

Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Красноярский государственный аграрный университет»

Р.М. ХРИСТИНИЧ, Е.В. ХРИСТИНИЧ

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ.
ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ.
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ**

Рекомендовано Учебно-методическим советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Красноярский государственный аграрный университет» для внутривузовского использования в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 35.03.06 «Агроинженерия», 15.03.02 «Технологические машины и оборудование»

Электронное издание

Красноярск 2023

ББК 31.211я73

X 93

Рецензенты:

*С. М. Плотников, д-р техн. наук, профессор каф. СОД КрИЖТ,
филиал ФГБОУ ИрГУПС*

*Ю. В. Лебедева, начальник управления взаимодействия с клиентами
филиала ПАО «Россети Сибирь» – «Красноярскэнерго»*

X 93 **Христинич, Р.М.**
Теоретические основы электротехники. Цепи с распределенными параметрами. Электромагнитное поле [Электронный ресурс]: учебное пособие / Р.М. Христинич, Е.В. Христинич; Краснояр. гос. аграр. унт-т. – Красноярск, 2023. – 148 с.

В пособии изложены вопросы теории цепей с распределенными параметрами и материалы по теории электромагнитного поля, а также приведены примеры решения задач. Пособие окажет помощь в изучении дисциплины «Теоретические основы электротехники».

Предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 35.03.06 «Агроинженерия», 15.03.02 «Технологические машины и оборудование».

ББК 31.211я73

© Христинич Р.М., Христинич Е.В., 2023

© ФГБОУ ВО «Красноярский государственный аграрный университет, 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	8
Тема 1. ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ.....	9
1.1. Длинные линии.....	9
1.2. Уравнения однородной двухпроводной линии.....	9
1.3. Установившийся режим в однородной линии.....	10
1.4. Однородная линия с гиперболическими функциями.....	12
1.5. Характеристики однородной линии.....	13
1.6. Входное сопротивление линии.....	14
1.7. Коэффициент отражения волны.....	14
1.8. Согласованная нагрузка линии.....	15
1.9. Линия без искажений.....	15
1.10. Холостой ход, короткое замыкание и нагрузочный режим линии с потерями.....	16
1.11. Линии без потерь.....	18
1.12. Стоячие волны.....	20
1.13. Применение линий без потерь.....	23
1.14. Исследование линий с распределенными параметрами.....	26
Контрольные вопросы.....	33
Тема 2. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ.....	34
2.1. Понятие электростатического поля.....	34
2.2. Закон Кулона.....	34
2.3. Основные характеристики электростатического поля.....	35
2.4. Электрическое поле – поле потенциальное.....	37
2.5. Силовые и эквипотенциальные линии.....	38
2.6. Напряженность как градиент потенциала.....	39
2.7. Дифференциальный оператор Гамильтона (оператор набла).....	40

2.8. Поток вектора через элемент поверхности и поток вектора через поверхность	41
2.9. Свободные и связанные заряды. Поляризация вещества	42
2.10. Понятие поляризованности	42
2.11. Вектор электрической индукции	44
2.12. Теорема Гаусса в интегральной форме	44
2.13. Теорема Гаусса в дифференциальной форме	45
2.14. Операция взятия дивергенции	46
2.15. Выражение $div\vec{E}$ в цилиндрической и сферической системах координат	46
2.16. Уравнение Пуассона и уравнение Лапласа	46
2.17. Поле внутри проводящего тела в условиях электростатики ...	47
2.18. Условия на границе раздела проводящего тела и диэлектрика.....	47
2.19. Условия на границе раздела двух диэлектриков	48
2.20. Теорема единственности решения	48
2.21. Общая характеристика задач электростатики.....	48
2.22. Поле заряженной оси	49
2.23. Поле двух параллельных заряженных осей.....	50
2.24. Поле двухпроводной линии	51
2.25. Емкость	52
2.26. Метод зеркальных изображений	53
2.27. Первая группа формул Максвелла. Вторая группа формул Максвелла.....	56
2.28. Третья группа формул Максвелла	58
2.29. Диэлектрический шар в равномерном поле	59
2.30. Диэлектрический цилиндр в равномерном поле	60
2.31. Графическое построение картины плоскопараллельного поля...	61
2.32. Энергия поля системы заряженных тел	62

2.33. Исследование электростатического поля	63
Контрольные вопросы.....	73
Тема 3. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА	
В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ	75
3.1. Плотность тока	75
3.2. Закон Ома и второй закон Кирхгофа в дифференциальной форме	76
3.3. Первый закон Кирхгофа в дифференциальной форме.....	77
3.4. Дифференциальная форма закона Джоуля – Ленца	78
3.5. Уравнение Лапласа для электрического поля в проводящей среде.....	78
3.6. Переход тока из среды с проводимостью γ_1 в среду с проводимостью γ_2 . Граничные условия	79
3.7. Аналогия между полем в проводящей среде и электростатическим полем	80
3.8. Экспериментальное исследование полей	81
3.9. Соотношение между проводимостью и емкостью	83
3.10. Характеристика задач расчета электрического поля в проводящей среде и методов их решения	84
3.11. Расчет электрического поля в диэлектрике, окружающем проводники с токами.....	84
3.12. Исследование электрического поля постоянного тока в проводящей среде.....	85
Контрольные вопросы.....	87
Тема 4. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА	
4.1. Основные величины магнитного поля	89
4.2. Закон полного тока в интегральной форме	90
4.3. Дифференциальная форма закона полного тока.....	91

4.4. Раскрытие выражения закона полного тока в декартовой системе координат	92
4.5. Запись ротора в виде векторного произведения	92
4.6. Раскрытие $rot H$ в виде определителя в декартовой системе ...	93
4.7. Выражение проекций ротора в цилиндрической и сферической системах координат	93
4.8. Принцип непрерывности магнитного потока	93
4.9. Скалярный потенциал магнитного поля	94
4.10. Граничные условия	96
4.11. Векторный потенциал магнитного поля	96
4.12. Уравнение Пуассона для вектора-потенциала	97
4.13. Выражение магнитного потока через циркуляцию вектора-потенциала.....	98
4.14. Векторный потенциал элемента тока	98
4.15. Взаимное соответствие электростатического (электрического) и магнитного полей	99
4.16. Задачи расчета магнитных полей	99
4.17. Общая характеристика методов расчета и исследования магнитных полей	100
4.18. Графическое построение картины поля и определение по ней магнитного сопротивления.....	101
4.19. Опытное исследование картины магнитного поля.....	101
4.20. Магнитное экранирование.....	102
4.21. Применение метода зеркальных изображений	105
4.22. Закон Био – Савара – Лапласа.....	106
4.23. Исследование магнитного поля постоянного тока.....	108
Контрольные вопросы.....	113

Тема 5. ПЕРЕМЕННОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ	115
5.1. Определение переменного электромагнитного поля	115
5.2. Первое уравнение Максвелла	115
5.3. Уравнение непрерывности	117
5.4. Второе уравнение Максвелла.....	117
5.5. Уравнения Максвелла в комплексной форме записи.....	118
5.6. Теорема Умова – Пойнтинга для мгновенных значений.....	118
5.7. Теорема Умова – Пойнтинга в комплексной форме записи....	122
5.8. Уравнения Максвелла для проводящей среды	123
5.9. Плоская электромагнитная волна.....	123
5.10. Распространение плоской электромагнитной волны в однородном проводящем полупространстве.....	127
5.11. Глубина проникновения и длина волны	128
5.12. Магнитный поверхностный эффект	129
5.13. Электрический поверхностный эффект в прямоугольной шине. Эффект близости	133
5.14. Поверхностный эффект в цилиндрическом проводе	134
5.15. Исследование переменного электромагнитного поля.....	136
Контрольные вопросы.....	139
ТЕСТЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ	141
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	146
ЛИТЕРАТУРА	147

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебное пособие предназначено для внутривузовского использования студентами, обучающимися по направлению подготовки 35.03.06 «Агроинженерия» профиля «Электрооборудование и электротехнологии в АПК», написано в соответствии с требованиями федерального государственного образовательного стандарта ВО №813 от 23.08.2017 г. и рабочей программы курса «Теоретические основы электротехники».

В пособии рассмотрены методы расчета электрических цепей с распределенными параметрами (длинных линий) и основы теории электромагнитного поля. Практически в каждом разделе приведены примеры решения рассматриваемых в теоретической части задач. Условия задач иллюстрируются рисунками, поясняющими выбор системы координат, размеров и прочей необходимой информации. Для самостоятельной проверки студентами полученных компетенций к каждому разделу приведены контрольные вопросы и итоговые тестовые задания.

Многие электротехнические проблемы решаются с использованием методов теории электромагнитного поля. Прежде всего эти методы необходимы для расчета важнейших электромагнитных параметров электротехнических устройств, таких как индуктивность, емкость, сопротивление. Без использования современных методов теории электромагнитного поля невозможно рассмотрение вопросов излучения и распространения в пространстве электромагнитных волн, потерь в мощных энергетических устройствах, создания и использования устройств с высокой напряженностью электрического или магнитного полей.

Целью изучения учебной дисциплины «Теоретические основы электротехники» является формирование теоретических знаний, практических умений и навыков в области анализа электромагнитных явлений в электроэнергетических и электротехнических устройствах и системах для обеспечения эффективности производственной и других видов деятельности.

Тема 1. ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

1.1. Длинные линии

В линиях электропередач (ЛЭП) при частоте 50 Гц и напряжениях до 35 кВ небольшой длины можно пренебрегать токами, обусловленными емкостью между проводами (токами смещения) и проводимостью изоляции (токами утечки через гирлянды изоляторов и токами, обусловленными коронным электрическим разрядом вблизи поверхности проводов).

При больших напряжениях, встречающихся в электроэнергетике, а также при значительной длине линий пренебрегать токами смещения и утечки недопустимо. Ток в проводах не одинаков в разных сечениях линии.

Ток в проводах линии вызывает падение напряжения в активном сопротивлении проводов и создает переменное магнитное поле, которое в свою очередь наводит вдоль всей линии ЭДС самоиндукции. Поэтому напряжение между проводами также не остается постоянным вдоль линии.

Чтобы учесть изменение тока и напряжения вдоль линии, нужно считать, что каждый сколь угодно малый элемент линии обладает сопротивлением и индуктивностью, а между проводами – проводимостью и емкостью, то есть рассматривать линию как цепь с распределенными параметрами. Такую линию называют длинной.

Будем считать сопротивление, индуктивность, проводимость и емкость равномерно распределенными вдоль линии, что является некоторой идеализацией действительных условий. Такую линию называют однородной.

В реальной линии утечку тока через гирлянды изоляторов нужно рассматривать как совокупность ряда сосредоточенных процессов. Кроме того, провес проводов на длине пролета линии изменяет равномерность распределения их емкости и индуктивности.

1.2. Уравнения однородной двухпроводной линии

Верхний провод двухпроводной линии называют прямым, а нижний – обратным. Первичные параметры однородной линии, отнесенные к единице ее длины: r_0 – сопротивление прямого и обратного проводов; L_0 – индуктивность петли, образуемой прямым и обратным

проводами; g_0 – проводимость между проводами; C_0 – емкость между проводами.

Длинную линию можно представить в виде множества соединенных в цепочку бесконечно малых элементов длиной dx , каждый из которых имеет сопротивление $r_0 dx$ и индуктивность $L_0 dx$, проводимость $g_0 dx$ и емкость $C_0 dx$, x – расстояние от начала линии до текущего элемента ее длины (рис. 1.1). Сопротивление $r_0 dx$ и индуктивность $L_0 dx$ будем считать включенными в один провод.

Мгновенные значения напряжения и тока в начале выбранного элемента линии: u и i , в начале следующего элемента: $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ и $i + \frac{\partial i}{\partial x} dx$.

Для элемента линии длиной dx на основании законов Кирхгофа запишем:

$$\begin{aligned} u - \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) &= r_0 dx i + L_0 dx \frac{\partial i}{\partial t}; \\ i - \left(i + \frac{\partial i}{\partial x} dx \right) &= \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) g_0 dx + C_0 dx \frac{\partial}{\partial t} \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right). \end{aligned} \quad (1.1)$$

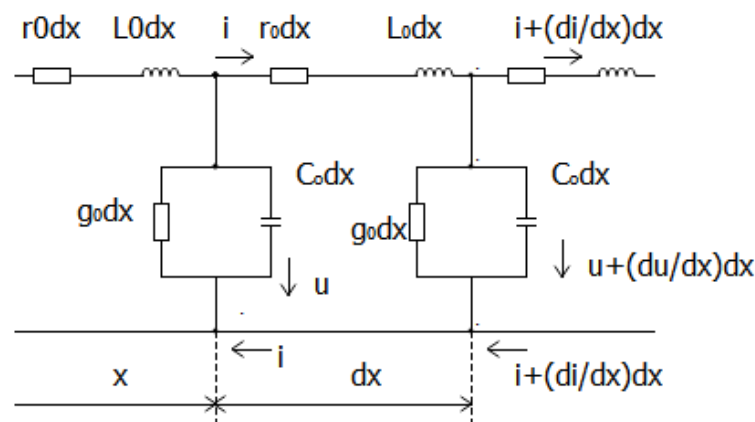


Рисунок 1.1 – Длинная линия

1.3. Установившийся режим в однородной линии

Решение уравнений (1.1) для установившегося режима при синусоидальном напряжении источника питания:

$$\underline{U} = \underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} + \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}x}, \quad (1.2)$$

где $\underline{A}_1, \underline{A}_2$ – комплексные постоянные интегрирования;

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = \sqrt{(r_0 + j\omega L_0)(g_0 + j\omega C_0)} - \text{коэффициент распространения}; \quad (1.3)$$

$\underline{Z}_0 = r_0 + j\omega L_0$ – комплексное сопротивление линии единичной длины;

$\underline{Y}_0 = g_0 + j\omega C_0$ – комплексная проводимость линии единичной длины.

$$\underline{I} = \frac{A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}}{\sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}}}, \quad (1.4)$$

где $\underline{Z}_B = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = \sqrt{\frac{r_0 + j\omega L_0}{g_0 + j\omega C_0}}$ – волновое сопротивление линии.

Для однородной линии, рассматриваемой между ее входными и выходными выводами как четырехполюсник, волновое сопротивление совпадает с характеристическим:

$$\underline{Z}_B = \underline{Z}_C = z_c e^{j\delta\theta} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = \sqrt{\frac{r_0 + j\omega L_0}{g_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{z_0}{y_0}} e^{j\delta\theta}, \quad (1.5)$$

где $\theta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\omega(g_0 L_0 - r_0 C_0)}{r_0 g_0 + \omega^2 L_0 C_0}$. (1.6)

Волновое сопротивление и коэффициент распространения называются вторичными параметрами однородной линии.

Кривые распределения мгновенных значений напряжений и токов имеют волнообразный характер, то есть их можно рассматривать как бегущую волну, движущуюся в направлении возрастания или убывания координаты x и затухающую в направлении движения (рис. 1.2). Волну, движущуюся от начала линии, называют прямой, а движущуюся от конца линии – обратной. Основными характеристиками бегущей волны являются фазовая скорость и длина волны.

Фазовой скоростью волны c называется скорость перемещения фазы колебания, которая в течение времени t и по мере увеличения расстояния x , пройденного волной, остается постоянной:

$$\omega t - \beta x + \psi_1 = \text{const.} \quad (1.7)$$

Длиной волны λ называется расстояние между ближайшими двумя точками, взятое в направлении распространения волны, фазы колебания в которых различаются на 2π .

$$\lambda = 2\pi / \beta, \quad (1.8)$$

$$c = \omega / \beta = 2\pi f / \beta = \lambda f = \lambda / T. \quad (1.9)$$

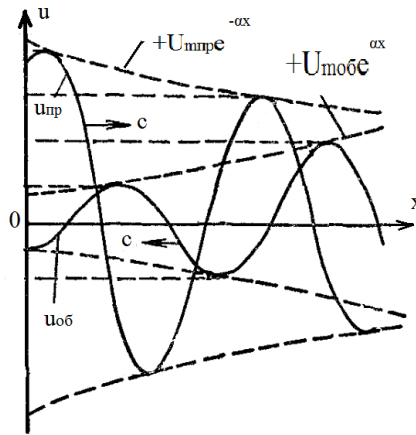


Рисунок 1.2 – Кривые распределения мгновенных значений напряжений и токов

За время, равное периоду, волна пробегает расстояние, равное длине волны.

1.4. Однородная линия с гиперболическими функциями

Пусть заданы напряжение \underline{U}_1 и ток \underline{I}_1 в начале линии ($x = 0$). Выбрать произвольно \underline{U}_1 и \underline{I}_1 – значит задать определенное сопротивление нагрузки \underline{Z}_H в конце линии. Если же, наоборот, задано сопротивление нагрузки \underline{Z}_H , то выбрана может быть только одна из величин \underline{U}_1 или \underline{I}_1 . Определить ток и напряжение в любой точке линии по их значениям в начале линии можно по следующим выражениям:

$$\begin{cases} \underline{U} = \underline{U}_1 \frac{e^{\underline{\gamma}x} + e^{-\underline{\gamma}x}}{2} - \underline{I}_1 \underline{Z}_c \frac{e^{\underline{\gamma}x} - e^{-\underline{\gamma}x}}{2} = \underline{U}_1 \text{ch}\underline{\gamma}x - \underline{I}_1 \underline{Z}_c \text{sh}\underline{\gamma}x; \\ \underline{I} = -\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_c} \frac{e^{\underline{\gamma}x} - e^{-\underline{\gamma}x}}{2} + \underline{I}_1 \frac{e^{\underline{\gamma}x} + e^{-\underline{\gamma}x}}{2} = -\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_c} \text{sh}\underline{\gamma}x + \underline{I}_1 \text{ch}\underline{\gamma}x. \end{cases} \quad (1.10)$$

Определить ток и напряжение в любой точке линии по их значениям в конце линии можно по следующим выражениям:

$$\begin{cases} \underline{U} = \underline{U}_2 \text{ch}\underline{\gamma}x + \underline{I}_2 \underline{Z}_c \text{sh}\underline{\gamma}x; \\ \underline{I} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \text{sh}\underline{\gamma}x + \underline{I}_2 \text{ch}\underline{\gamma}x. \end{cases} \quad (1.11)$$

При $\omega = 0$ для линии постоянного тока получим:

$$\underline{\gamma} = \alpha = \sqrt{r_0 g_0}; \quad \underline{Z}_c = r_c = \sqrt{r_0 / g_0}.$$

Формулы (1.11) для линии постоянного тока можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} U = U_2 \operatorname{ch} \alpha x + I_2 r_c \operatorname{sh} \alpha x; \\ I = \frac{U_2}{r_c} \operatorname{sh} \alpha x + I_2 \operatorname{ch} \alpha x. \end{cases} \quad (1.12)$$

1.5. Характеристики однородной линии

Напряжения и токи в линиях можно получить наложением прямых и обратных волн, поэтому комплексная величина $\underline{\gamma}$ называется коэффициентом распространения, α – коэффициентом ослабления, β – коэффициентом фазы. Коэффициент ослабления определяют в децибелах (или неперах) на единицу длины, а коэффициент фазы – в радианах на единицу длины.

