

Министерство сельского хозяйства Российской Федерации  
ФГБОУ ВО «Красноярский государственный аграрный университет»

*Р.М. Христинич, Е.В. Христинич, А.Р. Христинич*

**ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ  
В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ**

*Методические указания для самостоятельной работы*

*Электронное издание*

Красноярск 2016

*Рецензент*

*А. Г. Туйгунова, канд. техн. наук, доц. каф. системы обеспечения движения поездов Красноярского института железнодорожного транспорта – филиала ИрГУПС*

**Христинич, Р.М.**

Переходные процессы в линейных электрических цепях: метод. указания для самостоятельной работы [Электронный ресурс] / Р.М. Христинич, Е.В. Христинич, А.Р. Христинич; Краснояр. гос. аграр. ун-т. – Красноярск, 2016. – 76 с.

Приведены темы самостоятельных работ по дисциплине «Теоретические основы электротехники», дан теоретический материал, список учебной литературы.

Предназначено для студентов дневной и заочной форм обучения по направлению 35.03.06 «Агроинженерия».

Печатается по решению редакционно-издательского совета  
Красноярского государственного аграрного университета

## ВВЕДЕНИЕ

При всех изменениях в электрической цепи – включении, выключении, коротком замыкании, колебаниях величины какого-либо параметра – в ней возникают переходные процессы.

При переходных процессах могут возникать большие перенапряжения, сверхтоки, электромагнитные колебания, которые могут нарушить работу устройства вплоть до его выхода из строя.

Изучение переходных процессов весьма важно, так как позволяет установить, как деформируется по форме и амплитуде сигнал, позволяет выявить превышения напряжения на отдельных участках цепи, которые могут оказаться опасными для изоляции установки, увеличения амплитуд токов, которые могут в десятки раз превышать амплитуду тока установившегося периодического процесса, а также позволяет определять продолжительность переходного процесса. Кроме того, работа многих электротехнических устройств, особенно устройств промышленной электроники, основана на переходных процессах, что также объясняет необходимость их изучения.

# 1. ВОЗНИКНОВЕНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ И ЗАКОНЫ КОММУТАЦИИ

В электрических цепях могут происходить включения и отключения пассивных или активных ветвей, короткие замыкания отдельных участков, переключения и т. д. Такие изменения параметров называют коммутационными (происходят мгновенно), а процессы называют переходными. Переходные процессы заканчиваются спустя некоторое время (теоретически бесконечно большое) после коммутации.

Начало отсчета времени переходного процесса при  $t = 0$  начинается с момента коммутации.

Момент времени непосредственно перед коммутацией обозначается « $0 -$ », а после коммутации – « $0 +$ ».

Существует два закона коммутации.

**Первый закон коммутации.** В индуктивном элементе ток и магнитный поток непосредственно после коммутации в момент, который называется моментом коммутации  $t = 0 +$  или  $t = 0$  сохраняет значение, которое он имел непосредственно перед коммутацией, т. е. при  $t = 0 -$  и дальше начинает изменяться с этого значения:

$$i_L(0 +) = i_L(0) = i_L(0 -). \quad (1.1)$$

Если допустить, что в момент коммутации ток на катушке изменится скачком, то напряжение на индуктивном элементе

$u_L = L di_L / dt$  будет бесконечно большим, а в цепи не будет выполняться второй закон Кирхгофа.

**Второй закон коммутации.** На емкостном элементе напряжение (заряд) сохраняет в момент коммутации то значение, которое оно имело непосредственно перед коммутацией, и в дальнейшем оно изменяется, начиная именно с этого значения:

$$u_C(0 +) = u_C(0) = u_C(0 -). \quad (1.2)$$

Если допустить, что в момент коммутации напряжение на емкостном элементе изменяется скачком, то ток  $i_C = C du_C / dt$  будет бесконечно большим и в цепи не будет выполняться второй закон Кирхгофа.

С энергетической точки зрения невозможность мгновенного изменения тока  $i_L$  и напряжения  $u_C$  объясняется невозможностью скачкообразного изменения запасенной в индуктивном и емкостном элементах энергии (энергии магнитного поля  $-Li_L^2/2$  и энергии электрического поля  $-Cu_C^2/2$ ), так как скачкообразное изменение энергии требует бесконечно больших мощностей, что не имеет физического смысла, так как реальные источники питания не обладают бесконечно большой мощностью и не могут ее обеспечить.

### 1.1. Приведение задачи в переходном процессе к решению линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

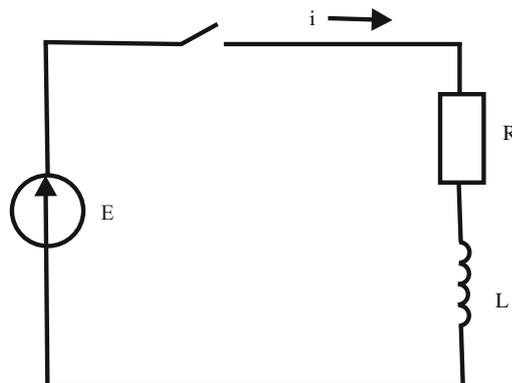


Рисунок 1.1

Запишем уравнение по второму закону Кирхгофа для схемы на рисунке 1.1 при замкнутом ключе. Сумма падений напряжения на индуктивности L и сопротивлении R равна ЭДС E:

$$u_L + Ri = E,$$

или

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E. \quad (1.3)$$

Как известно из курса математики, уравнение, содержащее неизвестную функцию (в нашем случае  $i$ ) и ее производные (в нашем случае  $L \frac{di}{dt}$ ), называют дифференциальным уравнением.

Определение тока как функции времени есть решение дифференциального уравнения. Решение линейных дифференциальных уравнений производится в основном тремя методами: классическим, операторным и методом интеграла Дюамеля.

Известно, что общий интеграл линейного дифференциального уравнения равен сумме частного решения неоднородного уравнения плюс общее решение однородного уравнения. Частное решение уравнения (1.3) равно  $E/R$ . Однородное уравнение получаем из исходного, если в нем возьмем правую часть равной нулю:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0. \quad (1.4)$$

Решением однородного уравнения является показательная функция вида  $A \cdot e^{pt}$ . Постоянные  $A$  и  $p$  не зависят от времени. Для рассматриваемого примера  $A = -\frac{E}{R}$  и  $p = -\frac{R}{L}$ . Тогда решение уравнения (1.3) записывают так:

$$i = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (1.5)$$

Частное решение неоднородного дифференциального уравнения называют принужденной составляющей тока (напряжения), а полное решение однородного уравнения – свободной составляющей.

## 1.2. Переходный, установившийся и свободный процессы

Рассмотрим пример: включение последовательного контура RLC-цепи к источнику ЭДС  $e$ , которая изменяется во времени непрерывно и задана каким-либо аналитическим выражением.

Запишем второй закон Кирхгофа для произвольного момента времени:

$$Ri + Ldi/dt + u_C = e, \quad (1.6)$$

где  $u_c$  – ток переходного процесса (переходный ток) или просто ток:

$$u_c = u_c(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i dt. \quad (1.7)$$

Когда с переходным процессом можно уже не считаться, наступает принужденный режим (установившийся режим). Когда наступит установившийся режим, уравнение (1.6) примет следующий вид:

$$Ri_y + Ldi_y/dt + u_{cy} = e, \quad (1.8)$$

где  $i_y$  и  $u_{cy}$  – ток и напряжение установившегося режима (или установившиеся ток и напряжение). Вычитая почленно (1.8) из (1.6) и обозначая  $i - i_y = i_{св}$ , получаем

$$Ri_{св} + Ldi_{св}/dt + u_{св} = 0,$$

или

$$uR_{св} + u_{Lсв} + u_{Cсв} = 0.$$

Разности токов и напряжений переходного процесса и принужденного режимов называют соответственно током и напряжением свободного процесса или просто свободным током и напряжением.

Следовательно, во время переходного процесса токи и напряжения могут быть разложены на слагающие в общем случае принужденного, а при постоянных и периодических ЭДС или токах источников установившегося режима и свободного процесса:

$$\left. \begin{array}{l} i = i_y + i_{св}; \\ u_L = u_{Ly} + u_{Lсв}; \end{array} \right\} \begin{array}{l} u_R = u_{Ry} + u_{Rсв}; \\ u_C = u_{Cy} + u_{Cсв} \end{array}$$

## 2. КЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Классический метод расчета заключается в интегрировании дифференциальных уравнений, связывающих токи и напряжения цепи, в результате чего появляются постоянные и в определении постоянных из начальных условий, вытекающих из законов коммутации.

- Начальными условиями называются значения переходных токов в индуктивных элементах и напряжений на емкостных элементах при  $t = 0$ , т. е. те значения, которые в момент коммутации не изменяются скачком. Их называют независимыми начальными условиями.

- Зависимые начальные условия – это начальные значения всех остальных токов и напряжений.

Зависимые начальные условия определяются по независимым начальным условиям при помощи уравнений, составленных по первому и второму законам Кирхгофа.

В соответствии с классическим методом расчета, переходный ток в ветви схемы представляют в виде суммы принужденного и свободного токов. Принужденный ток определяется в установившемся режиме после коммутации. Этот ток создается внешним источником питания. Если в цепь включен источник постоянной ЭДС, принужденный ток будет постоянным, если в цепи действует источник синусоидальной ЭДС, принужденный ток изменяется по периодическому, синусоидальному закону; свободный ток определяется в схеме после коммутации, из которой исключен внешний источник питания. Свободный ток создается внутренними источниками питания – ЭДС самоиндукции индуктивности или напряжением заряженной емкости.

Свободный ток определяют по формуле

$$i_{св}(t) = A_1 \cdot e^{P_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{P_2 \cdot t} + \dots$$

Количество слагаемых в формуле равно числу реактивных элементов (индуктивностей и емкостей) в схеме.  $P_1, P_2$  – корни характеристического уравнения.  $A_1, A_2$  – постоянные интегрирования, определяются с помощью начальных условий. Начальные условия – это переходные токи и напряжения в момент коммутации, в момент времени  $t$ , равный нулю. Независимыми называют начальные условия, подчиняющиеся законам коммутации, законам постепенного, непрерывного изменения. Это напряжение на емкости  $u_C(0)$  и ток в ветви с индуктивностью  $i_L(0)$  в момент коммутации. Остальные начальные условия: напряжение и ток в ветви с сопротивлением  $u_R(0)$  и  $i_R(0)$ , напряжение на индуктивности  $u_L(0)$ , ток в ветви с емкостью  $i_C(0)$  – это зависимые начальные условия. Они не подчиняются законам коммутации и могут изменяться скачком.

Для анализа переходного процесса предварительно следует привести схему к минимальному числу накопителей энергии, исключив параллельные и последовательные соединения однотипных реактивных элементов (индуктивностей или емкостей). Система интегро-дифференциальных уравнений, составленных в соответствии с законами Кирхгофа или методом контурных токов, может быть сведена путем подстановки к одному дифференциальному уравнению, которое используется для составления характеристического уравнения.

Порядок дифференциального, следовательно, и характеристического уравнения зависит от числа реактивных элементов приведенной схемы. Главная трудность в решении задачи классическим методом для уравнений высоких порядков состоит в отыскании корней характеристического уравнения и постоянных интегрирования. Поэтому для решения уравнений порядка выше второго применяют другие методы, в частности операторный метод, основанный на применении преобразования Лапласа и исключаящий трудоемкую процедуру отыскания постоянных интегрирования.

Для практических целей при анализе переходных процессов в любой схеме классическим методом может быть рекомендован следующий алгоритм.

1. Рассчитать принужденный (установившийся) режим при  $t \rightarrow \infty$ . Определить принужденные токи и напряжения.

2. Рассчитать режим до коммутации. Определить токи в ветвях с индуктивностью и напряжения на конденсаторах. Значения этих величин в момент коммутации являются независимыми начальными условиями.

3. Составить дифференциальные уравнения для свободного процесса ( $E=0$ ) в схеме после коммутации по законам Кирхгофа или по методу контурных токов. Алгебраизировать данные уравнения, получить характеристическое уравнение и найти его корни. Существуют приемы, упрощающие операцию отыскания корней характеристического уравнения, например, приравнивание нулю входного операторного сопротивления цепи, которое получается путем замены в выражении комплексного сопротивления цепи множителя « $j\omega$ » на оператор « $p$ ».

4. Записать общие выражения для искомых напряжений и токов в соответствии с видом корней характеристического уравнения.

5. Переписать величины, полученные в п. 4, и производные от них при  $t=0$ .

6. Определить необходимые зависимые начальные условия, используя независимые начальные условия.

7. Подставив начальные условия в уравнения п. 5, найти постоянные интегрирования.

8. Записать законы изменения искомых токов и напряжений.

### 3. КОРОТКОЕ ЗАМЫКАНИЕ RL-ЦЕПИ

На схеме (рис. 3.1) ветвь с сопротивлением и индуктивностью внезапно замыкается ключом К накоротко. Ток в катушке до коммутации был постоянным:

$$i = i_L = i(0-) = E/(R + R_0). \quad (3.1)$$

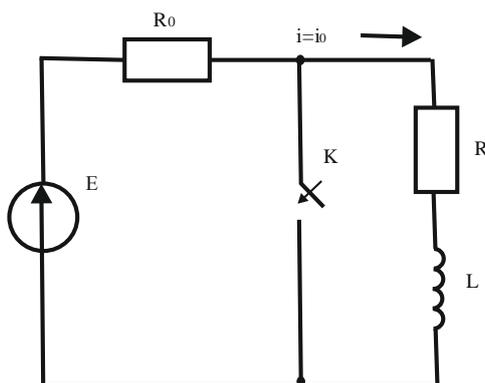


Рисунок 3.1

Найдем закон изменения тока в катушке. Установившийся ток в катушке  $i_y$  после коммутации равен нулю, тогда

$$i = i_{св}.$$

В соответствии с классическим методом

$$i_L(t) = i_{Lпр} + i_{Lсв}(t) = i_{Lпр} + A \cdot e^{Pt}. \quad (3.2)$$

Принужденный ток после коммутации замыкается через рубильник, имеющий нулевое сопротивление, и через индуктивность не протекает. Индуктивный ток имеет только свободную составляющую:

$$i_{\text{пр}} = 0, \quad i_L(t) = 0 + i_{L\text{св}}(t) = i_{L\text{св}}(t). \quad (3.3)$$

Магнитное поле, исчезая, индуцирует в индуктивной катушке ЭДС самоиндукции. Свободный ток в RC контуре существует за счет этой электродвижущей силы. Запишем уравнение для свободного тока в RL контуре, используя второй закон Кирхгофа. Свободный ток удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению первого порядка

$$Ri_{L\text{св}} + Ldi_{L\text{св}}/dt = 0, \quad (3.4)$$

общее решение которого имеем в виде экспоненты

$$i_{L\text{св}} = A \cdot e^{-\frac{Rt}{L}}, \quad (3.5)$$

где  $\frac{R}{L}$  — корень характеристического уравнения; производная

$$\frac{di_{L\text{св}}}{dt} = A \cdot P \cdot e^{Pt}.$$

Подставим значения свободного тока и производной тока в уравнение (3.4):

$$A \cdot R \cdot e^{Pt} + L \cdot A \cdot P \cdot e^{Pt} = A \cdot e^{Pt} (R + L \cdot P) = R + L \cdot P = 0. \quad (3.6)$$

Уравнение (3.6), полученное из (3.4), называют характеристическим.

$\tau = -\frac{1}{P} = \frac{L}{R}$  — постоянная времени переходного процесса, измеряется в секундах.

Постоянная времени  $\tau$  — это интервал времени, за который переходный ток уменьшается в  $e$  раз по сравнению со своим начальным значением.

Постоянную интегрирования  $A$  определяем с помощью начального условия.

При  $t = 0$  из (3.5) следует

$$i_{L_{CB}}(0) = A.$$

В соответствии с первым законом коммутации

$$A = i_L(0+) = i_{L_{CB}}(0) = i_L(0-) = E/(R + R_0).$$

После коммутации

$$i = i_{L_{CB}} = \frac{E}{R+R_0} e^{-(R/L)t} = \frac{E}{R+R_0} e^{-t/\tau}.$$

Для графического определения  $\tau$  проведем касательную к кривой  $i_{CB}$  в любой ее точке  $C$  (рис. 3.2).

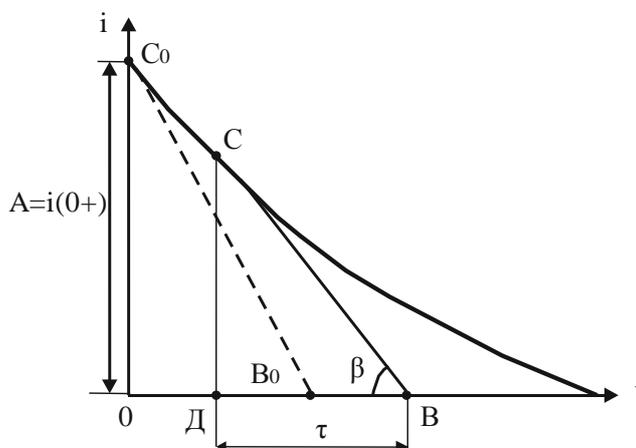


Рисунок 3.2

Значение подкасательной  $ВД$  может быть найдено из треугольника  $СВД$

$$\tau = \frac{i_{CB}}{i_{CB}/\tau} = \frac{i_{CB}}{-di_{CB}/dt} = \frac{m_i CD}{m_t \beta} = m_t ВД,$$

где  $m_i, m_{tg\beta}, m_t$  – масштабы, то есть постоянная времени равна длине любой подкасательной. В частности, она равна длине подкасательной  $OB_0$  для касательной  $C_0B_0$ , проведенной в начальной точке  $C_0$ .

