Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Красноярский государственный аграрный университет»

Г.В. Миронов

МАТЕМАТИКА

Методические указания по выполнению контрольных работ

Электронное издание

Красноярск 2016

Рецензент
К.А. Филиппов, д-р физ.-мат. наук, доц.,
и.о. зав. каф. бизнес-информатики и информационно-компьютерной безопасности

Миронов Г.В.
Математика: методические указания по выполнению контрольных работ [Электронный ресурс] / Г.В. Миронов; Краснояр. гос. аграр. ун-т. – Красноярск, 2016. – 60 с.

Методические указания содержат краткие указания по выполнению контрольных работ, контрольные задания и список литературы.

Предназначено для бакалавров Института землеустройства, кадастров и природообустройства заочной формы обучения, обучающихся по направлению подготовки 21.03.02 «Землеустройство и кадастры».

Печатается по решению редакционно-издательского совета Красноярского государственного аграрного университета

ВВЕДЕНИЕ

В соответствии с действующим учебным планом студенты-заочники изучают курс математики. При выполнении контрольных работ студент должен руководствоваться следующими указаниями:

1. Каждая работа должна выполняться в отдельной тетради (в клетку), на внешней обложке которой должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, полный шифр, номер контрольной работы.

2. Контрольные задачи следует располагать в порядке номеров, указанных в заданиях. Перед решением каждой задачи надо полностью переписать ее условие.

3. Решение задач следует излагать подробно, делая соответствующие ссылки на вопросы теории с указанием необходимых формул, теорем.

4. Решение задач геометрического содержания должно сопровождаться чертежами, выполненными аккуратно, с указанием осей координат и единицей измерения. Объяснения к задачам должны соответствовать обозначениям, приведеным на чертежах.

5. На каждой странице тетради необходимо оставлять поля шириной 3-4 см для замечаний преподавателя.

6. Контрольные работы должны выполняться самостоятельно. Несамостоятельно выполненная работа лишает студента возможности проверить степень своей подготовленности по теме. Если преподаватель установит несамостоятельное выполнение работы, то она не будет зачтена.

7. Получив из института прорецензированную работу (как зачтенную, так и не зачтенную), студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочеты. В случае незачета по работе студент обязан в кратчайший срок выполнить все требования рецензента и представить работу на повторное рецензирование, приложив при этом первоначально выполненную работу.

8. В межсессионный период или во время лабораторно-экзаменационной сессии студент должен пройти на собеседование по зачтенной контрольной работе.

СОДЕРЖАНИЕ ПРОГРАММЫ

I. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1. Определители второго и третьего порядков и их свойства. Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по элементам какого-либо ряда. Понятие об определителях n-го порядка.

2. Решение систем линейных уравнений. Формулы Крамера. Метод Гаусса.

3. Векторы. Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число. Длина вектора. Угол между векторами. Расстояние между двумя точками. Проекция вектора на ось. Координаты векторов. Скалярное произведение векторов.

4. Разложение вектора по системе векторов. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов. Базис и ранг системы векторов.

5. Матрицы. Ранг матрицы. Действия над матрицами. Обратная матрица. Матричная запись системы линейных уравнений и ее решение. Теоремы Кронекера – Капелли.

6. Системы координат на прямой, плоскости, в пространстве. Основные задачи на метод координат (расстояние между двумя точками, деление отрезка в данном отношении).

7. Понятие об уравнении линии. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Общее уравнение прямой. Угол между двумя прямыми; условия параллельности и перпендикулярности прямых. Уравнение прямой, проходящей через две точки. Пересечение двух прямых.

8. Неравенства первой степени на плоскости и их геометрический смысл.

9. Канонические уравнения кривых второго порядка: окружности, эллипса, гиперболы, параболы.

10. Плоскость. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору. Общее уравнение плоскости, его частные виды. Геометрический смысл неравенства и системы линейных неравенств в пространстве.

II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Введение в математический анализ

11. Постоянные и переменные величины. Определение функции. Область определения функции; способы ее задания. Графическое изображение функции. Основные сведения из классификации функций.

12. Числовые последовательности, их сходимость. Предел числовой последовательности. Теорема о существовании предела монотонной ограниченной последовательности (формулировка).

13. Предел функции. Основные теоремы о пределах. Первый и второй замечательные пределы. Неопределенные выражения и способы их раскрытия (примеры). Сравнение бесконечно малых величин.

14. Непрерывность функции в точке и на интервале. Точки разрыва функции. Свойства функций, непрерывных на замкнутых множествах.

Дифференциальное исчисление функции одной переменной

15. Задачи, приводящие к понятию производной. Определение производной; ее геометрический и механический смысл.

16. Правила дифференцирования функций. Производные основных элементарных функций. Производная сложной функции. Производная обратной функции.

17. Производные высших порядков.

18. Дифференциал функции; его геометрический смысл. Свойства дифференциала. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.

19. Применение производной к вычислению пределов (правило Лопиталя).

20. Теоремы Ролля, Лагранжа. Применение производной к исследованию функций. Экстремумы функции. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на интервале.

21. Выпуклость и вогнутость графика функции, точки перегиба. Асимптоты кривой. Схема исследования функции и построение ее графика.

22. Приближенное решение уравнений: графическое отделение корней методом проб; метод хорд и касательных. Метод итераций.

III. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ НЕЗАИВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

23. Определение функции нескольких независимых переменных. Предел и непрерывность функции нескольких переменных.

24. Частные производные функции нескольких независимых переменных, их геометрический смысл (для случая двух независимых переменных). Частные производные высших порядков.

25. Полный дифференциал функции нескольких независимых переменных, его применение в приближенных вычислениях.

26. Экстремум функции многих переменных. Нахождение наибольших и наименьших значений функции.

27. Задача обработки наблюдений. Подбор параметров кривых по способу наименьших квадратов.

28. Скалярное и векторное поля. Производная по направлению. Градиент функции. Свойства градиента.

IV. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

29. Неопределенный интеграл, его свойства. Таблица основных интегралов.

30. Интегрирование заменой переменной; по частям. Интегрирование рациональных дробей.

31. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определенный интеграл как предел интегральных сумм. Понятие об интегрируемой функции, формулировка теоремы существования. Свойства определенного интеграла. Теорема о среднем.

32. Производная от определенного интеграла по верхнему пределу. Связь между определенным и неопределенным интегралом (формула Ньютона – Лейбница).

33. Вычисление определенных интегралов способом подстановки и по частям. Интегрирование четных и нечетных функций в симметричных пределах.

34. Приближенное вычисление определенных интегралов по формулам прямоугольников, трапеций, Симпсона.

35. Геометрические приложения определенного интеграла: вычисления площадей фигур; объемов тел по площадям сечений и тел вращения; длин дуг кривых; площадей поверхностей вращения. Примеры приложения интеграла к решению простейших задач механики и физики.

36. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования и от неограниченных функций. Примеры сходящихся и расходящихся интегралов.

37. Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла. Определение двойного интеграла. Вычисление двойного интеграла. Геометрические приложения двойного интеграла.

38. Понятие о тройном интеграле.

V. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

39. Понятие о дифференциальном уравнении. Дифференциальные уравнения первого порядка. Понятие об общем и частном решении. Начальные условия. Интегральные кривые.

40. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Однородные дифференциальные уравнения. Линейные дифференциальные уравнения.

41. Теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка (без доказательства).

42. Поле направлений дифференциального уравнения. Изоклины. Приближенное решение дифференциальных уравнений первого порядка (способ Эйлера).

43. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка. Линейно-независимые решения. Структура общего решения.

44. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Общее решение уравнения.

45. Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка. Теорема наложения. Метод вариации произвольных постоянных. Частные решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами для правых частей в виде функций: многочлен; Ae^{kx}; $A\cos nx + B\sin nx$.

46. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

VI. РЯДЫ

47. Числовые ряды; их сходимость и расходимость. Необходимые условия сходимости. Свойства сходящихся рядов.

48. Ряды с положительными членами. Признаки сходимости, основанные на сравнении рядов. Признак Даламбера. Интегральный признак Коши.

49. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимость.

50. Степенные ряды. Теорема Абеля. Интервал сходимости.

51. Ряды Тейлора и Маклорена. Биноминальный ряд. Разложение в степенной ряд элементарных функций.

52. Приложение степенных рядов к приближенным вычислениям, вычисление определенных интегралов, решение дифференциальных уравнений.

VII. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

53. Вероятность события. Относительная частота события. Полная группа событий. Статистическое и классическое определение вероятности.

54. Сумма событий. Теорема о вероятности суммы несовместных событий. Теорема вероятности суммы двух совместных событий.

55. Произведение событий. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

56. Теорема о повторении опытов (схема Бернулли). Наивероятнейшая частота при повторении опытов. Биноминальное распределение. Формула Пуассона.

57. Понятие случайной величины. Дискретные и непрерывные случайные величины. Функция распределения случайной величины. Примеры распределений: нормальное, биноминальное, пуассоновское, равномерное. Вероятность попадания случайной величины на данный интервал.

58. Числовые характеристики случайных величин: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение; их свойства.

59. Закон больших чисел. Неравенство Чебышева. Теорема Чебышева.

60. Числовые характеристики статистических распределений (математическое ожидание, дисперсия). Оценка вероятности по частоте. Понятие о доверительном интервале. Доверительные интервалы для среднего значения и дисперсии нормально распределенной случайной величины.

61. Понятие о центральной предельной теореме.

VIII. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

62. n-мерное векторное пространство. Решение системы m-линейных уравнений с n-неизвестными. Базисное решение системы.

63. Постановка основной задачи линейного программирования. Сведение основной задачи к канонической форме. Геометрическая интерпретация основной задачи линейного программирования.

64. Опорные решения и их нахождение симплекс-методом. Достаточное условие оптимальности опорного решения.

ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Контрольная работа № 1

Тема: аналитическая геометрия, векторная алгебра, элементы линейной алгебры.

Задачи 1-20. Даны вершины A $(x_1;y_1)$, B $(x_2;y_2)$, C $(x_3;y_3)$ треугольника. Найти: 1) длину стороны AB; 2) внутренний угол A в радианах с точностью до 0,001; 3) уравнение высоты, проведенной через вершину C; 4) уравнение медианы, проведенной через вершину C; 5) точка пересечения высот треугольника; 6) длину высоты, опущенной из вершины C; 7) систему линейных неравенств, определяющих треугольник ABC. Сделать чертеж.

1.	A(1;1)	B(7;4)	C(4;5)
2.	A(1;1)	B(-5;4)	C(-2;5)
3.	A(-1;1)	B(5;4)	C(2;5)
4.	A(-1;1)	B(-7;4)	C(-4;5)
5.	A(1;-1)	B(7;2)	C(4;5)
6.	A(1;-1)	B(-5;2)	C(-2;3)
7.	A(-1;-1)	B(5;2)	C(2;3)
8.	A(-1;-1)	B(-7;2)	C(-4;3)
9.	A(0;1)	B(6;4)	C(3;5)
10.	A(1;0)	B(7;3)	C(4;4).
11.	A(2,2)	B(-3,6)	C(0,7)
12.	A(4,4)	B(10,7)	C(7,8)
13.	A(3,2)	B(9,5)	C(6,6)
14.	A(2,0)	B(-4,3)	C(-1,4)
15.	A(-2,-2)	B(-8,1)	C(-5,2)
16.	A(0,-2)	B(-6,1)	C(-3,2)
17.	A(0,2)	B(6,5)	C(3,6)
18.	A(2,3)	B(8,6)	C(5,7)
19.	A(-3,-3)	B(3,-1)	C(-1,0)
20.	A(-3,-5)	B(3,-2)	C(0,1)

В **задачах 21-25** составить уравнение геометрического места точек, равноудаленных от данной точки **A** (x;y) и данной прямой $\boldsymbol{y=b}$.

Полученное уравнение привести к простейшему виду и затем построить кривую.