Из выражения (1.3) получим:

$$\begin{cases} \alpha = \sqrt{\frac{1}{2}} (z_0 y_0 + r_0 g_0 - \omega^2 L_0 C_0); \\ \beta = \sqrt{\frac{1}{2}} (z_0 y_0 + \omega^2 L_0 C_0 - r_0 g_0). \end{cases} \quad (1.13)$$

Сопротивление \underline{Z}_c определяет токи прямой и обратной волн по соответствующим напряжениям:

$$I_{\text{пр}} = \underline{U}_{\text{пр}} / \underline{Z}_c; \quad I_{\text{об}} = \underline{U}_{\text{об}} / \underline{Z}_c. \quad (1.14)$$

Средние значения модуля \underline{Z}_c для воздушных линий 300–400 Ом, а для кабелей 60–80 Ом. У кабелей емкость C_0 значительно больше, а индуктивность L_0 меньше, чем для воздушных линий, так как провода у них расположены ближе друг к другу, а относительная диэлектрическая проницаемость изоляции порядка 4–5. Поэтому z_c кабелей в 6–8 раз меньше, чем воздушных линий.

Для линий без искажений ($r_0/g_0 = L_0/C_0$) и для линий без потерь ($r_0 = 0; g_0 = 0$):

$$c = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}, \quad (1.15)$$

где c_0 – скорость света в вакууме; ϵ_r и μ_r – относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости диэлектрика, окружающего провода.

В воздушных ЛЭП, для которых скорость c близка к c_0 при $f = 50$ Гц, длина волны:

$$\chi = cT \approx c_0/f = 6000 \text{ км.}$$

1.6. Входное сопротивление линии

При исследовании процессов в линии часто важно знать входное сопротивление линии. Под входным сопротивлением линии $\underline{Z}_{\text{ВХ}}$ понимают сопротивление двухполюсника, которым можно заменить линию вместе с приемником на ее конце при расчете режима в начале линии. По определению и с учетом равенств (1. 9) получим:

$$\underline{Z}_{\text{ВХ}} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2 \text{ch}\underline{\gamma}l + I_2 \underline{Z}_c \text{sh}\underline{\gamma}l}{\frac{U_2}{\underline{Z}_c} \text{sh}\underline{\gamma}l + I_2 \text{ch}\underline{\gamma}l} = \underline{Z}_c \frac{\underline{Z}_H + \underline{Z}_c \text{th}\underline{\gamma}l}{\underline{Z}_H \text{th}\underline{\gamma}l + \underline{Z}_c}. \quad (1. 16)$$

Входное сопротивление при любом сопротивлении нагрузки \underline{Z}_H можно выразить через входные сопротивления линии при холостом ходе \underline{Z}_x и коротком замыкании \underline{Z}_k . Из (1.16) находим при холостом ходе ($\underline{Z}_H = \infty; I_2 = 0$):

$$\underline{Z}_x = \frac{U_{1x}}{I_{1x}} = \frac{U_2 \text{ch}\underline{\gamma}l}{\frac{U_2}{\underline{Z}_c} \text{sh}\underline{\gamma}l} = \underline{Z}_c \text{cth}\underline{\gamma}l = \frac{\underline{Z}_c}{\text{th}\underline{\gamma}l}. \quad (1.17)$$

При коротком замыкании ($\underline{Z}_H = 0; U_2 = 0$):

$$\underline{Z}_k = \frac{U_{1k}}{I_{1k}} = \frac{I_2 \underline{Z}_c \text{sh}\underline{\gamma}l}{I_2 \text{ch}\underline{\gamma}l} = \underline{Z}_c \text{th}\underline{\gamma}l. \quad (1.18)$$

1.7. Коэффициент отражения волны

При произвольном сопротивлении нагрузки в конце линии \underline{Z}_H в линии возникает обратная волна. Это можно учесть с помощью комплексного коэффициента отражения волны, определив его в общем случае как отношение комплексов напряжений или токов обратной и прямой волн в любой точке линии:

$$\underline{\rho} = \frac{U_{\text{об}}}{U_{\text{пр}}} = \frac{I_{\text{об}}}{I_{\text{пр}}} = \frac{U_2 - I_2 \underline{Z}_c}{U_2 + I_2 \underline{Z}_c} e^{-2\underline{\gamma}x} = \frac{\underline{Z}_H - \underline{Z}_c}{\underline{Z}_H + \underline{Z}_c} e^{-2\underline{\gamma}x}. \quad (1.19)$$

В более узком смысле слова коэффициент отражения определяется в точках, где есть какая-либо неоднородность (конец или начало линии).

Отсутствие обратной волны имеет следующее преимущество – вся мощность, переносимая прямой волной к концу линии, поглощается сопротивлением нагрузки. При наличии обратной волны часть мощности прямой волны возвращается источнику обратной волной. Поэтому мощность, выделяющаяся в сопротивлении нагрузки, будет меньше, если считать, что мощность источника остается неизменной.

1.8. Согласованная нагрузка линии

Если в конце линии включено сопротивление нагрузки, равное волновому $\underline{Z}_н = \underline{Z}_с = \underline{U}_2/\underline{I}_2$, тогда отраженная волна не возникает. Такую нагрузку называют согласованной нагрузкой, или нагрузкой без отражения. При этом, как следует из (1.19), коэффициент отражения $\underline{\rho} = 0$. Режим работы генератора, питающего такую линию, не изменится, если в любом сечении линии ее разрезать и вместо отрезанной части линии включить волновое сопротивление. Режим работы оставшегося участка линии также не изменится.

Для согласованной линии входное сопротивление равно волновому $\underline{Z}_{вх} = \underline{Z}_с$, что следует из выражения (1.16).

Мощность в любом сечении линии равна:

$$P = UI \cos \theta = \frac{U_2^2}{z_c} e^{2\alpha x} \cos \theta. \quad (1.20)$$

Мощность, получаемая линией, $P_1 = U_1 I_1 \cos \theta$, мощность в конце линии $P_2 = U_2 I_2 \cos \theta$:

$$P_1 = U_1 I_1 \cos \theta = U_2 I_2 e^{2\alpha l} \cos \theta. \quad (1.21)$$

КПД линии:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = e^{-2\alpha l}. \quad (1.22)$$

Все сказанное здесь о согласованной линии применимо и к бесконечно длинной линии, поскольку в последней не может возникнуть отраженная волна.

1.9. Линия без искажений

Рассмотрим особенности линий связи. Для кабельных линий связи, благодаря близкому расположению проводов друг от друга, индуктивное сопротивление $x_0 = \omega L_0$ мало по сравнению с активным r_0 , и им в первом приближении можно пренебречь. Активной проводимостью g_0 между проводами можно пренебречь по сравнению с реактивной проводимостью $b_0 = \omega C_0$. Поэтому, полагая $L_0 = 0$ и $g_0 = 0$ и, следовательно, $Z_0 = r_0$; $\underline{Y}_0 = j\omega C_0$, из формул (1.5) и (1.13) получим:

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{1}{2} r_0 \omega C_0}; \quad (1.23)$$

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{r_0}{j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{r_0}{\omega C_0}} e^{-j\pi/4}. \quad (1.24)$$

Из этих соотношений видно, что коэффициент затухания α и коэффициент фазы β пропорциональны квадратному корню из частоты. Поэтому гармоники более высоких частот затухают сильнее, что приводит к искажению речи, музыки и телеграфных сигналов, т. е. к так называемым амплитудным искажениям. Фазовая скорость также зависит от частоты. Зависимость фазовой скорости от частоты приводит к изменению формы кривых токов и напряжений в конце линии по сравнению с их формой в начале линии. Эти искажения называются фазовыми. Амплитудные искажения также изменяют форму кривых. При высоких частотах $r_0 \ll \omega L_0$; $g_0 \ll \omega C_0$, согласно (1.13):

$$\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}. \quad (1.25)$$

Поэтому фазовая скорость не зависит от частоты и фазовые искажения практически отсутствуют. Значение z , при котором α минимально:

$$L_0/C_0 = r_0/g_0. \quad (1.26)$$

Найдем значение α_{min} и коэффициент фазы β из формул (1.13) с учетом условия (1.26):

$$\alpha_{min} = \sqrt{r_0 g_0}; \beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}. \quad (1.27)$$

Линию, удовлетворяющую условию (1.27), у которой, следовательно, коэффициент ослабления не зависит от частоты и минимален, называют линией без искажений.

Волновое сопротивление линии без искажений не зависит от частоты и активно:

$$\underline{Z}_c = \sqrt{L_0 C_0} = \sqrt{r_0 g_0}; \theta = 0. \quad (1.28)$$

Фазовая скорость в линиях без искажений также не зависит от частоты:

$$c = \omega/\beta = 1/\sqrt{L_0 C_0}. \quad (1.29)$$

1.10. Холостой ход, короткое замыкание и нагрузочный режим линии с потерями

Рассмотрим холостой ход линии. В нагрузочном режиме напряжение и ток в конце линии были \underline{U}_2 и \underline{I}_2 , после отключения приемника ($\underline{I}_2 = 0$) напряжение на конце ее при неизменном напряжении \underline{U}_1 в

начале линии изменится. Изменив напряжение в начале линии так, чтобы напряжение в конце линии осталось равным \underline{U}_2 , из уравнений (1.11) при холостом ходе получим:

$$\underline{U}_x = \underline{U}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} x; \quad \underline{I}_x = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh} \underline{\gamma} x. \quad (1.30)$$

Если, не изменяя напряжения в начале линии, закоротить ее на конце, ток на конце уже не будет равен \underline{I}_2 и в ряде случаев возрастет. Изменив напряжение в начале линии так, чтобы ток в конце короткозамкнутой линии стал равным \underline{I}_2 , из уравнений (1.11) получим:

$$\underline{U}_k = \underline{I}_2 \underline{Z}_c \operatorname{sh} \underline{\gamma} x; \quad \underline{I}_k = \underline{I}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} x. \quad (1.31)$$

Тогда на основании (1.11), (1.30) и (1.31) получим:

$$\underline{U} = \underline{U}_x + \underline{U}_k; \quad \underline{I} = \underline{I}_x + \underline{I}_k. \quad (1.32)$$

Полученные формулы показывают, что действительные ток и напряжение в любой точке линии могут быть разложены на составляющие холостого хода и короткого замыкания, чем иногда удобно пользоваться в расчетах. Например, при расчете распределения тока и напряжения вдоль нагруженной линии с потерями можно сначала найти составляющие напряжений и токов при холостом ходе и коротком замыкании в отдельности, а затем, геометрически суммируя их, получить действительные токи и напряжения.

При холостом ходе напряжения токи в любой точке линии можно определить, заменив $\operatorname{ch} \underline{\gamma} x$ и $\operatorname{sh} \underline{\gamma} x$ их модулями:

$$U_x = \left| \underline{U}_2 \operatorname{ch}(\alpha x + j\beta x) \right| \quad \text{и} \quad U_x^2 = \underline{U}_2^2 \frac{\operatorname{ch} 2\alpha x + \cos 2\beta x}{2}; \quad (1.33)$$

$$I_x = \left| \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh}(\alpha x + j\beta x) \right| \quad \text{и} \quad I_x^2 = \frac{\underline{U}_2^2}{\underline{Z}_c^2} \frac{\operatorname{ch} 2\alpha x - \cos 2\beta x}{2}. \quad (1.34)$$

При холостом ходе коэффициент отражения (1.19) в конце линии $\underline{\rho} = 1$. Комплексные напряжения (и ток) прямой и обратной волн в конце линии равны по абсолютному значению и по знаку (находятся в фазе), т. е. отражение волны от разомкнутого конца линии происходит без перемены знака.

Найдем распределение токов и напряжений при коротком замыкании линии:

$$U_k^2 = \underline{I}_2^2 \underline{Z}_c^2 \frac{\operatorname{ch} 2\alpha x - \cos 2\beta x}{2}; \quad (1.35)$$

$$I_k^2 = \underline{I}_2^2 \frac{\operatorname{ch} 2\alpha x + \cos 2\beta x}{2}. \quad (1.36)$$

При коротком замыкании коэффициент отражения (1.19) в конце линии $\underline{\rho} = -1$. Комплексные напряжения (и ток) прямой и обратной

волн равны по величине и противоположны по знаку (находятся в противофазе), то есть отражение волны от короткозамкнутого конца линии происходит с переменной знака.

1.11. Линии без потерь

Если положить равными нулю сопротивление проводов линии $r_0 = 0$ и проводимость утечки между проводами $g_0 = 0$, то получим линию без потерь.

Для коротких высокочастотных линий, применяемых в радиотехнике, часто с достаточно большой точностью можно пренебречь сопротивлением r_0 и утечкой g_0 по сравнению с ωL_0 и ωC_0 . Поэтому в радиотехнике очень часто рассматривают двухпроводные воздушные линии и коаксиальные кабели как линии без потерь.

Из соотношений (1.3), (1.5), (1.8) для такой линии получим:

$$\alpha = 0; \beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}; \quad (1.37)$$

$$\underline{Z}_c = \sqrt{L_0 / C_0} = z_c; \theta = 0; \quad (1.38)$$

$$c = \omega / \beta = 1 / \sqrt{L_0 C_0}; \quad (1.39)$$

$$\lambda = 2\pi / \beta. \quad (1.40)$$

У линии без потерь затухание равно нулю, а волновое сопротивление активное и не зависит от частоты. Фазовая скорость в линиях без потерь не зависит от частоты. Для линии без потерь $\underline{Z}_c, \lambda, c, \beta$ такие же, как и для неискажающей линии с потерями.

Емкость единицы длины двухпроводной линии, Ф/км, равна:

$$C_0 = \frac{\pi \varepsilon_r \varepsilon_0}{\ln(d/r_0)}, \quad (1.41)$$

индуктивность, Гн/км:

$$L_0 = \frac{\mu_r \mu_0}{\pi} \ln(d/r_0); \quad (1.42)$$

где r_0 – радиус провода; d – расстояние между осями проводов.

$$c = 1 / \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}; \quad (1.43)$$

где ε_a и μ_a – абсолютные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды между проводами.

Скорость света в вакууме:

$$c_0 = 1 / \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}, \quad (1.44)$$

и для фазовой скорости запишем:

$$c = c_0 / \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}. \quad (1.45)$$

Для воздушных линий $\varepsilon_r = \mu_r = 1$ и фазовая скорость в вакууме совпадает со скоростью света. Для кабельных линий $\varepsilon_r > 1$ и $c < c_0$.

Аргумент волнового сопротивления линии без потерь равен нулю, то есть токи прямой и обратной волн совпадают по фазе с напряжениями.

Уравнения длинной линии с гиперболическими функциями от комплексного аргумента (1.10) и (1.11) для линии без потерь переходят в уравнения с круговыми функциями от действительного аргумента. Если заданы напряжение и ток в начале линии, то:

$$\begin{cases} \underline{U} = \underline{U}_1 \cos \beta x - j \underline{I}_1 z_c \sin \beta x; \\ \underline{I} = -j \frac{\underline{U}_1}{z_c} \sin \beta x + \underline{I}_1 \cos \beta x. \end{cases} \quad (1.46)$$

Если заданы напряжение \underline{U}_2 и ток \underline{I}_2 в конце линии, то:

$$\begin{cases} \underline{U} = \underline{U}_2 \cos \beta x + j \underline{I}_2 z_c \sin \beta x; \\ \underline{I} = j \frac{\underline{U}_2}{z_c} \sin \beta x + \underline{I}_2 \cos \beta x. \end{cases} \quad (1.47)$$

Входное сопротивление линии:

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = z_c \frac{\underline{Z}_n + j z_c \operatorname{tg} \frac{2\pi l}{\lambda}}{\underline{Z}_n j \operatorname{tg} \frac{2\pi l}{\lambda} + 1}. \quad (1.48)$$

Рассмотрим свойства линий без потерь длиной в четверть и в половину длины волны. При $l = \lambda/4$ и $\beta l = (\frac{2\pi}{\lambda}) \lambda/4 = \pi/2$ из уравнений (1.47) получим:

$$\underline{U}_1 = j \underline{I}_2 z_c; \quad \underline{I}_1 = j \underline{U}_2 / z_c. \quad (1.49)$$

В этом случае напряжение (ток) в начале линии пропорционально току (напряжению) в конце и опережает его по фазе на 90° . Для поддержания постоянного напряжения в конце линии, которое может изменяться вследствие изменения нагрузки на конце линии, необходимо в начале линии поддерживать постоянным не напряжение \underline{U}_1 , а ток \underline{I}_1 .

Для линии длиной в половину волны $l = \lambda/2$ и $\beta l = \pi$:

$$\underline{U}_1 = -\underline{U}_2; \quad \underline{I}_1 = -\underline{I}_2, \quad (1.50)$$

То есть напряжение и ток в начале линии равны по абсолютному значению и противоположны по фазе напряжению и току в конце линии. Если не считать изменения фазы на 180° , питание приемника от источника энергии происходит таким образом, как будто бы самой линии передачи нет.

1.12. Стоячие волны

Рассмотрим режимы, при которых активная мощность в конце линии без потерь равна нулю: холостой ход, короткое замыкание и чисто реактивная нагрузка.

При холостом ходе ($I_2 = 0$, $Z_H = \infty$) из (1.47) следует:

$$\underline{U} = \underline{U}_2 \cos \beta x; \quad \underline{I} = j \frac{U_2}{z_c} \sin \beta x. \quad (1.51)$$

При $\underline{U}_2 = U_2$ мгновенные значения напряжения и тока равны:

$$\begin{aligned} u &= U_{2m} \cos \beta x \sin \omega t; \\ i &= \frac{U_{2m}}{z_c} \sin \beta x \cos \omega t \end{aligned} \quad (1.52)$$

и представляют собой уравнения стоячих волн. Математически уравнение стоячей волны представляется произведением двух функций, причем аргумент одной зависит только от времени, а другой – только от координаты.

Стоячей волной называется процесс, получающийся от наложения прямой и обратной волн с одинаковыми амплитудами. Выражение для напряжения (1.52) можно представить в виде суммы (а для тока в виде разности) прямой и обратной волн с одинаковыми амплитудами:

$$u = \frac{U_{2m}}{2} \sin(\omega t + \beta x) + \frac{U_{2m}}{2} \sin(\omega t - \beta x); \quad (1.53)$$

$$i = \frac{U_{2m}}{2z_c} \sin(\omega t + \beta x) - \frac{U_{2m}}{2z_c} \sin(\omega t - \beta x). \quad (1.54)$$

При холостом ходе на конце линии и в точках, отстоящих от конца на расстояниях $x = k\pi/\beta = k\lambda/2$, где k – целое число, в любой момент времени будут максимумы напряжения, которые называют пучностями, и нули тока, называемые узлами (рис. 1.3). На расстояниях от конца линии $x = (2k + 1)\pi/2\beta = (2k + 1)\lambda/4$, видим узлы напряжения и пучности тока. Ток опережает по фазе напряжение на 90° на участках, для которых знаки $\sin \beta x$ и $\cos \beta x$ одинаковы, и отстает по фазе на 90° от напряжения, когда эти знаки противоположны.