Величина, обратная постоянной времени, называется коэффициентом затухания RL-цепи:

$$\alpha = 1/\tau = R/L.$$

Свободный ток затухает тем медленнее, чем больше постоянная времени  $\tau$  или чем больше коэффициент затухания  $\alpha$ , то есть чем больше индуктивность  $L$  и чем меньше сопротивление  $R$ .

Электродвижущая сила самоиндукции

$$e_L = -L \frac{di}{dt} = E \frac{R}{R + R_0} e^{-t/\tau} = -u_L$$

при  $t = 0$  равна напряжению на сопротивлении  $R$  и в момент коммутации поддерживает значение тока на начальном уровне.

С энергетической точки зрения процесс короткого замыкания RL-цепи показывает, что вся энергия, запасенная до коммутации в магнитном поле катушки равна

$$W_M = Li^2(0-)/2 = Li^2(0+)/2 = Li^2(0)/2.$$

В течение переходного процесса она превращается в сопротивлении  $R$  в тепло:

$$\int_0^\infty i^2 R dt = i^2(0) R \int_0^\infty e^{-\frac{2Rt}{L}} dt = Li^2/2.$$

#### 4. ВКЛЮЧЕНИЕ RL-ЦЕПИ НА ПОСТОЯННОЕ НАПРЯЖЕНИЕ

В схеме на рисунке 4.1 до коммутации рубильник разомкнут. В результате коммутации рубильник замыкается и подключает R-L цепь к источнику постоянной ЭДС.

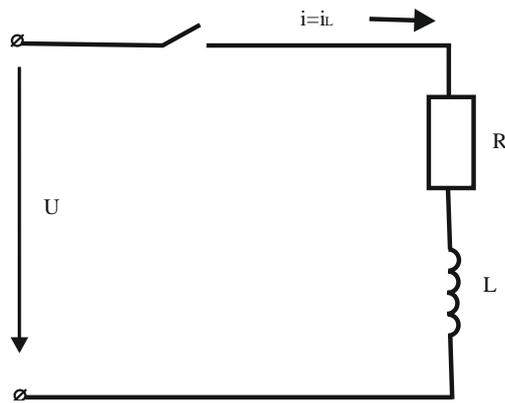


Рисунок 4.1

Дифференциальное уравнение при включении RL-цепи на постоянное напряжение (к источнику ЭДС  $E$ ) неоднородное

$$Ri = L \frac{di}{dt} = E$$

и имеет решение в виде суммы установившейся и свободной составляющих

$$i = i_y + i_{св.}$$

Установившаяся составляющая тока равна

$$i_y = E/R.$$

В свободном режиме из схемы исключен внешний источник питания. Свободный ток определяется по формуле

$$i_{св} = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Постоянная интегрирования  $A$  определяется с учетом известного начального условия. До коммутации тока в цепи не было, поэтому согласно первому закону коммутации при  $t = 0$  имеем

$$0 = E/R + A, A = -E/R,$$

$$i(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Напряжение на индуктивности равно

$$u_L = u_{Lсв} = L \frac{di}{dt} = -L \frac{E}{R} \left( -\frac{R}{L} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} = E e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Поскольку до включения напряжение  $u_L$  было равно нулю, а в момент коммутации  $u_L = E$ , то переходное и свободное напряжения на индуктивности изменяются скачком. На рисунке 4.2 изображены кривые переходного, принужденного, свободного токов и переходного напряжения на индуктивности. Свободный ток и напряжение на индуктивности плавно уменьшаются до нуля. В момент коммутации свободный и принужденный токи одинаковы по абсолютной величине. Переходный ток начинается при включении с нуля, затем возрастает, приближаясь к установившемуся постоянному значению.

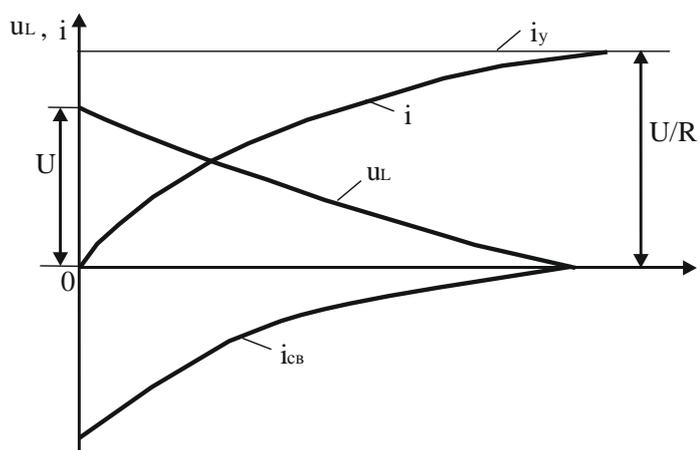


Рисунок 4.2

## 5. ВКЛЮЧЕНИЕ RL-ЦЕПИ НА СИНУСОИДАЛЬНОЕ НАПРЯЖЕНИЕ

При включении RL-цепи (см. рис. 4.1) на синусоидальное напряжение  $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$ , установившийся ток также синусоидальный:

$$i_y = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + \psi - \varphi),$$

где  $z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ ;  $\operatorname{tg}\varphi = \omega L/R$ .

Переходный ток равен

$$i = i_y + i_{св} = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + \psi - \varphi) + A e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

В цепи до включения тока не было. Поэтому при  $t = 0$  имеем

$$0 = \frac{U_m}{Z} \sin(\psi - \varphi) + A$$

и

$$A = -\frac{U_m}{Z} \sin(\psi - \varphi).$$

Окончательно получаем

$$i = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + \psi - \varphi) - \frac{U_m}{Z} \sin(\psi - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Напряжение на индуктивности

$$u_L = L \frac{di}{dt} = U_m \left[ \sin \varphi \cdot \sin\left(\omega t + \psi - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + \cos \varphi \cdot \sin(\psi - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau}} \right].$$

Зависимости переходного тока от времени при различных значениях разностей  $\psi - \varphi$  показаны на рисунке 5.1. Их анализ позволяет сделать следующие выводы:

1. Если в момент включения установившийся ток равен нулю ( $\psi - \varphi = 0$  или  $\psi - \varphi = \pi$ ), то свободной составляющей тока не возникает и в цепи сразу возникает установившийся режим.

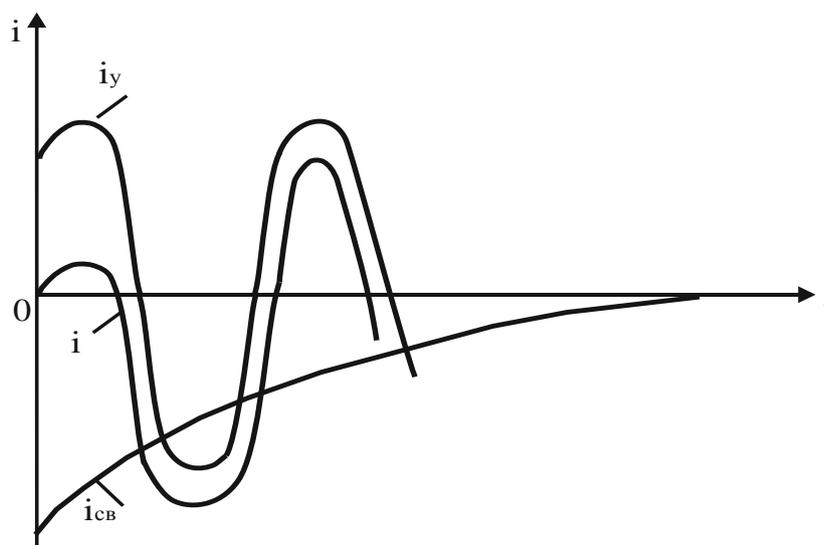


Рисунок 5.1

2. Если в момент включения установившийся ток имеет наибольшее значение ( $\psi - \varphi = \frac{\pi}{2}$ ), свободный ток достигает максимального по модулю значения приблизительно через половину периода, однако ни при каких условиях он не может превышать удвоенной амплитуды установившегося тока.

## 6. КОРОТКОЕ ЗАМЫКАНИЕ RC-ЦЕПИ

Конденсатор емкостью  $C$  был заряжен от источника постоянной ЭДС (рис. 6.1) до напряжения  $U_0 = E$ , затем замкнулся ключ и конденсатор разрядился через резистор  $R$ . Ветвь с резистором и конденсатором назовем RC-цепь. В цепи существует только свободный ток за счет напряжения заряженного конденсатора. Выберем положительные направления напряжения на конденсаторе и тока совпадающими, так что ток

$$i = i_{св} = dq/dt = C du_c/dt. \quad (6.1)$$

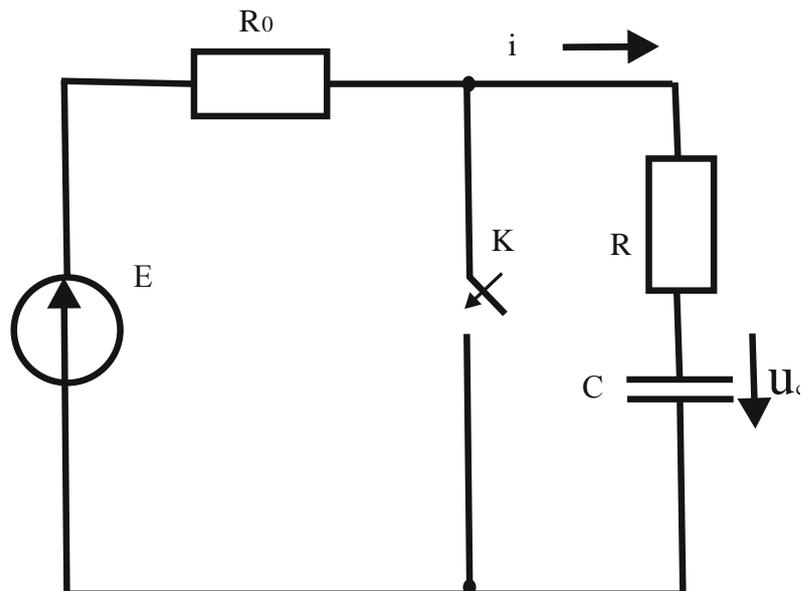


Рисунок 6.1

Запишем уравнение второго закона Кирхгофа для цепи после коммутации:

$$Ri + u_c = 0. \quad (6.2)$$

На основании (6.1) и (6.2) составим дифференциальное уравнение для напряжения:

$$R \cdot C du_c / dt + u_c = 0. \quad (6.3)$$

Это однородное уравнение первого порядка. Соответствующее характеристическое уравнение

$$RCp + 1 = 0$$

имеет корень  $p = -\frac{1}{RC}$ . Общее решение:

$$u_c = u_{cсв} = Ae^{-\frac{t}{RC}} = Ae^{-\frac{t}{\tau}} = Ae^{-\alpha t}.$$

Величина  $\alpha = \frac{1}{\tau}$  называется коэффициентом затухания RC-цепи.

Чем больше  $C$  и  $R$ , тем медленнее в цепи затухают свободные ток и напряжение, тем медленнее происходит разрядка конденсатора.

Постоянную интегрирования  $A$  определяют из начальных условий.

Согласно закону коммутации напряжение на емкости в момент коммутации не может измениться скачком, поэтому

$$u_C(0) = u_{C\text{св}}(0) = A = U_0.$$

Для напряжения на конденсаторе получим

$$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

Ток согласно (6.1) равен

$$i = i_{\text{св}} = -\frac{u_C}{R} = -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (6.4)$$

Переходный ток и переходное напряжение на конденсаторе по показательному закону уменьшаются до нуля (рис. 6.2).

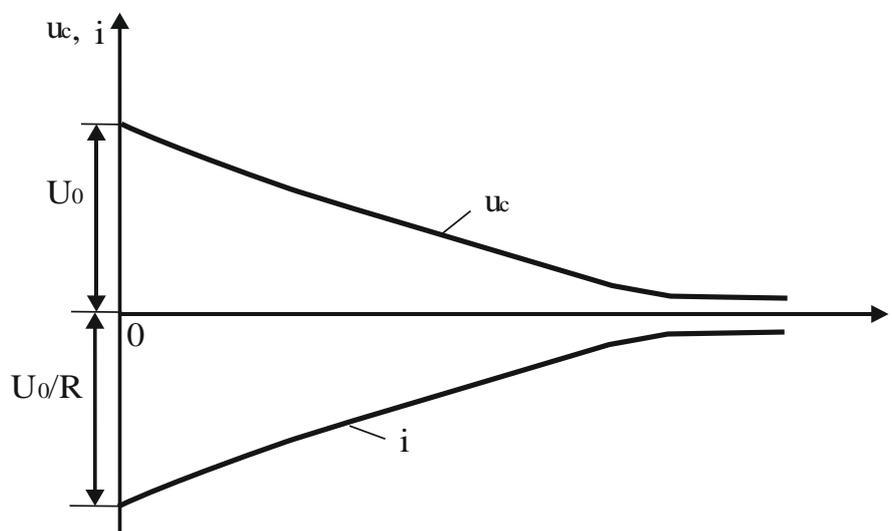


Рисунок 6.2

С энергетической точки зрения процесс короткого замыкания RC-цепи характеризуется переходом энергии, запасенной до коммутации в электрическом поле конденсатора, в тепло в резисторе

$$\int_0^{\infty} i^2 R dt = \frac{U_0^2}{R} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{RC}} dt = \frac{CU_0^2}{2}.$$

## 7. ВКЛЮЧЕНИЕ RC-ЦЕПИ НА ПОСТОЯННОЕ НАПРЯЖЕНИЕ

Рассмотрим переходный процесс при включении RC-цепи на постоянное напряжение (рис. 7.1). Полагаем, что до коммутации конденсатор не заряжен, напряжение на нем  $u_c(0-) = 0$ . В результате коммутации рубильник замыкается, и конденсатор полностью заряжается. Принужденное напряжение на емкости равно ЭДС источника питания  $u_{cпр} = E$ .

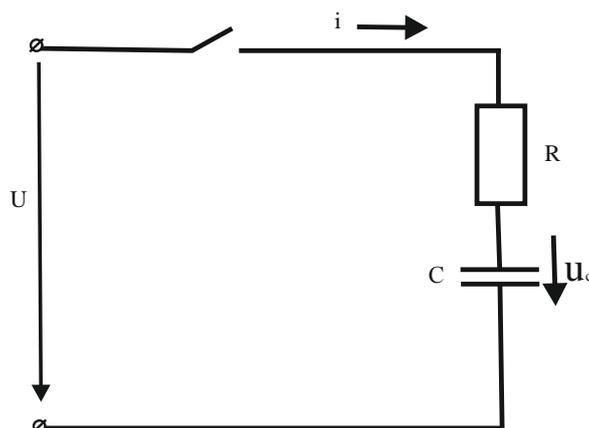


Рисунок 7.1

Уравнение, составленное по второму закону Кирхгофа:

$$Ri + u_c = E.$$

С учетом (6.1) равно

$$\frac{RC du_c}{dt} + u_c = E.$$

Соответствующее однородное уравнение, то есть уравнение для свободного процесса, совпадает с уравнением (6.2). Поэтому свободное напряжение емкости равно

$$u_{cсв} = A \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (7.1)$$

Переходное напряжение на емкости

$$u_c = u_{cу} + u_{cсв} = E + Ae^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Так как конденсатор не был заряжен, то есть при  $t = 0$  напряжение  $u_C(0_-) = 0$ , то  $A = -E$  и

$$u_C = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

Для тока получим

$$i = C \frac{du_C}{dt} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Начальное значение тока  $i(0_+)$  может быть получено и непосредственно, так как  $u_C(0) = 0$ , то все напряжение источника при  $t = 0$  равно напряжению  $u_R = Ri$ .

Кривые напряжений и тока, изображенные на рисунке 7.2, показывают, что напряжение на емкости и ток в цепи не устанавливаются мгновенно. Напряжение возрастает, а ток спадает тем медленнее, чем больше постоянная времени цепи  $\tau$ , то есть чем медленнее затухает свободное напряжение  $u_{Cсв}$ .

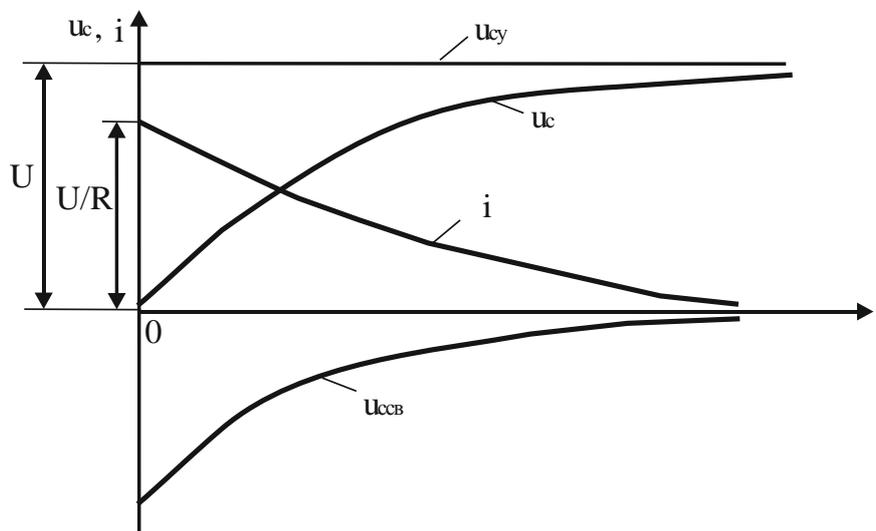


Рисунок 7.2

## 8. ВКЛЮЧЕНИЕ RC-ЦЕПИ НА СИНУСОИДАЛЬНОЕ НАПРЯЖЕНИЕ

При включении RC-цепи (рис. 7.1) на синусоидальное напряжение

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi)$$

Установившееся напряжение на емкости равно

$$u_{Cy} = \frac{U_m}{Z\omega C} \sin(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}),$$

где

$$Z = \sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}.$$

Изменение свободного напряжения на емкости по-прежнему определяется соотношением (7.1) и переходное напряжение на емкости определяется по формуле

$$u_C = u_{Cy} + u_{Cсв} = \frac{U_m}{Z\omega C} \sin(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}) + Ae^{-\frac{t}{\tau}},$$

где  $\tau = RC$ .

