/с$. Определить давление автомобиля на дно оврага R в нижней точке, где радиус кривизны составляет $\rho = 50 м$. Силой сопротивления движению пренебречь.

Решение. К автомобилю, принимаемому за материальную точку, приложены две силы: сила тяжести $\overline{P} = m\overline{g}$ и нормальная реакция грунта R. Составим уравнение движения в проекции на естественные оси координат (n – нормаль и τ – касательную):

$$ma_n = \sum F_n.$$

Учитывая, что $a_n = \dfrac{V^2}{\rho}$, имеем

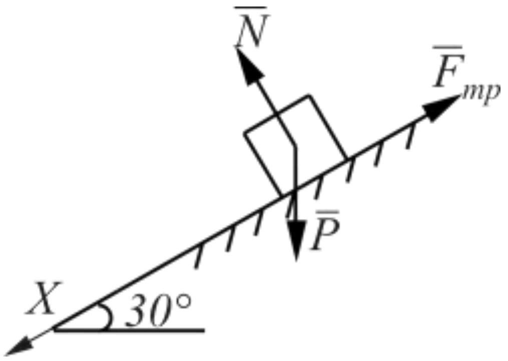
$$R = mg + \frac{mV^2}{\rho},$$

откуда

$$R = mg + \frac{mV^2}{\rho}.$$

Подставляя численные значения, получим $R = 14{,}45 кН$.

Обратной *называется задача, в которой по заданным силам определяется закон движения точки*. Математически это сводится к интегрированию дифференциальных уравнений (2), в результате чего необходимо определить постоянные интегрирования *C* по начальным условиям.



Пример 2. Тяжелое тело начинает движение по наклонной плоскости под действием собственного веса. Какую скорость приобретет тело через *20 с* после начала движения? При решении принять угол наклона плоскости $\alpha = 30^o$, коэффициент трения $f = 0{,}2$.

Решение. Изображаем тело в произвольный момент времени, направляем ось движения *X* в сторону движения. На тело действуют: вес $\overline{P} = m\overline{g}$, сила трения $F_{тр}$ и реакция *N*.

Составим дифференциальное уравнение движения в проекции на ось *X*:

$$m\frac{dV_x}{dt} = P\sin 30^o - F_{тр}.$$

Учитывая, что сила трения по закону Кулона $F_{mp} = fN$, а $N = mg\cos 30^o$, имеем

$$m\frac{dV_x}{dt} = mg\sin 30^o - fmg\cos 30^o.$$

Разделим переменные, для чего помножим все уравнение на dt:

$$dV_x = mg\sin 30^o - fmg\cos 30^o.$$

Проинтегрируем:

$$\int dV_x = g\sin 30^o \int dt - fgt\cos 30^o \int dt.$$

В результате

$$V_x = gt\sin 30^o - fgt\cos 30^o + C.$$

Постоянную интегрирования C определим по начальным условиям. При $V_x = V_{x0} = 0,\ \ t = t_0 = 0,\ \ C = 0$.

Тогда $V_x \approx 6{,}5 м/с$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ Д1

Груз *Д* массой *m*, получив в точке *A* начальную скорость v_A, движется в изогнутой трубе *ABC* (схемы Д1.0–Д1.9).

На участке *AB* на груз действует постоянная сила *Q* (ее направление показано на рисунках). Трением груза о трубу на участке *AB* пренебречь.

В точке *B* груз, не изменяя своей скорости, переходит на участок *BC* трубы, где на него кроме силы тяжести действует сила трения F_{mp} и переменная сила *F*, проекция которой F_x на ось *x* задана в таблице.

Считая груз материальной точкой и зная время t движения на участке AB, найти закон движения груза на участке BC, т.е. $x = f(t)$, где $x = BД$. Численные данные приведены в таблице 1.

Решение задачи разбивается на две части. Сначала нужно составить дифференциальное уравнение движения точки (груза) на участке AB и проинтегрировать его методом разделения переменных, учитывая начальные условия. Затем, зная время движения груза на участке AB, определить скорость груза в точке B. Эта скорость будет начальной на участке BC. После этого нужно составить и проинтегрировать дифференциальное уравнение движения груза на участке BC также с учетом начальных условий. Получим скорость движения на участке BC. Учитывая, что $V = dx/dt$, еще раз проинтегрируем это уравнение методом разделения переменных. Полученный закон $x = f(t)$ и будет являться законом движения груза на участке BC. Численные значения взять из таблицы 1.