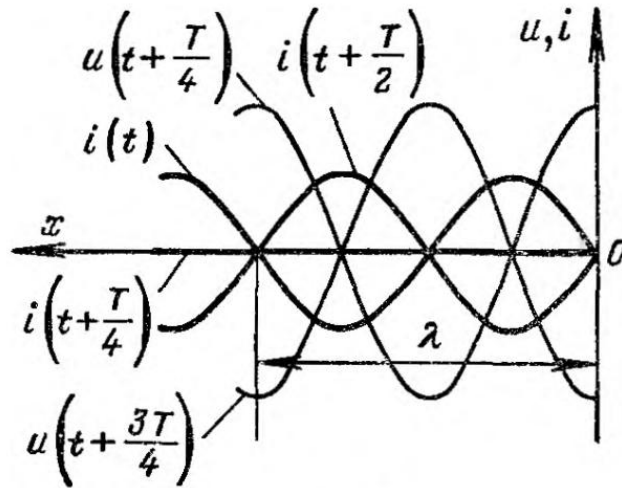


Рисунок 1.3 – Стоячие волны при холостом ходе

Входное сопротивление разомкнутой линии без потерь реактивное, и характер его определяется длиной волны и частотой (или длиной волны):

$$\underline{Z}_x = -jz_c \operatorname{ctg}(\beta x) = -jz_c \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{\lambda} x. \quad (1.55)$$

При коротком замыкании ($U_2 = 0, Z_H = 0$) из (1.47) получим:

$$\underline{U} = jI_2 z_c \sin \beta x; \quad \underline{I} = I_2 \cos \beta x.$$

Мгновенные значения

$$u = I_{2m} z_c \sin \beta x \cos \omega t; \quad i = I_{2m} \cos \beta x \sin \omega t.$$

Напряжение и ток представляют собой также стоячие волны. Для любого момента времени на конце линии ($x=0$) и в точках, отстоящих от него на целое число полуволн ($k\lambda/2$), имеем узлы напряжения и пучности тока, а в точках, отстоящих от конца линии на расстояния, равные нечетному числу четвертей длин волн $(2k + 1)\lambda/4$, получают пучности напряжения и узлы тока (рис. 1.4). При этом пучности напряжения и пучности тока, а также узлы напряжения и узлы тока сдвинуты на четверть длины волны друг относительно друга. Напряжение опережает по фазе ток на 90° на участках линии, на которых знаки $\sin \beta x$ и $\cos \beta x$ одинаковы, и отстает на 90° от тока, если знаки $\sin \beta x$ и $\cos \beta x$ противоположны.

Входное сопротивление короткозамкнутой линии без потерь чисто реактивное и в зависимости от длины линии и частоты может быть индуктивным или емкостным:

$$\underline{Z}_K = jz_c \operatorname{tg}(\beta x) = jz_c \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} x. \quad (1.56)$$

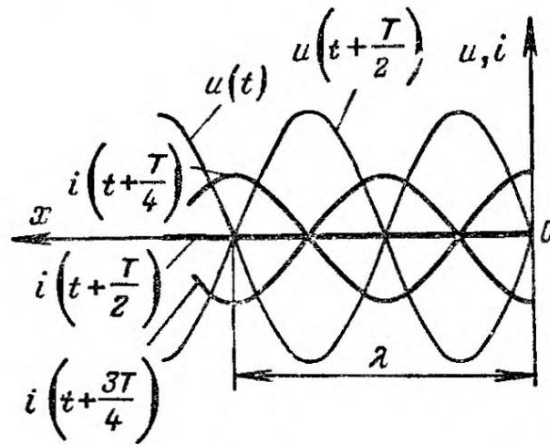


Рисунок 1.4 – Стоячие волны при коротком замыкании

При чисто реактивном сопротивлении нагрузки $Z_H = \pm jx_H$ в линии также будут стоячие волны. Емкостной и индуктивный элементы можно заменить отрезками разомкнутой или короткозамкнутой линии. Поэтому линия с реактивным сопротивлением нагрузки ничем не отличается от разомкнутой или короткозамкнутой линии большей длины. Только в конце линии с реактивным сопротивлением нагрузки не будет ни пучности, ни узла тока или напряжения (рис. 1.5).

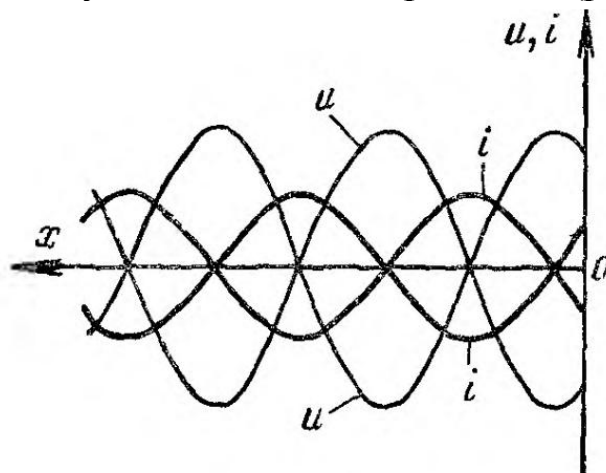


Рисунок 1.5 – Стоячая волна при чисто реактивной нагрузке

В узлах ток или напряжение равны нулю в любой момент времени, поэтому мощность в них всегда равна нулю и энергия через эти точки проходить не может. Следовательно, передачу энергии по линии осуществляют только бегущие волны. В случае стоячих волн движение энергии вдоль линии возможно только на участках между двумя смежными узлами тока и напряжения и связано с обменом энергией между электрическим и магнитным полями на каждом из таких участков. В разомкнутой или короткозамкнутой линии длиной несколько меньше четверти волны движение энергии (обмен энерги-

ей между генератором и линией) происходит вдоль всей линии, так как только на конце линии есть узел тока (разомкнутая линия) или узел напряжения (короткозамкнутая линия).

1.13. Применение линий без потерь

Линия без потерь длиной в четверть волны применяется в качестве согласующего элемента между какой-либо линией без потерь и приемником с резистивным сопротивлением на ее конце $\underline{Z}_H = r_H$ не равным волновому сопротивлению. Например (рис. 1.6), при помощи линии длиной в четверть волны можно согласовать линию (без потерь), питающую антенну, с самой антенной, входное сопротивление \underline{Z}_H которой чисто активное.

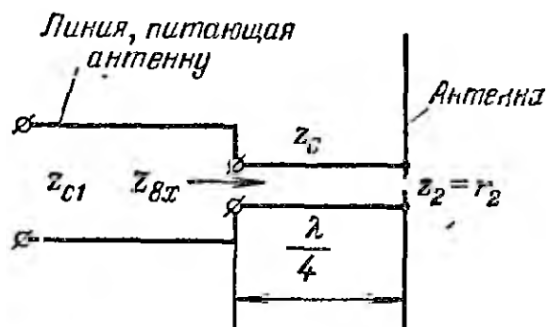


Рисунок 1.6 – Линия, питающая антенну, и антенна

Найдем входное сопротивление четвертьволновой линии ($l = \lambda/4$), нагруженной на антенну, при $\underline{Z}_H = r_H$ на основании (1.48):

$$\underline{Z}_{BX} = z_c \frac{r_H + jz_c \operatorname{tg} \frac{2\pi\lambda}{\lambda 4}}{jr_H \operatorname{tg} \frac{2\pi\lambda}{\lambda 4} + z_c}.$$

Так как $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \infty$, то:

$$\underline{Z}_{BX} = z_c^2 / r_H = z_{BX}.$$

Для согласования питающей линии с антенной необходимо, чтобы $\underline{Z}_{BX} = z_{c1}$, где z_{c1} – волновое сопротивление питающей линии.

Отсюда требуемое значение волнового сопротивления равно:

$$z_c = \sqrt{z_{c1} r_H}.$$

В этом случае четвертьволновая линия без потерь называется четвертьволновым трансформатором, так как она как бы приводит (трансформирует) волновое сопротивление питающей линии к сопротивлению нагрузки.

Линия без потерь длиной в четверть волны, замкнутая в конце подогревателем термопары, то есть практически накоротко, применяется как вольтметр для измерения распределения напряжения в двухпроводной линии, питаемой генератором с длиной волны λ (рис. 1.7). Термопара присоединяется к милливольтметру, измеряющему ее ЭДС. Кроме того, дается специальная градуировочная кривая, то есть зависимость ЭДС термопары от тока I_2 нагрева ее спая.

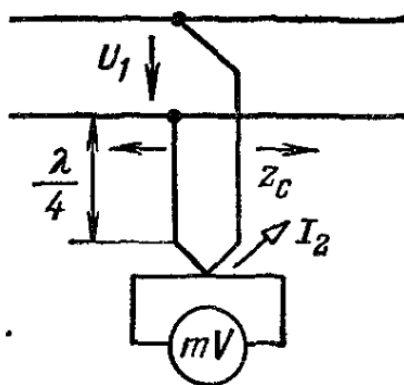


Рисунок 1.7 – Измерение напряжения в линии

Соотношение между напряжением в пучности U_1 (начало короткозамкнутой линии) и током в пучности I_2 (ее конец) определяется из (1.47):

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_2 z_c j \sin \beta (\lambda/4);$$

$$U_1 = I_2 z_c.$$

Определив по показаниям милливольтметра ток в пучности четвертьволновой линии, при помощи последней формулы вычисляют напряжение в ее начале, то есть напряжение между проводами исследуемой линии. Перемещая место присоединения четвертьволновой линии вдоль исследуемой линии, можно измерить распределение напряжения вдоль последней.

Входное сопротивление короткозамкнутой линии без потерь длиной $\lambda/4$ бесконечно велико, поэтому ее подключение не влияет на распределение напряжения вдоль исследуемой линии.

В сантиметровом и дециметровом диапазонах волн для измерения комплексного входного сопротивления какого-нибудь приемника применяют так называемую измерительную линию в виде отрезка коаксиальной линии без потерь. В коаксиальной линии прорезают щель, в которую вводят зонд, представляющий собой небольшой стерженек (или рамку). Щель вырезается параллельно линиям поверхностного

тока в оболочке коаксиальной линии. Как показывает анализ и опыт, наличие щели изменяет лишь в слабой степени первоначальную конфигурацию поля в измерительной линии. Зонд, который извлекает небольшую часть энергии, проходящей по измерительной линии, соединяется с индикатором. Показания индикатора пропорциональны напряженности электрического поля, а следовательно, и напряжению в данном сечении измерительной линии. Перемещая зонд вдоль щели, можно исследовать поле внутри измерительной линии. В конце линии присоединяют приемник, комплексное входное сопротивление $Z_{\text{н}}$ которого измеряется. По распределению напряжений вдоль измерительной линии можно определить сопротивление нагрузки (рис. 1.8).

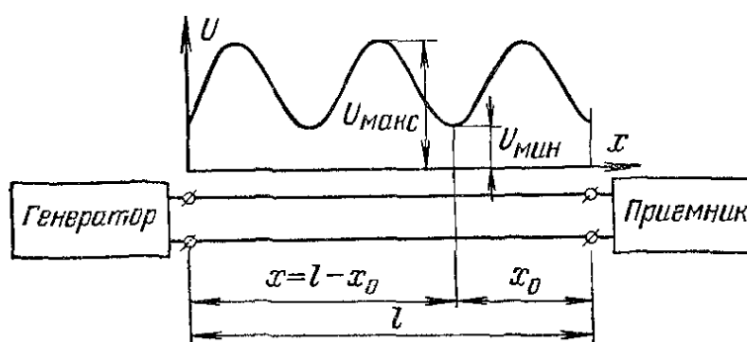


Рисунок 1.8 – Измерительная линия

Распределение напряжения и тока вдоль линии определяется уравнениями (1.2) и (1.4). При отсчете координаты от начала линии:

$$\underline{U} = \underline{A}_1 e^{-j\beta x} + \underline{A}_2 e^{j\beta x},$$

$$\underline{I} = \frac{1}{z_c} (\underline{A}_1 e^{-j\beta x} - \underline{A}_2 e^{j\beta x}).$$

Комплексный коэффициент отражения равен:

$$\underline{\rho} = \frac{\underline{A}_2 e^{j\beta x}}{\underline{A}_1 e^{-j\beta x}} = \frac{\underline{A}_2 e^{j\psi_2} e^{j\beta x}}{\underline{A}_1 e^{j\psi_1} e^{-j\beta x}} = \rho e^{j(2\beta x + \psi_2 - \psi_1)}, \quad (1.57)$$

где $\rho = A_2/A_1$ – его модуль.

Модуль ρ коэффициента отражения можно вычислить, определив коэффициент бегущей волны напряжения:

$$k_{\text{б}} = U_{\text{min}}/U_{\text{max}},$$

где U_{min} и U_{max} – минимальное и максимальное напряжения в линии, измеряемые непосредственно индикатором. В точке $x = l - x_0$, где прямая и обратная волны находятся в противофазе, имеем U_{min} , так что $U_{\text{min}} = A_1 - A_2$.

В точке, где они совпадают по фазе, напряжение максимально $U_{\text{max}} = A_1 + A_2$.

$$k_6 = \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} = (1 - \rho)/(1 + \rho).$$

Найдем сопротивление нагрузки ($x = l$):

$$\underline{Z}_H = \frac{U_2}{I_2} = Z_c \frac{1 + \rho e^{j(2\beta l + \psi_2 - \psi_1)}}{1 - \rho e^{j(2\beta l + \psi_2 - \psi_1)}}.$$

В точке минимума напряжения:

$$\underline{Z}_H = Z_c \frac{k_6 - j \operatorname{tg} \beta x_0}{1 - j k_6 \operatorname{tg} \beta x_0}.$$

Для вычисления \underline{Z}_H необходимо измерить U_{min} и U_{max} , то есть коэффициент бегущей волны k_6 напряжения и расстояние x_0 от приемника до ближайшего минимума напряжения.

1.14. Исследование линий с распределенными параметрами

ЗАДАНИЕ 1

По заданным значениям первичных параметров $r_0 = 7,3$ Ом/км, $C_0 = 16,4 \cdot 10^{-9}$ Ф/км, $L_0 = 3,04 \cdot 10^{-3}$ Гн/км, $g_0 = 0,675 \cdot 10^{-6}$ См/км, частоте $f = 350$ Гц, длине линии $l = 210$ км, комплексному значению тока в конце линии $I_2 = 16,65 \cdot e^{j23,1667^\circ}$ мА, сопротивлению нагрузки $\underline{Z}_H = 900 \cdot e^{-j23,1667^\circ}$ требуется:

- 1) определить напряжение \underline{U}_1 и ток \underline{I}_1 в начале линии, активную и полную мощности в начале и конце линии, а также КПД линии;
- 2) рассматривая линию как линию без потерь, а нагрузку чисто активной и равной полному сопротивлению, определить напряжение \underline{U}_1 и ток \underline{I}_1 в начале линии, а также длину электромагнитной волны λ ;
- 3) для пункта 2 построить график распределения действующего значения напряжения вдоль линии в функции координаты u .

РЕШЕНИЕ

1. Расчет длинных линий проще проводить, если определены вторичные параметры. Для этого сначала определим циклическую частоту $\omega = 2\pi f = 2 \cdot 3,14 \cdot 350 = 2200$ рад/с.

Определим волновое сопротивление \underline{Z}_B и коэффициент распространения:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_B &= \sqrt{\frac{r_0 + j\omega L_0}{g_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{7,3 + j2200 \cdot 3,04 \cdot 10^{-3}}{0,675 \cdot 10^{-6} + j2200 \cdot 16,4 \cdot 10^{-9}}} = \\ &= \sqrt{\frac{7,3 + j6,6853}{10^{-6}(0,675 + j36,0655)}} = 10^3 \sqrt{\frac{9,8986 \cdot e^{j42,483^\circ}}{36,0718 \cdot e^{j88,928^\circ}}} = \\ &0,52385 \cdot 10^3 \cdot e^{-j23,2225^\circ} \text{ Ом}; \\ \underline{\gamma} &= \alpha + j\beta = \sqrt{(r_0 + j\omega L_0)(g_0 + j\omega C_0)} = \\ &= \sqrt{(7,3 + j6,6853) \cdot (0,675 \cdot 10^{-6} + j36,0665 \cdot 10^{-6})} = \\ &= 10^{-3} \sqrt{9,8986 \cdot e^{j42,483^\circ} \cdot 36,0718 \cdot e^{j88,928^\circ}} = 1,8896 \cdot 10^{-2} \cdot \\ &e^{j65,7054^\circ} = 10^{-2} \cdot (0,7774 + j1,7223) \text{ 1/км}. \end{aligned}$$

При вычислениях использованы следующие свойства комплексных чисел:

$$\begin{aligned} \underline{A} \cdot \underline{B} &= A \cdot e^{ja} \cdot B \cdot e^{jb} = A \cdot B \cdot e^{j(a+b)}; \\ \frac{\underline{A}}{\underline{B}} &= \frac{A}{B} \cdot e^{j(a-b)}; \sqrt{\underline{A}} = \sqrt{A \cdot e^{ja}} = \sqrt{A} \cdot e^{j\frac{a}{2}}. \end{aligned}$$

Выражения для искомого напряжения \underline{U}_1 и тока \underline{I}_1 в начале линии определим по выражению (1.11) при $x = l$:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{U}_2 \text{ch}\underline{\gamma}l + \underline{I}_2 \underline{Z}_B \text{sh}\underline{\gamma}l; \\ \underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_B} \text{sh}\underline{\gamma}l + \underline{I}_2 \text{ch}\underline{\gamma}l. \end{cases} \quad (1.58)$$

Напряжение \underline{U}_2 найдем по закону Ома:

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_H \cdot \underline{I}_2 = 900 \cdot e^{-j23,1667^\circ} \cdot 16,65 \cdot e^{j23,1667^\circ} \cdot 10^{-3} = 14,985 \text{ В}.$$

Гиперболические функции $\text{ch}\underline{\gamma}l$ и $\text{sh}\underline{\gamma}l$ от комплексного аргумента $\underline{\gamma}l$ можно вычислить через экспоненты с учетом найденного значения $\underline{\gamma}$:

$$\begin{aligned} \text{sh}\underline{\gamma}l &= \text{sh}(\alpha l + j\beta l) = 0,5(e^{(\alpha l + j\beta l)} - e^{-(\alpha l + j\beta l)}) = 0,5(e^{\alpha l} \cdot e^{j\beta l} - \\ &- e^{-\alpha l} \cdot e^{-j\beta l}) = 0,5(e^{1,6325} \cdot e^{j3,6167} - e^{-1,6325} \cdot e^{-j3,6167}) = \\ &= 0,5[(5,1169(-0,8892 - j0,4574) - 0,1954(-0,8892 + j0,4574)] = \\ &= 0,5(-4,5501 - j2,9406 + 0,1738 - j0,0894) = 2,5029 \cdot e^{j209,0417^\circ}. \end{aligned}$$

βl измеряют в радианах.

Аналогично найдем $\text{ch}\underline{\gamma}l$:

$$\begin{aligned} \text{ch}\underline{\gamma}l &= 0,5(e^{(\alpha l + j\beta l)} + e^{-(\alpha l + j\beta l)}) = 0,5(-4,5501 - j2,3406 - \\ &- 0,1738 + j0,0894) = -2,3620 - j1,1256 = 2,6165 \cdot e^{j205,4806^\circ}. \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения в (1.58), получим:

$$\underline{U}_1 = 14,985(-2,3620 - j1,1256) + 16,65 \cdot 10^{-3} \cdot e^{j23,1667^\circ} \cdot 523,85 \cdot e^{-j23,2225^\circ} \cdot 2,5029 \cdot e^{j209,0417^\circ} = -35,3939 - j16,8673 + 21,8309 \cdot e^{j208,6858^\circ} = -54,4897 - j27,4461 = 61,0116 \cdot e^{j206,7341^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{I}_1 = \frac{14,985}{523,85 \cdot e^{-j23,2225^\circ}} \cdot (2,5029 \cdot e^{j208,0417^\circ}) + 16,65 \cdot e^{j23,1667^\circ} \cdot 10^{-3} \cdot 2,6156 \cdot e^{j205,4806^\circ} = 0,0716 \cdot e^{j232,2642^\circ} + 0,0436 \cdot e^{j228,6472^\circ} = -0,0438 - j0,0566 - 0,0288 - j0,0327 = -0,0726 - j0,0893 = \text{А}.$$

Определим комплексные мощности в начале и конце линии, как и в обычных цепях с сосредоточенными параметрами:

$$\underline{S}_1 = P_1 + jQ_1 = \underline{U}_1 \underline{I}_1^* = 61,0116 \cdot e^{j206,7341^\circ} \cdot 0,1151 \cdot e^{-j230,896^\circ} = 7,0225 \cdot e^{-j24,1519^\circ} = 6,4073 - j2,8744 \text{ ВА};$$

$$\underline{S}_2 = P_2 + jQ_2 = \underline{U}_2 \underline{I}_2^* = 14,985 \cdot 16,65 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-j23,1667^\circ} = 0,2495 \cdot e^{j23,1667^\circ} = 0,2294 - j0,0982 \text{ ВА},$$

где \underline{I}_1^* и \underline{I}_2^* – комплексные токи, сопряженные с комплексными \underline{I}_1 , \underline{I}_2 .