Начальные условия дают  $u_C = 0$  при  $t = 0$ . Отсюда

$$A = -\frac{U_m}{Z\omega C} \sin(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2})$$

Напряжение на емкости равно

$$u_C = \frac{U_m}{Z\omega C} \sin(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}) - \frac{U_m}{Z\omega C} \sin(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2})e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Ток равен

$$i = C \frac{du_C}{dt} = \frac{U_m}{R} \left[ \cos(\varphi) \cdot \sin(\omega t + \psi - \varphi) - \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}) e^{-\frac{t}{\tau}} \right].$$

При  $t = 0$  ток  $i(0+) = U_m \sin(\frac{\varphi}{R})$ , так как в момент включения цепи емкость как бы «заморожена» ( $u_C(0) = 0$ ) и напряжение питания равно напряжению на резисторе.

## 9. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В RLC-ЦЕПИ

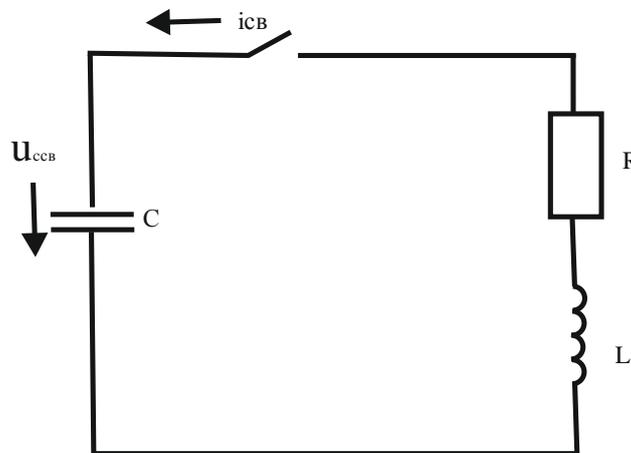


Рисунок 9.1

По второму закону Кирхгофа свободные напряжения на всех элементах цепи взаимно уравниваются. Поэтому в последовательном контуре при отсутствии источников, то есть при  $i = i_{св}$ ,  $u_C = u_{св}$  (рис. 9.1):

$$Ri + L \frac{di}{dt} + u_C = 0, \quad (9.1)$$

где

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{u_C}{dt}. \quad (9.1 \text{ а})$$

Подставляя значения  $i$  в уравнение (9.1), после дифференцирования получаем для напряжения  $u_C$  дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = 0. \quad (9.2)$$

Заряд на конденсаторе удовлетворяет такому же дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0.$$

Дифференцируя это уравнение по времени, с учетом (9.2) получаем дифференциальное уравнение для тока:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0. \quad (9.3)$$

Для решения любого из этих дифференциальных уравнений составим характеристическое уравнение

$$p^2 + \frac{R}{L} p + \frac{1}{LC} = 0. \quad (9.3 \text{ а})$$

Характер свободного процесса зависит только от параметров RLC-цепи, то есть от вида корней характеристического уравнения:

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}. \quad (9.4)$$

### 9.1. Аперриодическая разрядка конденсатора

Аперриодической разрядкой конденсатора, заряженного до напряжения  $U_0$  через резистор и катушку индуктивности, называется разрядка, при которой напряжение на конденсаторе монотонно спадает от  $U_0$  до нуля, то есть не происходит перезарядки конденсатора.

Аперриодический характер свободного процесса (разрядки конденсатора) имеет место, если корни характеристического уравнения (9.4) действительные, то есть, если

$$\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}$$

или

$$R > 2\sqrt{L/C}. \quad (9.5)$$

Критическое сопротивление контура – это такое наименьшее его значение, при котором свободный процесс имеет еще апериодический характер:

$$R_{\text{кр}} = 2\sqrt{L/C}. \quad (9.6)$$

Корни  $p_1$  и  $p_2$  действительные и различные, или выполняется неравенство  $R > R_{\text{кр}}$ .

Общее решение уравнения (9.3) при различных корнях записывается в виде

$$u_{\text{св}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}, \quad (9.7)$$

где при условии (9.5)  $A_1$  и  $A_2$  – действительные постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий;  $p_1$  и  $p_2$  – действительные и различные корни характеристического уравнения.

Корни всегда должны быть отрицательные, так как процесс затухающий. Согласно (9.1 а) ток

$$i_{\text{св}} = C \frac{du_{\text{св}}}{dt} = C(A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t}). \quad (9.8)$$

Из начальных условий  $u_C(0) = U_0$  и  $i(0) = 0$  определим значения постоянных интегрирования. Подставив начальные условия в (9.7) и (9.8), получим

$$U_0 = A_1 + A_2; 0 = A_1 p_1 + A_2 p_2,$$

откуда

$$A_1 = \frac{p_2 U_0}{(p_2 - p_1)}; A_2 = -\frac{p_1 U_0}{(p_2 - p_1)}.$$

При этих значениях постоянных интегрирования напряжение (9.7) и ток (9.8) равны

$$u_C = u_{C\text{св}} = \frac{U_0}{(p_2 - p_1)} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t});$$

$$i = i_{\text{св}} = \frac{C p_1 p_2 U_0}{(p_2 - p_1)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}).$$

Так как  $p_1 \cdot p_2 = \frac{1}{LC}$ , то

$$i = \frac{U_0}{L(p_2 - p_1)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}).$$

Напряжение на индуктивности равно

$$u_L = u_{L\text{св}} = L \frac{di}{dt} = \frac{U_0}{(p_2 - p_1)} (p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}).$$

Графики  $u_C$ ,  $u_L$ ,  $i$  имеют вид

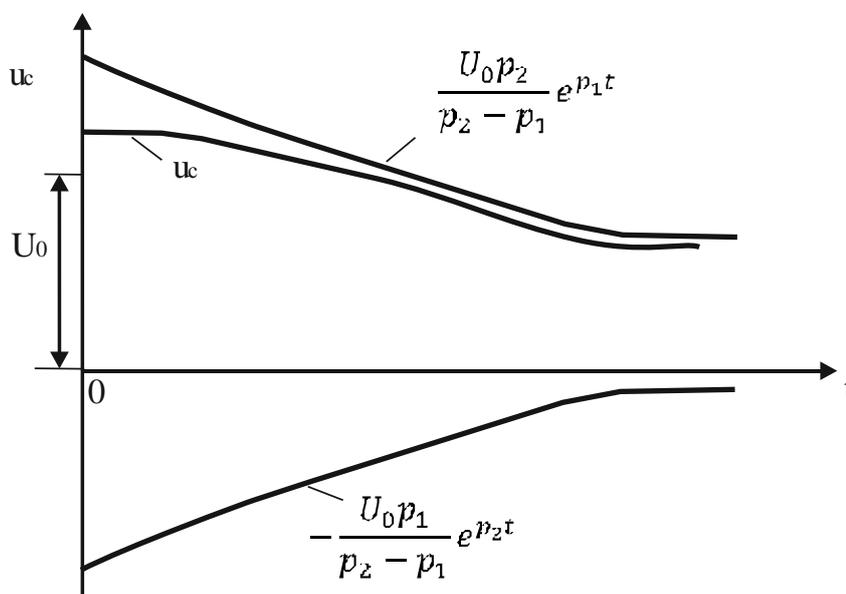


Рисунок 9.2

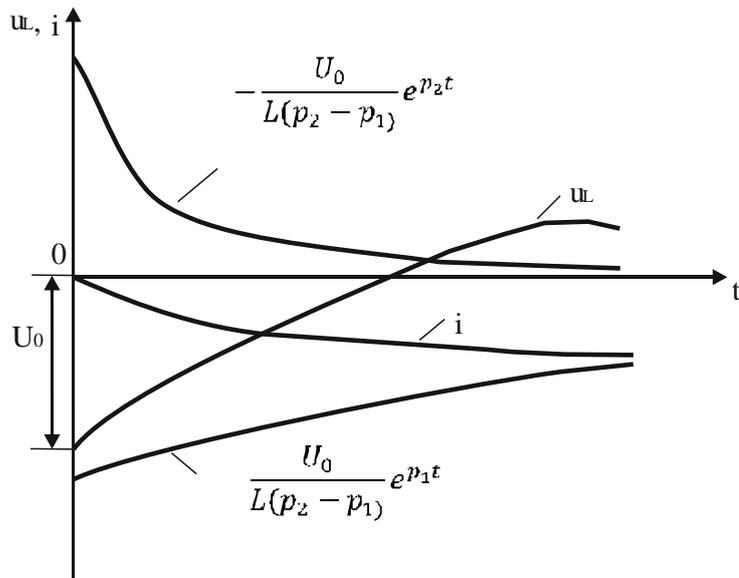


Рисунок 9.3

## 9.2. Предельный случай аperiodической разрядки конденсатора

Предельный случай аperiodической разрядки конденсатора имеет место, если сопротивление контура  $R = R_{кр}$ , то есть корни характеристического уравнения (9.3 а) действительные и равные

$$p_1 = p_2 = p = -R/2L.$$

Общее решение уравнения (9.2) (однородного дифференциального) имеет вид

$$u_C = u_{CСВ} = (A_1 + A_2 t) e^{pt}. \quad (9.9)$$

В случае цепи с тремя равными корнями:

$$(A_1 + A_2 t + A_3/t^2) e^{pt}.$$

На основании (9.1 а) для тока  $i_{СВ}$  получим

$$i_{СВ} = i = C(A_2 + pA_1 + pA_2 t) e^{pt}. \quad (9.10)$$

При начальных условиях  $u_C(0) = U_0$  и  $i(0) = 0$  имеем

$$A_1 = U_0, \quad A_2 = -pU_0.$$

Подставив  $A_1$  и  $A_2$  в (9.9) и (9.10), получим

$$\begin{aligned} u_C &= U_0(1 - pt)e^{pt}, \\ i &= -Cp^2U_0te^{pt} = -\frac{U_0}{L}te^{pt}, \\ U_L &= L\frac{di}{dt} = -U_0(1 + pt)e^{pt}. \end{aligned}$$

Кривые  $i$ ,  $u_C$ ,  $u_L$  аналогичны кривым, изображенным на рисунке 9.2 и рисунке 9.3.

### 9.3. Периодическая (колебательная) разрядка конденсатора

Периодическая (колебательная) разрядка конденсатора имеет место при условии  $R < R_{кр}$ , то есть когда корни характеристического уравнения (9.3 а) комплексные и сопряженные. Обозначим в (9.4)

$$\alpha = R/2L, \quad (9.11)$$

$$\omega_{св} = \sqrt{1/LC - R^2/4L^2} = 2\pi/T_{св}.$$

так, что

$$\sqrt{\alpha^2 + \omega_{св}^2} = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

где  $\omega_{св}$  – угловая частота,  $T_{св}$  – период свободных колебаний.

Для корней  $p_1$  и  $p_2$  имеем

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_{св}. \quad (9.12)$$

Решение уравнения (9.2) при (9.12) имеет вид

$$u_C = u_{Cсв} = Ae^{-\alpha t} \sin(\omega_{св} t + \psi). \quad (9.13)$$

Ток

$$i = i_{CB} = CAe^{-\alpha t}[-\alpha \sin(\omega_{CB} t + \varphi) + \omega_{CB} \cos(\omega_{CB} t + \varphi)]. \quad (9.14)$$

Так как переходные напряжения и ток по-прежнему равны их свободным составляющим и начальные условия те же, как и раньше, то по (9.13) и (9.14) получим для  $t = 0$ :

$$U_0 = A \sin(\psi);$$

$$0 = CA(-\alpha \sin(\psi + \omega_{CB} \cos \psi).$$

Из последних соотношений находим

$$A \cdot \cos \psi = \frac{\alpha}{\omega_{CB}} U_0; \operatorname{tg} \psi = \frac{\omega_{CB}}{\alpha};$$

$$A = \frac{U_0}{\omega_{CB} \sqrt{LC}};$$

$$\sin \psi = \frac{\omega_{CB}}{\sqrt{\alpha^2 + \omega_{CB}^2}};$$

$$\cos \psi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \omega_{CB}^2}}.$$

Подставим значения  $A$ ,  $\sin \psi$  и  $\cos \psi$  в (9.13) и (9.14) и обозначим

$$U_{Cm} = U_{Lm} = U_0 / \omega_{CB} \sqrt{LC} = U_0 / \sin \psi;$$

$$I_m = U_0 / \omega_{CB} L.$$

Получим

$$u_C = U_{Cm} e^{-\alpha t} \sin(\omega_{CB} t + \psi); \quad (9.15)$$

$$i = I_m e^{-\alpha t} \sin(\omega_{CB} t + \pi); \quad (9.16)$$

$$u_L = U_{Lm} e^{-\alpha t} \sin(\omega_{CB} t - \psi). \quad (9.17)$$

Кривые изменения  $i$ ,  $u_C$  приведены на рисунке 9.4;  $\alpha$ ,  $\omega_{CB}$  и  $\psi$  определяются только параметрами  $R$ ,  $L$ ,  $C$ ;  $U_{Cm}$ ,  $U_{Lm}$ ,  $I_m$  зависят от параметров  $R$ ,  $L$ ,  $C$  и  $U_0$ .

Декрементом колебания называется постоянная величина, зависящая только от  $R, L, C$  (не зависящая от времени  $t$ ) и равная отношению напряжений в моменты времени  $t$  и  $t + T_{CB}$ .

$$\frac{u_C(t)}{u_C(t + T_{CB})} = \frac{U_{cm} e^{-\alpha t} \sin(\omega_{CB} t + \psi)}{U_{cm} e^{-\alpha(t+T_{CB})} \sin(\omega_{CB}(t + T_{CB}) + \psi)} = e^{\alpha T_{CB}}$$

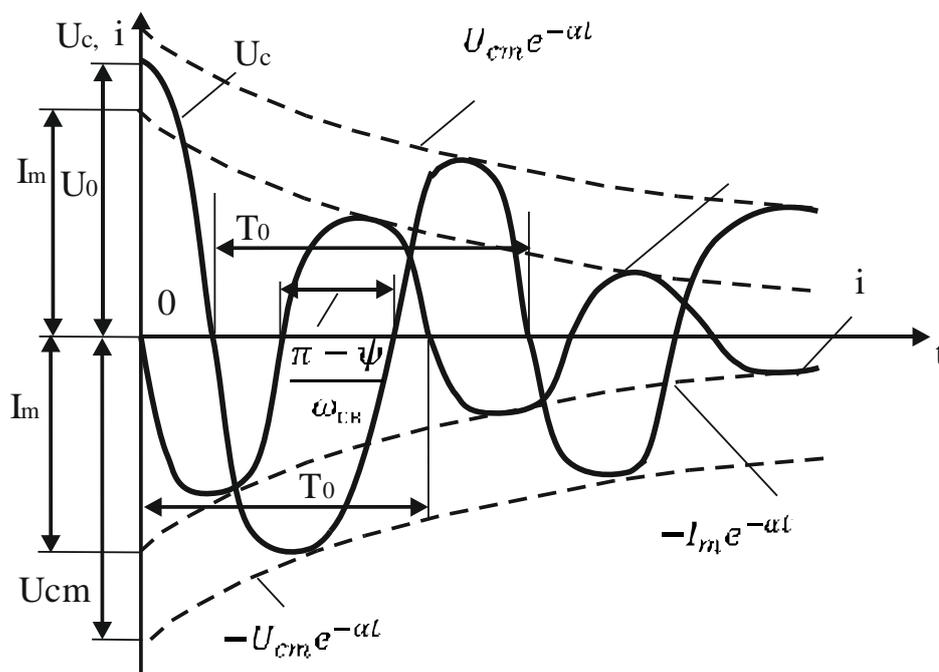


Рисунок 9.4

Часто быстроту затухания колебаний характеризуют натуральным логарифмом отношения

$$\Delta = \ln \frac{u_C(t)}{u_C(t+T_{CB})} = \alpha T_{CB}.$$

Называют данное отношение логарифмическим декрементом колебаний.

## 10. ВКЛЮЧЕНИЕ RLC-ЦЕПИ НА ПОСТОЯННОЕ НАПРЯЖЕНИЕ

Контур (рис. 10.1) будет апериодическим, если каждая из составляющих его свободного тока изменяется по экспоненциальному закону.

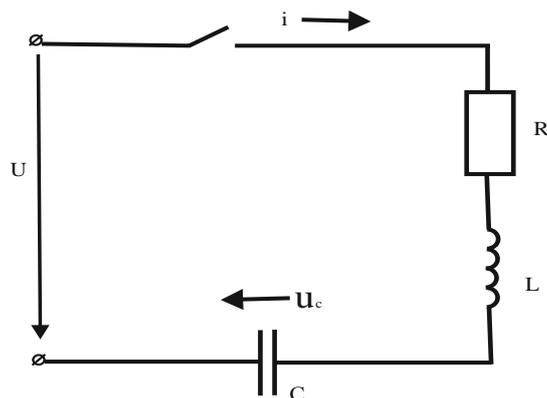


Рисунок 10.1

Сравнивая с п. 9.1 видим, что  $i_y = 0$ , а  $u_{cy} = U$ , а не 0. Поэтому в отличие от апериодической разрядки конденсатора теперь  $u_{cсв}(0) = -U$ , то есть знаки  $A_1$  и  $A_2$  изменяются на обратные. Переходные напряжения и ток имеют вид

$$u_c = U + \frac{U}{p_1 - p_2} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}); \quad (10.1)$$

$$i = \frac{U}{L(p_1 - p_2)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}); \quad (10.2)$$

$$u_L = U + \frac{U}{p_1 - p_2} (p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}). \quad (10.3)$$

Кривые  $i$ ,  $u_c$  и  $u_L$  приведены на рисунке 10.2.