Таблица 1

Номер условия	*m, кг*	V_A *, м/с*	*Q, Н*	*t, с*	F_x *Н*	*f*
0	*1,6*	*24*	*4*	*2*	*6 sin(4t)*	*0,10*
1	*1,8*	*22*	*6*	*2*	*-2 cos(2t)*	*0,20*
2	*2,0*	*20*	*5*	*3*	*8t*	*0,15*
3	*2,4*	*18*	*9*	*1,5*	*8 cos(4t)*	*0,25*
4	*3,0*	*16*	*6*	*2*	*-3 sin(2t)*	*0,10*
5	*4,0*	*14*	*9*	*4*	*4 cos(2t)*	*0,15*
6	*4,5*	*12*	*12*	*2,5*	*4t*	*0,20*
7	*4,8*	*12*	*12*	*3*	*-2 cos(4t)*	*0,10*
8	*5,0*	*10*	*16*	*2*	*-3 sin(4t)*	*0,25*
9	*6,0*	*10*	*18*	*4*	*9t*	*0,30*

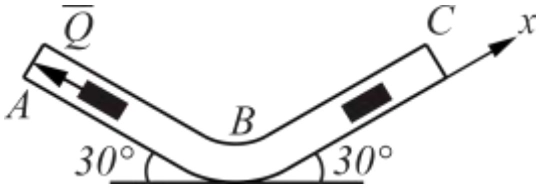


Схема Д1.0

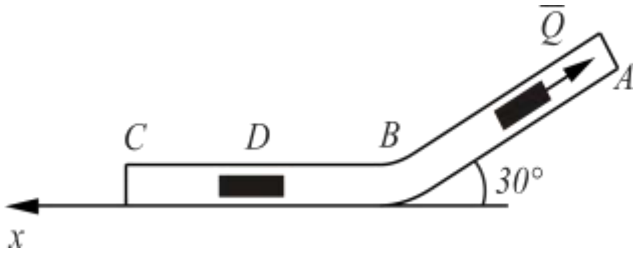


Схема Д1.1

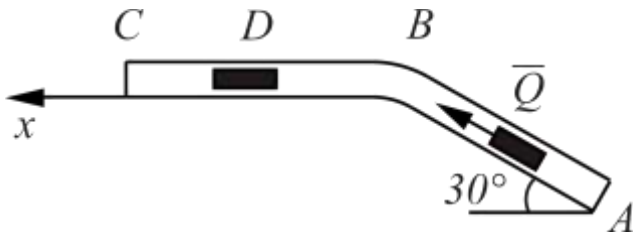


Схема Д1.2

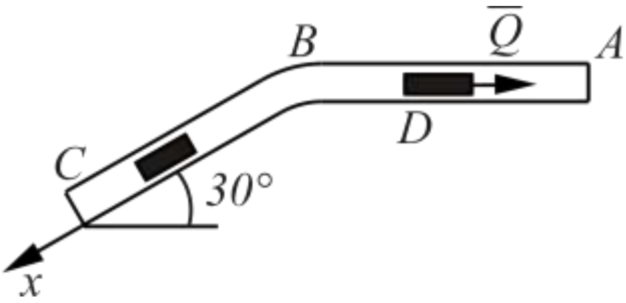


Схема Д1.3

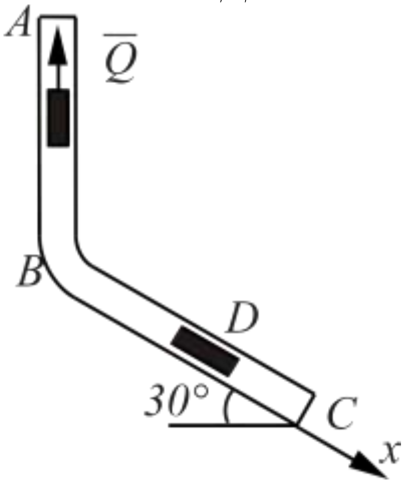


Схема Д1.4

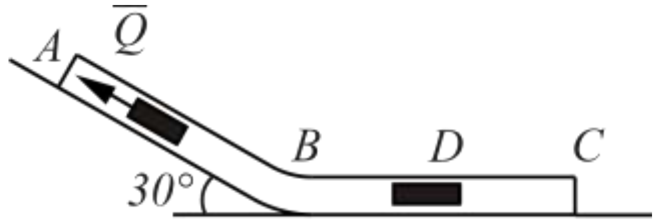


Схема Д1.5

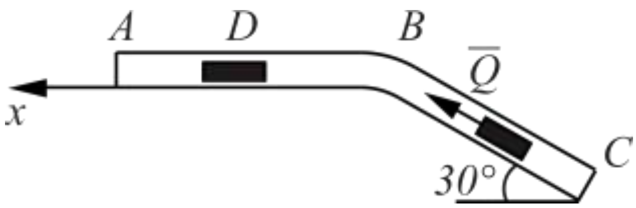


Схема Д1.6

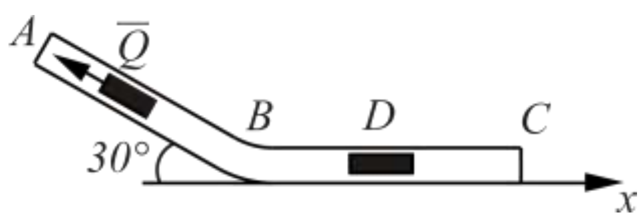


Схема Д1.7

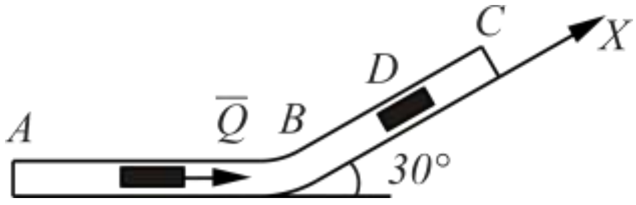


Схема Д1.8

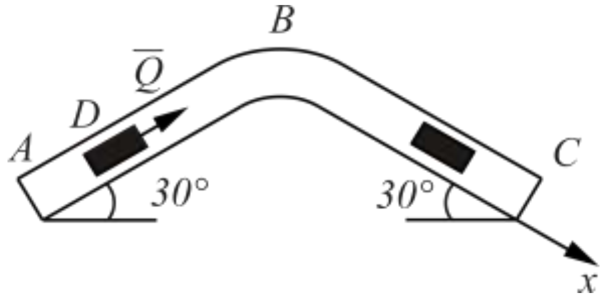
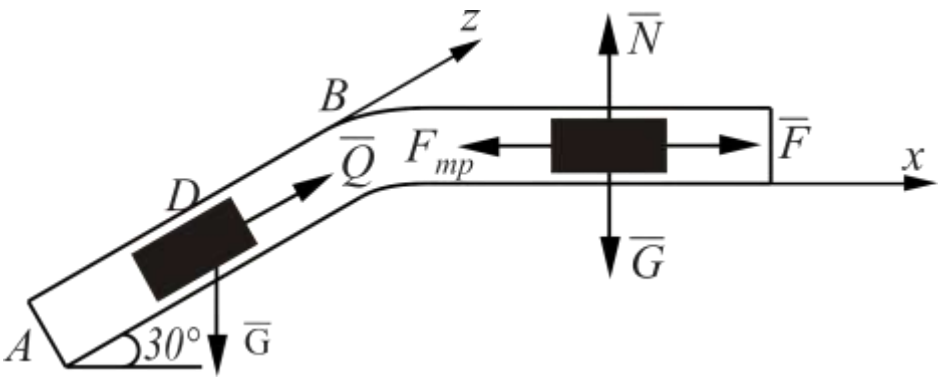


Схема Д1.9

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАЧИ Д1

На наклонном участке *AB* трубы на груз *Д* массой *m=2,5кг* действует сила тяжести и постоянная сила $Q = 10H$. В точке *A* груз имеет начальную скорость $V_A = 6м/с$. Движение от точки *A* до точки *B* длится $t = 2c$. На горизонтальном участке *BC* действует сила трения (коэффициент трения груза о трубу *f=0,2*) и переменная сила $F = 5cos4t$, заданная в Ньютонах. Определить *x=f(t)* – закон движения груза на участке *BC*.



Решение