Таким образом, полная и активная мощности в начале и конце соответственно равны:

$$S_1 = 7,0225 \text{ ВА}; P_1 = 6,4073 \text{ Вт}; S_2 = 0,2495 \text{ ВА}; P_2 = 0,2294 \text{ Вт}.$$

КПД вычислим по формуле:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{0,2294}{6,4073} = 0,0358 \text{ (о. е.)}.$$

2. Исследуем линию без потерь ($r_0 = 0$; $g_0 = 0$). Находим вторичные параметры аналогично пункту 1:

$$\underline{\gamma} = j\beta = j\omega\sqrt{L_0 C_0} = j2200\sqrt{3,04 \cdot 10^{-3} \cdot 16,4 \cdot 10^{-9}} = j2200 \cdot 10^{-6} \cdot 7,0609 = j0,0155 \text{ 1/км}.$$

$$\underline{Z}_B = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{3,04 \cdot 10^{-3}}{16,4 \cdot 10^{-9}}} = 430,54 \text{ Ом}.$$

Определим напряжение на выходе линии по закону Ома:

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_B \underline{I}_2 = 900 \cdot 16,65 \cdot 10^{-3} \cdot e^{j23,1667^\circ} = 14,985 \cdot e^{j23,1667^\circ} \text{ В}.$$

Подставив значения \underline{U}_2 и $\underline{\gamma}$, \underline{Z}_B в систему (1.47), найдем напряжение и ток в начале линии без потерь:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_2 \cos \beta l + j \underline{I}_2 \underline{Z}_B \sin \beta l; \\ \underline{I}_1 &= j \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_B} \sin \beta l + \underline{I}_2 \cos \beta l. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Далее подставим значения параметров и получим:

$$\underline{U}_1 = 14,985 \cdot e^{j23,1667^\circ} \cos(0,0155 \cdot 210) + j16,65 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-j23,1667^\circ} \cdot 430,5 \cdot \sin(0,0155 \cdot 210) = -14,8763 \cdot e^{j23,1667^\circ} - 0,8619 \cdot$$

$$\cdot e^{j113,1667^\circ} = -13,6767 - j5,8524 + 0,3391 - j0,7924 = -13,3377 - j6,6448 = 14,9013 \cdot e^{j206,4825^\circ} \text{ В.}$$

$$I_1 = j \frac{14,985 \cdot e^{j23,1667^\circ}}{430,54} \sin(0,0155 \cdot 210) + 16,65 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-j23,1667^\circ} \cdot \cos(0,0155 \cdot 210) = -4,1847 \cdot 10^{-3} \cdot e^{j113,1667^\circ} - 16,5292 \cdot 10^{-3} \cdot e^{j23,1667^\circ} = (1,6463 - j3,8473 - 15,1964 - j6,5027) \cdot 10^{-3} = (-13,55 - j10,35) \cdot 10^{-3} = 17,0507 \cdot 10^{-3} \cdot e^{j217,3137^\circ} \text{ А.}$$

При расчетах использовано преобразование:

$$je^{j23,1667^\circ} = e^{j90^\circ} \cdot e^{j23,1667^\circ} = e^{j113,1667^\circ}.$$

Определим длину электромагнитной волны по выражению (1.8)

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{0,0155} = 404,4821 \text{ км.}$$

3. Для построения графика распределения действующего значения напряжения вдоль линии в первое уравнение системы (1.59) подставим несколько значений x . Если длина волны больше длины линии ($\lambda > l$), то несколько значений x нужно взять в долях λ . В случае, когда длина линии больше длины волны, достаточно построить график для точек в пределах λ , а затем достроить его до полного (отрезок λ , l) с учетом повторения формы.

В нашем случае $\lambda > l$, поэтому вычислим величины для u в интервале от нулевого значения (через $\lambda/16$) до ближайшего к длине линии l , а также для $u = l$. Например, для $u = \lambda/16$ получим:

$$\begin{aligned} \underline{U} &= 14,985 \cdot e^{j23,1667^\circ} \cdot \cos(0,0155 \cdot 25,2801) + 7,1685 \cdot e^{j113,1667^\circ} \cdot \sin(0,0155 \cdot 25,2801) = 13,8443 \cdot e^{j23,1667^\circ} + 2,7433 \cdot e^{j113,1667^\circ} = \\ &= 13,8443(0,9194 + j0,3934) + 2,7433(-0,3934 + j0,9194) = \\ &= 12,728 + j5,4465 - 1,0793 + j2,5221 = 11,6488 + j7,9685 = \\ &= 14,1135 \cdot e^{j\psi} \text{ В.} \end{aligned}$$

$\lambda/16 = 25,2801$ км. Угол ψ считать не нужно, так как требуется определить только действующее значение напряжения. таким образом, $U = 14,1135$ В.

Результаты расчета значений напряжения сведены в таблицу 1.1, график построен на рисунке 1.9.

Таблица 1.1 – Результаты расчета

x , км	0	$\lambda/16$	$2\lambda/16$	$3\lambda/16$	$4\lambda/16$	$5\lambda/16$	$6\lambda/16$	$7\lambda/16$	$8\lambda/16$	l
U , В	14,985	14,113	11,746	8,7605	7,1685	8,7605	11,746	14,113	14,985	14,901

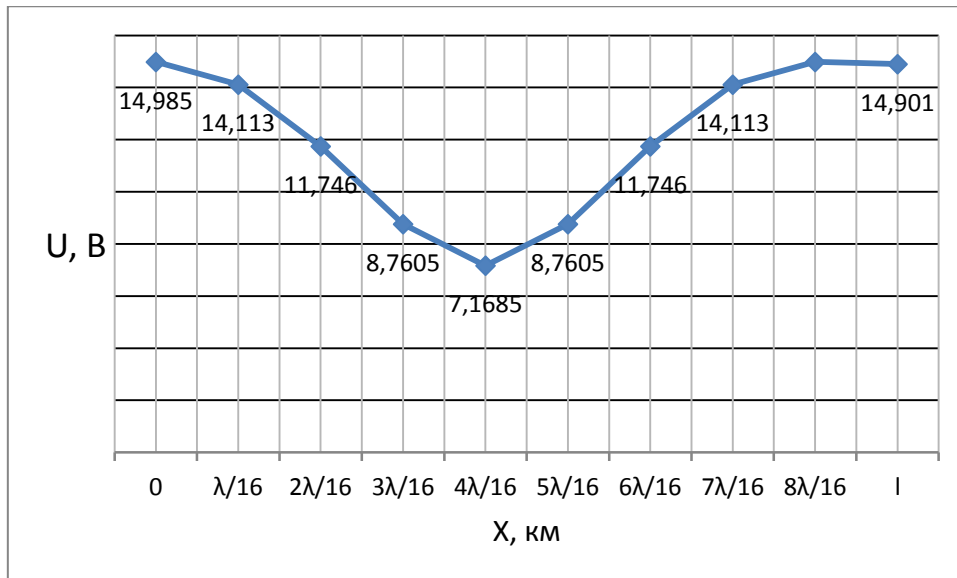


Рисунок 1.9 – График распределения действующего напряжения вдоль линии

Анализируя график, заметим, что в цепи с распределенными параметрами без потерь действующее значение напряжения зависит от длины цепи и эта зависимость носит немонотонный характер.

ЗАДАНИЕ 2

Трехфазная линия передачи электроэнергии Куйбышев – Москва длиной $l = 900$ км в начальном периоде ее эксплуатации работала при напряжении $U_{л} = 400$ кВ и частоте $f = 50$ Гц. Согласно одному из вариантов проекта, первичные параметры линии имеют следующие значения: $r_0 = 0,08$ Ом/км; $C_0 = 8,6 \cdot 10^{-9}$ Ф/км; $L_0 = 1,336 \cdot 10^{-3}$ Гн/км; потери P_0 в изоляции и на корону составляют 2000 Вт/км на одну фазу. Определить вторичные параметры, а также длину волны и фазовую скорость.

РЕШЕНИЕ

Из формулы $P_0 = U_{\phi}^2 g_0$ найдем проводимость:

$$g_0 = P_0 / U_{\phi}^2 = 2000 / (400 / \sqrt{3})^2 \cdot 10^6 = 3,75 \cdot 10^{-8} \text{ См/км.}$$

Комплексные сопротивления и проводимость на один км:

$$\underline{Z}_0 = r_0 + j\omega L_0 = 0,427 \cdot e^{j79^{\circ}13'} \text{ Ом/км;}$$

$$\underline{Y}_0 = g_0 + j\omega C_0 = 2,7 \cdot 10^{-6} \cdot e^{-j90^{\circ}} \text{ См/км;}$$

Характеристики линии:

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\underline{Z}_0 / \underline{Y}_0} = 397 \cdot e^{-j5^{\circ}23'} \text{ Ом;}$$

$$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = 1,073 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-j84^{\circ}37'} \text{ км}^{-1};$$

Коэффициент ослабления и коэффициент фазы равны:
 $\alpha = 1,073 \cdot 10^{-3} \cdot \cos(-84^\circ 37') = 0,105 \cdot 10^{-3}$ дБ/км;
 $\beta = 1,073 \cdot 10^{-3} \cdot \sin(-84^\circ 37') = 1,068 \cdot 10^{-3}$ рад/км.
 $\lambda = 2\pi/\beta = 5880$ км; $c = \lambda f = 294000$ км/с.

ЗАДАНИЕ 3

По результатам задания 2 определить:

- ток в Москве (конец линии);
- напряжение и ток на Волжской ГЭС в Куйбышеве (начало линии);
- сдвиг фаз между напряжениями в начале и в конце линии;
- КПД линии, если в конце линии (в Москве) известны:

$$P_2 = 300 \text{ МВт}; U_{2л} = \sqrt{3} \cdot 220 \text{ кВ}; \cos\varphi_2 = 1.$$

РЕШЕНИЕ

Положим $\underline{U}_2 = \underline{U}_{2\phi} = U_{2\phi} = 220$ кВ.

Ток в Москве при активном сопротивлении нагрузки ($\cos\varphi_2 = 1$):

$$\underline{I}_2 = I_2 = P_2 / (3 \cdot U_{2\phi} \cdot \cos\varphi_2) = 455 \text{ А.}$$

Значения гиперболических функций от комплексного аргумента $\underline{\gamma}l = 0,0906 + j0,962$ можно найти по таблицам или по формулам:

$$\underline{\text{sh}} \underline{\gamma}l = \frac{1}{2}(e^{\underline{\gamma}l} - e^{-\underline{\gamma}l}) = \frac{1}{2} \cdot 1,0947 \cdot e^{j55^\circ} - \frac{1}{2} \cdot 1,914 \cdot e^{-j55^\circ} =$$

$$= 0,824 \cdot e^{j86^\circ 23'};$$

$$\underline{\text{ch}} \underline{\gamma}l = \frac{1}{2}(e^{\underline{\gamma}l} + e^{-\underline{\gamma}l}) = 0,581 \cdot e^{j7^\circ 22'}.$$

Напряжение и ток на ГЭС найдем по выражению (1.11):

$$\underline{U} = \underline{U}_2 \underline{\text{ch}} \underline{\gamma}l + \underline{I}_2 \underline{Z}_c \underline{\text{sh}} \underline{\gamma}l = 222 \cdot e^{j47^\circ 30'} \text{ кВ};$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \underline{\text{sh}} \underline{\gamma}l + \underline{I}_2 \underline{\text{ch}} \underline{\gamma}l = 548 \cdot e^{j63^\circ 10'} \text{ А.}$$

Ток в начале линии опережает по фазе напряжение на угол $15^\circ 40'$.

Так как $\underline{U}_2 = U_2$, то сдвиг фаз между напряжениями в начале и в конце линии равен $47^\circ 30'$.

Активная мощность, отдаваемая ГЭС в линию равна:

$$P_1 = 3 \cdot U_1 \cdot I_1 \cdot \cos\varphi_1 = 3 \cdot 222 \cdot 548 \cdot \cos(47^\circ 30' - 63^\circ 10') =$$

$$= 352 \text{ МВт.}$$

КПД линии:

$$\eta = P_2 / P_1 = \frac{300}{352} = 0,853.$$

ЗАДАНИЕ 4

По данным задания 3 определить:

- напряжение в конце линии (в Москве) и ток в начале линии (на ГЭС) при сбросе всей нагрузки в конце линии и сохранении фазного напряжения на ГЭС, равного 220 кВ.

РЕШЕНИЕ

$$\underline{U}_{2x} = \underline{U}_{1x} / \text{ch} \underline{\gamma} l = 220 / 0,581 \cdot e^{j7^\circ 22'} = 382 \cdot e^{j7^\circ 22'} \text{ кВ};$$

$$U_{2x,л} = \sqrt{3} \cdot 382 = 661,5 \text{ кВ.}$$

Повышение напряжения при холостом ходе:

$$\Delta U = \frac{382-220}{220} \cdot 100 = 73,6 \%;$$

$$\underline{I}_{1x} = \frac{U_2}{Z_c} \text{sh} \underline{\gamma} l = 792 \cdot e^{j84^\circ 23'}.$$

Ток в начале линии при холостом ходе получился на 45 % больше того же тока в режиме нагрузки:

$$I_{1x} = \left(\frac{792}{548} \right) \cdot I_1 = 1,45 \cdot I_1,$$

хотя напряжение в начале линии во втором случае ($U_1 = 220$) кВ почти равно напряжению в первом случае ($U_1 = 222$) кВ.

ЗАДАНИЕ 5

Найти входное сопротивление короткозамкнутой двухпроводной линии длиной $l = 35$ м для генератора, работающего на волне длиной $\lambda = 50$ м. Диаметр проводов линии $2r = 4$ мм, расстояние между проводами $d = 13,54$ см. Найти индуктивность катушки, эквивалентной по сопротивлению этой линии.

РЕШЕНИЕ

Пренебрегая потерями, найдем волновое сопротивление линии:

$$Z_c = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0}{\pi} \ln \frac{d \ln \left(\frac{d}{r} \right)}{r \varepsilon_r \varepsilon_0 \pi}} = \frac{1}{\pi} \ln \frac{d}{r} \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0}{\varepsilon_r \varepsilon_0}} = 505 \text{ Ом.}$$

Входное сопротивление равно:

$$\underline{Z}_k = j z_c \text{tg} \beta l = j z_c \text{tg} \frac{2\pi}{\lambda} l = j1554 \text{ Ом.}$$

Линия представляет для генератора индуктивную нагрузку, что ясно уже из того, что $\lambda/2 < l < 3\lambda/4$. Индуктивность эквивалентной катушки равна:

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{z_k}{\omega} = \frac{z_k \lambda}{2\pi c_0} = 41 \text{ мкГн.}$$

Контрольные вопросы

1. Дать определение цепи с распределенными параметрами.
2. Перечислить первичные параметры однородной линии.
3. Записать уравнение однородной линии.
4. Записать выражение для определения коэффициента распространения ЦРП.
5. Записать выражение для волнового сопротивления однородной линии.
6. Записать выражение для определения фазовой скорости и длины волны в ЦРП.
7. Записать уравнение для входного сопротивления линии.
8. Записать выражение для коэффициента отражения электромагнитной волны.
9. Дать определение согласованной нагрузки в линии.
10. Записать выражение для определения активной мощности в любой точке линии.
11. Записать выражение для мощности в начале и конце линии.
12. Объяснить режим холостого хода, короткого замыкания и нагрузочный режим линии с потерями.
13. Дать определение линии без потерь.
14. Что такое «стоячие волны» и в каком случае они возникают?
15. Записать выражение коэффициентов A_{11} и A_{12} четырехполюсника ЦРП для Т-образной схемы замещения.
16. Записать выражение коэффициентов A_{11} и A_{12} четырехполюсника ЦРП для П-образной схемы замещения.

Тема 2. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

2.1. Понятие электростатического поля

Электростатическое поле – это частный вид электромагнитного поля. Оно создается совокупностью электрических зарядов, неподвижных в пространстве по отношению к наблюдателю и неизменных во времени.

Любое вещество состоит из элементарных заряженных частиц, окруженных электромагнитным полем.

Элементарные заряды (заряды электрона и протона) характеризуются связью с собственным и взаимодействием с внешними электрическими полями. В любом веществе всегда имеется микроскопическая неоднородность в пространстве. Элементарные заряженные частицы, входящие в состав атомов и молекул, находятся в непрерывном хаотическом движении. Следовательно, кроме микроскопической неоднородности, в пространстве всегда имеется неодинаковость расположения элементарных зарядов в смежные моменты времени.

В теории поля осредняют микроскопические неоднородности вещества в пространстве и во времени, то есть рассматривают процессы в макроскопическом смысле.

В заряженном теле (если общий заряд его неизменен во времени) элементарные заряды движутся хаотически. Поэтому даже в непосредственной близости от поверхности этого тела создаваемое элементарными зарядами магнитное поле практически отсутствует. Это и дает возможность рассматривать в электростатическом поле лишь одну электрическую компоненту электромагнитного поля. Под зарядом (зарядом тела) понимают скалярную величину, равную алгебраической сумме элементарных электрических зарядов в этом теле.

2.2. Закон Кулона

Электростатическое поле обладает способностью воздействовать на помещенный в него электрический заряд с механической силой, прямо пропорциональной величине этого заряда. В основу определения электрического поля положено механическое его проявление. Оно описывается законом Кулона. Два точечных заряда q_1 и q_2 в вакууме взаимодействуют друг с другом с силой \vec{F} , прямо пропор-

циональной произведению зарядов и обратно пропорциональной квадрату расстояния R между ними. Эта сила направлена по линии, соединяющей точечные заряды (рис. 2.1).

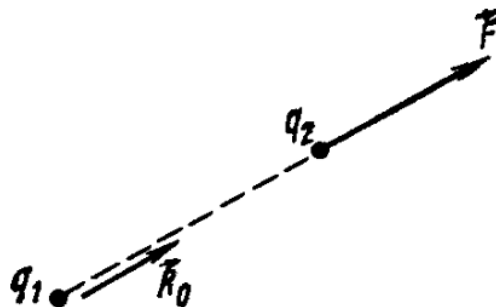


Рисунок 2.1 – Закон Кулона

Заряды, имеющие одинаковые знаки, стремятся оттолкнуться друг от друга, а заряды противоположных знаков стремятся сблизиться:

$$\vec{F} = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{R}_0, \quad (2.1)$$

где \vec{R}_0 – единичный вектор, направленный по линии, соединяющей заряды.

При использовании СИ и кратных долей единиц этой системы расстояние R измеряют в метрах (м), заряды – в кулонах (Кл), электрическую постоянную $\epsilon_0 = 8,86 \cdot 10^{-12}$ – в фарадах на метр (Ф/м); силу получают в ньютонах.