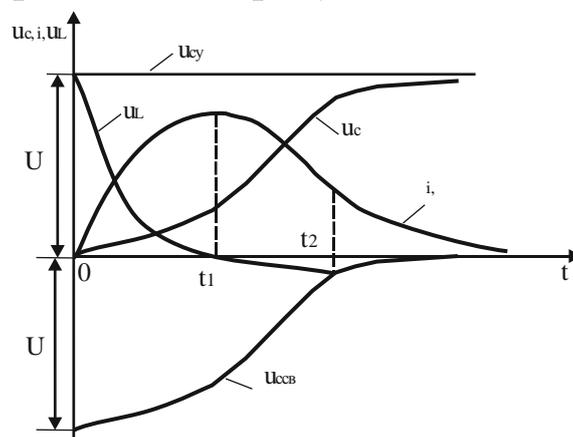


Рисунок 10.2

Напряжение  $u_c$  возрастает от нуля до напряжения источника  $U$ , причем точка перегиба кривой при  $t = t_1$  будет в момент, когда ток достигает максимального значения.

Включение RLC-цепи на постоянное напряжение при  $R = R_{кр}$  исследуется аналогично, как в п. 9.2.

В колебательном режиме свободные напряжения и ток изменяются как и при колебательной разрядке, только теперь  $u_{Cсв}(0) = -U$  и знак  $A$  изменяется на обратный. Поэтому знаки свободных напряжений на емкостном (9.15) и на индуктивном (9.17) элементах и тока (9.16) тоже изменяются на обратные:

$$u_C = u_{Cу} + u_{Cсв} = U - U_{Cm} e^{-\alpha t} \sin(\omega_{св} t + \psi);$$

$$i = i_{св} = I_m e^{-\alpha t} \sin \omega_{св} t;$$

$$u_L = u_{Lсв} = -U_{Lm} e^{-\alpha t} \sin(\omega_{св} t - \psi).$$

Кривые  $i$ , и  $u_C$  приведены на рисунке 10.3.

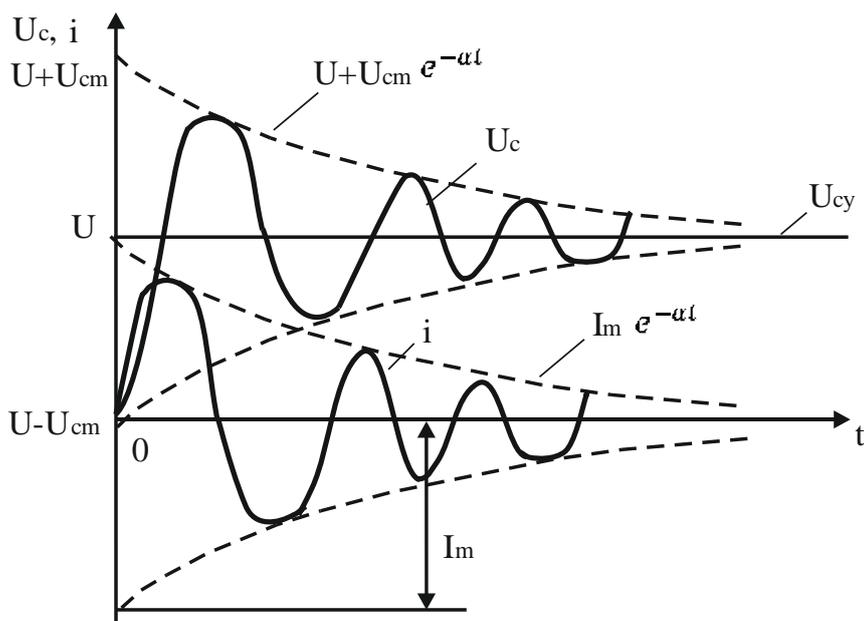


Рисунок 10.3

## 11. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ КЛАССИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

1. Необходимо найти ток  $i_1$  (рис. 11.1). Для цепи после коммутации составим систему дифференциальных уравнений по первому и второму законам Кирхгофа:

$$-i + i_1 + i_2 = \quad (11.1)$$

$$Ri + L di/dt + u_C = E \quad (11.2)$$

$$Ri_2 - u_C = 0, \quad (11.3)$$

где  $i_1 = C du_C/dt$  или  $u_C = \frac{1}{C} \int i_1 dt$ .

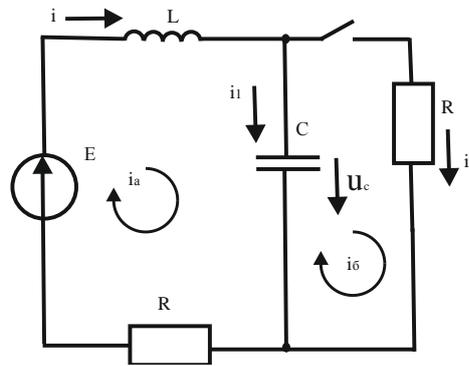


Рисунок 11.1

После подстановки  $u_C$  в (11.2) и (11.3) и дифференцирования, получим систему уравнений для трех независимых токов:

$$\left. \begin{aligned} -i + i_1 + i_2 &= 0 \\ R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2 i}{dt^2} + i_1/C &= 0 \\ -i_1/C + R \frac{di_2}{dt} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (11.4)$$

2. Определяем независимые начальные условия  $u_L(0+)$  и  $u_C(0+)$  из расчета режима цепи до коммутации. До коммутации для левого контура:

$$\begin{aligned} u_C(0-) &= u_C(0+) = u_C(0) = E; \\ i(0-) &= i(0+) = i(0) = 0. \end{aligned}$$

3. Запишем искомую величину в виде суммы установившейся и свободной составляющих

$$i_1 = i_{1y} + i_{1св}$$

4. Установившуюся составляющую найдем, рассчитав режим цепи постоянного тока после коммутации:

$$i_{1y} = 0.$$

5. Составим характеристическое уравнение и найдем его корни. Для определения корней можно составить главный определитель системы (11.4) и приравнять его нулю:

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ Rp + Lp^2 & \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C} & Rp \end{vmatrix} = 0.$$

или

$$RLp^3 + (L/C + R^2)p^2 + \frac{2R}{C}p = 0.$$

Корень  $p = 0$  соответствует установившемуся режиму, который уже найден. Два других корня определяются из характеристического уравнения

$$RLCp^2 + (L + R^2C)p + 2R = 0.$$

Они могут быть:

- а) действительные разные  $p_1, p_2$ ;
- б) действительные равные  $p_1 = p_2$ ;
- в) комплексные сопряженные:  $p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_{св}$ .

6. Запишем свободную составляющую с постоянными интегрирования, обращая внимание на вид корней:

$$\begin{aligned} i_{1св} &= A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}; \\ i_{1св} &= (A_1 + A_2 t) e^{p_1 t}; \\ i_{1св} &= A e^{-\alpha t} \sin(\omega_{св} t + \varphi). \end{aligned}$$

7. Искомое решение с двумя постоянными интегрирования для  $p_1$  и  $p_2$  различных:

$$i_1 = 0 + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$

8. Для определения  $A_1$  и  $A_2$  запишем полученное решение и его производную для  $t = 0$ :

$$\begin{aligned} i_1(0) &= A_1 + A_2; \\ \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} &= p_1 A_1 + p_2 A_2. \end{aligned}$$

Из этих уравнений можно найти  $A_1$  и  $A_2$  при известных  $i_1(0)$  и  $\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0}$ .  $i_1(0)$  определим из (11.1) для момента времени  $t = 0$ :

$$\begin{aligned} -i(0) + i_1(0) + i_2(0) &= 0; \\ Ri(0) + \left. \frac{Ldi}{dt} \right|_{t=0} + u_C(0) &= E; \\ Ri_2(0) - u_C(0) &= 0 \end{aligned}$$

В этой системе алгебраических уравнений с тремя точками, производной тока и напряжением две величины  $i(0)$  и  $u_C(0)$  известны на основании законов коммутации. Тогда остальные три величины  $i_1(0)$ ,  $i_2(0)$  и  $\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0}$  можно определить.

Для определения начального значения производной  $\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0}$  дифференцируем систему уравнений Кирхгофа (11.1) и подставляем  $t = 0$ :

$$\begin{aligned} -\frac{di}{dt} + \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} &= 0; \\ R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2 i}{dt^2} + i_1(0)/C &= 0; \end{aligned}$$

$$R \frac{di_2}{dt} - i_1(0)/C = 0.$$

Это система трех алгебраических уравнений с тремя неизвестными:  $\frac{di_1}{dt}$ ,  $\frac{di_2}{dt}$ ,  $d^2i/dt^2$ .

9. После определения  $A_1$  и  $A_2$  остается подставить их в искомое решение и расчет закончен.

Для определения других токов и напряжений не требуется заново выполнять все этапы расчета. Действительно,

$$u_C = u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_1 dt;$$

$$i_2 = \frac{u_C}{R};$$

$$i = i_1 + i_2.$$

### Пример расчета

Дана электрическая цепь, в которой происходит коммутация (рис. 11.2). В цепи действует постоянная ЭДС  $E$ . Требуется определить закон изменения во времени токов и напряжений после коммутации в ветвях схемы.

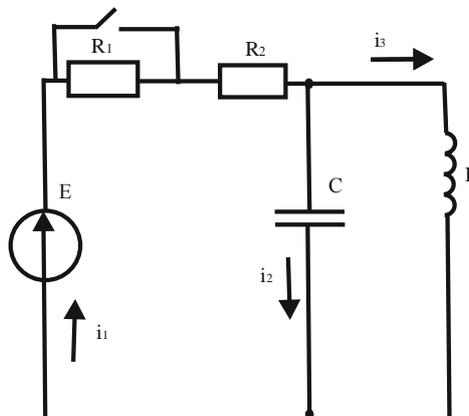


Рисунок 11.2

На основании полученного аналитического выражения построить график изменения искомой величины в функции времени в интервале от  $t = 0$  до  $t = 3|p|_{min}$ , где  $3|p|_{min}$  – меньший по модулю корень характеристического уравнения. Параметры цепи:  $R_1 = 15$  Ом;  $R_2 = 10$  Ом;  $C = 10$  мкФ;  $L = 10$  мГ;  $E = 100$  В.

**Решение.** Решение задачи получается в виде суммы принужденного и свободного параметра:

$$i(t) = i_{\text{пр.}}(t) + i_{\text{св.}}(t); u(t) = u_{\text{пр.}}(t) + u_{\text{св.}}(t),$$

где  $i_{CE}(t) = A_{1i} \cdot e^{p_1 t} + A_{2i} \cdot e^{p_2 t}$ ,  $u_{CE}(t) = A_{1u} \cdot e^{p_1 t} + A_{2u} \cdot e^{p_2 t}$ .

1. Находим токи и напряжения докоммутационного режима для момента времени  $t = (0-)$ . Так как сопротивление индуктивности постоянному току равно нулю, а емкости – бесконечности, то расчетная схема будет выглядеть так, как это изображено на рисунке 11.3. Индуктивность закорочена, ветвь с емкостью исключена.

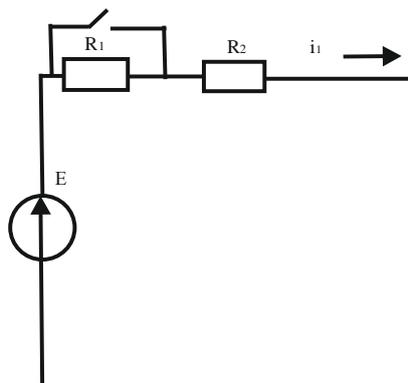


Рисунок 11.3

Так как в схеме только одна ветвь, то ток  $i_1(0-)$  равен току  $i_3(0-)$ , ток  $i_2(0-)$  равен нулю, и в схеме всего один контур. Составляем уравнение по второму закону Кирхгофа для этого контура:

$$i_1(0-) \cdot (R_1 + R_2) = E,$$

откуда

$$i_1(0-) = i_3(0-) = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{100}{15 + 10} = 4 \text{ А.}$$

Напряжение на емкости равно нулю:

$$u_c(0-) = 0.$$

2. Определим токи и напряжения непосредственно после коммутации для момента времени  $t = 0+$ . Расчетная схема приведена на

рисунке 11.4. По первому закону коммутации  $i_L(0-) = i_L(0+)$ , т. е. ток  $i_3(0-) = 4$  А. По второму закону коммутации  $i_C(0-) = i_C(0+) = 0$ .

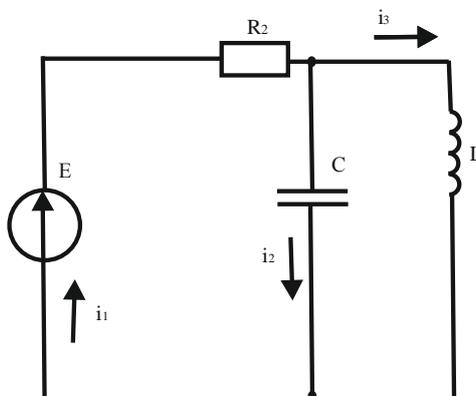


Рисунок 11.4

Для контура, образованного ЭДС  $E$ , сопротивлением  $R_2$  и емкостью  $C$ , согласно второму закону Кирхгофа имеем

$$i_2(0+) \cdot R_2 + u_C(0+) = E$$

ИЛИ

$$i_2(0+) = \frac{E - u_C(0+)}{R_2} = 10 \text{ А,}$$

$$i_1(0) = i_2(0+) + i_3(0+) = 10 + 4 = 14 \text{ А.}$$

Напряжение на сопротивлении  $R_2$  равно  $E - u_C(0+) = 100$  В, напряжение на индуктивности равно напряжению на емкости.

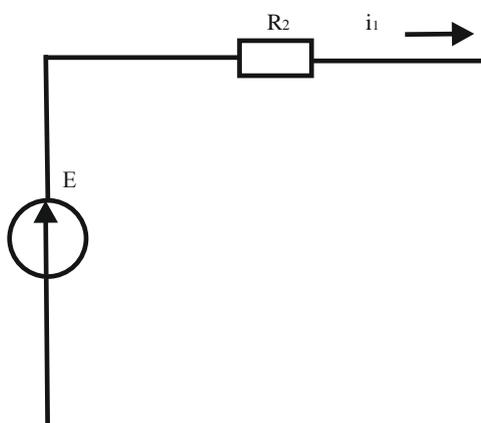


Рисунок 11.5

3. Рассчитываем принужденные составляющие токов и напряжений. Как и для докоммутационного режима индуктивность закорачивается, ветвь с емкостью исключается. Схема приведена на рисунке 11.5 и аналогична схеме для расчета параметров докоммутационного режима:

$$i_{\text{пр}1} = i_{\text{пр}3} = \frac{E}{R_2} = \frac{100}{10} = 10 \text{ А},$$

$$u_{\text{пр}R_2} = E = 100 \text{ В}; u_{\text{пр}L} = u_{\text{пр}C} = 0; i_{\text{пр}2} = 0.$$

4. Определяем свободные составляющие токов и напряжений для момента времени  $t = 0 +$ , исходя из выражений

$$i(0+) = i_{\text{пр}}(0+) + i_{\text{св}}(0+);$$

$$\text{и } u(0+) = u_{\text{пр}}(0+) + u_{\text{св}}(0+);$$

$$i_{\text{св}1}(0+) = 4 \text{ А}; i_{\text{св}2}(0+) = 10 \text{ А}; i_{\text{св}3}(0+) = -6 \text{ А};$$

$$u_{\text{св}L}(0+) = u_{\text{св}C}(0+) = 0; u_{\text{св}R_2}(0+) = 0.$$

5. Определяем производные свободных токов и напряжений в момент времени непосредственно после коммутации ( $t = 0 +$ ), для чего составим систему уравнений, используя законы Кирхгофа для схемы, изображенной на рисунке 11.4, положив  $E = 0$ .

$$i'_{\text{св}1}(0+) - i'_{\text{св}2}(0+) - i'_{\text{св}3}(0+) = 0;$$

$$i'_{\text{св}1}(0+) \cdot R_2 + u'_{\text{св}C}(0+) = 0;$$

$$-u'_{\text{св}C}(0+) + u'_{\text{св}L}(0+) = 0.$$

Производную тока через индуктивность можно найти, используя выражение  $u_L = L \frac{di}{dt}$ , а производную напряжения на емкости – из уравнения  $i_C = C \frac{du}{dt}$ .

$$u_L(0+) = L \frac{di_L(0+)}{dt} \text{ и } u_C(0+) = C \frac{di_C(0+)}{dt},$$

откуда

$$i'_{\text{св}3}(0+) = \frac{u_L(0+)}{L} = 0; u'_{\text{св}C}(0+) = \frac{i_2(0+)}{C} = 10^6.$$

Подставляя (3) в (2), после решения получаем

$$u'_{CBL}(0+) = 10^6, i'_{CB1}(0+) = 10^{-5}, i'_{CB2}(0+) = 10^{-5}, \\ u'_{CBR2}(0+) = 10^{-6}.$$

Все полученные результаты заносим в таблицу 11.1.

Таблица 11.1 – Результаты расчетов

	$i_1$	$i_2$	$i_3$	$u_L$	$u_C$	$u_{R2}$
$t = 0+$	14	10	4	0	0	100
$t = \infty$	10	0	10	0	0	100
$i_{CB}(0+)$ $u_{CB}(0+)$	4	10	-6	0	0	0
$i'_{CB}(0+)$ $u'_{CB}(0+)$	$-10^5$	$-10^5$	0	$10^6$	$10^6$	$-10^6$

6. Составляем характеристическое уравнение. Для этого исключим в послекоммутационной схеме источник ЭДС, разорвем любую ветвь и относительно разрыва запишем входное сопротивление для синусоидального тока  $\underline{Z}(j\omega)$ . Например, разорвем ветвь с сопротивлением  $R_2$ :

$$\underline{Z}(j\omega) = R_2 + \frac{j\omega L \cdot \frac{1}{j\omega C}}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}.$$

Заменим  $j\omega$  на  $p$  и приравняем полученное уравнение нулю. Получим

$$\underline{Z}(p) = R_2 + \frac{pL \cdot \frac{1}{pC}}{pL + \frac{1}{pC}} = 0$$

или

$$R_2 C L p^2 + pL + R_2 = 0.$$

Откуда находим корни  $p_1$  и  $p_2$ .  $p_{1,2} = \frac{-L \pm \sqrt{L^2 - 4R_2 \cdot R_2 CL}}{2R_2 CL}$ ,  $p_1 = -1127$ ,  $p_2 = -8873$ .