21.	A(2;5)	y=1	24.	A(3;-4)	y=2
22.	A(-4;3)	y=-1	25.	A(-2;-3)	y=-1
23.	A(1;-1)	y=1			

В **задачах 26-30** составить уравнение геометрического места точек, отношение расстояний которых до данной точки **A (x;y)** и данной прямой **x=a** равно числу ***k***. Полученное уравнение привести к простейшему виду и затем построить кривую.

26.	A(6;0)	x =1,5;	k=2
27.	A(3;0)	x=4/3;	k=1,5
28.	A(10;0)	x=2,5;	k=2
29.	A(2;0)	x=4,5;	k=2/3
30.	A(3;0)	x=12;	k=0,5

31**.** Составить уравнение линии, для каждой точки которой расстояние до точки F (-1;-2) равно расстоянию от прямой $x=-3$. Сделать чертеж.

32. Составить уравнение линии, для каждой точки которой отношение расстояний до точки F (7;0) и прямой x=1 равно $\sqrt{7}$. Сделать чертеж.

33. Составить уравнение линии, для каждой точки которой отношение расстояний до точки F (2;0) и прямой x=3 равно $\frac{\sqrt{6}}{3}$. Сделать чертеж.

34. Составить уравнение линии, для каждой точки которой расстояние до точки F (3;3) равно расстоянию от прямой y=4. Сделать чертеж.

35. Составить уравнение линии, для каждой точки которой отношение расстояний до точки F (2;0) и прямой x=2 равно 2. Сделать чертеж.

36. Составить уравнение линии, для каждой точки которой отношение расстояний до точки F (-1;0) и прямой x = -9 равно $\frac{1}{3}$. Сделать чертеж.

37. Составить уравнение линии, для каждой точки которой отношений расстояние ее до точки F (-3;2) равно расстоянию от прямой x=2. Сделать чертеж.

38. Составить уравнение линии, для каждой точки которой отношение расстояний до точки F (3;0) и прямой x=2 равно $\sqrt{\frac{6}{2}}$. Сделать чертеж.

39. Составить уравнение линии, для каждой точки которой отношение расстояний до точки F (-4,5;0) и прямой $x=-8$ равно 0,75. Сделать чертеж.

40. Составить уравнение линии, для каждой точки которой расстояние ее до точки F (1;0) равно расстоянию от прямой y=3. Сделать чертеж.

Задачи 41-60. Дано уравнение ***f(x;y;z)=0***. Требуется: 1) доказать, что оно является уравнением сферы; 2) найти координаты центра и радиус сферы; 3) составить уравнение плоскости, проходящей через центр сферы и ось O_z; 4) составить уравнение прямой, проходящей через центр сферы и начало координат.

41. $f(x;y;z)=x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z-6$.
42. $f(x;y;z)=x^2+y^2+z^2-3x+4y+5z+2$.
43. $f(x;y;z)=x^2+y^2+z^2+8x-3y-5z+10$.
44. $f(x;y;z)=x^2+y^2+z^2+5x-3y+6x+9$.
45. $f(x;y;z)=x^2+y^2+z^2-7x+2y-2z-1$.
46. $f(x;y;z)=x^2+y^2+z^2-2x-8y+3z-2$.
47. $f(x;y;z)=x^2+y^2+z^2+4x-3y+z-8$.
48. $f(x;y;z)=x^2+y^2+z^2+5x+4y-2z-6$.
49. $f(x;y;z)=x^2+y^2+z^2+3y-3x-2z+2$.
50. $f(x;y;z)=x^2+y^2+z^2+6x-3y+z+7$.
51. $f(x;y;z)=x^2+y^2+z^2-6x+4y-6z-6$.
52. $f(x;y;z)=x^2+y^2+z^2-5x+4y+6z+2$.
53. $f(x;y;z)=x^2+y^2+z^2+6x-3y-5z+10$.
54. $f(x;y;z)=x^2+y^2+z^2+5x-4y+8x+9$.
55. $f(x;y;z)=x^2+y^2+z^2-4x+2y-4z-1$.
56. $f(x;y;z)=x^2+y^2+z^2-2x-6y+3z-2$.
57. $f(x;y;z)=x^2+y^2+z^2+4x-8y+z-8$.
58. $f(x;y;z)=x^2+y^2+z^2+5x+10y-2z-6$.
59. $f(x;y;z)=x^2+y^2+z^2+4y-6x-4z+2$.
60. $f(x;y;z)=x^2+y^2+z^2+6x-4y+4z+7$.

Задачи 61-70. Даны векторы **a, b, c, d, e**. Показать, что векторы **a, b, c, d** образуют базис четырехмерного пространства, и найти координаты вектора **e** в этом базисе.

61. a(2,0,8,5), b(-10,3,0,2), c(-3,5,-1,-6), d(-1,-7,9,0), e(33,-4,23,3).
62. a(1,4,0,3), b(-5,1,-2,5), c(-3,1,-3,0), d(2,-7,1,-4), e(-28,21,-14,35).
63. a(3,7,9,0), b(-3,0,7,0), c(2,-3,-5,-4), d(1,-2,0,7), e(-10,-8,25,-1).
64. a(-1,3,5,0), b(5,-1,-3,2), c(-2,9,-2,9), d(8,0,1,0), e(9,-17,14,-26).
65. a(5,1,-7,2), b(2,-3,-1,-9), c(-7,-1,1,-2), d(3,4,-5,-6), e(59,20,-38,-53).
66. a(9,7,1,0), b(8,-1,-1,3) , c(0,5,5,5) , d(0,0,4,7), e(79,67,29,33).
67. a(2,9,0,0), b(-4,-7,-1,1), c(1,-2,5,-3), d(3,4,0,-5), e(41,93,11,-19).
68. a(1,9,0,-3), b(-3,-2,0,2), c(-5,-6,-8,-5),d(-7,0,1,-1),e(-55,0,-18,-27).
69. a(-1,5,2,0), b(-3,3,-7,8), c(5,-2,0,4), d(2,-4,0,-1), e(22,-33,12,-17).
70. a(8,5,9,1), b(1,-3,-6,-3), c(3,-1,5,2), d(0,2,-1,4), e(-17,-13,-36,-6).

В **задачах 71-80** написать разложение вектора **x** по векторам **p,q,r**.

71. x=(-2, 4, 7),	p=(0, 1,2),	q=(1,0,1),	r=(-1,2,4).
72. x=(6,12,-1),	p=(1,3,0),	q=(2,-1,1),	r=(0,-1,2).
73. x=(1,-4,4),	p=(2,1,-1),	q=(0,3,2),	r=(1,-1,1).
74. x=(-9,5,5),	p=(4,1,1),	q=(2,0,-3),	r=(-1,2,1).
75. x=(-5,-5,5),	p=(-2,0,1),	q=(1,3,-1),	r=(0,4,1).
76. x=(13,2,7),	p=(5,1,0),	q=(2,-1,3),	r=(1,0,-1).
77. x=(-19,-1,7),	p=(0,1,1),	q=(-2,0,1),	r=(3,1,0).
78. x=(3,-3,4),	p=(1,0,2),	q=(0,1,1),	r=(2,-1,4).
79. x=(3,3,-1),	p=(3,1,0),	q=(-1,2,1),	r=(-1,0,2).
80. x=(-1,7,-4),	p=(-1,2,1),	q=(2,0,3),	r=(1,1,-1).

Задачи 81-100. Найти матрицу, обратную данной:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Проверить результат, вычислив произведение данной матрицы с полученной.

81. A=$\begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 82. A=$\begin{pmatrix} 9 & 9 & 5 \\ 4 & -1 & -2 \\ 14 & 13 & 7 \end{pmatrix}$. 83. A=$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

84. A=$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 7 & 6 & 2 \\ 7 & 9 & 2 \end{pmatrix}$. 85. A=$\begin{pmatrix} 9 & 7 & 3 \\ 14 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. 86. A=$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 11 & 9 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

87. A=$\begin{pmatrix} 12 & 6 & 1 \\ 19 & 16 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 88. A=$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. 89. A=$\begin{pmatrix} 6 & 9 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 10 & 16 & 7 \end{pmatrix}$.

90. A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 9 & 8 & 5 \end{pmatrix}$. 91. A=$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$. 92. A=$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

93. A=$\begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. 94. A=$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. 95. A=$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

96. A=$\begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. 97. A=$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -1 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. 98. A=$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

99. A=$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. 100. A=$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Контрольная работа № 2

Тема: введение в анализ, дифференциальное исчисление.

Задачи 101-110. Вычислить пределы.

101. 1) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{2x^2-5x-3}{3x^2-4x-15}$; $при: а)\, x=2,\ б)\, x_0=3,\ в)\ x=\propto$;

2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x}}{x-4}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{arctg 4x}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-3}{2n+5}\right)^{3n+2}$.

102. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{4x^2-7x-2}{2x^2-x-6}$; *при* а) $x_0=0$, б) $x_0=2$, в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg 2x}{\sin 5x}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+2}{3n-4}\right)^{2n-7}$.

103. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+5x+6}$; *при* а) $x_0=3$, б) $x_0=-3$, в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{9-x}}{x-5}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ctg 3x}{ctg 6x}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-6}{n-4}\right)^{4n-7}$.

104. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2+11x+10}{2x^2+5x+2}$; *при* а) $x_0=-3$; б) $x_0=-2$, в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\arcsin 2x}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n-3}{5n+6}\right)$.

105. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2-14x+8}{2x^2-7x-4}$; *при* а) $x_0=2$; б) $x_0=4$; в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x+7}-\sqrt{3-x}}{x+2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg 4x}{tg 6x}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n-13}{4n+4}\right)^{5n-7}$.

106. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{4x^2-25x+25}{2x^2-15x+25}$; *при* а) $x_0=2$; б) $x_0=5$; в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{x+5}-\sqrt{3-x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{ctg 6x}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-4}{n+5}\right)^{3n-2}$.

107. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{7x^2+26x-33}{2x^2+x-3}$; *при* $a)\ x_0=1$; $б)\ x_0=-1$; $в)\ x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{8-x}}{x-2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg 7x}{5x}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-5}{2n+3}\right)^{4n-2}$.

108. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2+15x+25}{x^2+15x+50}$; *при* $a)\ x=5$; $б)\ x_0=-5$; $в)\ x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x-2}-\sqrt{6-x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ctg 7x}{tg 5x}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-1}{3n+6}\right)^{2n-2}$.

109. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{6x^2+13x+7}{3x^2+8x+5}$; *при* $a)\ x=-2$; $б)\ x_0=-1$; $в)\ x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}{x-3}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{tg 2x}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n-3}{5n+4}\right)^{n-2}$.

110. 1)) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2+3x-36}{5x^2-35x+60}$; *при* $a)\ x=3$; $б)\ x_0=-4$; $в)\ x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x-3}-\sqrt{9-x}}{x-6}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 8x}{4x}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n-1}{4n+3}\right)^{5n-2}$.

Задачи 111-130. Найти производные заданных функций.

111. а) y=(3x^4-$\frac{4}{\sqrt[4]{x}}$+2); б) y=ln $\sqrt[5]{\left(\frac{1-5x}{1+5x}\right)^3}$;

в) y=arccos 2x+$\sqrt{1-4x}^{\,2}$; г) y=2^{tgx} +xsin2x.

112. а) y=(5x^2 +4$\sqrt[4]{x}^{\,5}$+3)^3; б) y=ln$\sqrt[6]{\frac{1-x^6}{1+x^6}}$;

в) y=arctg$\sqrt{x^2-1}$; г)y=e^{3x} -2xtg3x.

113. а) y=$\left(\frac{1}{4}x^8+8\sqrt[8]{x^3-4}\right)$; б) y=ln$\sqrt[4]{\frac{4x-1}{x^4+1}}$;

в) y=arccos$\sqrt{x+1}$; г) y=3^{cosx} -xsin2x.