Под точечными зарядами подразумевают следующее: линейные размеры тел, на которых расположены взаимодействующие заряды, много меньше расстояния между телами.

2.3. Основные характеристики электростатического поля

Основные величины, характеризующие электростатическое поле, – напряженность \vec{E} и потенциал φ .

Напряженность электростатического поля – величина векторная, определяемая в каждой точке величиной и направлением; потенциал является величиной скалярной. Значение потенциала определяется в каждой точке поля некоторым числом.

Электростатическое поле определено, если известен закон изменения \vec{E} или φ во всех точках этого поля.

Если в электростатическое поле поместить настолько малый (неподвижный) положительный заряд, что он своим присутствием не

вызовет сколько-нибудь заметного перераспределения зарядов на телах, создающих поле, то отношение силы, действующей на заряд, к величине заряда q определяет напряженность поля в данной точке:

$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q}. \quad (2.2)$$

\vec{E} – это силовая характеристика поля, определенная при условии, что внесенный в данную точку поля заряд не искажил поля, существовавшего до внесения этого заряда. Поэтому сила \vec{f} , действующая на конечной величины точечный заряд q , внесенный в поле, будет равна:

$$\vec{f} = q \cdot \vec{E}.$$

Напряженность численно равна силе, действующей на заряд, по величине равный единице.

Если поле создается несколькими зарядами (q_1, q_2, q_3, \dots), то его напряженность равна геометрической сумме напряженностей от каждого из зарядов в отдельности (метод наложения):

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots$$

Разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ – это работа, затрачиваемая силами поля при переносе единичного заряда из начальной точки 1 в конечную точку 2 (рис. 2.2):

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} \overrightarrow{dl}, \quad (2.3)$$

где \overrightarrow{dl} – элемент пути.

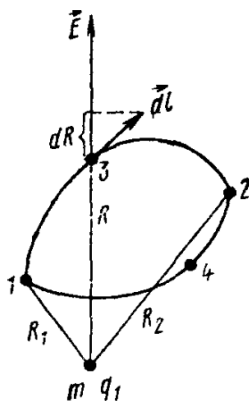


Рисунок 2.2 – Перемещение заряда из точки 1 в точку 2

Заряд q может быть любым. Положим его равным единице (единичный заряд).

Формула (2.3) позволяет определить разность потенциалов точек 1 и 2 как линейный интеграл от напряженности поля.

Если потенциал конечной точки пути 2 равен нулю, то потенциал точки 1 определяется следующим образом (при $\varphi_2 = 0$):

$$\varphi_1 = \int_1^2 \vec{E} \vec{dl}.$$

Потенциал произвольной точки поля 1 можно определить как работу, совершаемую силами поля по переносу единичного положительного заряда из данной точки поля в точку поля, потенциал которой равен нулю.

За точку, имеющую нулевой потенциал, можно принять любую точку поля. Если такая точка выбрана, то потенциалы всех точек поля определяются единственным образом.

2.4. Электрическое поле – поле потенциальное

Составим выражение для разности потенциалов в поле точечного заряда. Для этого считаем, что в точке m на рисунке 2.2 находится положительный точечный заряд q_1 , создающий поле, а из точки 1 в точку 2 через промежуточную точку 3 перемещается единичный положительный заряд $q = 1$.

Обозначим: R_1 – расстояние от точки m до исходной точки 1; R_2 – расстояние от точки m до конечной точки 2; R – расстояние от точки m до произвольной точки 3 на пути 132. Скалярное произведение:

$$\vec{E} d\vec{l} = E \cdot dR,$$

где dR – проекция элемента пути $d\vec{l}$ на направление радиуса, соединяющего точку m с точкой 3.

Напряженность поля равна:

$$\vec{E} = \vec{F}/q.$$

По закону Кулона получим:

$$\vec{F} = \frac{q_1 q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{R}_0.$$

Так как $|\vec{R}_0| = 1$ и $q = 1$, то модуль напряженности поля в поле точечного заряда равен:

$$E = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R^2}.$$

Подставив в формулу (2.3) вместо $\vec{E} d\vec{l}$ значение $\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R^2}$, получим:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} \vec{dl} = \int_1^2 E dR = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \int_1^2 \frac{dR}{R^2} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (2.4)$$

Можно сделать вывод, о том, что разность потенциалов между исходной и конечной точками пути (точками 1 и 2) зависит только от положения этих точек и не зависит от пути, по которому происходило перемещение из исходной точки в конечную. Если перемещение из

точки 1 в точку 2 будет происходить по какому-то другому пути, например по пути 142, то разность потенциалов, полученная в этом случае, будет равна разности потенциалов при перемещении из точки 1 в точку 2 по пути 132.

Если пройти по замкнутому пути 13241 (рис. 2.2), то исходная точка пути 1 и конечная точка пути 2 совпадут, и тогда левая и правая части формулы (2.3) будут равны нулю:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 0 = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}. \quad (2.5)$$

В электростатическом поле линейный интеграл от напряженности электрического поля, взятый вдоль любого замкнутого пути, равен нулю.

Физически это объясняется тем, что при движении вдоль замкнутого пути совершена определенная работа силами поля и такая же работа совершена внешними силами против сил поля. Если условиться работу, совершенную силами поля, считать положительной, а совершенную против сил поля – отрицательной, то сумма «положительных» и «отрицательных» работ равна нулю.

2.5. Силовые и эквипотенциальные линии

Силовая линия – это мысленно проведенная в поле линия, начинающаяся на положительно заряженном теле и оканчивающаяся на отрицательно заряженном теле. Проводится она таким образом, что касательная к ней в любой точке ее дает направление напряженности поля \vec{E} в этой точке.

В электростатическом поле можно провести эквипотенциальные (равнопотенциальные) поверхности. Под эквипотенциальной поверхностью понимают совокупность точек поля, имеющих один и тот же потенциал. Если мысленно рассечь электростатическое поле какой-либо секущей плоскостью, то в полученном сечении будут видны следы пересечения плоскости с эквипотенциальными поверхностями. Их называют эквипотенциальными линиями (или эквипотенциалами). Из самого определения эквипотенциальной поверхности следует, что перемещение по ней не вызовет изменения потенциала. Перемещение вдоль эквипотенциальной линии не связано с изменением потенциала. Эквипотенциальные и силовые линии в любой точке поля пересекаются под прямым углом (рис. 2.3). В противоположность силовым эквипотенциальные линии электростатического поля являются замкнутыми сами на себя.

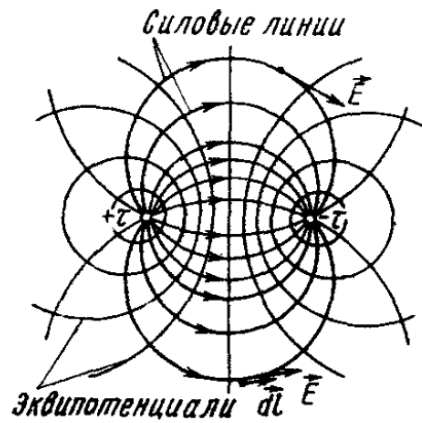


Рисунок 2.3 – Два заряженных тела и силовые и эквипотенциальные линии

2.6. Напряженность как градиент потенциала

Электростатическое поле является полем потенциальным. Между двумя близко расположенными точками поля имеется в общем случае некоторая разность потенциалов. Если эту разность разделить на кратчайшее расстояние между взятыми точками, то полученная величина будет характеризовать скорость изменения потенциала в направлении кратчайшего расстояния между точками. Эта скорость будет зависеть от направления, вдоль которого взяты точки.

Градиентом скалярной функции называют скорость изменения скалярной функции, взятую в направлении ее наибольшего возрастания.

На рисунке 2.4 изображены отрезки двух близко расположенных эквипотенциалей. Одна из них имеет потенциал φ_1 , другая – φ_2 . Пусть $\varphi_1 > \varphi_2$. Тогда градиент изобразим вектором, перпендикулярным эквипотенциальным линиям и направленным от φ_2 к φ_1 (в сторону увеличения потенциала).

Напряженность электрического поля направлена от более высокого потенциала к более низкому. Через dn обозначим расстояние по перпендикуляру между эквипотенциальными поверхностями, а через \vec{dn} вектор, совпадающий с направлением \vec{E} :

$$\vec{dn} = \vec{n}^\circ dn,$$

где \vec{n}° – единичный вектор по направлению \vec{dn} .

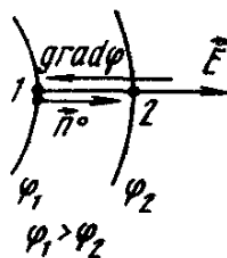


Рисунок 2.4 – Градиент

На основании соотношения (2.3) можно записать выражение:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} \vec{dl} \approx \vec{E} d\vec{n} = -d\varphi,$$

где $d\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ – приращение потенциала при переходе от точки 1 к точке 2.

Так как векторы \vec{E} и $d\vec{n}$ совпадают по направлению, то скалярное произведение $\vec{E} d\vec{n}$ равно произведению модуля \vec{E} на модуль $d\vec{n}$. Поэтому $E dn = -d\varphi$. Отсюда модуль напряженности поля равен:

$$E = -\frac{d\varphi}{dn}.$$

Вектор напряженности поля равен:

$$\vec{E} = E \vec{n}^\circ.$$

Следовательно:

$$\vec{E} = -\frac{d\varphi}{dn} \vec{n}^\circ. \quad (2.6)$$

Из определения градиента следует, что:

$$\text{grad}\varphi = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{dn} (-\vec{n}^\circ) = \frac{-d\varphi}{dn} (-\vec{n}^\circ). \quad (2.7)$$

Сопоставляя (2.6) и (2.7), видим, что:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi. \quad (2.8)$$

Вывод: напряженность в какой-либо точке поля равна скорости изменения потенциала в этой точке, взятой с обратным знаком. Знак минус означает, что направление \vec{E} и направление $\text{grad}\varphi$ противоположны.

2.7. Дифференциальный оператор Гамильтона (оператор набла)

Для сокращения записи различных операций над скалярными и векторными величинами применяют дифференциальный оператор Гамильтона (оператор набла).

Под *дифференциальным оператором Гамильтона* понимают сумму частных производных по трем координатным осям, умноженных на соответствующие единичные векторы (орты). В декартовой системе координат его записывают так:

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2.9)$$

Применим оператор ∇ к потенциалу φ :

$$\nabla\varphi = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi = \vec{i} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

2.8. Поток вектора через элемент поверхности и поток вектора через поверхность

Пусть в векторном поле (например, в поле вектора напряженности электрического поля \vec{E}) есть некоторый элемент поверхности, площадь которого с одной стороны численно равна dS . Выберем положительное направление нормали (перпендикуляра) к элементу поверхности. Вектор $d\vec{S}$ в некотором масштабе на рисунке 2.5 равен площади элемента поверхности, а его направление совпадает с положительным направлением нормали. Будем полагать, что площадь элемента достаточно мала, чтобы в пределах этого элемента вектор \vec{E} можно было считать одним и тем же во всех точках.

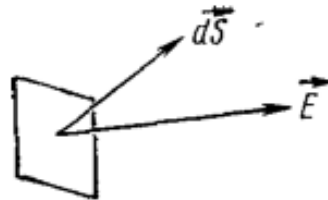


Рисунок 2.5 – Векторное поле

Если бы \vec{E} было перпендикулярно $d\vec{S}$, то вектор \vec{E} не пронизывал бы элемент поверхности, если \vec{E} направлено по $d\vec{S}$, то через данный элемент поверхности будет проходить максимальный поток вектора \vec{E} . В общем случае поток вектора \vec{E} через элемент поверхности определится скалярным произведением $\vec{E}d\vec{S}$.

Поток вектора через элемент поверхности $\vec{E}d\vec{S}$ является скаляром алгебраического характера. Поток вектора может оказаться положительным или отрицательным. Положительное значение потока означает, что он направлен в сторону $d\vec{S}$, отрицательное его значение, что он направлен в обратную сторону.

Если поверхность, через которую определяют поток вектора, велика, то тогда нельзя считать, что во всех ее точках \vec{E} одна и та же. В этом случае поверхность подразделяют на отдельные элементы малых размеров, и полный поток вектора через поверхность равняется алгебраической сумме потоков через все элементы поверхности. Сумму потоков можно записать в виде интеграла.

2.9. Свободные и связанные заряды. Поляризация вещества

Свободными называют заряды, которые под воздействием сил поля могут свободно перемещаться в веществе, их перемещение не ограничивается внутримолекулярными силами.

Под связанными понимают электрические заряды, входящие в состав вещества и удерживаемые в определенных положениях внутримолекулярными силами. Такие заряды «связаны» с данным веществом, неотделимы от него. Сумма положительных связанных зарядов равна сумме отрицательных связанных зарядов.

Если какое-либо диэлектрическое тело поместить в электрическое поле, то оно поляризуется.

Под поляризацией понимают упорядоченное изменение расположения связанных зарядов в теле, вызванное электрическим полем. Это изменение расположения проявляется в том, что отрицательные связанные заряды в теле переместятся в направлении более высокого потенциала, а положительные – в сторону более низкого потенциала. Заряды сместятся настолько, что силы воздействия электрического поля на связанные заряды уравновесятся внутримолекулярными силами. В результате поляризации на поверхности вещества как бы обнажаются связанные заряды.

2.10. Понятие поляризованности

Произведение $q\vec{l}$ называют электрическим моментом двух равных по величине и противоположных по знаку зарядов, находящихся друг от друга на расстоянии l (диполя). Это векторная величина, направленная от заряда $-q$ к заряду $+q$ (рис. 2.6).

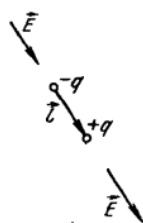


Рисунок 2.6 – Заряды на расстоянии диполя

В поляризованном веществе молекулы в электрическом отношении представляют собой диполи. Под действием внешнего электрического поля диполи стремятся ориентироваться в пространстве та-

ким образом, чтобы электрический момент их был направлен параллельно вектору напряженности электрического поля. Практический интерес представляет электрический момент не одной молекулы, не одной пары зарядов, а суммы диполей, находящихся в единице объема вещества. Электрический момент суммы диполей, находящихся в объеме вещества V , отнесенный к объему V при стремлении V к нулю, называют поляризованностью (вектором поляризации) и обозначают P :

$$\vec{P} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\sum q\vec{l}}{V}.$$

Для большинства диэлектриков P пропорционально напряженности электрического поля \vec{E} . Коэффициент пропорциональности между ними $\mathcal{H} = \varepsilon_0 \chi$ (χ – электрическая восприимчивость):

$$\vec{P} = \mathcal{H} \vec{E}. \quad (2.10)$$

Диэлектрики в зависимости от происходящих в них процессов при поляризации можно подразделить на две группы. В первую входят диэлектрики, молекулы которых при отсутствии внешнего электрического поля электрически нейтральны, т. е. в них центры действия положительных и отрицательных зарядов совпадают. К числу таких диэлектриков относятся водород, азот, парафин и другие. Поляризация в диэлектриках первой группы заключается в том, что под действием внешнего электрического поля центр действия положительного заряда молекулы смещается по внешнему полю, а центр действия отрицательных зарядов (электронная орбита) – против поля. В результате молекула становится диполем. Это смещение зарядов молекулы пропорционально величине напряженности внешнего поля. Смещению противодействуют внутримолекулярные силы.

Во вторую входят диэлектрики, молекулы которых при отсутствии внешнего электрического поля представляют собой диполи, т. е. центры действия положительных и отрицательных зарядов этих молекул при отсутствии внешнего электрического поля не совпадают (полярные молекулы). Диэлектриком с полярными молекулами является, например, хлористый водород.

Благодаря тепловому движению диполи располагаются хаотично, так что при отсутствии внешнего электрического поля их электрические поля взаимно нейтрализуются. Поляризация в диэлектриках второй группы состоит в том, что полярные молекулы стремятся повернуться таким образом, чтобы их электрический момент был направлен по внешнему электрическому полю.

2.11. Вектор электрической индукции

В электротехнических расчетах используют вектор электрической индукции, или вектор электрического смещения \vec{D} . Вектор \vec{D} равен сумме двух векторов: вектора $\varepsilon_0 \vec{E}$, характеризующего поле в вакууме, и поляризованности \vec{P} , характеризующей способность диэлектрика в рассматриваемой точке поля поляризоваться:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}.$$

Так как

$$\vec{P} = \mathcal{H} \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E} \frac{\mathcal{H}}{\varepsilon_0}, \quad (2.11)$$

то

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \left(1 + \frac{\mathcal{H}}{\varepsilon_0} \right) = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon_a \vec{E}, \quad (2.12)$$

где

$$\varepsilon_a = \varepsilon_0 \varepsilon_r ; \varepsilon_r = 1 + \chi. \quad (2.13)$$

Относительная диэлектрическая проницаемость ε_r имеет нулевую размерность; она показывает, во сколько раз абсолютная диэлектрическая проницаемость ε_a вещества больше, чем электрическая постоянная ε_0 , характеризующая электрические свойства вакуума. В системе СИ единица измерения $[D] = [P] = \text{Кл/м}^2$.

2.12. Теорема Гаусса в интегральной форме

Теорема Гаусса соответствует закону Кулона и принципу наложения. Теорему можно сформулировать и записать тремя способами.

1. Поток вектора электрического смещения через любую замкнутую поверхность, окружающую некоторый объем, равен алгебраической сумме свободных зарядов, находящихся внутри этой поверхности:

$$\oint \vec{D} d\vec{S} = \sum q_{\text{своб}}. \quad (2.14)$$

2. Поток вектора напряженности электрического поля сквозь любую замкнутую поверхность равен сумме свободных зарядов, находящихся внутри этой поверхности, разделенной на произведение $\varepsilon_0 \varepsilon_r$:

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{\sum q_{\text{своб}}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}. \quad (2.15)$$

3. Поток вектора \vec{E} через любую замкнутую поверхность создается не только суммой свободных зарядов, но и суммой связанных зарядов, находящихся внутри поверхности.

Поток вектора поляризации сквозь любую замкнутую поверхность равен взятой с обратным знаком алгебраической сумме связанных зарядов, находящихся внутри этой поверхности:

$$\sum q_{\text{связ}} = - \oint \vec{P} d\vec{S}. \quad (2.16)$$

2.13. Теорема Гаусса в дифференциальной форме

Первая форма записи теоремы Гаусса в дифференциальной форме:

$$\text{div} \vec{D} = \rho_{\text{своб}}, \quad (2.17)$$

где $\rho_{\text{своб}}$ – объемная плотность свободного заряда; $\text{div} \vec{D}$ – дивергенция вектора \vec{D} или «исток» вектора \vec{D} – это предел отношения потока векторной величины сквозь замкнутую поверхность, ограничивающую некоторый объем, к объему V :

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{D} d\vec{S}}{V} = \text{div} \vec{D}.$$

Исток линий \vec{D} в данной точке поля определяется величиной плотности свободных зарядов в этой точке. Если объемная плотность зарядов в данной точке положительна ($\rho_{\text{своб}} > 0$), то из бесконечно малого объема, окружающего данную точку поля, линии вектора \vec{D} исходят (рис. 2.7). Если в данной точке поля $\rho_{\text{своб}} < 0$, то в бесконечно малый объем, внутри которого находится данная точка, линии вектора \vec{D} входят. Если в какой-либо точке поля $\rho_{\text{своб}} = 0$, то в данной точке поля нет ни истока, ни стока линий \vec{D} .