1. Рассмотрим движение на участке *AB*, считая груз материальной точкой. Изображаем положение груза в произвольный момент времени и все силы, действующие на него: силу тяжести $\overline{G}$, силу $\overline{Q}$. Проводим ось *Az* и составляем дифференциальное уравнение в проекции на эту ось:

$$m\frac{dV_x}{dt} = Q - G\sin 30^o. \qquad (3)$$

Учитывая, что $G = mg$, получим

$$m\frac{dV_z}{dt} = Q - mg\sin 30^o. \qquad (4)$$

Разделяя обе части уравнения (4) на массу *m*, получим

$$\frac{dV_z}{dt} = \frac{Q}{m} - g\sin 30^o.$$

Затем разделим переменные (умножим обе части на dt) и проинтегрируем:

$$\int dV_z = \frac{Q}{m}\int dt - g\sin 30^o \int dt,$$

$$V_z = \frac{Q}{m} - g\sin 30^o + C_1. \qquad (5)$$

Для определения постоянной интегрированной C_1 подставим в (5) начальные условия:

$$v_z = v_{0z} = v_A; \text{ при } t = 0.$$

Получим $C_1 = V_A$.

Тогда уравнение (5) имеет вид

$$V_z = \frac{Q}{m}t - gt\sin 30^o + V_A. \qquad (6)$$

Представив в (6) данные условия задачи, определим скорость груза в точке *B*:

$$V_z = \frac{10}{2{,}5} \cdot 2 - 10 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 6 = 4 м/с.$$

2. Рассмотрим движение груза на участке BC. Найденная скорость V_z будет для движения на этом участке начальной. Изобразим груз в произвольном положении и действующие на него силы: силу тяжести $\overline{G} = m\overline{g}$, силу трения $\overline{F}_{тр}$, нормальную реакцию $\overline{N}$ и силу $\overline{F}$. Запишем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось Bx:

$$m\frac{dV_x}{dt} = F_x - F_{тр}, \tag{7}$$

где $\overline{F}_{тр} = f \cdot N$.