7. Определим постоянные интегрирования  $A_1$  и  $A_2$ . Для чего составим систему уравнений:

$$i_{св}(0+) = A_{1i} + A_{2i}, i'_{св}(0+) = p_1 A_{1i} + p_2 A_{2i}$$

или

$$u_{сЕ}(0+) = A_{1u} + A_{2u}; u'_{сЕ}(0+) = p_1 A_{1u} + p_2 A_{2u}.$$

Например, определим постоянные интегрирования для тока  $i_1$  и напряжения  $u_L$ . Для тока  $i_1$  уравнения запишутся в следующем виде:

$$44 = A_{1i} + A_{2i}; -10^5 = -1127 \cdot A_{1i} - 8872 \cdot A_{2i}.$$

После решения  $A_{1i} = -8,328 \cdot A$ ,  $A_{2i} = 12,328 \cdot A$ .

Для напряжения  $u_L$

$$0 = A_{1u_L} + A_{2u_L}; 10^6 = -1127 \cdot A_{1u_L} - 8873 \cdot A_{2u_L}.$$

После решения  $A_{1u_L} = 129,1$  В;  $A_{2u_L} = -129,1$  В.

8. Ток  $i_1$  согласно (1) изменяется во времени по закону

$$i_1(t) = 10 - 8,328 \cdot e^{-1127t} + 12,328 \cdot e^{-8873t},$$

а напряжение

$$u_L(t) = 129,1 \cdot e^{-1127t} - 129,1 \cdot e^{-8873t}.$$

## 12. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЦЕПЯХ С ВЗАИМОИНДУКТИВНОСТЬЮ

Рассмотрим переходный процесс в цепи (рис. 12.1), у которой две катушки для упрощения вычислений с одинаковыми сопротивле-

ниями  $R_1 = R_2 = R$  и одинаковыми индуктивностями  $L_1 = L_2 = L$  имеют индуктивную связь.

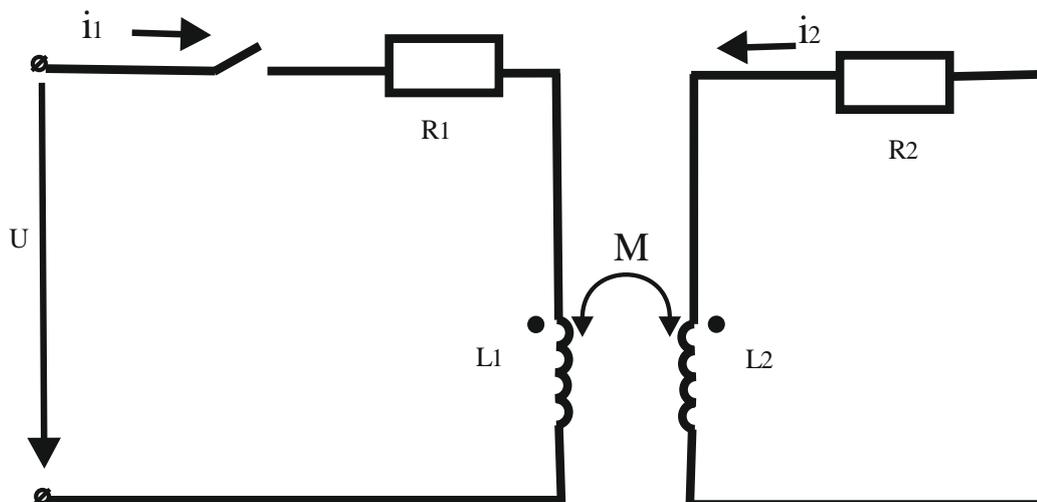


Рисунок 12.1

Вторая катушка замкнута накоротко, а первая подключается к источнику постоянного напряжения. Токи  $i_1$  и  $i_2$  связаны соотношениями (уравнениями Кирхгофа)

$$Ri_1 + L \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = U; \quad (12.1)$$

$$Ri_2 + L \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0. \quad (12.2)$$

Начальные условия нулевые, то есть  $i_1(0) = i_2(0) = 0$ . Установившиеся значения токов  $i_{1y} = \frac{U}{R}$ ;  $i_{2y} = 0$ .

Для определения корней характеристического уравнения составим главный определитель и приравняем его к нулю:

$$\begin{vmatrix} R + pL & pM \\ pM & R + pL \end{vmatrix} = 0,$$

откуда находим два корня:

$$p_1 = -R/(L + M);$$

$$p_2 = -R/(L - M).$$

Учет индуктивной связи не увеличивает числа корней характеристического уравнения. Токи

$$i_1 = U/R + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}; \quad (12.3)$$

$$i_2 = B_1 e^{p_1 t} + B_2 e^{p_2 t}. \quad (12.4)$$

Чтобы вычислить постоянные  $A_1$ ,  $A_2$ , кроме начального значения  $i_1(0)$  нужно найти  $\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0}$ . Умножим (12.1) на  $L$  и (12.2) на  $M$  и вычтем (12.2) из (12.1) при  $t = 0$ :

$$L^2 \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} - M^2 \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} = LU,$$

откуда находим

$$\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} = \frac{LU}{L^2 - M^2} = \frac{LU}{(L + M) \cdot (L - M)}.$$

При  $t = 0$  из (12.3) следует:

$$\begin{aligned} i_1(0) &= U/R + A_1 + A_2, \\ \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} &= p_1 A_1 + p_2 A_2. \end{aligned}$$

Отсюда определяем постоянные интегрирования

$$A_1 = A_2 = -U/2R$$

Аналогично находим

$$B_1 = -B_2 = -U/2R$$

и токи катушек:

$$\begin{aligned} i_1 &= U/2R + \left( 2 - e^{-\frac{Rt}{L+M}} - e^{-\frac{Rt}{L-M}} \right); \\ i_2 &= U/2R + \left( -e^{-\frac{Rt}{L+M}} + e^{-\frac{Rt}{L-M}} \right). \end{aligned}$$

На рисунке 12.2 построены кривые изменения токов  $i_1$  и  $i_2$ .

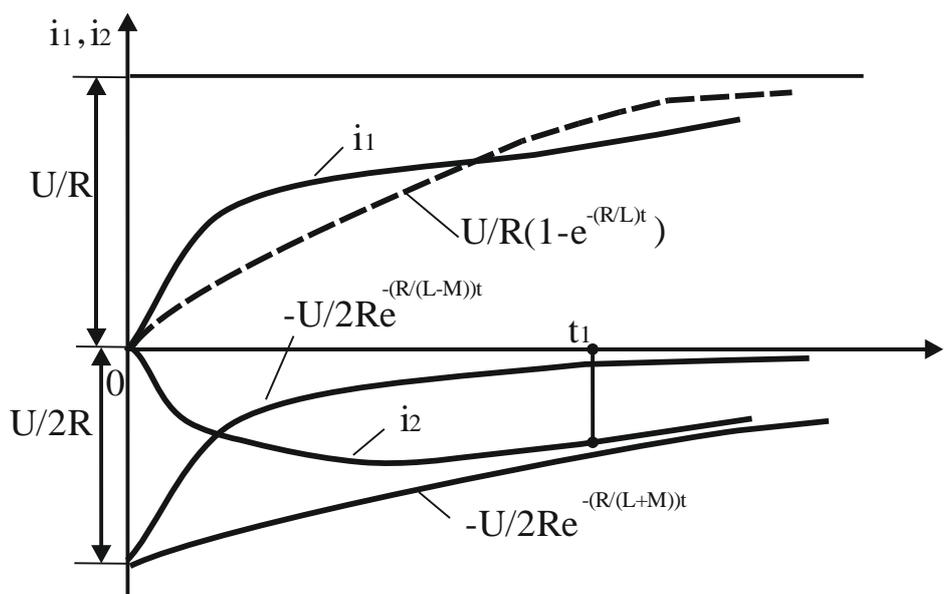


Рисунок 12.2

Одна из свободных составляющих затухает медленнее, так как имеет большую постоянную интегрирования, определяемую суммой  $L + M$ , а вторая затухает быстрее, так как ее постоянная интегрирования определяется разностью  $L - M$ . Для сравнения на рисунке 12.2 показано, как изменялся бы ток  $i_1$  при ее включении, если вторая катушка разомкнута (штриховая линия). В первые моменты после включения ток  $i_1$  увеличивается быстрее, чем он возрастал бы при разомкнутой второй катушке. При замкнутой второй катушке, как было найдено  $\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} = \frac{LU}{L^2 - M^2}$ , а при разомкнутой второй катушке  $-\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} = \frac{U}{L}$ .

### 13. ВКЛЮЧЕНИЕ ПАССИВНОГО ДВУХПОЛЮСНИКА К ИСТОЧНИКУ НЕПРЕРЫВНО ИЗМЕНЯЮЩЕГОСЯ НАПРЯЖЕНИЯ (ИНТЕГРАЛ ДЮАМЕЛЯ)

Пусть произвольный пассивный линейный двухполюсник подключается к источнику непрерывно изменяющегося с момента  $t = 0$  напряжения  $u$  (рис. 13.1).

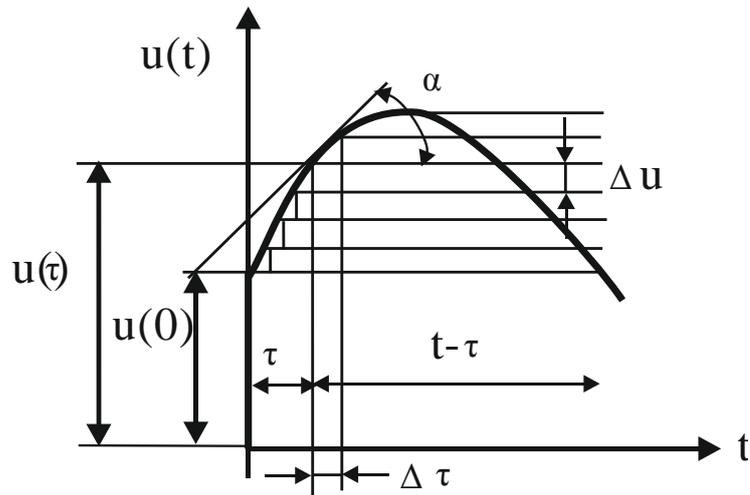


Рисунок 13.1

Требуется найти ток  $i$  (или напряжение  $u$ ) в любой ветви двухполюсника после замыкания ключа (рис. 13.2).

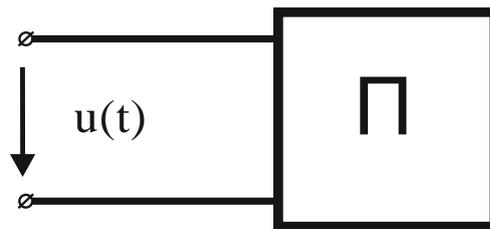


Рисунок 13.2

Задачу решим в два приема. Сначала искомую величину найдем при включении двухполюсника на единичный скачок напряжения (напряжение постоянное и численно равно единице). Единичный скачок задается единичной ступенчатой функцией Хевисайда  $1(t)$ , изображенной на рисунке 13.3, которая представляет собой единичное постоянное напряжение (или ток), действующее на входе с момента  $t = 0$  так, что

$$1(t) = 0 \text{ при } t < 0, \quad (13.1)$$

$$1(t) = 1 \text{ при } t > 0. \quad (13.2)$$

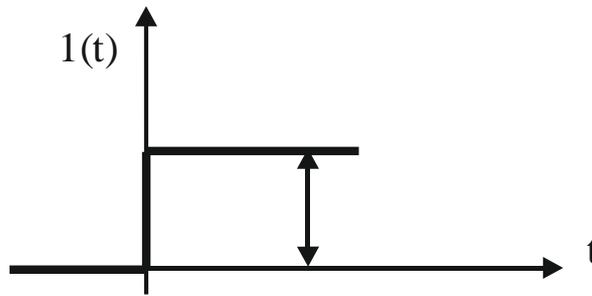


Рисунок 13.3

Функция  $h(t)$ , численно равная искомому току (или напряжению), при действии единичного скачка называется переходной функцией или переходной характеристикой. Это реакция цепи на единичный скачок. Например, для RL-цепи

$$h(t) = \frac{1}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

для RC-цепи

$$h(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Переходную функцию  $h(t)$  при любой схеме пассивного двухполюсника можно найти любым методом (классическим, операторным и другими). При  $t < 0$ ,  $h(t) = 0$ .

Непрерывно изменяющееся напряжение  $u(t)$  заменим ступенчатой функцией с элементарными прямоугольными скачками  $\Delta u$  (рис. 13.1). Составляющая искомого тока в момент  $t$  от постоянного напряжения равна

$$u(t) = \Delta u \cdot h(t)$$

Составляющая тока в момент  $t$  от скачка  $\Delta u$ , включаемого в момент  $\tau$ , равна  $\Delta u \cdot h(t - \tau)$ . Элементарный скачок напряжения

$$\Delta u \approx \Delta \tau \cdot m \cdot \operatorname{tg} \alpha = \Delta \tau \left. \frac{du}{dt} \right|_{t=\tau} = \Delta \tau \cdot u'(\tau),$$

где  $m$  – масштабный коэффициент.

Поэтому искомая составляющая тока равна

$$\Delta u \cdot h(t - \tau) = u'(\tau) \cdot \Delta \tau \cdot h(t - \tau)$$

Элементарные скачки напряжения включаются на интервале времени от  $t = 0$  до момента  $t$ , для которого определяется искомый ток. Поэтому, суммируя составляющие тока от всех скачков, переходя к пределу при  $\Delta \tau \rightarrow 0$  и учитывая составляющую тока от начального скачка напряжения  $u(0)$  имеем

$$i(t) = u(0)h(t) + \int_0^t u'(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau. \quad (13.1)$$

Выражение (13.1) – формула (или интеграл) Дюамеля. Аналогично решается задача при подключении цепи к источнику тока.

Учитывая теорему свертки двух функций  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$ ,

$$\int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau. \quad (13.2)$$

Преобразованием (13.1) можно получить и другие формы записи.

#### 14. ВКЛЮЧЕНИЕ ПАССИВНОГО ДВУХПОЛЮСНИКА К ИСТОЧНИКУ НАПРЯЖЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

Пусть пассивный двухполюсник подключается к источнику напряжения, кривая изменения которого приведена на рисунке 14.1. Определим переходную функцию  $h(t)$ . Так как при  $0 < t < t_1$  напряжение задано функцией  $u_1(t)$ , то, воспользовавшись выражением (13.1), получим для этого промежутка времени

$$i(t) = u_1(0)h(t) + \int_0^t u_1'(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau. \quad (14.1)$$

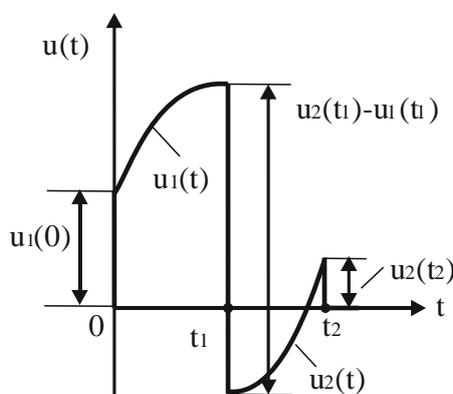


Рисунок 14.1

В следующем промежутке  $t_1 < t < t_2$  напряжение задано функцией  $u_2(t)$ , причем в момент  $t_1$  оно изменяется скачком от  $u_1(t_1)$  до  $u_2(t_1)$ . Для учета скачка напряжения в точке  $t = t_1$  будем считать, что в этот момент к двухполюснику прикладывается отрицательное напряжение, равное  $u_2(t_1) - u_1(t_1)$ . Кроме того, учтем составляющие тока от начального скачка напряжения  $u_1(0)$  и от элементарных скачков напряжения, определяемого кривой  $u_1(t)$  и действующего от  $t = 0$  до  $t = t_1$ :

$$i(t) = u_1(0)h(t) + \int_0^{t_1} u_1'(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau + [u_2(t_1) - u_1(t_1)] \cdot h(t - t_1) + \int_{t_1}^t u_2'(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau \quad (14.2)$$

Для промежутка времени  $t_2 < t < \infty$  учтем, что в момент  $t = t_2$  включается постоянное напряжение  $u_2(t_2)$  и что элементарные скачки, определяемые кривой напряжения  $u_2(t)$ , действуют до момента времени  $t = t_2$ :

$$i(t) = u_1(0)h(t) + \int_0^{t_1} u_1'(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau + [u_2(t_1) - u_1(t_1)]h(t - t_1) + \int_{t_1}^t u_2'(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau - u_2(t_2)h(t - t_2) \quad (14.3)$$

**Пример.** Найти ток  $i_L$  (рис. 14.2) для промежутков времени  $0 \leq t \leq 2,5$  мс и  $t \geq 2,5$  мс, если  $R_1 = 2$  Ом,  $R_2 = 5$  Ом,  $L = 4$  мГн, зависимость  $u(t)$  показана на рисунке 14.3.