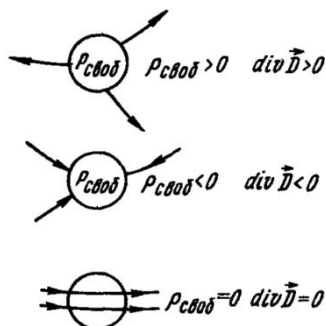


Рисунок 2.7 – Дивергенция вектора \vec{D}

Вторая форма записи теоремы Гаусса справедлива только для однородной и изотропной сред:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_{\text{своб}}}{\varepsilon_a}. \quad (2.18)$$

Если среда однородна и изотропна, то ее $\varepsilon_a = \text{const}$.

Третья форма записи:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{(\rho_{\text{своб}} + \rho_{\text{своб}})}{\varepsilon_0}. \quad (2.19)$$

Следовательно, истоком вектора \vec{E} , в отличие от истока вектора \vec{D} , являются не только свободные, но и связанные заряды.

2.14. Операция взятия дивергенции

Умножение оператора ∇ на скалярную функцию равносильно взятию градиента от этой скалярной функции. Скалярное умножение оператора ∇ на векторную функцию, например на функцию \vec{E} , означает взятие дивергенции от этой векторной функции. Произведение $\nabla \vec{E}$ можно записать так:

$$\begin{aligned} \nabla \vec{E} &= \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) (\vec{i} E_x + \vec{j} E_y + \vec{k} E_z)^* = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \\ &= \operatorname{div} \vec{E}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

2.15. Выражение $\operatorname{div} \vec{E}$ в цилиндрической и сферической системах координат

Запишем выражение $\operatorname{div} \vec{E}$:

в цилиндрической системе координат:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r E_r) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial E_z}{\partial z}, \quad (2.21)$$

в сферической системе координат:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial}{\partial R} (R^2 E_r) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta E_\theta) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial E_\alpha}{\partial \alpha}. \quad (2.22)$$

2.16. Уравнение Пуассона и уравнение Лапласа

Эти уравнения являются основными дифференциальными уравнениями электростатики. Они вытекают из теоремы Гаусса в дифференциальной форме. Уравнение Пуассона:

$$\nabla^2 \varphi = - \frac{\rho_{\text{своб}}}{\varepsilon_a}. \quad (2.23)$$

Частный вид уравнения Пуассона, когда $\rho_{\text{своб}} = 0$ называют уравнением Лапласа. Уравнение Лапласа:

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (2.24)$$

Уравнение Пуассона в декартовой системе координат:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho_{\text{своб}}}{\epsilon_a}. \quad (2.25)$$

Уравнение Лапласа в декартовой системе координат:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (2.26)$$

Уравнение Пуассона выражает связь между частными производными второго порядка от φ в любой точке поля и объемной плотностью свободных зарядов в этой точке поля. В то же время потенциал в какой-либо точке поля зависит от всех зарядов, создающих поле, а не только от величины свободного заряда, находящегося в данной точке. Уравнение Пуассона применяют при исследовании потенциальных полей (электрических и магнитных). Уравнение Лапласа первоначально было применено для описания потенциальных полей небесной механики и впоследствии использовано для описания электрических полей.

2.17. Поле внутри проводящего тела в условиях электростатики

В проводящем теле, находящемся в электростатическом поле, вследствие явления электростатической индукции происходит разделение зарядов. Отрицательные заряды смещаются на поверхность тела, обращенную в сторону более высокого потенциала, положительные – в противоположную сторону. Все точки тела будут иметь одинаковый потенциал. Если между какими-либо точками возникла бы разность потенциалов, то под ее действием появилось бы упорядоченное движение зарядов, что противоречит понятию электростатического поля. Поверхность тела эквипотенциальна. Вектор напряженности внешнего поля в любой точке поверхности подходит к ней под прямым углом. Внутри проводящего тела напряженность поля равна нулю, так как внешнее поле компенсируется полем зарядов, расположившихся на поверхности тела.

2.18. Условия на границе раздела проводящего тела и диэлектрика

На границе проводящее тело – диэлектрик при отсутствии тока по проводящему телу выполняются два условия:

1) отсутствует тангенциальная (касательная к поверхности) составляющая напряженности поля:

$$E_t = 0;$$

2) вектор электрического смещения \vec{D} в любой точке диэлектрика, непосредственно примыкающей к поверхности проводящего тела, численно равен плотности заряда σ на поверхности проводящего тела в этой точке:

$$D = \sigma.$$

2.19. Условия на границе раздела двух диэлектриков

На границе раздела двух диэлектриков с различными диэлектрическими проницаемостями выполняются два следующих условия:

1) равны тангенциальные составляющие напряженности поля:

$$E_{1t} = E_{2t};$$

2) равны нормальные составляющие электрической индукции:

$$D_{1n} = D_{2n}.$$

Индекс 1 относится к первому диэлектрику, индекс 2 – ко второму. Первое условие вытекает из того, что в потенциальном поле

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$$

по любому замкнутому контуру; второе представляет собой следствие теоремы Гаусса.

2.20. Теорема единственности решения

Электрическое поле описывается уравнением Лапласа или Пуассона. Уравнения в частных производных, в отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, имеют в общем случае множество линейно независимых друг от друга решений. Из множества линейно независимых решений, допускаемых уравнением Лапласа – Пуассона, выбор единственного, удовлетворяющего конкретной задаче, производят с помощью граничных условий. Если есть некоторая функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа – Пуассона и граничным условиям в данном поле, то эта функция представляет собой единственное решение конкретной задачи, которое ищут.

Это положение называют теоремой единственности решения.

2.21. Общая характеристика задач электростатики

В зависимости от того, что задано и что определяют, задачи электростатики можно подразделить на три типа.

Задача первого типа. По заданному закону распределения потенциала в пространстве $\varphi(x, y, z)$ найти распределение свободных

зарядов, вызвавших поле. Такого рода задачи можно решать с помощью уравнения Пуассона; $-\frac{\rho_{\text{своб}}}{\epsilon_a}$ в данной точке поля, согласно уравнению Пуассона, равняется сумме частных производных второго порядка от φ , в которую подставляют координаты данной точки поля.

Задача второго типа. Задан закон распределения свободных зарядов в пространстве в функции координат $\rho_{\text{своб}}(x, y, z)$. Найти закон изменения потенциала в пространстве $\varphi(x, y, z)$. Эта задача является обратной по отношению к первой и значительно сложнее ее. Принципиально задача состоит в решении уравнения Пуассона относительно φ , то есть в решении дифференциального уравнения второго порядка в частных производных.

Задача третьего типа. Известны потенциалы (или полные заряды) и геометрия тел, создающих поле. Требуется найти закон изменения E или φ во всех точках поля.

Если среда, в которой создано поле, является неоднородной, то ее подразделяют на однородные области и решение уравнения Лапласа производят для каждой области отдельно. Основная трудность задачи состоит в том, что хотя полные заряды тел и известны, но плотность распределения зарядов на отдельных участках заряженного тела неизвестна. Решения уравнения Лапласа для отдельных областей должны быть согласованы друг с другом: на границе раздела двух сред с различными ϵ_a должны выполняться граничные условия. На границе раздела проводящего тела и диэлектрика также должны выполняться свои граничные условия.

Задачи третьего типа можно решать аналитически или графически, либо путем моделирования.

2.22. Поле заряженной оси

Под заряженной осью понимают тонкий теоретически бесконечно длинный металлический проводник (тонкая проволока). Заряд на единицу длины ее принято обозначать через τ . Диэлектрическая проницаемость среды, окружающей ось, равна ϵ_a . Для нахождения напряженности поля в некоторой точке, удаленной на расстояние r от оси (рис. 2.8), проведем через эту точку цилиндрическую поверхность так, что ось цилиндрической поверхности совпадет с заряженной осью.

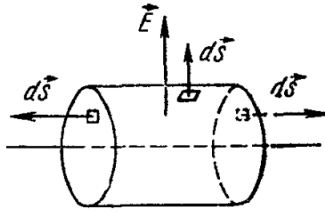


Рисунок 2.8 – Замкнутая поверхность

Используем теорему Гаусса, которая применима к замкнутой поверхности. В рассматриваемом случае последняя образована боковой поверхностью цилиндра и двумя его доньшками. Поток вектора \vec{E} имеется только через боковую поверхность цилиндра. Через доньшки поток вектора \vec{E} отсутствует, так как элемент поверхности \vec{dS} каждого доньшка перпендикулярен \vec{E} . Элементы \vec{dS} боковой поверхности и напряженность электрического поля \vec{E} в любой точке цилиндрической поверхности по направлению совпадают, поэтому:

$$E \cdot 2\pi \cdot 1 = \tau / \epsilon_a \text{ или } E = \tau / 2\pi \epsilon_a r. \quad (2.27)$$

Напряженность в поле заряженной оси изменяется обратно пропорционально расстоянию r точки от оси. Потенциал изменяется по логарифмическому закону:

$$\varphi = - \int E dr = - \int \frac{\tau}{2\pi \epsilon_a r} dr = - \frac{\tau}{2\pi \epsilon_a r} \ln r + C = \frac{\tau}{2\pi \epsilon_a r} \ln \frac{1}{r} + C.$$

2.23. Поле двух параллельных заряженных осей

Пусть одна ось на единицу длины имеет заряд $+\tau$, другая заряд $-\tau$. Возьмем в поле некоторую произвольную точку M (рис. 2.9). Результирующая напряженность поля в ней \vec{E}_M равна геометрической сумме напряженностей от обоих зарядов. Расстояние от точки M до положительно заряженной оси обозначим через a , до отрицательно заряженной оси $-b$. Потенциал есть функция скалярная.

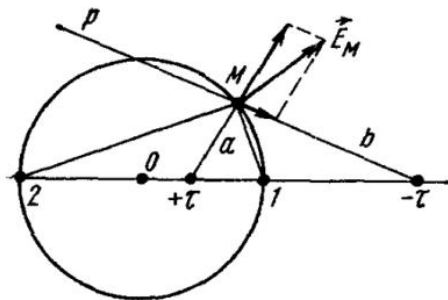


Рисунок 2.9 – Поле двух параллельных заряженных осей

Потенциал точки M равен сумме потенциалов от каждой оси:

$$\varphi_M = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{1}{a} + \frac{-\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{1}{b} + C = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b}{a} + C. \quad (2.28)$$

Уравнением эквипотенциали в поле двух заряженных осей является выражение $\frac{b}{a} = \text{const}$.

Эквипотенциаль представляет собой совокупность точек, отношение расстояний которых до двух заданных точек есть величина постоянная.

Согласно теореме Аполлония геометрическим местом точек, отношение расстояний которых до двух заданных точек есть величина постоянная, является окружность. Поэтому эквипотенциаль в поле двух заряженных осей есть окружность.

Соединим точку M с осями. Проведем биссектрисы внутреннего (aMb) и внешнего pMa углов. Точки 1 и 2 пересечения биссектрис с линией, проведенной через заряженные оси, и точка M будут тремя точками искомой окружности. Для нахождения положения центра окружности (точки O) разделим пополам расстояние между точками 1 и 2.

2.24. Поле двухпроводной линии

Расстояние между осями двух проводов линии (рис. 2.10) обозначим через d , радиус каждого провода – через r . Если левому проводу будет сообщен заряд $+\tau$ на единицу длины, а правому заряд $-\tau$, то в пространстве между проводами возникнет электрическое поле. Заряды проводов распределятся по поверхности с неодинаковой плотностью.

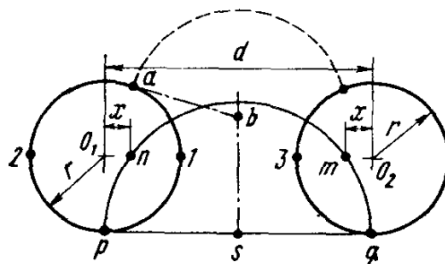


Рисунок 2.10 – Поле двухпроводной линии

Поверхность каждого провода в отдельности является эквипотенциалью. Внутри проводов $E = 0$. Задача о поле двухпроводной линии сводится к рассмотренной задаче о поле двух заряженных осей.

Расположим две заряженные оси так, чтобы поверхности каждого провода являлись эквипотенциальными.

Точки O_1 и O_2 означают геометрические оси проводов. Заряженные оси будут расположены в точках m и n . Из условия симметрии они на одинаковое расстояние x удалены от геометрических осей.

Запишем условие равенства потенциалов точек 1 и 2 левого провода.

Отношение $\frac{b}{a}$ для точки 1 равно $\frac{d-r-x}{r-x}$; отношение $\frac{b}{a}$ для точки 2 равно $\frac{d+r-x}{r+x}$. Из равенства $\frac{d-r-x}{r-x} = \frac{d+r-x}{r+x}$, получим:

$$x = d/2 \pm \sqrt{(d/2)^2 - r^2}. \quad (2.29)$$

2.25. Емкость

Если два каких-либо проводящих тела разделены диэлектриком и несут на себе равные по величине и противоположные по знаку заряды Q , то в пространстве между ними создается электрическое поле. Пусть разность потенциалов между телами, обусловленная этими зарядами, равна U .

Под емкостью C между двумя телами, на которых имеются равные и противоположные по знаку заряды, понимают абсолютную величину отношения заряда на одном из тел к напряжению между телами:

$$C = Q/U. \quad (2.30)$$

Единица размерности емкости 1 кулон/вольт – 1 фарад (Ф). Устройства для получения емкости называют конденсаторами.

Так как напряжение между двумя телами в электростатическом поле может быть линейно выражено через заряд Q (исключение составляют только устройства, в которых используются сегнетодиэлектрики – вещества, у которых ε является функцией E), то отношение Q/U оказывается не зависящим ни от величины Q , ни от величины U .

Емкость зависит только от конфигурации тел, их размеров, расстояния между телами, электрических свойств диэлектрика.

Рассмотрим определение емкости двухпроводной линии. Выразим напряжение между двумя проводами через заряд τ на единицу длины. Точка 1 (см. рис. 2.10) принадлежит поверхности левого про-

вода, точка 3 – поверхности правого провода. Разность потенциалов между ними:

$$U_{13} = \varphi_1 - \varphi_3 - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{d-r-x}{r-x} - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{r-x}{d-r-x}.$$

При $d \gg rx \ll r$, поэтому:

$$U_{13} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} 2 \ln \frac{d}{r} = \frac{\tau}{\pi\epsilon_a} \ln \frac{d}{r}. \quad (2.31)$$

Следовательно, емкость единицы длины линии при условии $d \gg r$:

$$C = \frac{\tau}{U_{13}} = \frac{\pi\epsilon_a}{\ln \frac{d}{r}}. \quad (2.32)$$

Она зависит только от геометрических размеров и свойств среды и не зависит от величины заряда τ и величины напряжения U_{13} . Если расстояние между двумя проводами увеличивать, то емкость будет уменьшаться.

2.26. Метод зеркальных изображений

Для расчета электростатических полей, ограниченных какой-либо проводящей поверхностью правильной формы или в которых есть геометрически правильной формы граница между двумя диэлектриками, широко применяют метод зеркальных изображений.

Это искусственный прием расчета, в котором кроме заданных зарядов вводят еще дополнительные, величины и местоположение которых выбирают так, чтобы удовлетворить граничным условиям в поле. Территориально заряды помещают там, где находятся зеркальные (в геометрическом смысле) отображения заданных зарядов. Метод зеркальных изображений применяют не только для расчета электростатических полей, но и для расчета электрических полей в проводящей среде и магнитных полей. Обоснованием метода и правильности даваемого им решения является теорема единственности.

Пример 1. Рассмотрим поле заряженной оси, расположенной вблизи проводящей плоскости. Заряженная ось (τ – заряд на единицу длины) расположена в диэлектрике параллельно поверхности проводящей среды (рис. 2.11). Проводящей средой может быть какая-либо металлическая стенка или, например, земля. Требуется определить характер поля в верхней полуплоскости (диэлектрике).

В результате электростатической индукции на поверхности проводящего тела выступают заряды. Плотность их меняется с изменением координаты x . Поле в диэлектрике создается не только заря-

женной осью, но и зарядами, выступившими на поверхности проводящего тела вследствие электростатической индукции. Несмотря на то что распределение плотности зарядов на поверхности проводящей среды неизвестно, данную задачу сравнительно легко можно решить по методу зеркальных изображений.

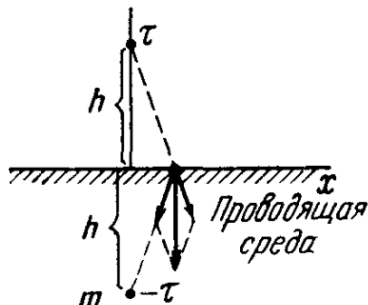


Рисунок 2.11 – Заряженная ось вблизи проводящей плоскости

Поместим в точке m фиктивный заряд обратного знака ($-\tau$) по отношению к заданному заряду τ . Расстояние h от точки m до плоскости раздела сред такое же, как и расстояние от действительного заряда до плоскости раздела. В этом смысле осуществлено зеркальное изображение. В данной задаче фиктивный заряд численно равен заданному, но имеет обратный знак. Напряженность поля от двух зарядов (τ и $-\tau$) в любой точке границы раздела имеет только нормальную к границе составляющую и не имеет тангенциальной составляющей. Тангенциальные составляющие от обоих зарядов имеют противоположные направления и в сумме дают нуль в любой точке поверхности.

Так как потенциал от каждой из осей удовлетворяет уравнению Лапласа и в то же время удовлетворено граничное условие, то на основании теоремы единственности полученное решение является истинным.

Пример 2. Рассмотрим поле заряженной оси, расположенной вблизи плоской границы раздела двух диэлектриков с различными диэлектрическими проницаемостями. Как показано на рисунке 2.12, a , верхнее полупространство заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ_{a1} , нижнее – диэлектриком с ϵ_{a2} ; ab – граница раздела двух сред. В верхнем полупространстве параллельно границе раздела сред находится заряженная ось с зарядом τ_1 . Вследствие поляризации диэлектриков на границе раздела выявятся связанные заряды, влияющие на поле в обеих средах. Учет влияния их на поле

проводят путем введения двух дополнительных фиктивных зарядов τ_2 и τ_3 . Надо удовлетворить двум граничным условиям, что возможно только с помощью двух пока неизвестных зарядов τ_2 и τ_3 .

Расчет поля в любой точке верхнего полупространства (полуплоскости) производят от двух зарядов: заданного τ_1 и дополнительного τ_2 . Причем не только верхнее, но и нижнее полупространство заполнено (в расчетном смысле) диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ_{a1} (рис. 2.12, б).

Поле в любой точке нижнего полупространства определяют как поле от некоторого дополнительного заряда τ_3 , расположенного в той же точке, где находился заряд τ_1 . В этом случае не только нижнее, но и верхнее полупространство заполняется диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ_{a2} (рис. 2.12, в).

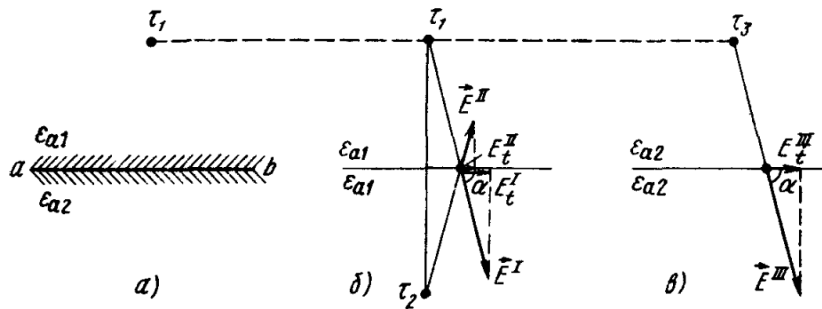


Рисунок 2.12 – Поле заряженной оси: а – вблизи плоской границы двух диэлектриков; б – верхнее полупространство; в – нижнее полупространство

Составим два уравнения для определения пока неизвестных τ_2 и τ_3 .