Для определения $\overline{N}$ составим уравнение движения груза проекции на ось By:

$$m\frac{dV_x}{dt} = N - G. \tag{8}$$

Так как движение груза вдоль оси y отсутствует, то $V_y = 0$, следовательно, (8) примет вид

$$0 = N - G.$$

Откуда

$$N = G = mg.$$

Тогда сила трения

$$F_{тр} = fmg.$$

С учетом этого (7) примет вид

$$m\frac{dV_x}{dt} = 5\cos 4t - fmg. \tag{9}$$

Разделив обе части на m и подставив данные условия задачи, получим

$$\frac{dV_x}{dt} = 2\cos 4t - 2. \qquad (10)$$

Умножая обе части уравнения (10) на dt и интегрируя, находим

$$V_x = \frac{1}{2}\sin 4t - 2t + C_2. \qquad (11)$$

Представив в (11) начальные условия $V_x = V_{0x} = 4 м/с$ и $t = 0$, получим $C_2 = 4$.

При найденном значении C_2 уравнение (11) примет вид

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\sin 4t - 2t + 4. \qquad (12)$$

Умножая обе части (12) на dt и снова интегрируя, найдем

$$x = -\frac{1}{8}\cos 4t - t^2 + 4t + C_3. \qquad (13)$$

Так как при $t = 0$ и $x = 0$, $C_3 = 0$, то получим искомый закон движения груза:

$$x = 4t - t^2 - \frac{1}{8}\cos 4t.$$

3. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

При интегрировании дифференциальных уравнений движения в конкретных задачах эти уравнения движения подвергаются различным однотипным преобразованиям, зависящим от характера действующих сил. Поэтому целесообразно проделать такие преобразования в общем виде. Они и получили названия общих теорем динамики точки, причем в различных теоремах выделены и связаны между собой те или иные характеристики движения. В результате получаются удобные зависимости, широко используемые для решения конкретных задач динамики.

Одной из мер движения точки является количество ее движения.

Количеством движения *материальной точки* $\overline{q}$ *называют вектор, равный произведению массы точки* m *на ее скорость* $\overline{V}$, т.е.

$$\overline{q} = m\overline{V}, \tag{14}$$

и приложенный к самой точке.

Действие силы $\overline{F}$ *на материальную точку в течение времени характеризует* ***импульс силы*** S:

$$\overline{S} = \overline{F}t. \tag{15}$$

Проинтегрируем второй закон Ньютона в дифференциальной форме методом разделения переменных:

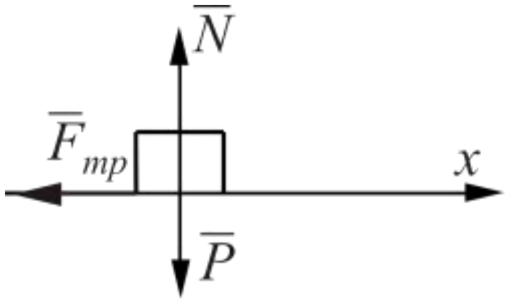
$$m\frac{d\overline{V}}{dt} = \overline{F},$$

$$m\int_{V_0}^{V} d\overline{V} = F\int_{0}^{t} dt.$$

Получим ***теорему об изменении количества движения*** точки:

$$m\overline{V} - m\overline{V_0} = \overline{F}t. \tag{16}$$

Изменение количества движения материальной точки равно импульсу силы, действующей на эту точку.



Пример 3. Автомобиль, двигающийся по горизонтальному прямолинейному участку пути со скоростью $V = 20 м/с$, в результате экстренного торможения останавливается через $t=4c$. Каков коэффициент трения между покрышками автомобиля и покрытием дороги?

Решение. Применим теорему об изменении количества движения в проекции на ось движения x:

$$mV_x - mV_{0x} = \sum S_x.$$

Учитывая, что торможение происходит только под действием силы трения $\overline{F}_{mp}$, а конечная скорость в результате остановки $V = 0$, теорема примет вид

$$-mV_{0x} = -F_{mp}t,$$

$$-mV_{0x} = -fmgt,$$

$$f = \frac{V_{0x}}{gt} = 0{,}5.$$

Прежде чем перейти к рассмотрению следующей теоремы, необходимо ввести понятие «работа силы» и рассмотреть некоторые простейшие способы ее вычисления.

Работа силы в общем случае зависит от характера движения точки приложения силы:

$$A(\overline{F}) = \overline{F} \cdot S \cdot \cos\alpha \ , \qquad (17)$$

где α – угол между направлением перемещения линий действия силы.

Если $\alpha = 0^o, 180^o$, то $A(\overline{F}) = \overline{F}S,$

$\alpha = 90^o$, то $A(\overline{F}) = 0$, т.е $F \perp S$,

$\alpha \langle 90^o$, то работа положительная,

$\alpha \rangle 90^o$, то работа отрицательная.

Работа силы тяжести:

$$A(m\bar{g}) = \pm m\bar{g}h, \tag{18}$$

где h – величина вертикального перемещения точки.