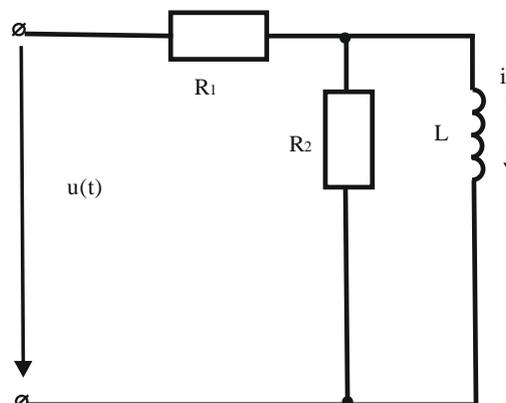


Рисунок 14.2

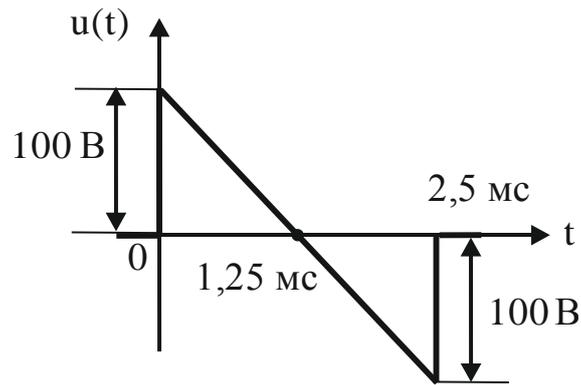


Рисунок 14.3

Переходная функция тока

$$h(t) = h_y(t) + h_{св}(t),$$

где  $h_y(t) = \frac{1}{R_1} = 0,5\text{ А}$ ;  $h_{св}(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$  – цепь с одним индуктивным элементом и постоянная времени равна

$$\tau = L / \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{357}\text{ с}.$$

При  $t = 0$  по первому закону коммутации  $i_L(0) = 0$ , то есть  $h(0) = 0$ , следовательно  $A = -0,5$  и  $h(t) = 0,5(1 - e^{-357t})$  (см. уравнение напряжения источника  $u(t) = 100(1 - 800t)$  В). Применяя формулу Дюамеля для промежутка  $0 \leq t \leq 2,5\text{ мс}$ , получим

$$i_L(t) = u(0)h(t) + \int_0^{t_2} u'(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau = 162 - 4 \cdot 10^4 t - 162e^{-357t}\text{ А}.$$

Проверив, убедимся, что  $i_L(0) = 0$ . Для промежутка времени  $t \geq 2,5\text{ мс}$  согласно (14.3)

$$i_L(t) = u(0)h(t) + \int_0^{t_1} u'(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau - u_1(t_1)h(t - t_1) = -11e^{-357t} \text{ А.}$$

При  $t = t_1$  ток  $i_L$  изменится не должен, несмотря на скачок напряжения источника. Проверив, убедимся, что  $i_L(t_1 - 0) = i_L(t_1 + 0) = -4,5 \text{ А}$ .

Кривые тока приведены на рисунке 14.4.

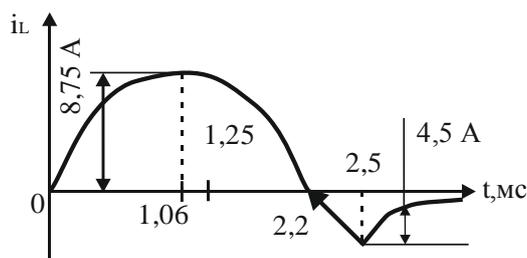


Рисунок 14.4

## 15. ПЕРЕХОДНАЯ И ИМПУЛЬСНАЯ ПЕРЕХОДНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Переходная характеристика введена по двум причинам:

1. Единичное ступенчатое воздействие  $1(t)$ -скачкообразное и поэтому тяжелое для любой системы внешнее воздействие. Поэтому необходимо знать реакцию системы именно при таком воздействии. Иные (плавные) воздействия будут для системы легче.

2. Если определена характеристика  $h(t)$ , то при помощи интеграла Дюамеля можно определить реакцию системы при любой форме внешних воздействий. Единичный импульс-дельта-функция  $\delta(t)$ , или функция Дирихле, определяется как производная по времени единичной функции

$$\delta(t) = d1(t)dt \quad (15.1)$$

и представляет собой предельный случай импульса очень большого значения и очень малой длительности (рис. 15.1).

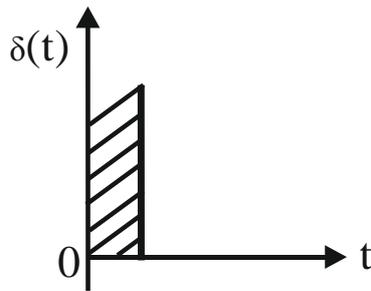


Рисунок 15.1

Найдем площадь единичного импульса:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} d1(t) = 1(t) \Big|_{t=-\infty}^{t=+\infty} = 1(\infty) - 1(-\infty) = 1 - 0 = 1 .$$

Импульсной переходной функцией или характеристикой системы  $k(t)$  называется реакция на выходе, если на входе действует внешнее возмущение в виде единичного импульса  $\delta(t)$ . Поскольку внешние возмущения  $1(t)$  и  $\delta(t)$  связаны равенством (15.1), то при  $h(0+) = 0$  имеем связь их реакции на выходе системы:

$$k(t) = \frac{dh(t)}{dt} . \quad (15.2)$$

Если  $h(0+) \neq 0$ , то (15.2) обобщается:

$$k(t) = \frac{dh(t)}{dt} + h(0+)\delta(t) . \quad (15.3)$$

Если при включении RC-цепи на единичный импульс напряжения в качестве выходной величины рассматривается ток, то

$$h(t) = \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ и } h(0+) = \frac{1}{R} .$$

Так как при  $t = 0$  в составе приложенного напряжения имеется дельта-функция и в этот момент по второму закону коммутации  $u_C(0) = 0$ , то дельта-функция должна быть в составе тока, что и объясняет наличие

второго слагаемого в правой части. Импульсная переходная характеристика  $k(t)$  введена по тем же двум причинам, что и  $h(t)$ .

### Запись интеграла Дюамеля при помощи импульсной переходной характеристики

На входе действует источник напряжения непрерывно изменяющегося  $u_1(t)$  (рис. 15.2). Определим ток на выходе пассивного двухполюсника в момент  $t$ . Разобьем кривую  $u_1(t)$  на отдельные участки  $d\tau(\Delta t)$  высотой  $u_1(\tau)$  для  $t = \tau$ . Для единичного импульса реакция на выходе равна импульсной переходной характеристике  $k(t - \tau)$ .

Суммируя действия всех импульсов, каждый из которых имеет бесконечно малую площадь (от  $\tau = 0$  до  $\tau = t$ ), получим реакцию на выходе:

$$i(t) = \int_0^t k(t - \tau)u_1(\tau)d\tau. \quad (15.4)$$

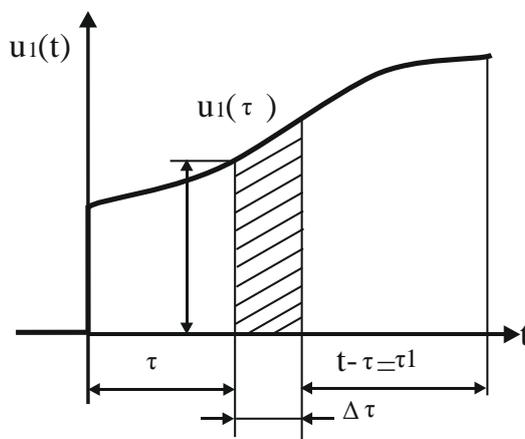


Рисунок 15.2

Или с учетом (13.2) получим

$$i(t) = \int_0^t k(t)u_1(t - \tau)d\tau. \quad (15.5)$$

При напряжении произвольной формы (рис. 14.1) по формулам (15.4) или (15.5) определяется ток в интервале  $0 < t < t_1$ . В промежутке  $t_1 < t < t_2$

$$i(t) = \int_0^{t_1} k(t - \tau)u_1(\tau)d\tau + \int_{t_1}^t k(t - \tau)u_2(\tau)d\tau \quad (15.6)$$

или

$$i(t) = \int_0^{t_1} k(\tau)u_1(t - \tau)d\tau + \int_{t_1}^t k(\tau)u_2(t - \tau)d\tau. \quad (15.7)$$

При  $t < t_2$  нужно заменить верхний предел  $t$  у второго интеграла на  $t_2$ . Использование интеграла Дюамеля предполагает нулевые начальные условия.

## 16. РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЯ

Уравнениями состояния называется система уравнений, определяющая режим цепи, то есть это система дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенная относительно производных.

Методом переменных состояния называется анализ цепи, основанный на решении уравнений состояния (первого порядка), записанного в форме Коши.

Предполагается, что цепь имеет только независимые источники и не содержит индуктивных сечений и емкостных контуров.

Для линейной цепи с постоянными сосредоточенными параметрами ток в каждой ветви и напряжение между выбранными точками всегда можно найти как решение составленного для этого тока, напряжения дифференциального уравнения (путем исключения других токов и напряжений из системы уравнений Кирхгофа):

$$\frac{a_n d^n x}{dt^n} + \frac{a_{n-1} d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + Q_0 x = F(T).$$

Введением переменных  $x_1 = x$ ;  $x_2 = dx/dt$ ;  $x_3 = dx^2/dt^2$ ; ...;  $x_n = d^{n-1}/dt^{n-1}$  уравнение сводится к эквивалентной системе дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} x_2 &= dx_1/dt; \quad x_3 = dx_2/dt; \\ x_n &= dx_{n-1}/dt; \\ dx_n/dt &= -\frac{Q_0}{Q_n}x_1 - \frac{Q_1}{Q_n}x_2 - \dots - \frac{Q_{n-1}}{Q_n}x_n + \frac{F(t)}{Q_n} \end{aligned}$$

Здесь переменными, которые называются переменными состояния, служат переменная  $x$  и ее производные.

В качестве переменных состояния следует выбирать токи  $i_L$  и напряжения  $u_C$ , а также  $e(t)$  и  $J(t)$ . Действующие источники можно назвать входными величинами  $[F_1(t)] \dots F_m(t)$ , искомые величины – выходными  $[W_1(t)] \dots W_e(t)$ . Для цепи с  $n$  независимыми токами  $i_L$  и напряжениями  $u_C$  должны быть заданы еще и независимые начальные условия. Сокращенно дифференциальные уравнения состояния в матричной форме имеют вид

$$\frac{d}{dt}X(t) = AX(t) + BF(t) \quad (16.1)$$

или короче

$$\dot{X} = AX + BF, \quad (16.2)$$

где  $X$  – матрица-столбец (размера  $n \times 1$ ) переменных состояния (вектор переменных состояния);  $F$  – матрица-столбец (размера  $m \times 1$ ) ЭДС и токов источников (внешних возмущений);  $A$  – квадратная матрица порядка  $n$  (основная);  $B$  – матрица размера  $n \times m$  (матрица связи). Элементы этих матриц определяются топологией и параметрами цепи.

Для выходных величин (если определяются не токи в индуктивных и напряжения на емкостных элементах) в матричной форме система алгебраических уравнений имеет вид

$$W(t) = MX(t) + NF(t) \quad (16.3)$$

или

$$W = MX + NF, \quad (16.4)$$

где  $W$  – матрица-столбец (размер  $l \times 1$ );  $M$  – матрица связи (размер  $l \times n$ );  $N$  – матрица связи (размер  $l \times m$ ).

Для цепи (рис. 16.1) заменим после коммутации эквивалентной (рис. 16.2), у которой каждый заданный ток  $i_L$  представлен источником тока  $i_L$ , а каждое заданное напряжение  $u_C$  – источником напряжения (ЭДС)  $u_C$ . Применим метод наложения при выбранных положительных направлениях, запишем напряжения  $u_L$  и токи  $i_C$  (сначала учитываем действия источников  $i_L$ , затем  $u_C$ , затем источников, действующих в цепи):

$$\left. \begin{aligned} u_L &= 0 + u_{C1} - u_{C2} + 0 \\ i_{C1} &= -i_L + 0 + 0 + J \\ i_{C2} &= i_L + 0 - u_{C2}/R + 0 \end{aligned} \right\}. \quad (16.5)$$

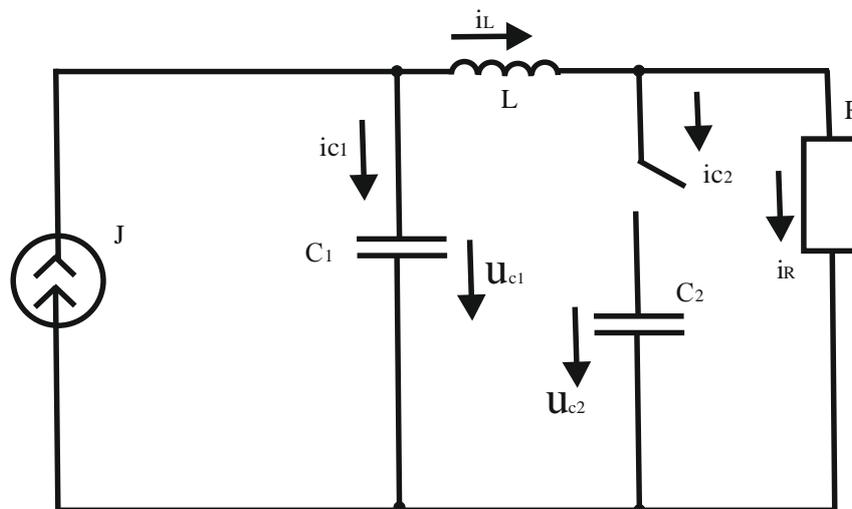


Рисунок 16.1

Так как  $u_L = L di_L/dt$  и  $i_C = C du_C/dt$ , то

$$\left. \begin{aligned} di_L/dt &= 0 + u_{C1}/L - u_{C2}/L + 0 \\ di_{C1}/dt &= -i_L/C_1 + 0 + 0 + J/C_1 \\ du_{C2}/dt &= i_L/C + 0 - u_{C2}/RC_2 + 0 \end{aligned} \right\}. \quad (16.6)$$

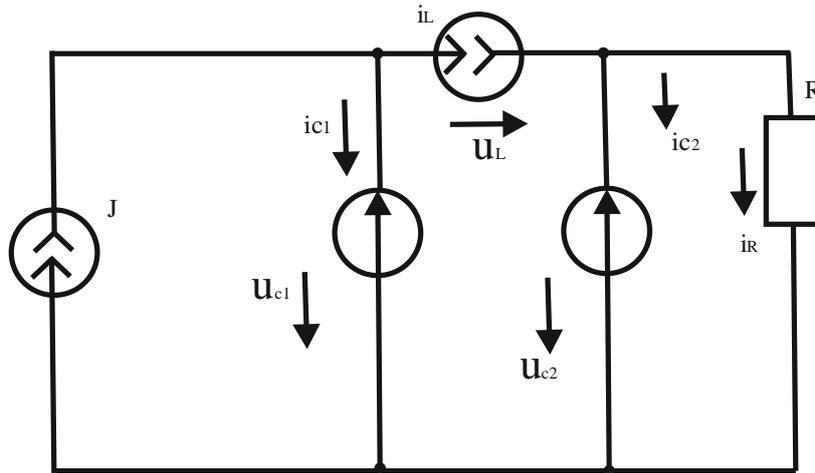


Рисунок 16.2

$$\text{То есть } X = \begin{bmatrix} i_L \\ u_{c1} \\ u_{c2} \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C_1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_2} & 0 & -\frac{1}{RC_2} \end{bmatrix}; \quad BF = \begin{bmatrix} 0 \\ J \\ C_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Уравнения состояния можно формулировать сразу в матричной форме. Если источников тока и ЭДС нет, то есть  $F = 0$ , то уравнения (16.1), (16.2) упрощаются

$$\frac{d}{dt} X(t) - AX(t) = 0 \quad (16.7)$$

и характеризуют свободные процессы в цепи. Решение записывается в виде

$$X(t) = X(0)e^{At}, \quad (16.8)$$

где  $X(0)$  – матрица-столбец начальных условий (значений) переменных состояния;  $e^{At}$  – матричная экспоненциальная функция.

Подставив (16.8) в (16.7), получим тождество. Так, при  $F \neq 0$  решение (16.1) представим в виде

$$X(t) = e^{At}\Phi(t), \quad (16.9)$$

где  $\Phi(t)$  – матричная функция цепи.

Продифференцировав (16.9), получим

$$\frac{d}{dt}X(t) = AX(t) + e^{At} \frac{d}{dt}\Phi(t). \quad (16.10)$$

Сравним (16.10) с (16.1)

$$e^{At} \frac{d}{dt}\Phi(t) = BF(t)$$

и умножим на  $e^{-At}$ , после интегрирования получим

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^t e^{-A\theta} BF(\theta) d\theta ,$$

где  $\theta$  – переменная интегрирования, или

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^0 e^{-A\theta} BF(\theta) d\theta + \int_0^t e^{-A\theta} BF(\theta) d\theta .$$

Подставим это выражение в (16.9):

$$X(t) = e^{At} \int_{-\infty}^0 e^{-A\theta} BF(\theta) d\theta + e^{At} \int_0^t e^{-A\theta} BF(\theta) d\theta .$$

В частности, при  $t = 0$  имеем

$$X(0) = \int_{-\infty}^0 e^{-A\theta} BF(\theta) d\theta .$$

Следовательно, решение для переменных состояния записывается в виде

$$X(t) = e^{At}X(0) + e^{At} \int_0^t e^{-A\theta} BF(\theta) d\theta. \quad (16.11)$$

Реакция цепи равна сумме реакций при нулевом входе и при нулевом начальном состоянии. Выходные величины можно найти по выражению (16.3). Если состояние цепи задано не при  $t = 0$ , а при  $0 < \tau < t$ , то в (16.11) первое слагаемое записывается следующим образом:

$$e^{A(t-\tau)} X(\tau),$$

где нижний предел не 0, а  $\tau$ .