114. а) y=$\left(\frac{1}{5}x^5-3x\sqrt[3]{x}-4\right)^4$; б) y=ln$\sqrt[3]{\frac{x^3-3}{x^3+2}}$;

в) y=arctg$\sqrt{x-1}$; г) y=$\sqrt{x}\,ctg\ 3x-2^{x^2}$.

115. а) y=$\left(3x^8+5\sqrt[5]{x^2}-3\right)^5$; б) y= ln$\sqrt[5]{\left(\frac{5x+3}{x^5+1}\right)^2}$;

в) y=arctg$\frac{2}{x-3}$; г) y= $5^{\sqrt{x}}-x^2tg2x$.

116. а) y=$\left(5x^4-\frac{2}{x\sqrt{x}}+3\right)$; б) y= ln$\sqrt[4]{\frac{1-8x}{x^8+1}}$;

в) y=arccos $\sqrt{1-x}$; г) y= $3^{\sqrt{x}}+\frac{1-\sin 3x}{1+\sin 3x}$.

117. а) y=$\left(4x^3+\frac{3}{x\sqrt[3]{x}}-2\right)^5$; б) y=ln$\sqrt[6]{\left(\frac{x^6-1}{6x+5}\right)^7}$;

в) y= arcctg$\sqrt{x-1}$; г) y= $2^{x^2}-x\sin 4x$.

118. а) y=$\left(7x^5-3x\sqrt[3]{x^2-6;}\right)$; б) y=ln$\sqrt[3]{\left(\frac{3x-4}{3x+1}\right)^4}$;

в) y= $\arcsin\ 3x-\sqrt{1-9x^2}$; г) y= $e^{tgx}-\sqrt{x}\cos 2x$.

119. а) y= $\left(3x^4-\frac{4}{\sqrt[4]{x}}-3\right)^5$; б) y= $\ln\sqrt{\left(\frac{x^6-3}{6x+2}\right)^3}$;

в) y= $\mathrm{arctg}\frac{1}{x-1}$; г) y=xtg3x+$2^{x-2}$.

120. а) y=$\left(8x^3-\frac{9}{x^2\sqrt[3]{x}}+6\right)^5$; б) y= $\ln\sqrt[7]{\left(\frac{7x-4}{x^7-2}\right)^3}$;

в) y= $\arcsin\sqrt{1-x}$; г) y= $3^{\sin x}-\sqrt[3]{x}tg3x$.

121. а) y =$(x^4+1)e^{\sin x}$; б) y=$\frac{arctgx}{1+4x^2}$;

в) y=$\ln\sqrt{2x^2+3}$; г) y=$\sin^4(x/4)$.

122. а) y=$(1+9x^2)$arctg3x; б) y=$\frac{\arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}}$;

в) y=$\ln\sqrt{x^2+2x+5}$; г) y=tg^5.

123. а) y=$(3x-\sqrt{x}+5)^5$; б) y=$\frac{1+16x^2}{arctg4x}$;

в) y=$\ln\sqrt{4x^2+1}$; г) y=$\cos^3(4x/3)$.

124. а) y=$(x^2$-1/x+2)3; б) y=$\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}$;

в) y=lntg2x ; г) y=$\ln^5(x/5)$.

125. а) y=cos(3x)e^{3x}; б) y=$\frac{\arccos 2x}{\sqrt{1-4x^2}}$;

в) y=$\ln\sqrt{3x^2+1}$; г) y=$\arcsin^4(5x/3)$.

126. а) y=$(x^3+2)2^{3x}$; б) y=$\frac{\arcsin 3x}{\sqrt{1-9x^2}}$;

в) y=ln$ctg5x$; г) y=$\arcsin^4(5x/4)$.

127. а) y=$\frac{4}{5\sqrt[4]{x^5}}$; б) y=$\arccos^4(5x/4)$;

в) y=ln$\sqrt{2x^2+5}$; в) y=$\frac{\sin 3x}{\sqrt{1-9x^2}}$.

128. а) y=(1+4x^2)arctg2x; б) y=$\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+x+1}}$;

в) y=lncos5x; г) y=arctg^5(2x/5).

129. а) y=(x^3-3$\sqrt[3]{x}$+3)^5; б) y=$\frac{3-cos5x}{3+\sin 5x}$;

в) y=ln$\sqrt{4x^2+x}$; г) y=arctg^3(4x/3).

130. а) y=(x^2-4$\sqrt{x}$+3)^4; б) y=$\frac{e^{tgx}}{1+\cos^2 x}$;

в) y=ln$\sqrt{4x^2+x}$; г) y=sin^4(e^x/4).

В **задачах 131-140** найти приближенные значения указанных величин с помощью дифференциалов соответствующих функций.

131. (3,01)^4 132. (5,01)^3
133. (2.95)^4 134. (4.12)^3
135. (3,14)^5 137. (3,05)^5
137. (2.030)^8 138. (6,150)^3
139. (2,05)^7 140. (4,9)^3

Задачи 141-150. Вычислить приближенное значение $\sqrt[n]{a}$**,** заменив в точке x$_0$ приращение функции y=$\sqrt[n]{x}$ дифференциалом.

№	n=	a=	x$_0$=
141	3	502	512
142	4	267	256
143	5	234	243
144	6	685	729
145	7	142	128
146	3	349	343
147	4	605	625
148	5	255	243
149	6	773	729
150	7	156	128

Задачи 151-170. Исследовать средствами дифференциального исчисления функцию y=f(x) и построить ее график.

151. $f(x)=\frac{1}{3}(x^3-14x^2+49x-36)$;
152. $f(x)=\frac{1}{20}\left(x^3-25x^2+143x-119\right)$;
153. $f(x)=x^3-8{,}5x^2+20x-12{,}5$;
154. $f(x)=\frac{1}{3}\left(x^3-16x^2+69x-54\right)$;
155. $f(x)=\frac{1}{20}\left(x^3-29x^2+215x-187\right)$;
156. $f(x)=x^3-9{,}5x^2+26x-17{,}5$;
157. $f(x)=\frac{1}{3}\left(x^3-8x^2+5x+14\right)$;
158. $f(x)=\frac{1}{20}\left(x^3-19x^2+55x+75\right)$;
159. $f(x)=x^3-2{,}5x^2-2x+1{,}5$;
160. $f(x)=\frac{1}{3}\left(x^3-10x^2+17x+28\right)$;
161. $f(x)=1/3x^3-x^2-3x+4$;
162. $f(x)=0{,}5x^4-9x^2+1$;
163. $f(x)=2x^3-6x^2-18x+2$;
164. $f(x)=-x^4+2x^2$; 165. $f(x)=-x^3-4x^2+3x+8$;
166. $f(x)=4x-x^4$;
167. $f(x)=-1/9x^3+3x-2$;
168. $f(x)=x^4-x^3/3$;
169. $f(x)=2x^3-6x-2$;
170. $f(x)=x^3/3-x^4$.

Контрольная работа № 3

Тема: функции нескольких переменных. Интегральное исчисление.

Задачи 171-190. Найти дифференциал функции **z= f(x,y)**.

171. $f(x;y) = xy^3-2x^3y+2y^4$;
172. $f(x;y) = 3x+2y^2-5x^2y^2$;
173. $f(x;y) = x^4-6xy^2-7y^3$;

174. $f(x;y) = 2x^2y-8xy^2+x^2+y^3$;
175. $f(x;y) = x^3+5xy^3-3x^3y$;
176. $f(x;y) = 3x^2y^2+4xy^3-7x^3y$;
177. $f(x;y) = 4x^5-3x^2y^3-6y^5$;
178. $f(x;y) = 2xy^3-4x^3y-y^4$;
179. $f(x;y) = x^3y-3xy^3+y^5$;
180. $f(x;y) = 7x-3y+5x^3y^2$;
181. $f(x,y) = xy-x^2-2y^2+x+10y-8$;
182. $f(x,y) = 3x^2+3xy+y^5-6x/y$;
183. $f(x,y) = x^5y^3-3xy+4x-5y^2+5$;
184. $f(x,y) =4x^2y^5-3x^5+6y^7+3x$;
185. $f(x,y) = 2xy+4x^7+5y^4-13$;
186 . $f(x,y) = 4xy^2-3x^4y^3+7x-2y$;
187. $f(x,y) = 7x^3y^3-5xy^5+6y-3x^2+4$;
188. $f(x,y) = y^6-x^7+3x^4y^5-2xy+3x-4y+6$;
189. $f(x,y) = x^3-y^3+(xy+x^2)^3$;
190. $f(x,y) = (x^2y^3)^5-2xy+3y-5x$.

Задачи 191-210. Найти неопределенные интегралы. Результаты проверить дифференцированием.

191. а) $\int \frac{xdx}{7+x^2}$; б) $\int \frac{(x+18)dx}{x^2-4x-12}$;
в) $\int (3-x)\cos x dx$; г) $\int \sqrt{\cos x}\sin x\, dx$.

192. а) $\int \frac{dx}{\sin^2(x/5)}$; б) $\int \frac{(x+4)dx}{x^2-2x-8}$;
в) $\int x\ln(x-3x)dx$; г) $\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x}$.

193. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$; б) $\int \frac{(x+23)dx}{x^2+x-20}$;
в) $\int xe^{-7x}dx$; г) $\int \frac{arctgx}{1+x^2}dx$.

194. а) $\int \frac{dx}{5x+3}$; б) $\int \frac{(x+12)dx}{x^2-x-6}$;

в) $\int \operatorname{arctg}(4x)dx$; г) $\int \frac{-osx}{\sqrt[3]{\sin x}}dx.$

195. а) $\int \sin(2-3x)dx$; б) $\int \frac{(x+19)dx}{x^2-2x-15}$;

в) $\int \sqrt{x^3}\ln x dx$; г) $\int \frac{x^2}{2x^3+3}dx.$

196. а) $\int e^{x/4-2}dx$; б) $\int \frac{(5x+6)dx}{x^2+4x-12}$;

в) $\int x\sin 5x dx$; г) $\int \frac{x^2dx}{2x^3+3}$.

197. а) $\int \frac{dx}{4x^2+9}$; б) $\int \frac{5x-7}{x^2-x-20}dx$;

в) $\int (2x+5)\sin x dx$; г) $\int \sqrt{\ln x}\,\frac{dx}{x}$.

198. а) $\int \frac{dx}{\cos^2(2x)}$; б) $\int \frac{5xdx}{x^2+x-6}$;

в) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$; г) $\int \frac{dx}{x\ln x}$.

199. а) $\int \cos(x/3-4)dx$; б) $\int \frac{5x+2}{x^2+2x-8}dx$;

в) $\int \arcsin(x/3)dx$; г) $\int \frac{x}{2x^2+3}dx.$

200. а) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$; б) $\int \frac{5x+1}{x^2+2x-15}dx$;

в) $\int xe^{3x}dx$; г) $\int \frac{\ln x+3}{x}dx.$

201. а) $\int \frac{3x^2+e^x}{x^3+e^x}dx$; б) $\int \frac{arctg^2 2x}{1+4x^2}dx$;

в) $\int x\cos 2x dx$; г) $\int \frac{x^3+6}{x^2+5x-6}dx.$

202. а) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}dx$; б) $\int \frac{\ln(x+3)}{x+3}dx$;

в) $\int x\sin 4x dx$; г) $\int \frac{x^3+1}{x^2-3x+2}dx.$

203. а) $\int \frac{x^2}{1+x^6}dx$; б) $\int e^{\sin 3x}\cos 3x dx$;

в) $\int \frac{\ln x}{x}dx$; г) $\int \frac{x^3-2}{x^2-5x+6x}dx.$

204. а) $\int e^{-x^4}x^3 dx$; б) $\int \frac{5x^2}{\sqrt{1-x^6}}dx$;

в) $\int x^4\ln x dx$; г) $\int \frac{x^3+2}{x^2-x-2}dx.$

205. а) $\int \sqrt[5]{4-5\sin 2x}\cos 2x dx$; б) $\int \frac{1}{x\ln^2 x}dx$;

в) $\int xe^{2x}dx$; г) $\int \frac{x^3-3}{x^2+x-6}dx.$

206. а) $\int ctg5x dx$; б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$;

в) $\int xe^{3x}dx$; г) $\int \frac{x^3-3}{x^2+3x-6}dx.$

207. а) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$; б) $\int \sqrt[3]{2-3\cos 5x}\sin 5x dx$;

в) $\int x\,arctg 2x dx$; г) $\int \frac{x^3+4}{x^2-4x+3}dx.$

208. а) $\int \frac{4x^3+cosx}{x^4+\sin x}dx$; б) $\int \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$;

в) $\int xe^{-2x}dx$; г) $\int \frac{x^3+5}{x^2-2x-3}dx.$

209. а) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}dx$; б) $\int \frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}dx$;

в) $\int x\sin 3x dx$; г) $\int \frac{x^3-4}{x^2-x-6}dx.$

210. а) $\int \frac{e^{ctg\,2x}}{\sin^2 2x}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$;

в) $\int \sqrt[3]{x}\ln x dx$; г) $\int \frac{x^3-5}{x^2-6x+5}dx$.