Работа считается положительной, если тело приближается к земле.

Работа силы упругости:

$$A(F_{упр}) = -\frac{c\lambda^2}{2}, \tag{19}$$

где c – коэффициент жесткости пружины;

λ – величина изменения длины пружины.

Работа силы трения:

$$A(F_{тр}) = -F_{тр}S, \tag{20}$$

Работа силы трения всегда отрицательна, так как сила трения направлена противоположно движению.

Знаая, что кинетическая энергия материальной точки равна половине произведения массы на квадрат ее скорости $\frac{mV^2}{2}$, перейдем к ***теореме об изменении кинетической энергии*** материальной точки.

$$\frac{m\bar{V}^2}{2} - \frac{m\bar{V}_0^2}{2} = \sum A(\bar{F}_k), \tag{21}$$

Изменение кинетической энергии материальной точки равно сумме работ всех действующих на точку сил.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ Д2

Шарик массой m (схемы Д2.0–Д2.9), принимаемый за материальную точку, движется из положения A внутри трубы со скоростью V_A. Пройдя путь h_0, шарик отделяется от пружины, коэффициент жесткости которой c.

Определить скорость шарика в положениях B, C, и $Д$ и давление шарика на стенку трубки в положении C. Трением шарика на криволинейных участках траектории пренебречь. Численные данные приведены в таблице 2.

Таблица 2

Номер условия	m, *кг*	V_A, *м/с*	t_{BD}, *с*	R, *м*	f	α, *град*	β, *град*	h, *см*	C, *Н/см*
0	*0,5*	*8*	*2,0*	*4*	*0,2*	*30*	*45*	*10*	*1*
1	*0,6*	*5*	*0,2*	*2*	*0,1*	*45*	*60*	*30*	*2*
2	*0,8*	*0*	*0,3*	*0,2*	*0,1*	*30*	*60*	*50*	*5*
3	*0,6*	*2*	*0,5*	*1*	*0,2*	*30*	*60*	*50*	*4*
4	*0,7*	*10*	*0,2*	*1,5*	*0,2*	*30*	*45*	*40*	*3*
5	*0,2*	*1*	*1,5*	*0,5*	*0,1*	*45*	*30*	*10*	*10*
6	*0,4*	*0*	*1,0*	*2,0*	*0,30*	*60*	*30*	*30*	*1,2*
7	*0,3*	*4*	*0,1*	*3,0*	*0,1*	*30*	*60*	*10*	*1,1*
8	*0,1*	*3*	*0,4*	*0,4*	*0,40*	*30*	*60*	*40*	*0,8*
9	*0,5*	*6*	*0*	*0,6*	*0,2*	*60*	*45*	*30*	*0,4*

Для определения скорости точки используем теорему об изменении кинетической энергии материальной точки (21).

В случае, когда задано время прохождения участка, применяется теорема об изменении количества движения материальной точки (16).

Для определения давления шарика на стенку канала используем ***принцип Даламбера*** для материальной точки, на основании которого *геометрическая сумма сил, приложенных к точке, и силы инерции этой точки равны нулю*:

$$\overline{F} + \overline{N} + \overline{\Phi} = 0. \qquad (22)$$

Силы инерции – величина фиктивная, и мы прикладываем ее условно. В случае движения по окружности $\overline{\Phi} = \overline{\Phi_n} + \overline{\Phi_\tau}$, где $\overline{\Phi_n} = -m\overline{a}$, т.е. направлена в сторону, противоположную ускорению.