Для вычисления матричной экспоненциальной функции необходимо сначала найти собственные значения  $\lambda$  матрицы  $A$ , то есть корни уравнения

$$\det(A - \lambda 1) = 0, \quad (16.12)$$

где  $1$  – единичная матрица порядка  $n$ , которая определяется из уравнения

$$\begin{vmatrix} Q_{11}-\lambda & Q_{12} & Q_{13} & \dots & Q_{1n} \\ Q_{21} & Q_{22}-\lambda & Q_{23} & \dots & Q_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{n1} & Q_{n2} & Q_{n3} & \dots & Q_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (16.13)$$

где  $Q_{ik}$  – элементы матрицы  $A$ .

Собственные значения совпадают с корнями  $p_k$  характеристического уравнения цепи. Матричная экспонента, аргумент которой матрица  $A_t$ , имеющая порядок  $n$ , представлена конечным числом  $n$ -слагаемых. Если собственные значения различны, то

$$e^{At} = \alpha_0 1 + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_{n-1} A^{n-1}, \quad (16.14)$$

где  $\alpha_k$  – функция времени;  $A^2 = AA$ ;  $A^3 = AAA$  и т. п. Далее для определения  $\alpha_k$  составляем алгебраическую систему  $n$ -уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 + \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_1^2 \alpha_2 + \dots + \lambda_1^{n-1} \alpha_{n-1} &= e^{\lambda_1 t} \\ \alpha_0 + \lambda_2 \alpha_1 + \lambda_2^2 \alpha_2 + \dots + \lambda_2^{n-1} \alpha_{n-1} &= e^{\lambda_2 t} \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \\ \alpha_0 + \lambda_n \alpha_1 + \lambda_n^2 \alpha_2 + \dots + \lambda_n^{n-1} \alpha_{n-1} &= e^{\lambda_n t} \end{aligned} \right\}. \quad (16.15)$$

Определив  $\alpha_k$  из (16.15) по (16.14), находим  $e^{At}$ . Затем находим  $X(t)$  по (16.11).

### Численные методы решения уравнений состояния

Уравнения состояния цепей, порядок которых больше двух, трех, проще решать не аналитически, а численными методами. Наиболее простой из одношаговых методов – явный метод Эйлера или алгоритм Рунге-Кутты первого порядка. Он записывается следующим образом:

$$X_k = X_{k-1} + h\dot{X}_{k-1}, \quad (16.16)$$

где  $X_k$  – матрица-столбец переменных состояния для  $k$ -го шага;  $X_{k-1}$  – то же для  $(k-1)$ -го шага (в момент  $t_{k-1}$ );  $\dot{X}_{k-1}$  – матрица-столбец производных переменных состояния в момент  $t_{k-1}$  (в начале предыдущего шага).

Метод основан на разложении каждой переменной в ряд Тейлора

$$X(t_k) = X(t_{k-1}) + \frac{1}{1!} \frac{dx}{dt} \Big|_{t=t_{k-1}} + \frac{1}{2!} \frac{d^2x}{dt^2} \Big|_{t=t_{k-1}} + \dots$$

и учете его первых двух членов.

Метод назван явным, так как искомое решение для  $k$ -го шага не входит в правую часть алгоритма (16.16), связывающего значения на последнем и предыдущем шагах.

После подстановки (16.2), записанного для  $(k-1)$ -го шага в (16.16), получим

$$X_k = (1 + hA)X_{k-1} + hBF_{k-1}. \quad (16.17)$$

Формула (16.17) – это рекуррентное соотношение, дающее возможность непосредственно определять последующие значения переменных состояния по найденным на предыдущем шаге. Чем меньше шаг  $h$ , тем точнее расчет, но больше объем вычислений. Погрешность расчета пропорциональна  $h^2$ .

Если в правой части (16.16) производные для предыдущего для  $(k - 1)$ -го шага заменить производными для данного  $k$ -го шага, то получим

$$X_k = X_{k-1} + h\dot{X}_k. \quad (16.18)$$

Алгоритм называется неявным методом Эйлера, так как правая часть (16.18) содержит производные для того же шага, для которого определяются переменные состояния.

После подстановки (16.2), записанного для момента  $t_k$  в (16.16), получим

$$(1 - hA)X_k = X_{k-1} + hBF_k,$$

откуда

$$X_k = (1 + hA)^{-1}X_{k-1} + (1 - hA)^{-1}hBF_k. \quad (16.19)$$

Погрешность расчета того же порядка, что и для явного метода Эйлера.

Лучшую точность обеспечивает метод трапеций (относится к неявным), так как в правой части содержит средние значения производных  $(k - 1)$ -го и  $k$ -го шагов:

$$X_k = X_{k-1} + \frac{h}{2}\dot{X}_{k-1} + \frac{h}{2}\dot{X}_k. \quad (16.20)$$

После подстановки (16.2), записанных для моментов  $t_{k-1}$  и  $t_k$ , получим

$$X_k = X_{k-1} + \frac{h}{2}A(X_{k-1} + X_k) + \frac{h}{2}B(F_{k-1} + F_k),$$

откуда

$$X_k = \left(1 - \frac{h}{2}A\right)^{-1} \times \left(1 + \frac{h}{2}A\right) X_{k-1} + \frac{h}{2} \left(1 - \frac{h}{2}A\right)^{-1} \times B(F_{k-1} + F_k). \quad (16.21)$$

Погрешность расчетов пропорциональна  $h^3$ . С ростом числа шагов погрешность интегрирования может увеличиваться, то есть численное решение может давать значения, все более отличающиеся от истинных, что увеличивает неустойчивость метода. Устойчивость явного метода Эйлера зависит от шага  $h$ .

Для цепей с одним накопителем энергии алгоритм получается устойчивым при условии  $h < 2\tau$ , где  $\tau$  – постоянная времени цепи.

Для цепи с несколькими накопителями при действительных корнях характеристического уравнения необходимо выбирать шаг

$$h < 2\tau_{min} = 2/\alpha_{min},$$

где  $\alpha_{min}$  – минимальный коэффициент затухания.

При наличии комплексных корней  $p_m = -\alpha_m \pm j\omega_m$  шаг  $h$  должен быть еще и меньше минимального значения

$$h < -2\alpha_m/|p_m|^2.$$

Неявный метод Эйлера и метод трапеций устойчивы при любом шаге. Поэтому выбор шага диктуется только необходимой точностью расчета, которая, однако, при уже выбранном шаге еще неизвестна, что относится к явным методам. Рассмотрим примеры.

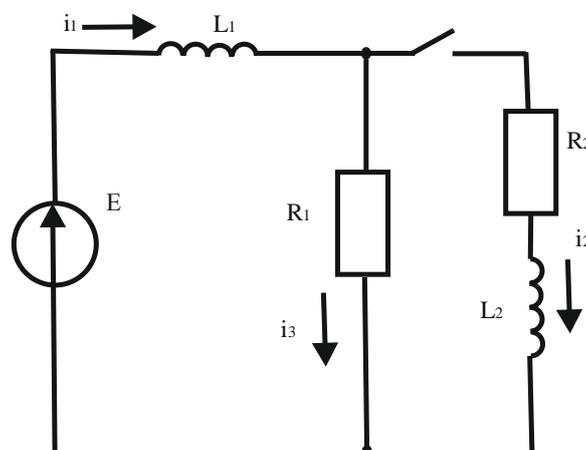


Рисунок 16.3

1. Для схемы (рис. 16.3) определить ток  $i_1$  в цепи после коммутации при  $R_1 = R_2 = 20$  Ом,  $L_1 = 0,1$  Гн,  $L_2 = 0,4$  Гн,  $E = 20$  В.

Решим аналитически. Выбираем положительные направления токов  $i_1, i_2$  в индуктивных элементах, то есть переменных состояния и тока  $i_3$ . Независимые начальные условия

$$i_1(0) = E/R_1 = 1\text{А}; i_2 = 0.$$

Запишем дифференциальные уравнения цепи:

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0;$$

$$L_1 di_1/dt + R_1 i_3 = E;$$

$$L_2 di_2/dt + R_2 i_2 - R_1 i_3 = 0.$$

Исключив ток  $i_3 = i_1 - i_2$ , получим уравнения относительно производных переменных состояния:

$$\begin{aligned} \frac{di_1}{dt} &= -\frac{R_1}{L_1} i_1 + \frac{R_1}{L_1} i_2 + \frac{E}{L_1} = -200i_1 + 200i_2 + 200 ; \\ \frac{di_2}{dt} &= \frac{R_1}{L_2} i_1 - \frac{R_1 + R_2}{L_2} i_2 = 50i_1 - 100i_2 + 0 . \end{aligned}$$

Согласно (16.1)

$$A = \begin{vmatrix} -200 & 200 \\ 50 & -100 \end{vmatrix} ;$$

$$BF = \begin{vmatrix} 200 \\ 0 \end{vmatrix} .$$

Матрица-столбец начальных значений

$$X(0) = \begin{vmatrix} i_1(0) \\ i_2(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} .$$

Вычислим собственные значения по выражению (16.12)

$$\begin{vmatrix} -200 - \lambda & 200 \\ 50 & -100 - \lambda \end{vmatrix} = 0 ,$$

откуда  $(-200 - \lambda) \times (-100 - \lambda) - (50 \times 200) = 0$ ;

$$20000 + 200\lambda + 100\lambda + \lambda^2 - 10000 = 0.$$

Приводя подобные члены, имеем

$$\lambda^2 + 300\lambda + 10000 = 0,$$

откуда находим корни  $\lambda$ :

$$\lambda_1 = -38,2; \lambda_2 = -261,8;$$

а также

$$\lambda_1 - \lambda_2 = -38,2 - (-261,8) = 223,61.$$

Если приравнять нулю главный определитель уравнений с переменными состояниями, то получим те же значения:

$$p_1 = \lambda_1 , p_2 = \lambda_2.$$

Находим коэффициенты  $L_k$  по выражению (16.15), то есть из системы уравнений:

$$\alpha_0 + \lambda_1 \alpha_1 = e^{\lambda_1 t};$$

$$\alpha_0 + \lambda_2 \alpha_1 = e^{\lambda_2 t} ,$$

откуда

$$\alpha_0 = \frac{\lambda_1 e^{\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{\lambda_1 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} ;$$
$$\alpha_1 = \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} .$$

И по (16.14) находим  $e^{At}$ :

$$e^{At} = e^{\lambda_1 t \frac{A - \lambda_2 \cdot 1}{\lambda_1 - \lambda_2}} - e^{\lambda_2 t \frac{A - \lambda_1 \cdot 1}{\lambda_1 - \lambda_2}} =$$

$$= e^{\lambda_1 t} \begin{vmatrix} 0,276 & 0,894 \\ 0,224 & 0,724 \end{vmatrix} - e^{\lambda_2 t} \begin{vmatrix} -0,724 & 0,894 \\ 0,224 & -0,276 \end{vmatrix};$$

$$e^{At} X(0) = \begin{vmatrix} 0,276 \\ 0,224 \end{vmatrix} e^{\lambda_1 t} - \begin{vmatrix} -0,724 \\ 0,224 \end{vmatrix} e^{\lambda_2 t};$$

$$e^{At} \int_0^t e^{-A\theta} BF(\theta) d\theta = \int_0^t \left\{ \begin{vmatrix} 55,28 \\ 44,72 \end{vmatrix} e^{\lambda_1(t-\theta)} + \begin{vmatrix} 144,72 \\ -44,72 \end{vmatrix} e^{\lambda_2(t-\theta)} \right\} d\theta.$$

Ток  $i_1$  равен

$$i_1 = 0,276 e^{\lambda_1 t} + 0,724 e^{\lambda_2 t} + e^{\lambda_1 t} \int_0^t 55,28 e^{-\lambda_1 \theta} d\theta +$$

$$+ e^{\lambda_2 t} \int_0^t 144,72 e^{-\lambda_2 \theta} d\theta = 2,0 - 1,171 e^{\lambda_1 t} + 0,171 e^{\lambda_2 t}.$$

Таблица 16.1 – Результаты расчетов

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
t, с	0,005	0,01	0,015	0,02	0,025	0,03	0,035	0,04	0,045	0,05	0,055	0,06
$i_{1,k}$ , А	1,079	1,213	1,343	1,455	1,550	1,628	1,692	1,746	1,790	1,827	1,857	1,882

2. Для схемы (рис. 16.3) определить ток  $i_1$  явным методом Эйлера, неявным методом Эйлера, методом трапеций.

Обозначим переменные состояния:  $i_1 = x$ ;  $i_2 = y$ . Получим:  $x_0 = x(0) = 1$  А;  $y_0 = y(0) = 0$  А.

**2.1. Явный метод Эйлера.** Согласно (16.17) выбираем шаг  $h = 0,005$ .

$$\begin{vmatrix} X_k \\ y_k \end{vmatrix} = \left( \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0,005 \begin{vmatrix} -200 & 200 \\ 50 & -100 \end{vmatrix} \right) \times \begin{vmatrix} \lambda_{k-1} \\ y_{k-1} \end{vmatrix} + 0,005 \begin{vmatrix} 200 \\ 0 \end{vmatrix}$$

После выполнения операций с матрицами получим

$$X_k = y_{k-1} + 1,$$

$$y_k = 0,25X_{k-1} + 0,5y_{k-1}.$$

Таблица 16.2 – Результаты расчетов

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$i_{1,k} = \dot{X}_k A$	1,0	1,25	1,375	1,5	1,594	1,672	1,734	1,785	1,826	1,59	1,886	1,908

**2.2. Неявный метод Эйлера.** В выражение (16.19) входит обратная матрица

$$(1 - hA)^{-1} = \left( \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0,005 \begin{vmatrix} -200 & 200 \\ 50 & -100 \end{vmatrix} \right)^{-1} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -0,25 & 1,5 \end{vmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1,5 & 1 \\ 0,25 & 2 \end{vmatrix},$$

где  $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -0,25 & 1,5 \end{vmatrix} = 2,75.$

После подстановки матриц  $(1 - hA), (1 - hA)^{-1}$  и  $hBF_k = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$  в (16.19) получим

$$X_k = 0,5454X_{k-1} + 0,3636y_{k-1} + 0,5454,$$

$$y_k = 0,0909X_{k-1} + 0,7273y_{k-1} + 0,0909.$$

Таблица 16.3 – Результаты расчетов

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$i_{1,k} =$	1,091	1,207	1,321	1,424	1,514	1,591	1,656	1,711	1,757	1,796	1,823	1,856

**2.3. Метод трапеций.** В выражение (16.21) входят матрицы

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{h}{2}A\right) &= \begin{vmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,125 & 0,75 \end{vmatrix}, \\ \left(1 - \frac{h}{2}A\right) &= \begin{vmatrix} 1,5 & -0,5 \\ -0,125 & 1,25 \end{vmatrix}, \\ \left(1 - \frac{h}{2}A\right)^{-1} &= \begin{vmatrix} 0,6897 & 0,2759 \\ 0,0690 & 0,8276 \end{vmatrix}, \\ \frac{h}{2}B(F_{k-1} + F_k) &= \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

После подстановки их в (16.21) получим

$$\begin{aligned} X_k &= 0,3793X_{k-1} + 0,5517y_{k-1} + 0,6897, \\ y_k &= 0,1379X_{k-1} + 0,6552y_{k-1} + 0,0690. \end{aligned}$$

Таблица 16.4 – Результаты расчетов

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$i_{1,k} = X_k$	1,07	1,209	1,342	1,456	1,551	1,629	1,694	1,747	1,792	1,828	1,858	1,882

## 17. ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА К РАСЧЕТУ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Сущность операторного метода состоит в том, что некоторой заданной однозначной ограниченной функции  $f(t)$  действительной переменной (времени  $t$ ), называемой оригиналом, удовлетворяющей условиям Дирихле на любом конечном промежутке времени и равной нулю при  $t < 0$ , сопоставляется другая функция  $F(p)$  комплексного переменного  $p = S + j\omega$ , называемая изображением

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt. \quad (17.1)$$

Выражение (17.1) – прямое преобразование Лапласа функции  $f(t)$  и обозначается

$$F(p) = L\{f(t)\}, \quad (17.2)$$

где  $F(p)$  – лапласовое изображение функции  $f(t)$ .

Если нужно по имеющемуся изображению  $F(p)$  найти оригинал  $f(t)$ , то это выполняется при помощи обратного преобразования Лапласа:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(p)e^{pt} dp. \quad (17.3)$$

Интеграл (17.3) обозначается еще следующим образом:

$$f(t) = L^{-1}\{F(p)\}. \quad (17.4)$$

1. Если изображение имеет вид рациональной дроби

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_0} \quad (17.5)$$

при  $m < n$ , причем дробь  $\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = F(p)$  несократимая, то есть  $F_1(p)$  и  $F_2(p)$  общих корней не имеют, а  $a_k, b_k$  – действительные числа.

Оригинал  $f(t)$  изображения (17.5) находят по формуле, называемой теоремой разложения:

$$\sum_{k=1}^t \frac{F_1(p_k)e^{p_k t}}{p_k F_2'(p_k)}. \quad (17.6)$$

Здесь  $p_k$  – простые корни характеристического уравнения  $F_2(p) = 0$ , причем один из них может быть равен нулю.

2. Если в составе знаменателя (17.5) есть множитель  $p$ , то знаменатель имеет один нулевой корень.