Из условия равенства тангенциальных составляющих напряженности поля на границе раздела следует, что $E_t^I + E_t^{II} = E_t^{III}$ или:

$$\frac{1}{2\pi\epsilon_{a1}r} [\tau_1 + \tau_2] \cos\alpha = \frac{1}{2\pi\epsilon_{a2}r} \tau_3 \cos\alpha.$$

Отсюда:

$$\tau_1 + \tau_2 = \tau_3 \frac{\epsilon_{a1}}{\epsilon_{a2}}. \quad (2.33)$$

Из условия равенства нормальных составляющих вектора D на границе раздела, приняв за положительное направление для нормали направление вниз, имеем $D_n^I - D_n^{II} = D_n^{III}$. Запишем последнюю строку в развернутом виде:

$$\frac{1}{2\pi r} (\tau_1 - \tau_2) \sin\alpha = \frac{1}{2\pi r} \tau_3 \sin\alpha.$$

Следовательно:

$$\tau_1 - \tau_2 = \tau_3. \quad (2.34)$$

Решая совместно (2.33) и (2.34), получим:

$$\tau_2 = \frac{\varepsilon_{a1} - \varepsilon_{a2}}{\varepsilon_{a1} + \varepsilon_{a2}} \tau_1;$$

$$\tau_3 = \frac{2\varepsilon_{a2}}{\varepsilon_{a1} + \varepsilon_{a2}} \tau_1.$$

2.27. Первая группа формул Максвелла. Вторая группа формул Максвелла

В качестве системы заряженных тел рассмотрим многопроводную линию из n длинных проводов с зарядом τ_k на единицу длины (индекс заряда соответствует номеру провода), протянутых параллельно проводящей поверхности (например, поверхности земли) (рис. 2.13).

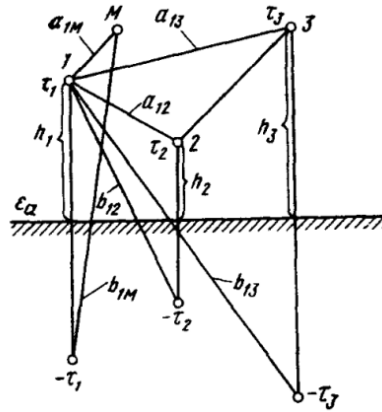


Рисунок 2. 13 – Многопроводная линия как система заряженных тел

Возьмем в диэлектрике некоторую произвольную точку M . Потенциал точки M будет равен сумме потенциалов, создаваемых каждым проводом и его зеркальным изображением. Составляющую потенциала точки M от провода 1 и его зеркального изображения в соответствии с формулой (2.28) можно записать следующим образом:

$$\varphi_{M1} = \tau_1 \frac{1}{2\pi\varepsilon_a} \ln \frac{b_{1M}}{a_{1M}},$$

где b_{1M} – расстояние точки M до зеркального изображения первого провода; a_{1M} – расстояние точки M до первого провода.

Высота подвеса каждого провода над землей много больше радиусов проводов. При этом электрические оси практически совпадут с геометрическими. Составляющая потенциала точки M от второго провода и его зеркального изображения:

$$\varphi_{M2} = \tau_2 \frac{1}{2\pi\varepsilon_a} \ln \frac{b_{2M}}{a_{2M}}.$$

Таким образом:

$$\varphi_M = \varphi_{M1} + \varphi_{M2} + \varphi_{M3} + \dots = \tau_1 \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b_{1M}}{a_{1M}} + \tau_2 \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b_{2M}}{a_{2M}} + \tau_3 \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b_{3M}}{a_{3M}}.$$

Точку M поместим на поверхность первого провода. При этом $\varphi_M = \varphi_1$, $b_{1M} = 2h_1$, $a_{M1} = r_1$, $b_{M2} = b_{12}$ – расстояние первого провода до зеркального изображения второго провода; $a_{M2} = a_{12}$ – расстояние первого провода до второго и так далее:

$$\varphi_1 = \tau_1 \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{2h_1}{r_1} + \tau_2 \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b_{12}}{a_{12}} + \tau_3 \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b_{13}}{a_{13}} + \dots$$

Первая группа формул Максвелла:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \tau_1 \alpha_{11} + \tau_2 \alpha_{12} + \tau_3 \alpha_{13} + \dots \\ \varphi_2 = \tau_1 \alpha_{21} + \tau_2 \alpha_{22} + \tau_3 \alpha_{23} + \dots, \\ \varphi_3 = \tau_1 \alpha_{31} + \tau_2 \alpha_{32} + \tau_3 \alpha_{33} + \dots \end{cases} \quad (2.35)$$

где $\alpha_{km} = \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b_{km}}{a_{km}}$, $\alpha_{kk} = \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{2hk}{r_k}$.

Коэффициенты $\alpha_{mk} = \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b_{mk}}{a_{mk}}$. Так как $b_{mk} = b_{km}$ и $a_{mk} = a_{km}$, то $\alpha_{km} = \alpha_{mk}$.

Коэффициенты α называют потенциальными коэффициентами. Размерность их равна размерности единицы длины, разделенной на фараду. Коэффициенты при зарядах τ_1 , τ_2 и других зависят только от геометрических размеров тел, взаимного их расположения и от свойств среды. Они не зависят ни от величины, ни от знаков зарядов и потенциалов. Коэффициентам α может быть дано следующее толкование. Пусть заряды всех проводов, кроме первого, равны нулю: $\tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = \dots = 0$, а $\tau_1 = 1$; тогда $\varphi_1 = \alpha_{11}$, то есть α_{11} численно равно потенциалу первого провода, если на первом проводе находится единичный заряд, а заряды на остальных проводах отсутствуют. Аналогично α_{21} численно равно потенциалу второго провода в тех же условиях. Система (2.35) позволяет подсчитать потенциалы заряженных тел по известным общим зарядам тел.

Решим систему (2.35) относительно зарядов, полагая потенциалы φ и коэффициенты α известными, получим **вторую группу формул Максвелла:**

$$\begin{cases} \tau_1 = \beta_{11}\varphi_1 + \beta_{12}\varphi_2 + \beta_{13}\varphi_3 + \dots \\ \tau_2 = \beta_{21}\varphi_1 + \beta_{22}\varphi_2 + \beta_{23}\varphi_3 + \dots \\ \tau_3 = \beta_{31}\varphi_1 + \beta_{32}\varphi_2 + \beta_{33}\varphi_3 + \dots \end{cases}$$

Коэффициенты β называют емкостными коэффициентами. Размерность их обратна размерности коэффициента α . Все β с одинаковыми индексами положительны, а с разными индексами отрицательны.

2.28. Третья группа формул Максвелла

Первая группа формул Максвелла:

$$\begin{cases} \tau_1 = \varphi_1 C_{11} + U_{12} C_{12} + U_{13} C_{13} + \dots \\ \tau_2 = \varphi_2 C_{22} + U_{21} C_{21} + U_{23} C_{23} + \dots \\ \dots \dots \dots \end{cases} \quad (2.36)$$

Коэффициенты C_{kk} называют собственными частичными емкостями, а коэффициенты C_{km} – взаимными частичными емкостями. Так как $\beta_{km} = \beta_{mk}$, то и $C_{km} = C_{mk}$. Размерность частичных емкостей та же, что и размерность емкостных коэффициентов β . Все частичные емкости положительны. Так как $C_{km} = -\beta_{km}$, а $\beta_{km} < 0$, то очевидно, что $C_{km} > 0$.

Для более наглядной иллюстрации системы (2.36) можно представить, что в системе трех проводов (см. рис. 2.13) первый провод как бы соединен с обкладками трех конденсаторов C_{11} , C_{12} , C_{13} .

Заряды на обкладках этих конденсаторов, обращенных к проводу 1, соответственно равны φ_1 , C_{11} , $U_{12} C_{12}$, $U_{13} C_{13}$. Заряды на других обкладках записаны на рисунке 2.14.

Три группы формул Максвелла справедливы для системы заряженных тел любой формы.

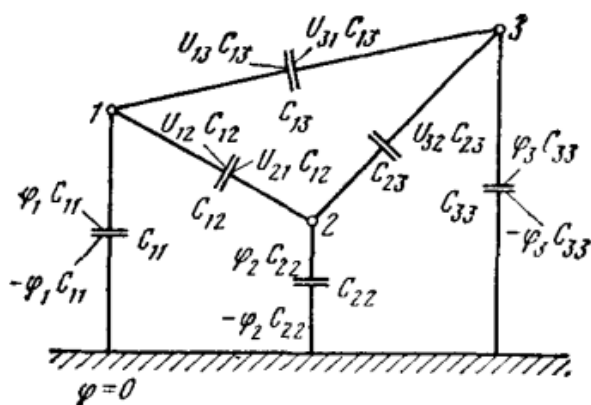


Рисунок 2.14 – Система трех проводов

Однако, если тела имеют произвольную форму, то потенциальные коэффициенты уже нельзя определять по формулам:

$$\alpha_{km} = \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b_{km}}{a_{km}}, \quad \alpha_{kk} = \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{2hk}{r_k}.$$

Данные формулы справедливы только для системы линейных параллельных, достаточно длинных проводов.

Определение емкостных коэффициентов и частичных емкостей в этом случае производят опытным путем.

Частичные емкости используют при расчетах не только электростатических полей, но и при расчетах быстропротекающих процессов в электрических цепях, а также процессов, в основу которых положено использование частичных емкостей, например при емкостном отборе мощности от высоковольтной линии электропередачи. Частичные емкости между электродами электронных ламп, между электродами транзисторов учитывают при расчетах быстропротекающих процессов.

2.29. Диэлектрический шар в равномерном поле

Если в равномерное поле (рис. 2.15) помещен незаряженный диэлектрический шар, то как внутри шара, так и вне его нет свободных зарядов, и потому поле описывается уравнением Лапласа. Величины, служащие для описания поля внутри шара, обозначим с индексом i , а величины, с помощью которых записывается потенциал во внешней по отношению к шару области, – с индексом e .

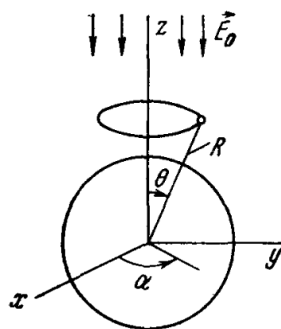


Рисунок 2.15 – Шар в равномерном поле

На рисунке 2.16 изображены линии вектора \vec{D} и эквипотенциальные линии (картина поля) для трех случаев:

а) когда в равномерное (до внесения шара) поле помещен незаряженный проводящий шар (рис. 2.16, а);

б) когда в равномерное (до внесения шара) поле помещен диэлектрический шар, ϵ_{ai} которого больше ϵ_{ae} окружающей среды (рис. 2.16, б);

в) когда ϵ_{ai} диэлектрического шара меньше ϵ_{ae} окружающей среды (рис. 2.16, в).

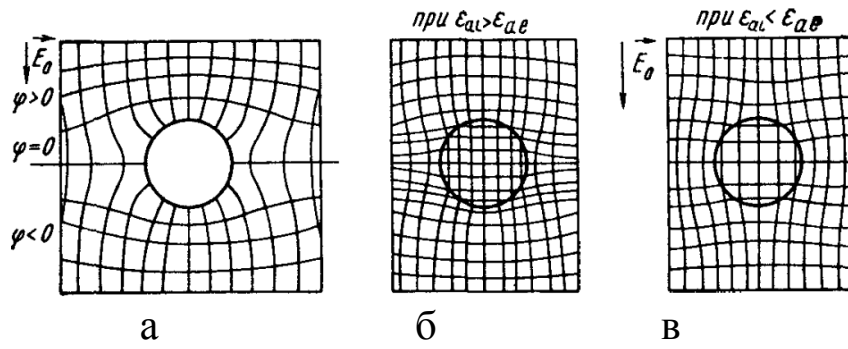


Рисунок 2.16 – Картина поля

Линии вектора \vec{D} начинаются на свободных зарядах. Эти линии прерываются на поверхности металлического шара (рис. 2.16, а) и проходят, не прерываясь, через диэлектрический шар (рис. 2.16, б и в).

Если на рисунках 2.16, б и 2.16, в вместо линий вектора \vec{D} изобразить линии вектора напряженности поля \vec{E} , то линии \vec{E} частично претерпевали бы разрыв на поверхности шаров, так как истоком для \vec{E} являются не только свободные, но и связанные заряды.

Потенциалы областей:

внутренней

$$\varphi_i = \varphi_0 + E_0 R \frac{3\varepsilon_{ae}}{2\varepsilon_{ae} + \varepsilon_{ai}} \cos\theta = \varphi_0 + E_0 \frac{3\varepsilon_{ae}}{2\varepsilon_{ae} + \varepsilon_{ai}} z; z = R \cos\theta, \quad (2.37)$$

внешней

$$\varphi_e = \varphi_0 + E_0 \left(R + \frac{a^3}{R^2} \frac{\varepsilon_{ae} - \varepsilon_{ai}}{2\varepsilon_{ae} + \varepsilon_{ai}} \right) \cos\theta. \quad (2.38)$$

2.30. Диэлектрический цилиндр в равномерном поле

Пусть напряженность \vec{E}_0 равномерного (до внесения цилиндра) поля направлена параллельно оси x декартовой системы (рис. 2.17).

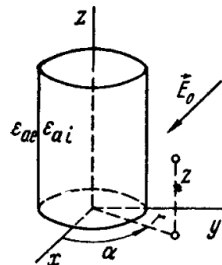


Рисунок 2.17 – Диэлектрический цилиндр в равномерном поле

Поместим в это поле диэлектрический цилиндр так, чтобы ось цилиндра совпала с осью z . Решая уравнение Лапласа в цилиндриче-

ской системе координат, получим следующие формулы для определения потенциала внутри цилиндра:

$$\varphi_i = -E_0 r \frac{2\varepsilon_{ae}}{\varepsilon_{ae} + \varepsilon_{ai}} \cos\alpha = \frac{2\varepsilon_{ae}}{\varepsilon_{ae} + \varepsilon_{ai}} E_0 x \quad (2.39)$$

и вне цилиндра:

$$\varphi_e = E_0 \left(\frac{\varepsilon_{ai} - \varepsilon_{ae}}{\varepsilon_{ae} + \varepsilon_{ai}} \frac{a^2}{r} \right) \cos\alpha.$$

Напряженность равномерного поля внутри цилиндра, направленная по оси x :

$$E_i = -\frac{d\varphi_i}{dx} = \frac{2\varepsilon_{ae}}{\varepsilon_{ae} + \varepsilon_{ai}} E_0. \quad (2.40)$$

2.31. Графическое построение картины плоскопараллельного поля

Аналитический расчет полей часто вызывает затруднения, например когда поверхности электродов имеют сложную форму.

В этом случае картину поля строят графически. С этой целью сначала выясняют, не обладает ли изучаемое поле симметрией. Если она имеется, то картину поля строят только для одной из областей симметрии. Картина поля, образованного двумя проводящими взаимно перпендикулярными, относительно тонкими пластинками (электродами), построена на рисунке 2.18 только для верхней полуплоскости (в нижней полуплоскости картина повторяется).

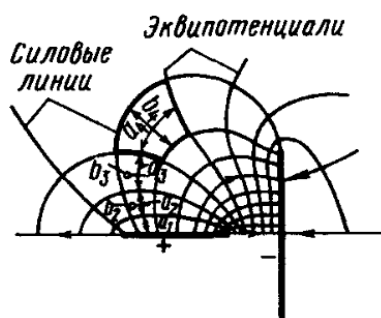


Рисунок 2.18 – Картина поля

Правила построения:

- силовые линии должны подходить к поверхностям электродов перпендикулярно;

- силовые и эквипотенциальные линии должны быть взаимно перпендикулярны и образовывать подобные ячейки поля (криволинейные прямоугольники), для которых отношение средней длины

ячейки a к средней ширине этой ячейки b для всех ячеек должно быть приблизительно одинаковым.

Если число ячеек в силовой трубке обозначить n , а число трубок m , то при соблюдении перечисленных правил разность потенциалов между соседними эквипотенциалами будет одинакова и равна $\Delta U = U/n$, где U – напряжение между электродами, а поток ΔN вектора \vec{D} в каждой силовой трубке будет такой же, что и в соседней. Обозначим длину электродов в направлении, перпендикулярном рисунку через l . Тогда:

$$\Delta N = b_1 l E_1 \varepsilon_a = b_2 l E_2 \varepsilon_a = \dots = b_n l E_n \varepsilon_a.$$

Отсюда:

$$E_1 = \frac{\Delta N}{b_1 l \varepsilon_a}; E_2 = \frac{\Delta N}{b_2 l \varepsilon_a} \dots$$

Напряжение между электродами:

$$U = E_1 a_1 + E_2 a_2 + \dots + E_n a_n.$$

Подставим в последнее выражение значения напряженностей поля $E_1 \div E_n$ и учтем, что по построению $a_1/b_1 = a_2/b_2 = a_n/b_n = a/b$. Получим $U = \frac{\Delta N}{l \varepsilon_a} \frac{an}{b}$. Поток в одной силовой трубке $\Delta N = \frac{Ul \varepsilon_a b}{an}$.

Правая часть формулы для ΔN одинакова для всех силовых трубок, поэтому одинаковы и потоки вектора \vec{D} во всех силовых трубках. Через все m силовых трубок поток вектора \vec{D} будет в m раз больше и по теореме Гаусса он должен быть равен заряду Q на электроде:

$$Q = m \Delta N = \frac{Ul \varepsilon_a b m}{an}.$$

Емкость между электродами:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{l \varepsilon_a b m}{an}.$$

2.32. Энергия поля системы заряженных тел

Энергия поля, образованного системой n заряженных тел, имеющих потенциалы $\varphi_1 \dots \varphi_n$ и заряды $q_1 \dots q_n$:

$$W_э = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n q_k \varphi_k.$$

Вывод формулы основан на том, что энергия поля равна работе внешних сил, затраченной на перенос зарядов из бесконечности (где $\varphi = 0$) в точки поля, в которых они будут находиться, и на принципе наложения. Используя формулу (2.35), сначала находим работу при переносе заряда q_1 , полагая, что заряды всех остальных тел равны

нулю. Затем находим работу при переносе заряда q_2 , полагая $q_1 = const$ и $q_3 = q_4 = q_n = 0$, и так далее. Суммируя все работы, получаем результирующую формулу. Заряды на проводящих телах, находящихся в диэлектрике, всегда распределяются по поверхностям этих тел так, что энергия образовавшегося между этими телами электрического поля минимальна (теорема Томсона).

2.33. Исследование электростатического поля

ЗАДАНИЕ 1

Два провода диаметром 10 мм расположены в воздухе параллельно друг другу (рис. 2.19). Расстояние между осями проводов $d = 20$ мм. Заряд каждого провода на метр длины 10^{-8} Кл. Левый провод несет положительный заряд, правый – отрицательный. Найти наибольшую и наименьшую плотности заряда на поверхности провода.

РЕШЕНИЕ

Находим положение электрических осей: $x = 1,35$ мм. Плотность заряда на поверхности металла $\sigma = D = \epsilon_a E$. Следовательно, σ будет больше там, где E больше.