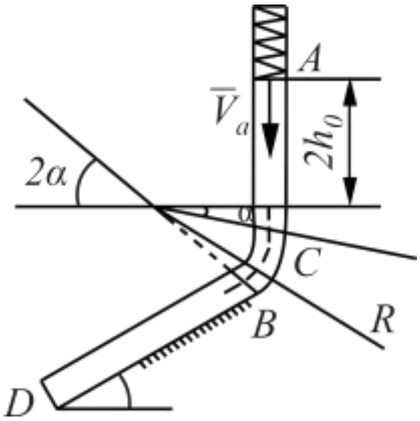


Схема Д2.0

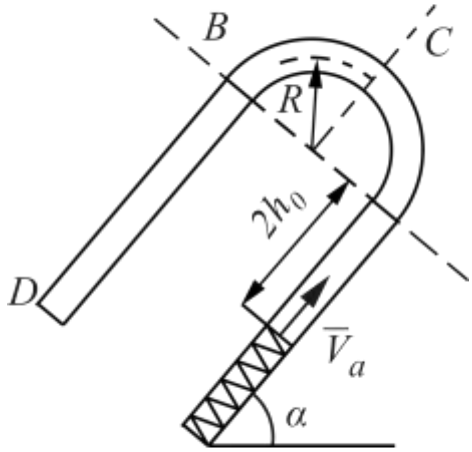


Схема Д2.1

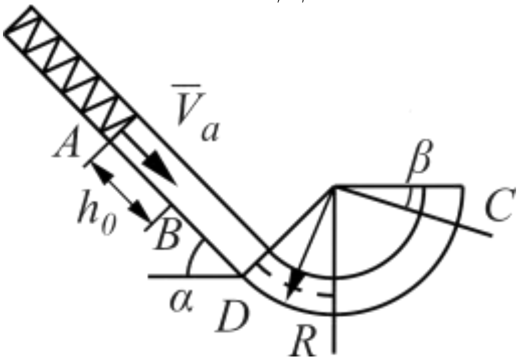


Схема Д2.2

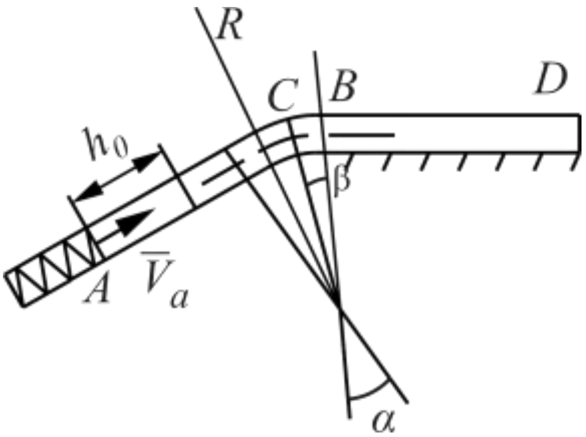


Схема Д2.3

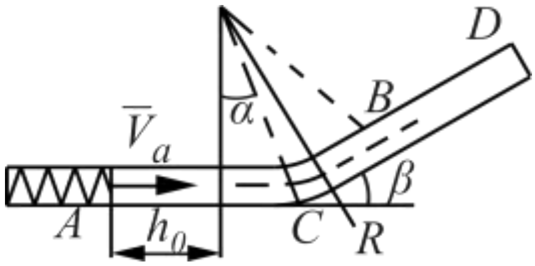


Схема Д2.4

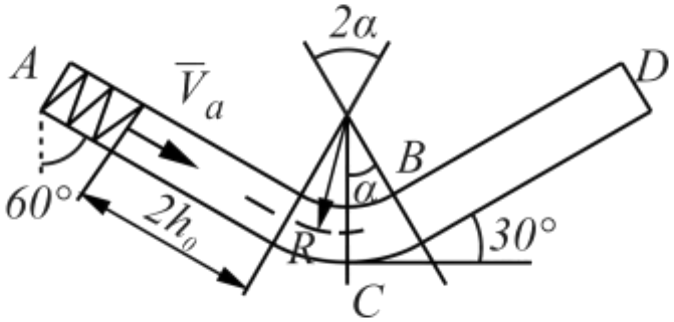


Схема Д2.5

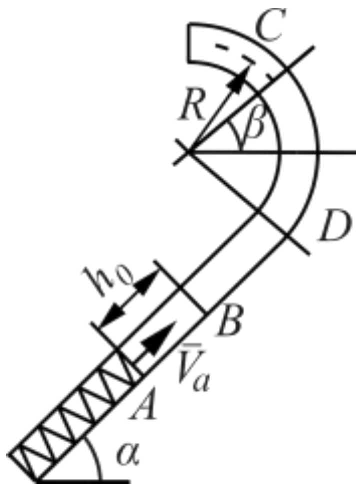


Схема Д2.6

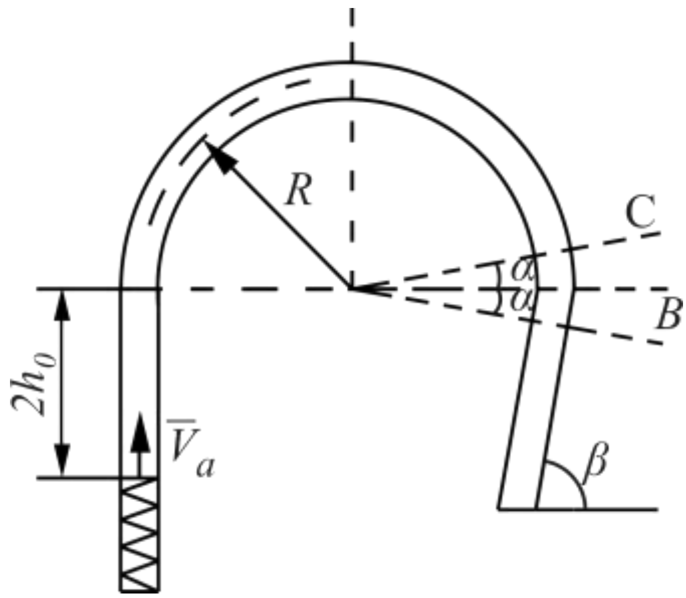


Схема Д2.7

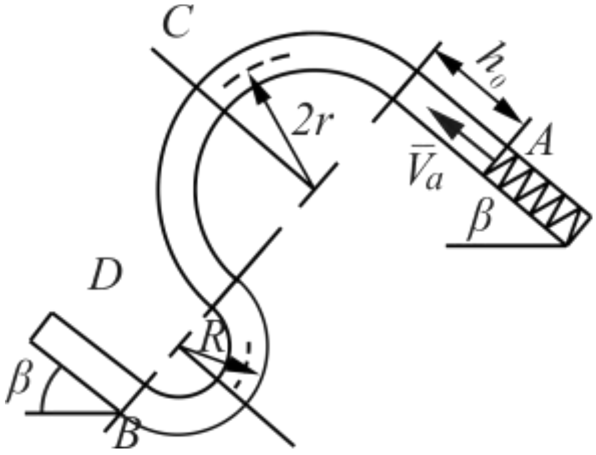


Схема Д2.8

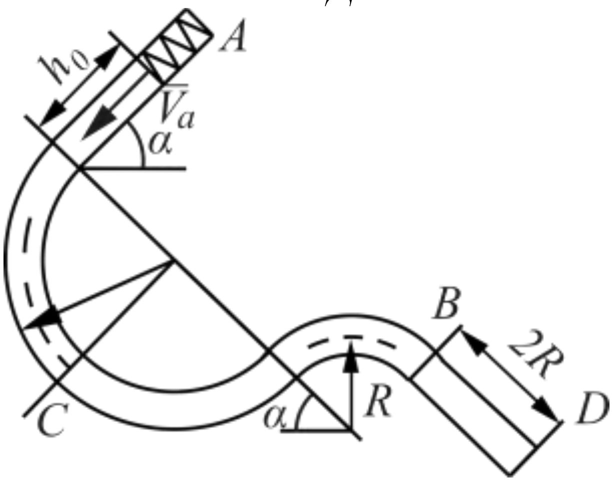
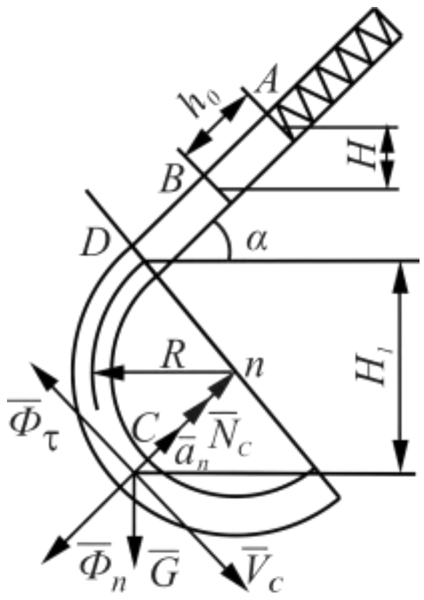


Схема Д2.9

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАЧИ Д2



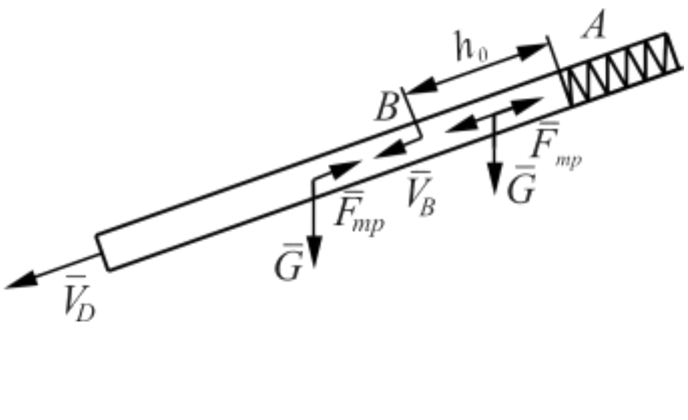
Шарик массой $m = 0{,}5\,кг$ движется из положения A внутри трубы со скоростью $V_A = 0{,}2\,м/с$.

Пройдя путь $h_0 = 10\,см$, шарик отделяется от пружины, коэффициент жесткости которой $C = 1\,Н/см$ (100*Н/м*). Коэффициент трения на прямолинейном участке *f*=*0,1*. Радиус кривизны траектории *R*=*1м*. Время прохождения участка *ВД* $t_{ВД} = 0{,}6$ с.

Угол наклона трубы $\alpha = 30^o$.

Определить V_B, V_D, V_C, N_C.

Решение. Для определения скорости шарика в положении *B* применим теорему об изменении кинетической энергии материальной точки (21). Движение шарика на участке *AB* траектории происходит под действием силы упругости $\overline{F}_{упр}$, силы трения скольжения $\overline{F}_{тр}$ и силы тяжести $\overline{G}$.