Задачи 211-230. Вычислить по формуле Ньютона – Лейбница определенный интеграл $\int\limits_a^в f(x)dx$.

211. $\int\limits_3^9 \frac{\ln x}{x}dx$; 212. $\int\limits_0^1 \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx$; 213. $\int\limits_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$;

214. $\int\limits_0^{n/2} \cos^2 xdx$; 215. $\int\limits_0^1 \frac{x}{1+x^4}dx$; 216. $\int\limits_1^3 \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}dx$;

217. $\int\limits_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$; 218. $\int\limits_0^1 \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}dx$; 219. $\int\limits_1^8 \frac{1}{x+\sqrt[3]{x^2}}dx$;

220. $\int\limits_0^{n/2} \sin^2 xdx$; 221. $\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{3x^2+1}}$; 222. $\int\limits_1^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x}}$;

223. $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt[4]{5x+1}}$; 224. $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{1+4x^2}$; 225. $\int\limits_{-1}^4 \frac{xdx}{\sqrt{x+5}}$;

226. $\int\limits_1^{12} \frac{dx}{\sqrt{5x+4}}$; 227 . $\int\limits_3^{2\sqrt{5}} \frac{xdx}{\sqrt{x^2+16}}$; 228. $\int\limits_0^{\sqrt{5}} x\sqrt{x^2+4}dx$;

229. $\int\limits_0^4 \frac{xdx}{\sqrt{x^2+9}}$; 230. $\int\limits_0^{0,25} \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$.

Задачи 231-250. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $\boldsymbol{y=ax^2+bx+c}$ и прямой $\boldsymbol{y=kx+t}$. Сделать чертеж.

231. y= $-x^2+4x-1$; y= -x-1;
232. y= $-x^2-6x+7$; y= x+1;

233. $y=-x^2+6x-5$; $y=x-5$;
234. $y=x^2-6x+7$; $y=-x+7$;
235. $y=-x^2+6x-5$; $y=-x+1$;
236. $y=x^2+6x+7$; $y=x+7$;
237. $y=-x^2-6x-5$; $y=x+1$;
238. $y=x^2+6x+7$; $y=-x+1$;
239. $y=-x^2-6x-5$; $y=-x-5$;
240. $y=x^2-4x+1$; $y=x+1$;
241. $y=x^2-2x+3$; $y=x+3$;
242. $y=-x^2-x-5$; $y=x-5$;
243. $y=-2x^2+3x-2$; $y=-x-2$;
244. $y=3x^2-6x+4$; $y=-3x+4$;
245. $y=2x^2+x-3$; $y=-x-3$;
246. $y=x^2-8x-3$; $y=-4x+3$;
247. $y=5x^2-6x+1$; $y=4x+1$;
248. $y=2x^2-x-3$; $y=-3x-3$;
249. $y=x^2-5x-3$; $y=-x-3$;
250. $y=x^2+3x-2$; $y=x-2$.

Контрольная работа № 4

251. В читальном зале имеется 6 учебников по теории вероятности, из которых 2 в мягком переплете. Библиотекарь взял два учебника. Найти вероятность того, что оба учебника окажутся в мягком переплете.

252. Студент знает ответы на 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что он знает ответы на предложенные ему экзаменатором три вопроса.

253. Для некоторой местности в июле 6 пасмурных дней. Найти вероятность того, что первого и второго июля будет ясная погода.

254. Из 200 рабочих норму выработки не выполняют 15 человек. Найти вероятность того, что два случайно выбранных рабочих не выполняют норму.

255. Три стрелка по мишени. Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0,6, вторым – 0,7, третьим – 0,8. Найти вероятность того, что при одном выстреле попадут в цель: а) все три стрелка; б) попадет хотя бы один из них.

256. В ящике лежат 20 электрических лампочек, из которых 2 нестандартные. Найти вероятность того, что взятые одна за другой две лампочки окажутся стандартными.

257. Одновременно бросаются две игральные кости. Найти вероятность того, что на каждой кости появится нечетное количество очков.

258. Из заготовленной для посева пшеницы зерно первого сорта составляет 40 %, второго сорта – 50 %, третьего сорта – 10 %. Вероятность того, что взойдет зерно первого сорта равна 0,8, второго – 0,5, третьего – 0,3. Найти вероятность того, что взойдут наугад взятые зерна.

259. В магазин поступили телевизоры из трех заводов. Вероятность того, что телевизор изготовлен на первом заводе, равна 0,3, на втором – 0,2, на третьем – 0,5. Вероятность того, что телевизор окажется бракованным, для первого завода равна 0,2, для второго – 0,1, для третьего – 0,3. Найти вероятность того, что наугад взятый телевизор окажется не бракованным.

260. В мастерской на трех станках изготавливаются однотипные детали. Вероятность безотказной работы первого станка равна 0,8, второго – 0,7, третьего – 0,9. Вероятность изготовления бракованной детали на первом станке равна 0,2, на втором – 0,3, на третьем – 0,1. Найти вероятность того, что наугад выбранная деталь окажется стандартной.

261. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,7. Производится 4 выстрела. Найти вероятность того, что цель будет поражена: а) три раза; б) не более двух раз.

262. Вероятность всхожести пшеницы равна 0,8. Какова вероятность того, что из 5 семян взойдут не менее 3?

263. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8. Написать закон распределения вероятностей попаданий в цель при 5 выстрелах и построить многоугольник распределения вероятностей.

264. Всхожесть семян пшеницы составляет 90 %. Определить наиболее вероятное число всходов из 200 посеянных семян.

265. Семена пшеницы содержат 0,2 % сорняков. Найти вероятность того, что в 1000 семян будет 6 семян сорняков.

В **задачах 266–270** дана вероятность p того, что семя злака прорастет. Найти вероятность того, что из n посеянных семян прорастет ровно R семян.

266. n = 100, p = 0,9, R = 95.
267. n = 400, p = 0,8, R = 330.
268. n = 900, p = 0,36, R = 340.
269. n = 225, p = 0,64, R = 158.
270. n = 250, p = 0,81, R = 200.

В **задачах 271-280** дана вероятность p появления события A в каждом из n независимых испытаний. Найти вероятность того, что в этих испытаниях событие A появится не менее R_1 раз и не более R_2 раз.

271. n=360, p=0,8, R_1=280, R_2=300.
272. n=490, p=0,6, R_1=320, R_2=350.
273. n=640, p=0,9, R_1=500, R_2=540.
274. n=225, p=0,2, R_1=50, R_2=60.
275. n=810, p=0,4, R_1=340, R_2=400.
276. n=250, p=0,7, R_1=150, R_2=180.
277. n=300, p=0,3, R_1=110, R_2=130.
278. n=625, p=0,8, R_1=480, R_2=500.
279. n=100, p=0,5, R_1=60, R_2=80.
280. n=256, p=0,9, R_1=200, R_2=220.

В **задачах 281–290** задан закон распределения дискретной случайной величины X (в первой строке указаны возможные значения величины X, во второй строке даны вероятности p этих значений). Найти: 1) математическое ожидание M (X); 2) дисперсию D (X); 3) среднее квадратическое отклонение σ.

281.

X	8	4	6	5
p	0,1	0,3	0,2	0,4.

282.

X	23	25	27	29
p	0,2	0,1	0,3	0,4.

283.

X	10	8	6	9
p	0,4	0,1	0,3	0,2.

284.

X	32	40	37	35
p	0,1	0,3	0,4	0,2.

285.

X	42	41	43	45
p	0,3	0,3	0,2	0,2.

286.

X	15	11	13	12
p	0,2	0,5	0,2	0,1.

287.

X	52	54	57	51
p	0,1	0,4	0,3	0,2.

288.

X	21	20	22	26
p	0,5	0,2	0,2	0,1.

289.

X	34	30	32	36
p	0,2	0,4	0,3	0,1.

290.

X	50	48	51	53
p	0,3	0,2	0,2	0,3.

В **задачах 291–300** случайная величина X задана интегральной функцией распределения *F (x)*. Найти: 1) дифференциальную функцию распределения f (x); 2) математическое ожидание *M (X);* 3) дисперсию *D(X)*.

291.

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ x^2 \text{ при } 0 \le x \le 1, \\ 1 \text{ при } x > 1. \end{cases}$$

292.

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x<0, \\ \frac{x^2}{16} \text{ при } 0\le x\le 4, \\ 1 \text{ при } x>4. \end{cases}$$

293. $$F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x<2, \\ x-2 \text{ при } 2 \le x \le 3, \\ 1 \text{ при } x>3. \end{cases}$$

294. $$F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x<0, \\ \frac{x^2}{4} \text{ при } 0 \le x \le 2, \\ 1 \text{ при } x>2. \end{cases}$$

295. $$F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x>4, \\ x-4 \text{ при } 4 \le x \le 5, \\ 1 \text{ при } x>5. \end{cases}$$

296. $$F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x<0, \\ \frac{x^3}{8} \text{ при } 0 \le x \le 2, \\ 1 \text{ при } x>2. \end{cases}$$

297. $$F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x<0, \\ \frac{x^2}{9} \text{ при } 0 \le x \le 3, \\ 1 \text{ при } x>3. \end{cases}$$

299. $$F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x<0, \\ x \text{ при } 0 \le x \le 1, \\ 1 \text{ при } x>1. \end{cases}$$

300. $$F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x<0, \\ \frac{x^3}{27} \text{ при } 0 \le x \le 3, \\ 1 \text{ при } x>3. \end{cases}$$

301. Случайные отклонения размера детали от номинала распределены нормально. Математическое ожидание размера детали

равно 200 мм, среднее квадратическое отклонение равно 0,25 мм. Стандартными считаются детали, размер которых заключен между 199,5 мм и 200,5 мм. Найти процент стандартных деталей.

302. Средний диаметр стволов деревьев на некотором участке равен 25 см, среднее квадратическое отклонение равно 5 см. Считая диаметр ствола случайной величины, распределенной нормально, найти процент деревьев, имеющих диаметр свыше 20 см.

303. Процент всхожести семян равен 90 %. Оценить вероятность того, что из 1000 посеянных семян взойдут от 850 до 950 семян включительно.

304. Среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины равно 0,5. Найти вероятность того, что отклонение случайной величины от ее математического ожидания по абсолютной величине не превосходит 1.

305. Длина детали представляет собой нормально распределенную случайную величину с математическим ожиданием 150 мм и средним квадратическим отклонением 0,5 мм. Какую точность размера детали можно гарантировать с вероятностью 0,95?