Необходимо найти оригинал для изображения  $\frac{F_1(p)}{pF_2(p)}$ , где в составе  $F_2(p)$  уже нет множителя  $p$ . Предполагая, что уравнение  $F_2(p) = 0$  имеет  $n$  различных и не равных нулю корней ( $k = 1, 2, 3, \dots, n$ ), получаем другую форму теоремы разложения:

$$f(t) = \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k) e^{p_k t}}{p_k F_2'(p_k)}. \quad (17.7)$$

3. Если уравнение  $F_2(p) = 0$  имеет комплексные сопряженные корни  $p_i$  и  $p_i^*$ , то достаточно вычислить слагаемое сумм (17.6) или (17.7) только для корня  $p_i$ , а для корня  $p_i^*$  взять значение, сопряженное этому слагаемому, то есть

$$\frac{F_1(p_i) e^{p_i t}}{F_2'(p_i)} + \frac{F_1(p_i^*) e^{p_i^* t}}{F_2'(p_i^*)} = 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{F_1(p_i) e^{p_i t}}{F_2'(p_i)} \right]$$

4. Если изображение  $F(p)$  наряду с  $n$  простыми полюсами в точках  $p_1, \dots, p_k, \dots, p_n$  имеет, например, еще один полюс кратности  $\alpha$  в точке  $p_{n+1}$ , то есть

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)(p - p_{n+1})^\alpha}.$$

Применяя формулу вычетов в кратном полюсе, имеем

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k) e^{p_k t}}{\frac{d}{dp} [F_2(p)(p - p_{n+1})^\alpha]_{p=p_k}} + \frac{1}{(\alpha-1)!} \frac{d^{\alpha-1}}{dp^{\alpha-1}} * \left[ \frac{F_1(p) e^{pt}}{F_2(p)} \right]_{p=p_{n+1}} \quad (17.8)$$

## 17.1. Законы Кирхгофа в операторной форме

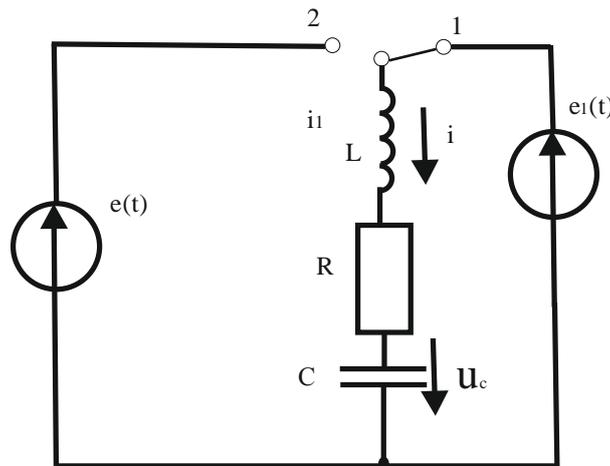


Рисунок 17.1

Рассмотрим RLC-цепь (рис. 17.1), которая была подключена к источнику ЭДС  $e_1(t)$  и в момент времени  $t = 0$  переключается к источнику ЭДС  $e(t)$ . Дифференциальное уравнение цепи после коммутации

$$Ri + L \frac{di}{dt} + u_c = e(t), \quad (17.9)$$

где  $u_c$  и ток при выбранных положительных направлениях связаны соотношением

$$i = C \frac{du_c}{dt} \quad \text{и} \quad u_c = u_c(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i dt.$$

Напряжение  $u_c(0)$ , а также  $i(0)$  должны быть определены расчетом режима цепи до коммутации, то есть при действии источника  $e_1(t)$ . С учетом (17.9), изображения постоянной величины (17.1) и (17.2), получаем алгебраическое уравнение

$$RI(p) + L[pI(p) - i(0)] + u_c(0)/p + \frac{1}{C} \frac{I(p)}{p} = E(p), \quad (17.10)$$

где

$$I(p) = L\{i(t)\}, \quad E(p) = L\{e(t)\}.$$

Из (17.10) определяем ток

$$I(p) = \frac{E(p) + Li(0) - u_C(0)/p}{R + pL + 1/pC}. \quad (17.11)$$

Выражение, стоящее в знаменателе (17.11), называют операторным сопротивлением

$$Z = R + pL + 1/pC = \frac{(LCp^2 + RCp + 1)}{pC}. \quad (17.12)$$

Величина, обратная операторному сопротивлению, называется операторной проводимостью

$$Y(p) = \frac{1}{Z(p)}.$$

Положительное направление ЭДС  $Li(0)$  совпадает с положительным направлением тока ветви, а направление ЭДС  $u_C(0)/p$  – противоположно направлению тока.

При нулевых начальных условиях, то есть при  $i_L(0) = 0$  и  $u_C(0) = 0$ , выражение (17.11) имеет вид

$$I(p) = \frac{E(p)}{Z(p)}. \quad (17.13)$$

Для любого узла разветвленной цепи

$$i_1 + i_2 + \dots + i_n = 0.$$

Поэтому, обозначив изображение токов

$$I_k(p) = L\{i_k(t)\},$$

на основании (2.1) получим первый закон Кирхгофа в операторной форме

$$I_1(p) + I_2(p) + \dots + I_n(p) = \sum_{k=1}^n I_k(p) = 0. \quad (17.14)$$

Причем некоторые из токов могут быть изображением токов источников тока. Для любого замкнутого контура, состоящего из  $n$  ветвей,

$$\sum_{k=1}^n R_k i_k + \sum_{k=1}^n L_k \frac{di_k}{dt} + \sum_{k=1}^n u_{Ck} = \sum_{k=1}^n e_k .$$

Переходя к изображениям, получим второй закон Кирхгофа в операторной форме

$$\sum_{k=1}^n R_k I_k(p) + \sum_{k=1}^n L[pI_k(p) - i_k(0)] + \sum_{k=1}^n \frac{u_{Ck}(0)}{p} + \sum_{k=1}^n \frac{I_k(p)}{C_k p} = \sum_{k=1}^n E_k(p) ,$$

что можно переписать следующим образом:

$$\sum_{k=1}^n Z_k(p) I_k(p) = \sum_{k=1}^n \left[ E_k(p) + L_k i_k(0) - \frac{u_{Ck}(0)}{p} \right]. \quad (17.15)$$

При нулевых начальных условиях (при  $i_k(0) = 0$  и  $u_{Ck}(0) = 0$ )

$$\sum_{k=1}^n Z_k(p) I_k(p) = \sum_{k=1}^n E_k(p) .$$

Он полностью аналогичен второму закону Кирхгофа в комплексной форме.

## 17.2. Эквивалентные операторные схемы

При расчете переходного процесса операторным методом желательно сразу записывать уравнения Кирхгофа в операторной форме, а также уравнения с применением методов расчета, которые основаны на уравнениях Кирхгофа (контурные токи, узловые потенциалы и т. д.). На рисунке 17.2 показан переход от индуктивных и емкостных элементов с мгновенными значениями (оригиналами токов и напряжений к элементам операторной схемы, учитываются внутренние ЭДС).

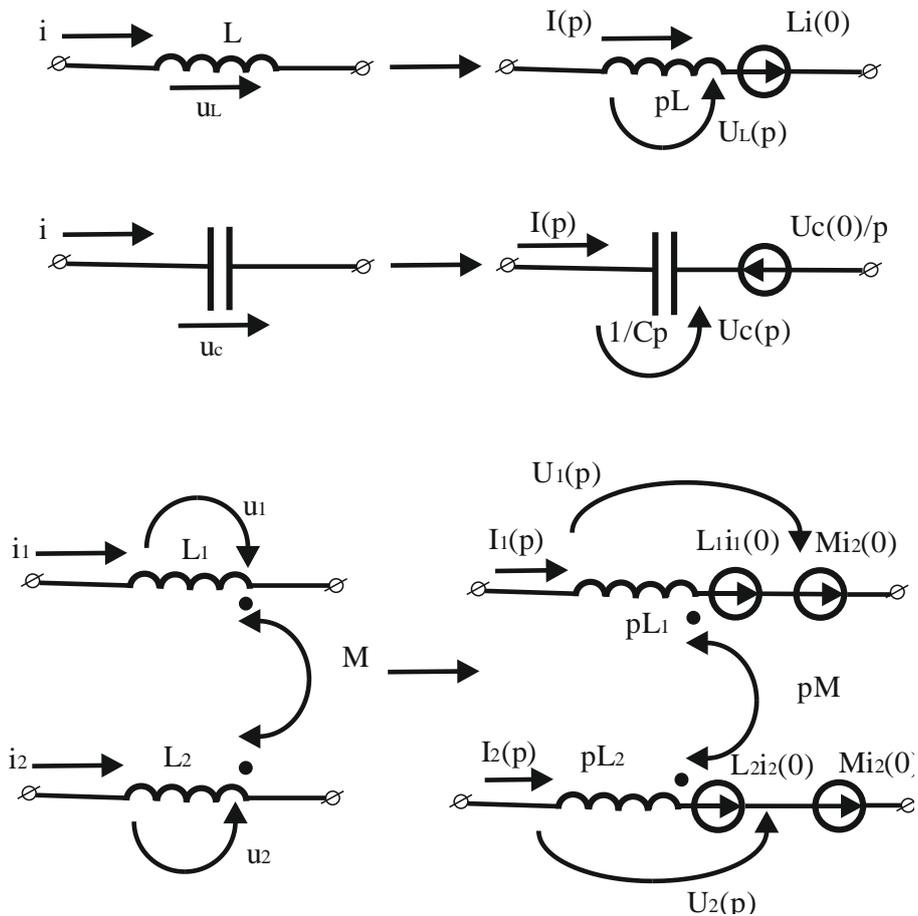


Рисунок 17.2

Для расчета переходного процесса после коммутации в цепи (рис.17.1) операторная схема имеет вид (рис. 17.3). При расчете тока сразу можно записать выражение (17.11). Далее для краткости аргумент  $p$  у изображений можно опускать, если это не может вызвать недоразумений.

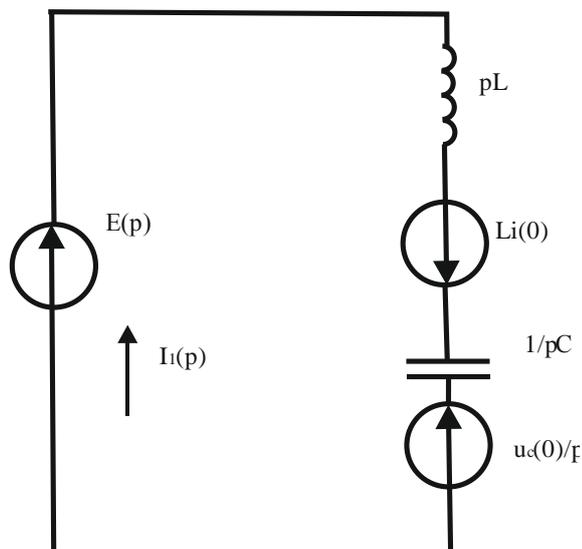


Рисунок 17.3

### 17.3. Сведение расчета переходного процесса к нулевым начальным условиям

Пусть к выводам 1-2 активного двухполюсника ключом подключается ветвь с операторным сопротивлением  $Z_{12}(p)$  (рис. 17.4, а).

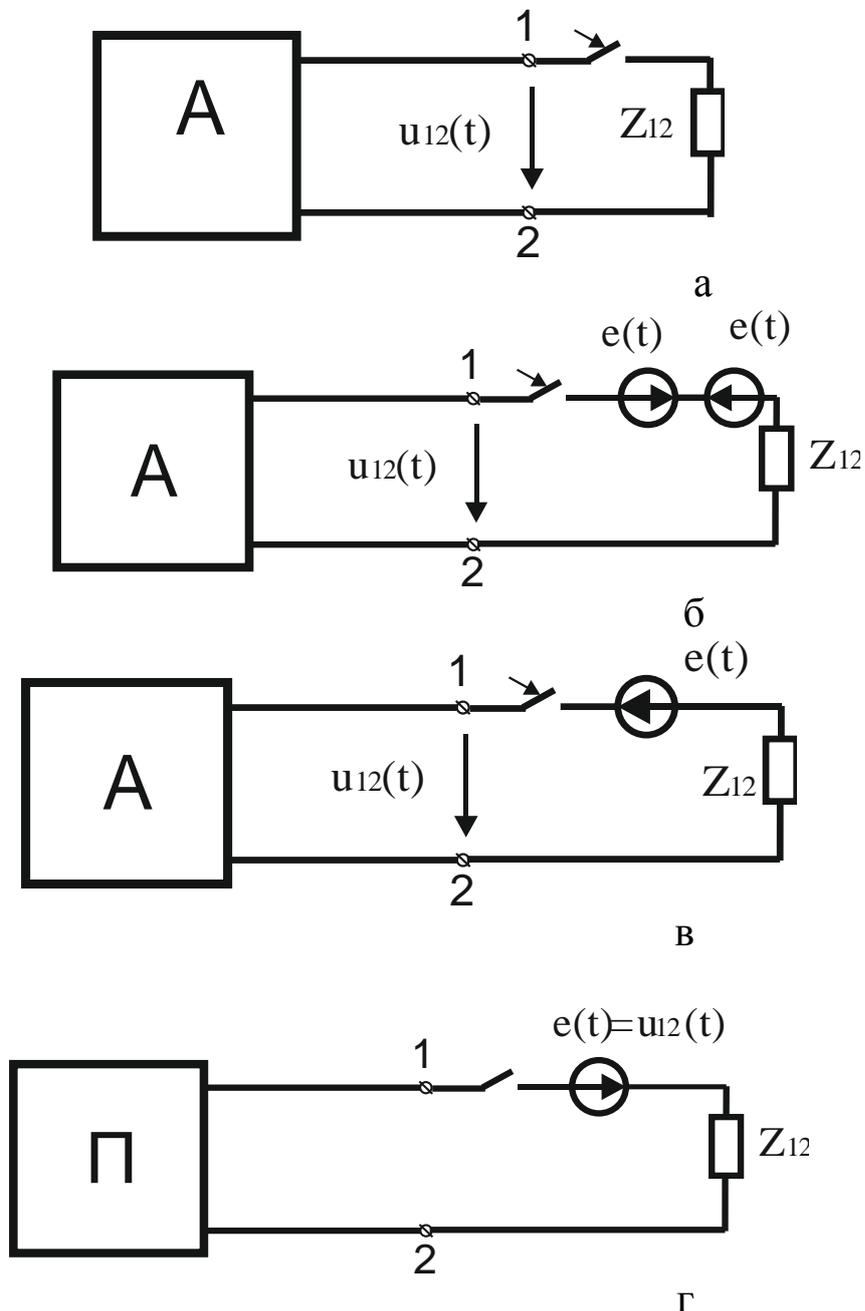


Рисунок 17.4

Если в подключаемой ветви есть источники ЭДС и тока или заряженные конденсаторы, то отнесем их в состав активного двухполюсника.

1. Определим напряжение  $u_{12}(t)$  до его включения, обусловленное всеми источниками активного двухполюсника.

2. В ветвь ключа включим два источника с противоположно направленными ЭДС  $e(t) = u_{12}(t)$  (рис. 17.4, б). При этом режим не изменится.

3. Найдем токи при действии всех источников активного двухполюсника и той ЭДС, которая действует противоположно  $u_{12}(t)$  (рис. 17.4, в). В этой схеме включается ветвь с ЭДС  $e(t)$ , равной и противоположной по направлению эквивалентной ЭДС активного двухполюсника. Поэтому ток в ветви ключа после его замыкания остается равным нулю, а значит для всей схемы будет режим как до коммутации.

4. Рассчитываем переходный процесс при включении ветви с источником ЭДС  $e(t)$  к пассивному двухполюснику (то есть при нулевых начальных условиях).

Если при включении ключа определяется ток в какой-либо ветви А двухполюсника, то необходимо учесть, что он состоит из тока, существовавшего в этой ветви до коммутации, и тока, возникающего в этой ветви после включения источника ЭДС  $e(t)$  к пассивному двухполюснику (рис. 17.4, г).

Если рассчитывается ток в ветви ключа (равный нулю до коммутации), то можно рассчитать только режим в схеме рис. 17.4, г.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Атабеков, Г.И. Основы теории цепей: учеб. пособие / Г.И. Атабеков. – СПб.: Лань, 2006.
2. Бессонов, Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи.: учеб. пособие / Л.А. Бессонов. – М.: Гардарики, 2007.
3. Теоретические основы электротехники: учеб. пособие для вузов в 3 т. / К.С. Демирчян, Л.Р. Нейман, Н.В. Коровкин [и др.]. – Т. 2. – СПб.: Питер, 2003.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1. Возникновение переходных процессов и законы коммутации.....	4
1.1. Приведение задачи в переходном процессе к решению линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.....	5
1.2. Переходный, установившийся и свободный процессы.....	6
2. Классический метод расчета переходных процессов.....	7
3. Короткое замыкание RL-цепи.....	10
4. Включение RL-цепи на постоянное напряжение.....	13
5. Включение RL-цепи на синусоидальное напряжение.....	15
6. Короткое замыкание RC-цепи.....	17
7. Включение RC-цепи на постоянное напряжение.....	20
8. Включение RC-цепи на синусоидальное напряжение.....	22
9. Переходные процессы в RLC-цепи.....	23
9.1. Аперриодическая разрядка конденсатора.....	24
9.2. Предельный случай аперриодической разрядки конденсатора.....	27
9.3. Периодическая (колебательная) разрядка конденсатора.....	28
10. Включение RLC-цепи на постоянное напряжение.....	30
11. Общий случай расчета переходных процессов классическим методом.....	32
12. Переходные процессы в цепях с взаимной индуктивностью.....	41
13. Включение пассивного двухполюсника к источнику непрерывно изменяющегося напряжения (интеграл Дюамеля).....	44
14. Включение пассивного двухполюсника к источнику напряжения произвольной формы.....	47
15. Переходная и импульсная переходная характеристики.....	50
16. Расчет переходных процессов методом переменных состояния.....	53
17. Применение преобразования Лапласа к расчету переходных процессов.....	66
17.1. Законы Кирхгофа в операторной форме.....	69
17.2. Эквивалентные операторные схемы.....	71
17.3. Сведение расчета переходного процесса к нулевым начальным условиям.....	73
ЛИТЕРАТУРА.....	75

Редактор Е.А. Андреева

Подписано в свет 23.09.2016. Регистрационный номер 60  
Редакционно-издательский центр Красноярского государственного аграрного университета  
660017, Красноярск, ул. Ленина, 117  
e-mail: rio@kgau.ru