За начальную скорость принимаем скорость шарика в положении *A*, тогда

$$\frac{mV_B^2}{2} - \frac{mV_A^2}{2} = A(F_{упр}) + A(F_{тр}) + A(G). \qquad (23)$$

Подставим в (23) значение работ, получим

$$\frac{mV_B^2}{2}-\frac{mV_A^2}{2}=\frac{ch^2}{2}-F_{TP}S+mgH.$$

Учитывая, что $h=h_0$, $S=h_0$, $H=h_0\sin\alpha$, $F_{тр}=fN=fmg\cos\alpha$, получим

$$\frac{mV_B^2}{2}-\frac{mV_A^2}{2}=\frac{ch_0^2}{2}-fmg\cos\alpha\cdot h_0+mgh_0\sin\alpha. \qquad (24)$$

Разделим (24) на массу и умножим на 2:

$$V_B^2-V_A^2=\frac{ch_0^2}{m}-2fh_0g\cos\alpha+2gh_0\sin\alpha,$$

отсюда

$$V_B=\sqrt{h_0\left(\frac{ch_0}{m}-2fg\cos\alpha+2g\sin\alpha\right)+V_A^2}. \qquad (25)$$

Подставим в (25) данные условия задачи, получим $v_B=4{,}95м/с$.

Для определения скорости шарика в положении *Д* применим теорему об изменении количества движения материальной точки (16). Движение шарика на участке *ВД* траектории происходит под действием силы трения $\overline{F_{тр}}$ и силы тяжести $\overline{G}$. За начальную скорость шарика принимаем скорость в положении *В*, тогда

$$mV_{Дx}-mV_{Bx}=S_x\left(\overline{F}_{тр}\right)+S_x\left(\overline{G}\right), \qquad (26)$$

где

$$S_x\left(\overline{F}_{тр}\right)=-F_{тр}\cdot t=-fmgt\cdot\cos\alpha;$$

$$S_x\left(\overline{G}\right)=G\cdot t\cdot\sin\alpha=mgt\cdot\sin\alpha;$$

$$V_{Дx}=V_Д; \qquad V_{Bx}=v_B.$$

Тогда (26) примет вид

$$mV_D - mV_B = - fmgt\cos\alpha + mgt\sin\alpha. \tag{27}$$

Разделив (27) на массу, получим

$$V_Д = V_B + gt(\sin\alpha - f\cos\alpha).$$

Подставив данные условия задачи, получим

$$V_D = 7{,}35 м/с.$$

Для определения скорости шарика в положении *С* применим теорему об изменении кинетической энергии материальной точки. Движение шарика на участке *ДС* траектории происходит только под действием силы тяжести *G*. Скорость шарика в положении *Д* принимаем за начальную, тогда

$$\frac{mV_C^2}{2} - \frac{mV_D^2}{2} = A(\overline{G}), \tag{28}$$

$$A(\overline{G}) = G \cdot H,$$

где $$H = R\sin\alpha + R\cos\alpha.$$

Тогда (28) примет вид

$$\frac{mV_C^2}{2} - \frac{mV_D^2}{2} = mg(R\sin\alpha + R\cos\alpha).$$

Разделим это выражение на массу и умножим на 2, получим

$$V_C^2 = V_D^2 + 2gR(\sin\alpha + \cos\alpha). \tag{29}$$

Подставив в (29) данные условия задачи, получим $v_C = 8{,}3 м/с.$

Для определения давления шарика на стенку канала в положении C, применим принцип Даламбера для материальной точки (22).

Добавим к действующим на точку силам $\overline{G}$ и $\overline{N_C}$ силу инерции $\overline{\Phi}$. Тогда в проекции на нормаль сумма всех сил должна быть равна 0:

$$\sum F_n = 0: \qquad N_C - G \cdot \cos\alpha - \Phi_n = 0,$$

$$\Phi_n = ma_n = m\frac{V_C^2}{R},$$

тогда

$$N_C = m\left(g\cos\alpha + \frac{V_C^2}{R}\right). \tag{30}$$

Подставив в (30) все значения, получим $N_C = 38{,}7H$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бутенин, Н.В. Курс теоретической механики: учеб. пособие. Т.2 / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. – 5-е изд. – СПб.: Лань, 2008. – 72 с.

2. Зотов, А.В. Курсовые работы по теоретической механике: метод. указания / А.В. Зотов, А.А.Вишняков. – Красноярск: Изд-во КрасГАУ, 1998.

3. Зотова, А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах: учеб. пособия / А.С. Зотова, А.В. Зотов, Л.П. Назарова. – Красноярск: Изд-во Сиб. гос. аэрокосм. ун-та им. акад. М.Ф. Решетнева, 1999. – 132 с.

4. Яблонский, А.А. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике /А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – 14-е изд. – М.: Интеграл-Пресс, 2007.

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Методические указания для самостоятельной работы

Александр Вадимович Зотов
Ольга Евгеньевна Носкова

Электронное издание

Редактор Е.А. Андреева

Подписано в свет 03.11.2016. Регистрационный номер 111
Редакционно-издательский центр Красноярского государственного аграрного университета
660017, Красноярск, ул. Ленина, 117
e-mail: rio@kgau.ru