306. Средний вес зерна равен 0,2 г, среднее квадратическое отклонение равно 0,05 г. Определить вероятность того, что вес наудачу взятого зерна окажется в пределах от 0,16 г до 0,22 г.

307. Норма высева семян на 1 га равна 200 кг. Фактический расход семян на 1 га колеблется около этого значения со средним квадратическим 10 кг. Определить количество семян, обеспечивающих посев на площадь 100 га с гарантией 0,95.

308. Случайные отклонения размера детали от номинала распределены нормально. Математическое ожидание размера детали равно 200 мм, среднее квадратическое отклонение равно 0,25 мм. Стандартными считаются детали, размер которых заключен между 199,5 мм и 200,5 мм. Из-за нарушения технологии точность изготовления деталей уменьшилось и характеризуется средним квадратическим отклонением 0,4 мм. На сколько повысился процент бракованных деталей?

309. Масса яблок, средняя величина которой равна 150 г, является нормально распределенной случайной величиной со средним квадратическим отклонением 20 г. Найти вероятность того, что масса наугад взятого яблока будет заключена в пределах от 130 г до 180 г.

310. Устройство состоит из 20 однотипных независимо работающих элементов. Вероятность безотказной работы каждого эле-

мента за 10 часов – 0,9. Оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом отказавших элементов и средним числом отказов за 10 часов окажется меньше двух.

Задачи 311–320. Хозяйство имеет возможность приобрести не более a трехтонных автомашин и не более $a-2$ пятитонных автомашин. Отпускная цена трехтонного грузовика – 4 000 у.е., а пятитонного – 5 000 у.е. Хозяйство может выделить для приобретения автомашин $9a-30$ тыс. у.е. Сколько нужно приобрести автомашин каждой марки, чтобы их суммарная грузоподъемность была максимальной? Задачу решить графическим методом. Значения параметра a представлены ниже.

Номер задания	311	312	313	314	315	316	317	318	319	320
Значение a	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

Указания к выполнению контрольной работы № 1

Задача 1. Даны координаты треугольника АВС: А (4;3), В (16; -6), С (20;16). Найти: 1) длину стороны АВ; 2) уравнение сторон АВ и ВС и их угловые коэффициенты; 3) угол В в радианах с точностью до двух знаков; 4) уравнение высоты CD; 5) уравнение медианы АЕ и координаты точки К пересечения этой медианы с высотой CD; 6) систему линейных неравенств, определяющих треугольник АВС.

Решение:

1. Расстояние d между точками А(x_1;y_1) и В(x_2;y_2) определяется по формуле

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2};\quad |AB|=\sqrt{(16-4)^2+(-6-3)^2}=15.$$

2. Уравнение прямой, проходящей через точки A $(x_1;y_1)$ и B $(x_2;y_2)$, имеет вид $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_2}{x_2-x_1}$, тогда уравнение прямой AB:

$\frac{y-3}{-6-3}=\frac{x-4}{16-4}$, $\frac{y-3}{-3}=\frac{x-4}{4}$, $4y-12=-3x+12$, $3x+4y-24=0$,

или $y=-\frac{3}{4}x+6$, тогда $k_{AB}=-\frac{3}{4}$. Аналогично уравнение прямой BC

11x-2y-188=0 или y=5,5x-94; k_{BC}=5,5.

3. Тангенс угла φ между прямыми, угловые коэффициенты которых соответственно k_1 и k_2, вычисляется по формуле

$$tg\varphi=\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2},$$

в нашем случае

$$tgB=\frac{-\frac{3}{4}-5{,}5}{1+\left(-\frac{3}{4}\right)(5{,}5)}=2,$$

B ≈ 63°26′, B ≈ 1,11 рад.

4. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении, имеет вид $y-y_1=k(x-x_1)$.

Так как высота CD перпендикулярна стороне AB, то

$$k_{CD}=-\frac{1}{k_{AB}};\quad k_{CD}=\frac{4}{3}.$$

Подставив координаты точки C и найденный угловой коэффициент высоты, получим y-16=4/3(x-20); 4x-3y-32=0.

Чтобы найти длину высоты CD, найдем сначала координаты точки D-пересечения прямых AB и CD. Решая систему

$$\begin{cases}3x+4y-24=0\\4x-3y-32=0\end{cases},$$

находим x=8, y=0 т.е. D(8;0), $|CD|=\sqrt{(20-8)^2+(16-0)^2}=20.$

5. Уравнение медианы АЕ. Определим координаты точки Е, которая является серединой стороны ВС:

$$x_E = \frac{x_1+x_2}{2}; \quad y_E = \frac{y_1+y_2}{2}; \qquad x_E = 18;\ y_E = 5;\ E(18;5).$$

Уравнение АЕ: $\frac{y-3}{5-3} = \frac{x-4}{18-4},\ x-7y+17=0\cdot$

Точка пересечения высоты CD и медианы АЕ является решением системы уравнений

$$\begin{cases} 4x-3y-32=0 \\ x-7y+17=0 \end{cases}$$

$$x=11;\ y=4;\quad \mathrm{K}(11;4).$$

6. Составим систему линейных неравенств, определяющих треугольник АВС. Построим прямоугольную систему координат хОу. Если в этой системе координат построить прямую ах+ау=с, то эта прямая разбивает плоскость на две полуплоскости. Координаты точек, лежащих в одной полуплоскости, удовлетворяют неравенству ах+ву. Сама прямая при этом является границей этих полуплоскостей. В качестве внутренней точки возьмем точку К (11;4).

АВ: 3х+4у-24=0;
ВС:11х-2у-188=0;
АС:13х-16у-4=0.

Подготовим координаты точки К в каждое из указанных уравнений:

$$3\cdot 11+4\cdot 4-24\succ 0;$$
$$11\cdot 11-2\cdot 4-188\succ 0;$$
$$13\cdot 11-16\cdot 4-4\succ 0.$$

Таким образом, треугольник можно задать следующей системой неравенств:

$$\begin{cases} 3x+4y-24\geq 0 \\ 11x-2y-188\leq 0. \\ 13x-16y-4\geq 0 \end{cases}$$

Задача 2. Составить уравнение линии, для каждой точки которой отношение расстояний до точки *A* (3;0) и до прямой x=12 равно числу ε=0,5. Полученное уравнение привести к простейшему виду и построить кривую.

Решение. Пусть *M (x;y)* – текущая (произвольная) точка искомого геометрического множества точек. Опустим перпендикуляр *MB* на прямую *x*=12 (рис. 1). Тогда *B (12;y).* По условию задачи $\frac{MA}{MB}=\frac{1}{2}$.

$$MA=\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2},\ MB=\sqrt{(x-12)^2+(y-y)^2},$$

тогда

$$\frac{\sqrt{(x-3)^2+y^2}}{\sqrt{(x-12)^2}}=\frac{1}{2},\quad \frac{x^2-6x+9+y^2}{x^2-24x+144}=\frac{1}{4},$$

$$4x^2-24x+36+4y^2=x^2-24x+144,\ 3x^2+4y^2=108,$$

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1.$$

Полученное уравнение представляет собой эллипс вида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где a=6, b=$3\sqrt{3}$.

Определим фокусы эллипса F_1 $(-c;\ 0)$ и $F_2(c;\ 0)$. Для эллипса справедливо равенство $b^2=a^2-b^2=9$ и c=3.

То есть F_1 (−3; 0) и F_2 (3; 0) – фокусы эллипса (точки F_2 и *A* совпадают).

Эксцентриситет эллипса $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$

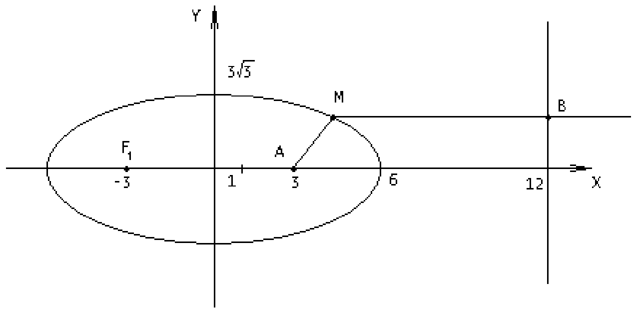

Рис. 1

Задача 3. Данную систему уравнений записать в матричной форме и решить ее с помощью обратной матрицы

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_3 - x_3 = 8, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$$

Решение. Обозначим через А-матрицу коэффициентов при неизвестных; Х-матрицу-столбец неизвестных X_1, X_2, X_3; Н-матрицу-столбец свободных членов:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad X=\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}, \qquad H=\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

С учетом этих обозначений данная система уравнений принимает следующую матричную форму:

$$A \cdot X = H.$$

Если матрица A – невырожденная (ее определитель Δ отличен от нуля), то она имеет обратную матрицу A^{-1}, получим

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot H.$$

Но $A^{-1} \cdot A = E$ (Е – единичная матрица), а $EX = X$, поэтому

$$X = A^{-1} \cdot H. \qquad (1)$$

Равенство (1) называется матричной записью решения системы линейных уравнений. Для нахождения решения системы уравнений необходимо вычислить обратную матрицу A^{-1}.

Пусть имеем невырожденную матрицу

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Тогда $$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{31}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{32}}{\Delta} \\ \frac{A_{13}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} & \frac{A_{33}}{\Delta} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} (i=1, 2, 3; j=1, 2, 3) – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} в определителе матрицы A, которое является произведением $(-1)^{i+j}$ на минор (определитель) второго порядка, полученный вычеркиванием i-й строки и j-го столбца в определителе матрицы A.

Вычислим определитель Δ и алгебраические дополнения A_{ij} элементов матрицы A.

$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$, следовательно, матрица A имеет обратную матрицу A^{-1}.

$$A_{11}=(-1)^{i+1.}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=5, \qquad A_{12}=(-1)^{1+2.}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-5,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3.}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-5, \qquad A_{21}=(-1)^{2+1.}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=3,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2.}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1, \qquad A_{23}=(-1)^{2+3.}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1.}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-1, \qquad A_{32}=(-1)^{3+2.}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3.}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=7.$$

Тогда

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{10} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{5}{10} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ -\frac{5}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{7}{10} \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \\ -5 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

По формуле (1) находим решение данной системы уравнений в матричной форме:

$$X=A^{-1}\cdot H=\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \\ -5 & -1 & 7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix} 5\cdot 1+3\cdot 8+(-1)\cdot(-1) \\ -5\cdot 1+1\cdot 8+3\cdot(-1) \\ -5\cdot 1-1\cdot 8+7\cdot(-1) \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $x_1=3$, $x_2=0$, $x_3=-2$.

Задача 4. Даны координаты трех точек: А (3; 0; −5), В (6; 2; 1), С (12; −12; 3).

Требуется: 1) записать векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ в системе орт и найти модули этих векторов; 2) найти угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$; 3) составить уравнение плоскости, проходящей через точку *C* перпендикулярно вектору $\overline{AB}$.

Решение. 1. Если даны точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $V_2(x_2; y_2; z_2)$, то вектор $\overline{M_1M_2}$ через орты $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ выражается следующим образом:

$$\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\,\bar{i} + (y_2 - y_1)\,\bar{j} + (z_2 - z_1)\bar{k} = a_x\bar{i} + a_x\bar{j} + a_x\bar{k}. \qquad (2)$$

Подставляя в эту формулу координаты точек *A* и *B*, имеем

$$\overline{AB}=(6–3)\,\bar{i}+(2–0)\,\bar{j}+(1+5)\bar{k}=3\bar{i}+2\bar{j}+6\bar{k}.$$

Подобным образом $\overline{AC}$=(12–3), $\bar{i}$+(−12–0), $\bar{j}$+(3+5), $\bar{k}=9\bar{i}-12\bar{j}+8\bar{k}$.

Модуль вектора $\overline{M_1M_2}$ вычисляется по формуле

$$\left|\overline{M_1M_2}\right| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}\,. \qquad (3)$$

Подставляя в формулу (3) найденные ранее координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, находим их модули:

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2} = 7,$$
$$\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{9^2 + (-12)^2 + 8^2} = 17.$$

2. Косинус угла α, образованного векторами $\bar{a} \cdot \bar{b}$, равен их скалярному произведению, деленному на произведение их модулей:

$$\cos\alpha = \frac{\bar{a}\bar{b}}{\left|\bar{a}\right| \cdot \left|\bar{b}\right|}\,. \qquad (4)$$

Так как скалярное произведение двух векторов, заданных своими координатами, равно сумме попарных произведений одноименных координат, то $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 3\cdot 9 + 2\cdot(-12) + 6\cdot 8 = 51$.

Применяя (4), имеем

$$\cos\alpha = \cos\left(\widehat{\overline{AB};\overline{AC}}\right) = \frac{51}{7\cdot 17} \approx 0{,}4286;\ \alpha \approx 64^{\circ}37'.$$

3. Известно, что уравнение, искомая плоскость которого проходит через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ перпендикулярно вектору $n\{A;B;C;\}$, имеет вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (5)$$

По условию задачи искомая плоскость проходит через точку $C\,(12;-12;3)$ перпендикулярно вектору $\overline{AB}\,\{3;2;6\}$. Подставляя в (5) $A=3$, $B=2$, $C=6$, $x_0=12$, $y_0=-12$, $z_0=3$, получим

$$3(x-12)+2(y+12)+6(z-3)=0,$$
$$3x+2y+6z-30=0 -$$

искомое уравнение плоскости.

Указания по выполнению контрольной работы № 2

Задача 5. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{4\tilde{o}^2+11\tilde{o}-3}{3\tilde{o}^2+10\tilde{o}+3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{\tilde{o}^2+3\tilde{o}}-\tilde{o}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\tilde{o}}{arctg5x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+1}\right)^{4x+5}$.

Решение: а) подстановка предельного значения аргумента x=−3 приводит к неопределенному выражению вида $\frac{0}{0}$.

Для устранения этой неопределенности разложим числитель и знаменатель дроби на множители и сократим дробь на множитель (x+3). Такое сокращение здесь возможно, так как множитель (x+3) отличен от нуля при x$\to -3$:

$$\lim_{x\to -3}\frac{4x^2+11x-3}{3x^2+10x+3}=\lim_{x\to -3}\frac{(4x-1)(x+3)}{(3x+1)(x+3)}=\lim_{x\to -3}\frac{4x-1}{3x+1}==\frac{4\cdot(-3)-1}{3\cdot(-3)+1}=\frac{13}{8};$$

б) при $\chi\to\infty$ выражение $\sqrt{x^2+3x}-x$ дает неопределенность вида $\infty-\infty$. Для ее устранения умножим и разделим это выражение на $(\sqrt{x^2+3x}+x)$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}-1}=\frac{3}{2};$$

в) обозначим $arctg5x=y$. Тогда $5x=tg\,y$ и $y\to 0$ при $x\to 0$. Применяя свойства пределов и формулу первого замечательного предела $\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=1$, имеем

$$\lim_{a\to 0}\frac{2x}{arctg5x}=\frac{2}{5}\lim_{y\to 0}\frac{tgy}{y}=\frac{2}{5}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{1}{\cos y}=\frac{2}{5}\cdot 1\cdot 1=\frac{2}{5};$$

г) при $\chi \to \infty$ выражение $\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{4x+5}$ является неопределенностью вида 1^{∞}. Для устранения этой неопределенности представим основание степени в виде суммы 1 и бесконечно малой при $\chi \to \infty$ величины и применим формулу второго замечательного предела:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

Тогда имеем

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{4x+5}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1-4}{2x+1}\right)^{4x+5}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{2x+1}\right)^{4x+5}.$$

Пусть $2x+1=-4y$. Тогда $4x+5=-8y+3$ и $y\to-\infty$ при $\chi \to \infty$. Переходя к переменной y, получим

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-8y+3}=\left[\lim_{y\to-\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{-8}\cdot\lim_{y\to-\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{3}=e^{-8}\cdot 1^{3}=\frac{1}{e^{8}}.$$

Задача 6. Найти производные заданных функций:

$$y=\frac{5\sqrt{x}}{x^2-3};$$

$$y'=5\left(\frac{\sqrt{x}}{x^2-3}\right)'=5\frac{\left(\sqrt{x}\right)'\left(x^2-3\right)-\sqrt{x}\left(x^2-3\right)'}{\left(x^2-3\right)^2}=5\,\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(x^2-3\right)-\sqrt{x}\,2x}{\left(x^2-3\right)^2}=-\frac{15\left(x^2+1\right)}{2\sqrt{x}\left(x^2-3\right)^2};$$

$$y=2^x x^3+\arcsin x,\quad y'=\left(2^x x^3+\arcsin x\right)'=\left(2^x x^3\right)'+\left(\arcsin x\right)'=$$
$$2^x\cdot\ln 2\cdot x^3+2^x 3x^2+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=2^x x^2\left(x\ln 2+3\right)+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$y'=\left(\frac{\cos x}{x^4}\right)'=\frac{\left(\cos x\right)' x^4-\cos x\left(x^4\right)'}{\left(x^4\right)^2}=\frac{-\sin x\, x^4-4x^3\cos x}{x^8}=-\frac{x\sin x+4\cos x}{x^5}.$$

Этот пример можно решить иначе:

$$y' = \left(\cos x \cdot x^{-4}\right)' = \left(-\sin x\right)x^{-4} + \cos x\left(-4x^{-5}\right) = -\left(\frac{\sin x}{x^4} + \frac{4\cos x}{x^5}\right) = -\frac{x\sin x + 4\cos x}{x^5}.$$

Задача 7. Вычислить приближенное значение $\sqrt[3]{26}$.

Решение. Воспользуемся формулой

$$f(x_0+\Delta x) \cong f(x_0)+f'(x_0)\Delta x,$$

получим

$$\sqrt[3]{x_0+\Delta x} \approx \sqrt[3]{x_0} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x_0^2}}\Delta x.$$

Пусть $x_0 = 27,$ тогда $\Delta x = -1,$ следовательно,

$$\sqrt[3]{26} \approx \sqrt[3]{27} + \frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}}(-1) = 3 - \frac{1}{27} \approx 2{,}96.$$

Задача 8. Построить график функции $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$.

Решение. 1. Областью определения функции является множество всех вещественных чисел, кроме x=1.

2. Так как уравнение $x^2+1=0$ не имеет вещественных корней, то график функции не имеет точек пересечения с осью Ox, но пересекает ось Oy в точке (0;-1).

3. Выясним вопрос о существовании асимптот. Исследуем поведение функции вблизи точки разрыва x=1. Так как $y \to \infty$ при $x \to -\infty$, $y \to +\infty$ при $x \to 1+$, то прямая x=1 является вертикальной асимптотой графика функции.

Если $x \to +\infty (x \to -\infty)$, то $y \to +\infty (y \to -\infty)$; следовательно, горизонтальной асимптоты у графика нет. Далее, из существования пределов

$$k=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{f(x)}{x}=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{x^2+1}{x(x-1)}=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}=1.$$

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}(f(x)-kx)=\lim_{\substack{x\to+\infty\\x\to-\infty}}\left(\frac{x^2+1}{x-1}-x\right)=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{x^2+1-x^2-x}{x-1}=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{1+x}{x-1}=1,$$

решая уравнение x^2-2x-1=0, получаем две точки возможного экстремума:

$$x_1=1-\sqrt{2} \text{ и } x_2=1+\sqrt{2}.$$

5. Для нахождения критических точек вычислим вторую производную:

$$y''=(f'(x))'=\left(\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}\right)'=\frac{(2x-2)(x-1)^2-2(x-1)(x^2-2x-1)}{\left((x-1)^2\right)^2}=$$

$$\frac{(x-1)((2x-2)(x-1)-2(x^2-2x-1))}{\left((x-1)^2\right)^2}=\frac{2x^2-2x-2x+2-2x^2+4x+2}{(x-1)^3}=\frac{4}{(x-1)^3}.$$

Так как f''(x) в нуль не обращается, то критических точек нет.

6. Исследуем знак первой и второй производных. Точки возможного экстремума, подлежащие рассмотрению, $x_1=1-\sqrt{2}$ и $x_2=1+\sqrt{2}$, разделяют область существования функции на интервалы (-∞;1-√2), (1-√2;1+√2) и (1+√2;+∞).

В каждом из этих интервалов производная сохраняет знак: в первом – плюс, во втором – минус, в третьем – плюс. Последовательность знаков первой производной запишется так: +,-,+. Получаем, что функция на (-∞;1-√2) возрастает, на (1-√2;1+√2) убывает, а на (1+√2;+∞) снова возрастает. Точки экстремума: максимум при x=1-√2, причем f(1-√2)=2-2√2, минимум при x=1+√2, причем f(1+√2)=2+2√2. На (-∞;1) график направлен выпуклостью вверх, а на (1;+∞) – вниз.

7. Составим таблицу полученных значений.

X	$(-\infty;1-\sqrt{2})$	$1-\sqrt{2}$	$(1-\sqrt{2};)$	1	$(1;1+\sqrt{2})$	$1+\sqrt{2}$	$(1+\sqrt{2};\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	∞	-	0	+
$f''(x)$	– выпукла вверх	– выпукла вверх	– выпукла вверх	∞	+ выпукла вниз	+ выпукла вниз	+ выпукла вниз
$f(x)$		$y_{max}=2-2\sqrt{2}$		∞		$y_{min}=2+2\sqrt{2}$	

8. По полученным данным строим эскиз графика функции

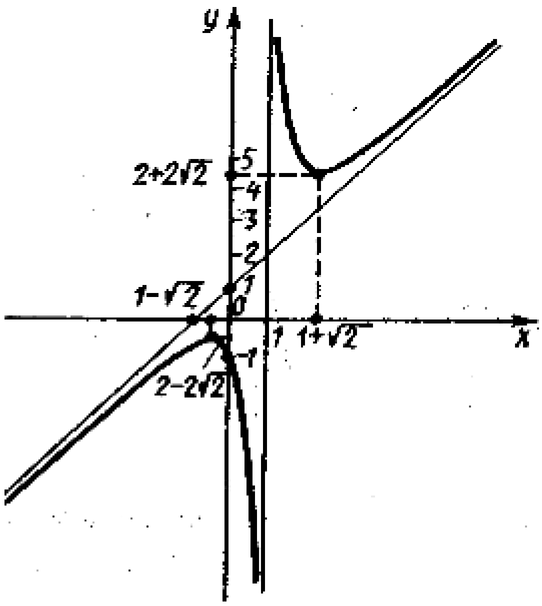

Рис. 2

Указания по выполнению контрольной работы № 3

Задача 9. Найти полный дифференциал функции

$$z = \ln(y + \sqrt{x^2 + y^2}).$$

Решение. Найдем частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\ln(y+\sqrt{x^2+y^2})\right)'_x=\frac{1}{y+\sqrt{x^2+y^2}}\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x=$$

$$=\frac{1}{y+\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\ln(y+\sqrt{x^2+y^2})\right)'_y=\frac{1}{y+\sqrt{x^2+y^2}}\left(1+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Следовательно, $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{xdx}{\sqrt{x^2+y^2}\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)}+\frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

Задача 10. Найти неопределенные интегралы:

а) замена переменной

$$\int\frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}}dx=\int\frac{d\sin x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}=\int\frac{dt}{t^{\frac{2}{3}}}=\int t^{-\frac{2}{3}}dt=3t^{\frac{1}{3}}+c=3\sqrt[3]{\sin x}+c;$$

б) интегрирование по частям

$$\int xe^{-2x}dx.$$

Решение. Воспользуемся методом интегрирования по частям. Положим

$$U=x,\ \ dV=e^{-2x}dx.$$

Тогда

$$dU=dx,\ \ V=\int e^{-2x}dx=-\tfrac{1}{2}e^{-2x}+C$$

(всегда можно считать, что C=0).

Следовательно, по формуле (1) имеем

$$\int xe^{-2x}dx = x\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) - \int\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)dx =$$
$$= -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C.$$

в) интегрирование рациональных функций

$$\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x}dx.$$

Под знаком интеграла находится неправильная рациональная функция. Исключим целую часть, разложим знаменатель остатка на линейные множители, представим остаток в виде суммы элементарных рациональных функций:

$$\frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} = x^2 + x + 4 + \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x};$$
$$\frac{4x^2 + 16x - 8}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}.$$

Приведем правую часть последнего равенства к общему знаменателю и, освободившись от него, получим уравнение

$4x^2+16x-8=A(x^2-4)+B(x+2)x+C(x-2)x=(A+B+C)x^2+2(B-C)x-4A.$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x, запишем систему трех уравнений относительно неопределенных коэффициентов A,B,C:

$$\begin{array}{r} x^2: \\ x: \\ x^0: \end{array} \begin{cases} A + B + C = 4 \\ 2(B - C) = 16 \\ -4A = -8 \end{cases} \Rightarrow A = 2 \quad B = 5 \quad C = -3.$$

Отсюда

$$\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x}dx = \int\left(x^2 + x + 4\right)dx + \int\frac{2}{x}dx + \int\frac{5}{x-2}dx + \int\frac{-3}{x+2}dx =$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x + 2\ln x + 5\ln(x-2) - 3\ln(x+2) + C \cdot$$

Задача 11. Вычисление определенного интеграла по формуле Ньютона – Лейбница. Вычислить определенный интеграл

$$\int_{-\frac{3}{4}}^{0} \frac{3x}{\sqrt{(x+1)^3}} dx.$$

$$\int_{-\frac{3}{4}}^{0} \frac{3x}{\sqrt{(x+1)^3}} dx = 3\int_{-\frac{3}{4}}^{0} \frac{x+1-1}{\sqrt{(x+1)^3}} dx = 3\int_{-\frac{3}{4}}^{0} \left(\frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^3}} - \frac{1}{\sqrt{(x+1)^3}} \right) dx =$$

$$= 3\int_{-\frac{3}{4}}^{0} \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{(x+1)^3}} \right) dx = 3\int_{-\frac{3}{4}}^{0} \left((x+1)^{-\frac{1}{2}} - (x+1)^{-\frac{3}{2}} \right) d(x+1) =$$

$$= 3 \cdot \left(2\sqrt{x+1} + \frac{2}{\sqrt{x+1}} \right) \Bigg|_{-\frac{3}{4}}^{0} = 6 \cdot \frac{x+2}{\sqrt{x+1}} \Bigg|_{-\frac{3}{4}}^{0} = 6 \cdot \left(2 - \frac{5}{2} \right) = -3.$$

Ответ: -3.

Задача 12. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями:

$$y = x + 2, \quad y = 2x - \frac{x^2}{2} + 6.$$

Решение. Находим точки пересечения заданных линий. Для этого решаем систему уравнений

$$\begin{cases} y = x + 2, \\ y = 2x - \dfrac{x^2}{2} + 6. \end{cases}$$

Для нахождения абсцисс точек пересечения заданных линий решаем уравнение

$$x+2=2x-\frac{x^2}{2}+6 \quad \text{или} \quad x^2-2x-8=0.$$

Находим: x_1 = -2, x_2 = 4.

Итак, данные линии, представляющие собой параболу и прямую, пересекаются в точках A (-2; 0), B (4; 6). Эти линии образуют замкнутую фигуру, площадь которой вычисляем по указанной выше формуле

$$S=\int_{-2}^{4}\left(2x-\frac{x^2}{2}+6-x-2\right)dx=\int_{-2}^{4}\left(x-\frac{x^2}{2}+4\right)dx.$$

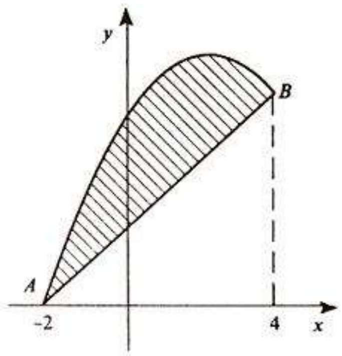

Рис. 3

По формуле Ньютона – Лейбница находим

$$S=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+4x\right)\Bigg|_{-2}^{4}=\frac{16}{2}-\frac{64}{6}+16-\frac{4}{2}-\frac{8}{6}+8=18.$$

Указания к выполнению контрольной работы № 4

Задача 13. Вероятность всхожести семян пшеницы равна 0,9. Какова вероятность того, что из четырех посеянных семян взойдут не менее трех?

Решение. Пусть событие A – из 4 семян взойдут не менее 3 семян; событие B – из 4 семян взойдут 3 семени; событие C – из 4 семян взойдут 4 семени. По теореме сложения вероятностей

$$P(A) = P(B) + P(C).$$

Вероятности *P(B)* и *P(C)* определим по формуле Бернулли, применяемой в следующем случае. Пусть проводится серия *n* независимых испытаний, при каждом из которых вероятность наступления события постоянна и равна *p,* а вероятность не наступления этого события равна $q=1-p$. Тогда вероятность того, что событие *A* в *n* испытаниях появится ровно *R* раз, вычисляется по формуле Бернулли

$$P_n(R)=C_n^R p^R q^{n-R},$$

где $C_n^R=\dfrac{n!}{R!(n-R)!}$ – число сочетаний из n элементов по *R*.

Тогда

$$P(B)=P_4(3)=C_4^3 p^3 q^{4-3}=\frac{4!}{3!(4-3)!}\cdot 0{,}9^3\cdot(1-0{,}9)=0{,}2916;$$

$$P(C)=P_4(4)=C_4^4 p^4 q^{4-4}=0{,}9^4=0{,}6561.$$

Искомая вероятность $P(A)=0{,}2916+0{,}6561=0{,}9477$.

Задача 14. Вероятность всхожести семян пшеницы равна 0,9. Найти вероятность того, что из 400 посеянных семян взойдут 350 семян.

Решение. Вычислить искомую вероятность P_n *(350)* по формуле Бернулли затруднительно из-за громоздкости вычислений. Поэтому применим приближенную формулу, выражающую локальную теорему Лапласа:

$$P_n(R)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\varphi(x),$$

где

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ и } x=\frac{R-np}{\sqrt{npq}}.$$

Из условия задачи $p=0{,}9$; $q=1-0{,}9=0{,}1$; $n=400$; $R=350$.

Тогда

$$x=\frac{350-400\cdot 0{,}9}{\sqrt{400\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1}}=-\frac{10}{6}\approx-1{,}67.$$

Из таблицы 1 приложений находим φ (- 1,67) = φ (1,67) = 0, 0989 . Искомая вероятность равна

$$P_{400}(350) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} \cdot 0{,}0989 \approx 0{,}0165\,.$$

Задача 15. Среди семян пшеницы 0,02 % сорняков. Какова вероятность того, что при случайном отборе 10 000 семян будет обнаружено 6 семян сорняков?

Решение. Применение Локальной теоремы Лапласа из-за малой вероятности p = 0, 0002 приводит к значительному отклонению вероятности от точного значения $P_n(R)$. Поэтому при малых значениях p для вычисления $P_n(R)$ применяют асимптотическую формулу Пуассона

$$P_n(R) \approx \frac{\lambda^R}{R!} \cdot e^{-\lambda},$$

где e =2,7182…, $\lambda = np$.

Эта формула используется при $\lambda \leq 10$, причем, чем меньше p и больше n, тем результат точнее.

По условию задачи p=0,0002; n=10 000; R=6. Тогда $\lambda = 10000 \cdot 0{,}0002 = 2$ и

$$P_{10000} \cdot (6) \approx \frac{2^6}{6!} \cdot e^{-2} \approx \frac{64}{720} \cdot 0{,}1353 \approx 0{,}012\,.$$

Задача 16. Процент всхожести семян пшеницы равен 90 %. Найти вероятность того, что из 500 посеянных семян взойдут от 400 до 440 семян.

Решение. Если вероятность наступления события A в каждом из n испытаний постоянна и равна p, то вероятность P_n $(R_1 \leq R \leq R_2)$ того, что событие А в таких испытаниях наступит не менее R_1 раз и не более R_2 раз, определяется по интегральной теореме Лапласа следующей формулой:

$$P_n(R_1 \leq R \leq R_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

где

$$\alpha = \frac{R_1 - np}{\sqrt{npq}}, \qquad \beta = \frac{R_2 - np}{\sqrt{npq}}\,.$$

Функция $\Phi(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ называется функцией Лапласа.

При x › 5 функция *Ф (x)* = 0,5. При отрицательных значениях x в силу нечетности функции Лапласа *Ф (-x) = Ф (x).* Используя функцию Лапласа, имеем

$$P_n(R_1 \le r \le R_2) \approx \Phi(\beta) - \Phi(\alpha).$$

По условию задачи n = 500; p = 0,9; q = 0,1; R_1 = 400; R_2 = 440. По приведенным выше формулам находим α и β :

$$\alpha = \frac{400 - 500 \cdot 0{,}9}{\sqrt{500 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} \approx -7{,}45;$$

$$\beta = \frac{440 - 500 \cdot 0{,}9}{\sqrt{500 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} \approx -1{,}49.$$

Тогда

$$P_{500}(400 \le \kappa \le 440) \approx \Phi(-1{,}49) - \Phi(-7{,}45) =$$
$$= -\Phi(1{,}49) + \Phi(7{,}45) = -0{,}4319 + 0{,}5 = 0{,}0681.$$

Задача 17. Задан закон распределения дискретной случайной величины X:

X	40	42	41	44,
P	0,1	0,3	0,2	0,4.

Найти: 1) математическое ожидание *M (X)*; 2) дисперсию *D (X)*; 3) среднее квадратическое отклонение σ.

Решение. 1) если закон распределения дискретной случайной величины задан таблицей

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2		p_n,

где в первой строке даны значения случайной величины X, а во второй – вероятности этих значений, то математическое ожидание M (X) вычисляется по формуле

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i .$$

Тогда $M(X) = 40 \cdot 0{,}1 + 42 \cdot 0{,}3 + 41 \cdot 0{,}4 = 42{,}4.$

2) дисперсией $D(X)$ дискретной случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания, т.е.

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 = \sum_{i=1}^{n} [x_i - M(X)]^2 \cdot p_i .$$

Эта величина характеризует среднее ожидаемое значение квадрата отклонения X от M (X). Из последней формулы имеем

$$D(X) = (40 - 42{,}4)^2 \cdot 0{,}1 + (42 - 42{,}4)^2 \cdot 0{,}3 + (41 - 42{,}4)^2 \cdot 0{,}2 +$$
$$+ (44 - 42{,}4)^2 \cdot 0{,}4 = 2{,}4^2 \cdot 0{,}1 + 0{,}4^2 \cdot 0{,}3 + 1{,}4^2 0{,}2 + 1{,}6^2 \cdot 0{,}4 = 2{,}04.$$

Дисперсию $D(X)$ можно найти другим способом, исходя из следующего ее свойства: дисперсия $D(X)$ равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания $M(X)$, то есть

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Для вычисления $M(X^2)$ составим следующий закон распределения величины X^2:

X^2	40^2	42^2	41^2	44^2
P	0,1	0,3	0,2	0,4.

Тогда

$$M(X^2) = 40^2 \cdot 0{,}1 + 42^2 \cdot 0{,}3 + 41^2 \cdot 0{,}2 + 44^2 \cdot 0{,}4 = 160 + 529{,}2 +$$
$$+ 336{,}2 + 774{,}4 = 1799{,}8$$

и

$$D(X) = 1799{,}8 - 42{,}4^2 = 2{,}04.$$

3) для характеристики рассеяния возможных значений случайной величины вокруг его среднего значения вводится среднее квадра-

тическое отклонение *σ (X)* случайной величины *X*, равное квадратному корню из дисперсии *D (X),* то есть

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}\ .$$

Из этой формулы имеем

$$\sigma = \sqrt{2{,}04} \approx 1{,}43\,.$$

Задача 18. Непрерывная случайная величина X задана интегральной функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ x^3 & \text{при} \quad 0 \le x \le 1, \\ 1 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$$

Найти: 1) дифференциальную функцию распределения *f (x)*; 2) математическое ожидание *M (X)*; 3) дисперсию *D (X)*.

Решение. 1) дифференциальной функцией распределения *f(x)* непрерывной случайной величины *X* называется производная от интегральной функции распределения *F (x)* , то есть

$$f(x) = F'(x).$$

Искомая дифференциальная функция имеет следующий вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0\,, \\ 3x^2 & \text{при} \quad 0 \le x \le 1, \\ 0 & \text{при} \quad x > 1; \end{cases}$$

2) если непрерывная случайная величина *X* задана функцией *f (x)*, то ее математическое ожидание определяется формулой

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \cdot dx\,.$$

Так как функция *f (x)* при $x < 0$ и при $x > 1$ равна нулю, то из последней формулы имеем

$$M(x)=\int_0^1 x\cdot f(x)\cdot dx=\int_0^1 x\cdot 3x^2\cdot dx=\frac{3x^4}{4}\Big|_0^1=\frac{3}{4}.$$

3) дисперсию D (X) определим по формуле

$$D(x)=\int_{-\infty}^{\infty}[x-M(X)]^2\cdot f(x)dx.$$

Тогда

$$D(x)=\int_0^1\left(x-\frac{3}{4}\right)^2\cdot 3x^2dx=3\cdot\int_0^1\left(x^4-\frac{3}{2}x^3+\frac{9}{16}x^2\right)dx=$$

$$=3\cdot\left[\frac{x^5}{5}-\frac{3x^4}{8}+\frac{3x^3}{16}\right]_0^1=3\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{3}{8}+\frac{3}{16}\right)=\frac{3}{80}.$$

Задача 19. Длина детали представляет собой нормально распределенную случайную величину с математическим ожиданием 40 мм и средним квадратическим отклонением 3 мм. Найти вероятность того, что длина детали отклонится от ее математического ожидания не более, чем на 1,5 мм.

Решение: 1) пусть X – длина детали. Если случайная величина X задана дифференциальной функцией f (x), то вероятность того, что X примет значения, принадлежащие отрезку [α;β], определяется по формуле

$$P(\alpha\le X\le\beta)=\int_\alpha^\beta f(x)dx.$$

Вероятность выполнения строгих неравенств L < X < B определяется той же формулой. Если случайная величина X распределена по нормальному закону, то

$$P(\alpha\le X\le\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

где Φ (x) – функция Лапласа, a =M (X), σ = $\sqrt{D(x)}$.

В задаче $a=40$, $\alpha=34$, $\beta=43$, $\sigma=3$. Тогда

$$P(34<X<43)=\Phi\left(\frac{43-40}{3}\right)-\Phi\left(\frac{34-40}{3}\right)=\Phi(1)-\Phi(-2)=$$

$$=\Phi(1)+\Phi(2)=0{,}3413+0{,}4772=0{,}8185.$$

2) по условию задачи $a - \delta < X < a + \delta$,
где $a = 40$; $\delta = 1{,}5$. Подставив в (1) $\alpha = a - \delta$, $\beta = a + \delta$, имеем

$$P(a-\delta < X < a+\delta) = \Phi\left(\frac{a+\delta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\delta-a}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\cdot\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right),$$

то есть

$$P(|x-a| < \delta) = 2\Phi\cdot\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \tag{6}$$

Из формулы (6) имеем

$$P(|x-40| < 1{,}5) = 2\Phi\left(\frac{1{,}5}{3}\right) = 2\Phi(0{,}5) = 2\cdot 0{,}1915 = 0{,}383.$$

Задача 20. Предприятие имеет возможность приобрести не более 20 трехтонных и не более 18 пятитонных автомашин. Отпускная цена трехтонного грузовика 4000 у.е, пятитонного – 5000 у.е. Сколько нужно приобрести автомашин каждой марки, чтобы их суммарная грузоподъемность была максимальной, если для приобретения автомашин выделено 150 тысяч рублей? Задачу решить графическим и аналитическим методами.

Решение. Пусть приобретено x_1 трехтонных и x_2 пятитонных автомашин. Из условия задачи имеем

$$\begin{cases} 0 \le x_1 \le 20 \\ 0 \le x_2 \le 18 \\ 4x_1 + 5x_2 = 150. \end{cases} \tag{7}$$

Суммарная грузоподъемность приобретенных грузовиков равна

$$L = 3x_1 + 5x_2. \tag{8}$$

Задача состоит в нахождении такого решения системы (7) , при котором линейная форма (целевая функция) (8) принимает наибольшее значение.

Графический метод решения. В прямоугольной системе координат x_1Ox_2 построим многоугольник *OABCD*, образованный прямыми $x_1 = 0$ (*OD*), $x_1 = 20$ (*AB*), $x_2 = 0$ (*AO*), $x_2 = 18$ (*CD*), $4x_1 + 5x_2 = 150$ (*BC*) и прямую $3x_1 + 5x_2 = 0$ (l) (рис. 4).

Системе (7) удовлетворяют координаты точек, лежащих на пятиугольнике *OABCD* и внутри него. Так как прямые *L* и BC не параллельны, то для нахождения оптимального решения системы (1), для которого линейная форма (8) принимает наибольшее значение, достаточно найти значения этой формы в точках A, B, C, D и из полученных чисел выбрать наибольшее. В нашей задаче эти точки имеют следующие координаты: *A* (20;0), *B* (20;14), *C* (15;18), *D* (0;18). Подставляя координаты этих точек в (8), получим:

$$L(A) = L(20;\ 0) = 60; \qquad L(B) = L(20;\ 14) = 130;$$
$$L(C) = L(15;\ 18) = 135; \qquad L(D) = L(0;\ 18) = 90.$$

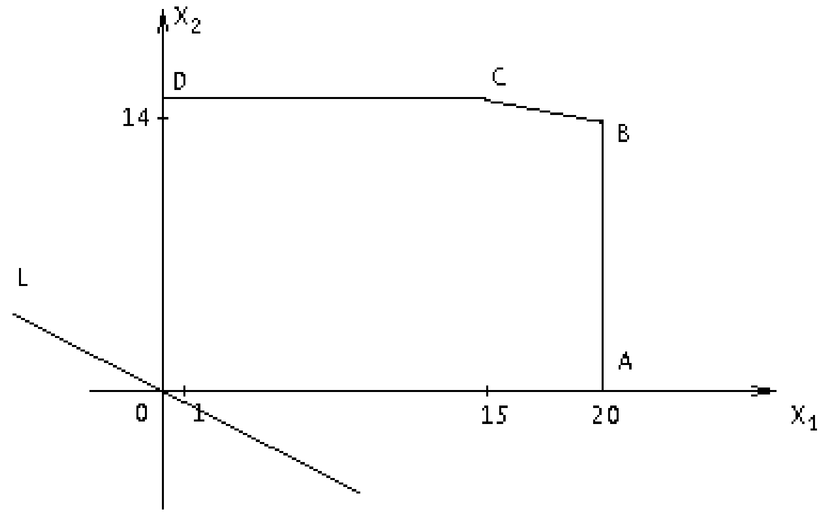

Рис. 4

Следовательно, $L = L(15;18) = 135$, то есть предприятию следует приобрести 15 трехтонных и 18 пятитонных автомашин, при их общей грузоподъемности 135 т.

НОМЕРА КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

В процессе изучения курса высшей математики студент должен выполнить ряд контрольных работ, число которых определяется учебным планом специальности студента, действующим в вузе. Ниже в таблицах указаны номера задач, составляющих содержание контрольных заданий на эти работы. Студент должен выполнить контрольные задания по варианту, номер которого совпадает с последней цифрой его учебного номера (шифра, номера зачетной книжки). При этом если предпоследняя цифра учебного плана – нечетное число (1,3,5,7,9), то номера задач для соответствующего варианта смотреть в таблице 1; если же предпоследняя цифра – четное число или ноль (2,4,6,8,0), то номера задач для соответствующего варианта смотреть в таблице 2.

Таблица 1

Вариант	Контрольная работа 1	Контрольная работа 2	Контрольная работа 3	Контрольная работа 4
1	1,21,41,61,81	101,111,131,151	171,191,211,231	251,261,271, 291, 301
2	2,22,42,62,82	102,112,132,152	172,192,212,232	252,262,272, 292, 302
3	3,23,43,63,83	103,113,133,153	173,193,213,233	253,263,273, 293, 303
4	4,24,44,64,84	104,114,134,154	174,194,214,234	254,264,274, 294, 304
5	5,25,45,65,85	105,115,135,155	175,195,215,235	255,265,275, 295, 305
6	6,26,46,66,86	106,116,136,156	176,196,216,236	256,266,276, 296, 306
7	7,27,47,67,87	107,117,137,157	177,197,217,237	257,267,277, 297, 307
8	8,28,48,68,88	108,118,138,158	178,198,218,238	258,268,278, 298, 308
9	9,29,49,69,89	109,119,139,159	179,199,219,239	259,269,279, 299, 309
0	10,30,50,70, 90	110,120,140,160	180,200,220,240	260,270,290, 300, 310

Таблица 2

Вари-ант	Контрольная работа 1	Контрольная работа 2	Контрольная работа 3	Контрольная работа 4
1	11,31,51,71, 91	101,121,141,161	181,201,221,241	251,261,271, 291, 301
2	12,32,52,72, 92	112,122,142,162	182,202,222,242	252,262,272, 292, 302
3	13,33,53,73, 93	113,123,143,163	183,203,223,243	253,263,273, 293, 303
4	14,34,54,74, 94	114,124,144,164	184,204,224,244	254,264,274, 294, 304
5	15,35,55,75, 95	115,125,145,165	185,205,225,245	255,265,275, 295, 305
6	16,36,56,76, 96	116,126,146,166	186,206,226,246	256,266,276, 296, 306
7	17,37,57,77, 97	117,127,147,167	187,207,227,247	257,267,277, 297, 307
8	18,38,58,78, 98	118,128,148,168	188,208,228,248	258,268,278, 298, 308
9	19,39,59,79, 99	119,129,149,169	189,209,229,249	259,269,279, 299, 309
0	20,40,60,80, 100	120,130,150,170	190,210,230,250	260,270,290, 300, 310

ЛИТЕРАТУРА

1. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмуран. – М.: Высшая школа, 2003.

2. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В.Е. Гмуран. – М.: Высшая школа, 2003.

3. Ефимов, Н.В. Краткий курс аналитической геометрии / Н.В. Ефимов. М.: Физмат Гиз, 2005.

4. Кудрявцев, В.А. Краткий курс высшей математики / В.А. Кудрявцев, В.П. Демидович. – М.: Наука, 2001.

5. Минорский, В.П. Сборник задач по высшей математике / В.П. Минорский. – М.: Наука, 2006.

6. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления / Н.С. Пискунова. – М.: Наука, 2001.

7. Сборник задач по математике для вузов. Линейная алгебра и основы математического анализа / под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 2007.

ОГЛАВЛЕНИЕ

МАТЕМАТИКА

Методические указания по выполнению контрольных работ

Миронов Геннадий Васильевич

Электронное издание

Редактор Е.А. Андреева

Подписано в свет 29.09.2016. Регистрационный номер 37
Редакционно-издательский центр Красноярского государственного аграрного университета
660017, Красноярск, ул. Ленина, 117
e-mail: rio@kgau.ru