Если учесть, что напряженность поля, создаваемая положительным зарядом, направлена от этого заряда, а напряженность поля, создаваемая отрицательным зарядом, направлена к заряду, то ясно, что наибольшая напряженность поля будет в точке A , наименьшая – в точке B .

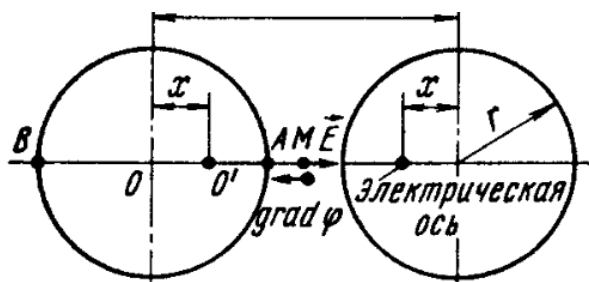


Рисунок 2.19 – Электростатическое поле двух проводов

Напряженность поля в точке A равна сумме напряженности от обоих зарядов, а в точке B – разности напряженностей:

$$E_A = \frac{Q}{2\pi\epsilon_a l(r-x)} + \frac{Q}{2\pi\epsilon_a l(d-r-x)};$$

$$E_B = \frac{Q}{2\pi\epsilon_a l(r-x)} \left(\frac{1}{(r+x)} - \frac{1}{(d+r-x)} \right).$$

Отсюда $D_A = \sigma_A = \epsilon_a E_A = 0,544 \text{ мкК/м}^2$; $D_B = \sigma_B = \epsilon_a E_B = 0,186 \text{ мкК/м}^2$.

Таким образом, плотность заряда в точке A в 2,92 раза больше, чем плотность заряда в точке B .

Найдем градиент потенциала в точке M (расположенной посередине между проводами на линии, соединяющей их центры).

РЕШЕНИЕ

Так как $\vec{E} = -d\text{rad}\varphi$, то модуль $d\text{rad}\varphi$ равен модулю E , а направление $d\text{rad}\varphi$ противоположно направлению \vec{E} . В точке M :

$$E_M = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \left(\frac{1}{(d/2 - x)} + \frac{1}{(d/2 - x)} \right) = \frac{10^{-8} \cdot 2}{2\pi \cdot 8,86 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 0,00865} = 41600 \text{ В/м.}$$

ЗАДАНИЕ 2

Определить частичные емкости на один метр длины двухпроводной линии и вывести формулу для определения емкости между проводами 1 и 2. Геометрические размеры (в метрах) указаны на рисунке 2.20. Радиусы проводов равны 6 мм.

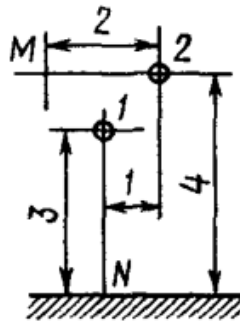


Рисунок 2.20 – Исходные данные

РЕШЕНИЕ

В соответствии с формулой (2.35):

$$\varphi_1 = \tau_1 \alpha_{11} + \tau_2 \alpha_{12}; \quad \varphi_2 = \tau_1 \alpha_{21} + \tau_2 \alpha_{22}.$$

Отсюда:

$$\tau_1 = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_1 & \alpha_{12} \\ \varphi_2 & \alpha_{22} \end{vmatrix}}{\Delta} = \varphi_1 \beta_{11} + \varphi_2 \beta_{12}.$$

Здесь:

$$\beta_{11} = \frac{\alpha_{22}}{\Delta}; \quad \beta_{12} = \frac{\alpha_{12}}{\Delta}; \quad \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}.$$

$$\tau_1 = \beta_{11} \varphi_1 + \beta_{12} (\varphi_2 - \varphi_1 + \varphi_1) = U_1 (\beta_{11} + \beta_{12}) - \beta_{12} U_{12} = U_1 C_{11} + U_{12} C_{12}; \quad (\varphi_1 = U_1).$$

Следовательно, для двухпроводной линии:

$$C_{11} = \beta_{11} + \beta_{12} = (\alpha_{22} - \alpha_{12})/\Delta; \quad C_{12} = -\beta_{12} = \alpha_{12}/\Delta.$$

Аналогичным путем найдем:

$$C_{22} = \beta_{22} + \beta_{12} = (\alpha_{11} - \alpha_{12})/\Delta.$$

Найдем:

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{2h_1}{r} = 12,4 \cdot 10^{-10} \text{ М/Ф};$$

$$\alpha_{22} = \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{2h_2}{r} = 12,9 \cdot 10^{-10} \text{ М/Ф};$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b_{12}}{a_{12}} = 2,9 \cdot 10^{10} \text{ М/Ф};$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = 151,6 \cdot 10^{20} \text{ М}^2/\text{Ф}^2;$$

$$C_{11} = (\alpha_{22} - \alpha_{12})/\Delta = 0,659 \cdot 10^{-11}; \text{ Ф/М};$$

$$C_{22} = (\alpha_{11} - \alpha_{12})/\Delta = 0,626 \cdot 10^{-11}; \text{ Ф/М};$$

$$C_{12} = \alpha_{12}/\Delta = 0,191 \cdot 10^{-11}; \text{ Ф/М}.$$

Рабочая емкость между проводами 1 и 2:

$$C_p = C_{12} + \frac{C_{11}C_{22}}{C_{11}+C_{22}}.$$

ЗАДАНИЕ 3

Провод 1 примера 2 соединен с землей через источник ЭДС $E=127 \text{ В}$. Провод 2 соединен с землей проводником, так что его потенциал равен нулю (рис. 2.21). Определить заряды на проводах 1 и 2 на один погонный метр.

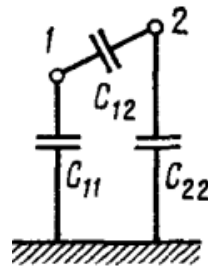


Рисунок 2.21 – Исходные данные

РЕШЕНИЕ

Из второй группы формул Максвелла при $\varphi_2 = 0$ следует, что:

$$\tau_1 = \beta_{11}\varphi_1 \text{ и } \tau_2 = \beta_{12}\varphi_1; \beta_{11} = \alpha_{22}/\Delta = \frac{12,9 \cdot 10^{10}}{151,6 \cdot 10^{20}} = 0,852 \cdot 10^{-11} \text{ Ф/М};$$

$$\beta_{12} = -C_{12} = -0,191 \cdot 10^{-11} \text{ Ф/М}.$$

Заряд первого провода: $\tau_1 = 127 \cdot 0,852 \cdot 10^{-11} = 1,08 \cdot 10^{-9} \text{ Кл/м}$.

Заряд второго провода: $\tau_2 = -0,191 \cdot 10^{-11} \cdot 127 = -0,242 \cdot 10^{-9} \text{ Кл/м}$.

ЗАДАНИЕ 4

Заряд $\tau_1 = 2 \cdot 10^{-9} \text{ Кл/м}$ на единицу длины провода 1 (см. рис. 2.20). Заряд $\tau_2 = 10^{-9} \text{ Кл/м}$ на единицу длины провода 2. Определить потенциал точки M , полагая потенциал земли равным нулю.

РЕШЕНИЕ

$$\begin{aligned}\varphi_M &= \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b_{1M}}{a_{1M}} + \frac{\tau_2}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b_{2M}}{a_{2M}} = \frac{2 \cdot 10^{-9}}{2\pi \cdot 8,86 \cdot 10^{-12}} \ln \frac{\sqrt{7^2 + 1^2}}{\sqrt{2}} = \\ &= -\frac{10^{-9}}{2\pi \cdot 8,86 \cdot 10^{-12}} \ln \frac{\sqrt{8^2 + 2^2}}{2} = 30,6 \text{ В.}\end{aligned}$$

ЗАДАНИЕ 5

Определить плотность наведенного заряда на поверхности земли в точке N (см. рис.2. 20), полагая, что заряды на проводах такие же, как и в задании 4.

РЕШЕНИЕ

Плотность заряда на поверхности проводника равна напряженности в этой точке, умноженной на $\epsilon_a = \epsilon_0$.

Напряженность поля в точке N (рис. 2.22) равна геометрической сумме напряженностей от четырех зарядов – от заряда τ_1 (обозначим ее E_1), от заряда τ_2 обозначим E_2 и зеркальных изображений этих зарядов E'_1 и E'_2 : $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}'_1 + \vec{E}'_2$.

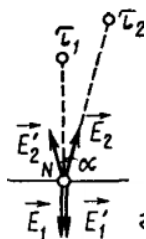


Рисунок 2.22 – Геометрическая сумма напряженностей

Напряженности \vec{E}_1 и \vec{E}'_1 направлены по одной прямой (по вертикали). Для нахождения проекций \vec{E}_2 и \vec{E}'_2 на вертикаль умножаем E_2 и E'_2 на $\cos\alpha$. Плотность заряда:

$$\begin{aligned}\sigma &= 2 \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_a h_1} \epsilon_a - 2 \frac{\tau_2}{2\pi\epsilon_a \sqrt{a^2 + h_2^2}} \epsilon_a \frac{h_2}{\sqrt{a^2 + h_2^2}} = 0,1375 \cdot 10^{-9} \text{ Кл/м}^2. \\ a &= 1; h_2 = 4 \text{ м.}\end{aligned}$$

ЗАДАНИЕ 6

Две металлические пластинки (теоретически бесконечной протяженности), находясь в воздухе (рис. 2.23), образуют, не соприкасаясь, двугранный угол α_2 . Потенциал первой пластины φ_1 ; второй φ_2 . Вывести формулы для определения φ и E в любой точке поля внутри двугранного угла, а также формулу для определения плотности заряда на пластинках. Дать числовой ответ при $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 100 \text{ В}$, $\alpha_2 = 30^\circ$.

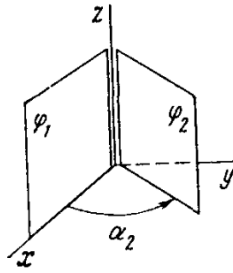


Рисунок 2.23 – Две металлические пластины

РЕШЕНИЕ

Поскольку граничные поверхности проще всего можно описать в цилиндрической системе координат, то решение будем проводить именно в этой системе.

В пространстве между пластинами отсутствуют свободные заряды, поэтому поле подчиняется уравнению Лапласа в цилиндрической системе координат:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

Потенциал φ зависит только от угла α и из условий симметрии не зависит от координаты z и радиуса r цилиндрической системы координат. Поэтому $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = 0$.

Согласно этому уравнению:

$$\varphi = C_1 \alpha + C_2.$$

По условию, при $\alpha = 0$ $\varphi = \varphi_1 = 0$, а при $\alpha = \alpha_2$ $\varphi = \varphi_2 = 100$ В. Следовательно, $C_2 = 0$, $C_1 = \frac{100}{\pi/6} = 600\pi$ и $\varphi = 600 \frac{600}{\pi \alpha}$.

Напряженность поля имеет только одну альфовую составляющую:

$$E_\alpha = -\frac{d\varphi}{r d\alpha} = -\frac{C_1}{r} = -\frac{600}{\pi r} \text{ В/м.}$$

Плотность заряда:

$$\sigma = D = \varepsilon_0 E_\alpha = -\frac{600 \varepsilon_0}{\pi r}.$$

При $r = 2$ см; $\sigma = D = -8,48 \cdot 10^{-9}$ Кл/м².

ЗАДАНИЕ 7

Две металлические конусообразные воронки находятся в воздухе, обращены остриями друг к другу и не соприкасаются (рис. 2.24). Угол $\theta_1 = 30^\circ$, $\theta_2 = 135^\circ$, потенциал первой воронки $\varphi_1 = 0$, потенциал второй воронки $\varphi_2 = 1000$ В. Вывести формулу для определения φ и E в пространстве между воронками и найти по ним E и φ в точке M с координатами $R=2$ см и $\theta = 120^\circ$.

РЕШЕНИЕ

Воспользуемся сферической системой координат, поскольку поверхности воронок проще всего описываются именно в этой системе. В пространстве между воронками отсутствует объемный заряд, поэтому поле описывается уравнением Лапласа в сферической системе координат:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}.$$

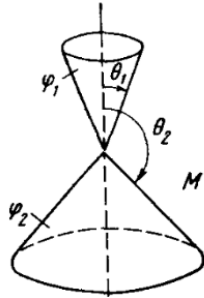


Рисунок 2.24 – Две конусообразные воронки

В силу симметрии φ зависит только от угла θ и не зависит от радиуса R и угла α – двух остальных координат сферической системы. Таким образом, $\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0$, откуда $\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = C_1$, $\varphi = C_1 \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + C_2$.

Найдем постоянные интегрирования C_1 и C_2 . При $\theta = 30^\circ$ $\varphi = 0$, при $\theta = 135^\circ$ $\varphi = 1000$ В. Следовательно, $C_1 \ln \operatorname{tg} 15^\circ + C_2 = 0$; $C_1 \ln \operatorname{tg} 67^\circ 30' + C_2 = 1000$. Отсюда $C_1 = 461$ В, $C_2 = 608$ В. Потенциал точки M : $\varphi_M = 461 \ln \operatorname{tg} 60^\circ + 608 = 856,5$ В. Напряженность поля имеет только θ -составляющую:

$$E_\theta = -\frac{d\varphi}{R d\theta} = -\frac{C_1}{R \sin \theta}.$$

Напряженность в точке M :

$$E_{\theta M} = -\frac{461}{0,02 \sin 120^\circ} = -26,6 \text{ кВ/м.}$$

ЗАДАНИЕ 8

В вакууме на расстоянии 2 см друг от друга расположены два плоских электрода (рис. 2.25). Правый электрод заземлен, а левый соединен с плюсом батареи, ЭДС которой 220 В; отрицательный зажим батареи заземлен. В пространстве между электродами распределен объемный заряд с плотностью $\rho = -a \varepsilon_0 x$, где $a = 30$ кВ/см³; x – расстояние от левой пластины. Требуется найти закон изменения потенциала в пространстве между электродами.

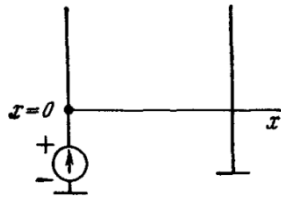


Рисунок 2.25 – Два плоских электрода

РЕШЕНИЕ

Полагаем, что размеры электродов много больше расстояния между ними. Направляем ось x , как показано на рисунке 2.25.

Потенциал зависит только от x ; от y и z он в данной задаче не зависит. Следовательно:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = ax.$$

Производим двукратное интегрирование по x : $d\varphi/dx = ax^2/2 + C_1$ и $\varphi = \frac{ax^3}{6} + C_1x + C_2$. Определим постоянные интегрирования из граничных условий:

$$\text{при } x = 0 \quad \varphi = 200 = C_2;$$

$$\text{при } x = 2 \quad \varphi = 0 = 200 + 2C_1 + (30 \cdot 8 \cdot 10^3)/6; \quad C_1 = -20100 \text{ В/см.}$$

Следовательно:

$$\varphi = \frac{(30 \cdot 10^3 \cdot x^3)}{6} - 20100x + 200 = 5000x^3 - 20000x + 200 \text{ В.}$$

ЗАДАНИЕ 9

В цилиндрическом конденсаторе с воздушной изоляцией вокруг внутреннего электрода радиусом r_0 располагается заряд короны с объемной плотностью ρ К/см³. Наружный радиус короны r_1 (рис. 2.26). Радиус наружного электрода r_2 . Потенциал внутреннего электрода φ_0 , потенциал наружного электрода φ_2 .

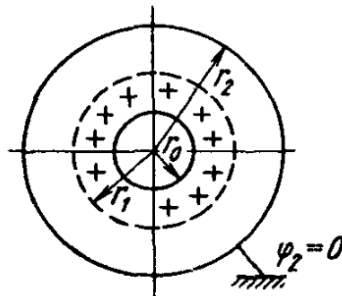


Рисунок 2.26 – Исходные данные

Вывести формулу для определения φ в пространстве, занятом объемными зарядами (назовем его областью I), и в пространстве, не занятом свободными зарядами (область II).

РЕШЕНИЕ

В области I:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi_I}{dr} \right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Двукратное интегрирование по r дает:

$$\varphi_I = -\frac{\rho r^2}{4\varepsilon_0} + C_1 \ln r + C_2.$$

В области II:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi_{II}}{dr} \right) = 0 \text{ и } \varphi_{II} = C_3 \ln r + C_4.$$

Составим четыре уравнения для определения четырех постоянных интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 .

При $r = r_0$ $\varphi_I = \varphi_0$, поэтому:

$$\varphi_0 = -\frac{\rho r_0^2}{4\varepsilon_0} + C_1 \ln r_0 + C_2. \quad (2.41)$$

При $r = r_1$ $\varphi_I = \varphi_{II}$:

$$-\frac{\rho r_1^2}{4\varepsilon_0} + C_1 \ln r_1 + C_2 = C_3 \ln r_1 + C_4. \quad (2.42)$$

При $r = r_2$ $\varphi_{II} = 0$:

$$0 = C_3 \ln r_2 + C_4. \quad (2.43)$$

При $r = r_1$ равны нормальные составляющие вектора электрического смещения D :

$$\varepsilon_0 (d\varphi_I/dr)_{r=r_1} = \varepsilon_0 (d\varphi_{II}/dr)_{r=r_0} \text{ или} \\ C_3 = C_1 - \frac{\rho r_1^2}{2\varepsilon_0}. \quad (2.44)$$

Совместное решение уравнений (2.41), (2.42), (2.43), (2.44), которое опущено, дает

$$C_1 = \frac{\frac{\rho}{4\varepsilon_0}(r_1^2 - r_0^2) + \frac{\rho r_1^2}{2\varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} - \varphi_0}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Далее определяем C_3 из уравнения (2.44), C_4 из (2.43) и C_2 из (2.41).

ЗАДАНИЕ 10

Над поверхностью земли расположилось положительно заряженное грозное облако. Пространство между облаком и землей можно рассматривать как огромных размеров плоский конденсатор. Напряженность поля \vec{E} в нем направлена от облака к земле. Найти потенциал точки A , расположенной на расстоянии 8 м от поверхности земли, в двух случаях: 1) когда над поверхностью земли не протянут заземленный трос (рис. 2.27) и 2) когда над поверхностью земли над

точкой A на высоте 10 м от земли протянут заземленный стальной трос диаметром 10 мм (рис. 2.28).

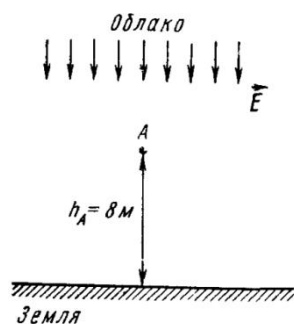


Рисунок 2.27 – Первый случай

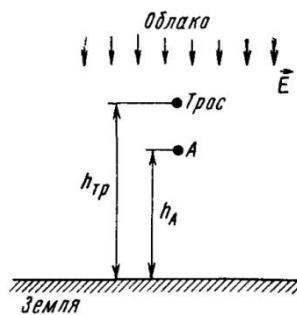


Рисунок 2.28 – Второй случай

РЕШЕНИЕ

В случае отсутствия троса (режим I):

$$\varphi_A^I = E h_A,$$

где $h_A = 8$ м.

При наличии троса (режим II) потенциал в точке A создается не только равномерным полем «плоского конденсатора», но и зарядом на тросе $q_{\text{тр}}$:

$$\varphi_A^{II} = E h_A + q_{\text{тр}} \alpha_{12}.$$

Здесь через α_{12} обозначен потенциальный коэффициент:

$$\alpha_{12} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b_{12}}{a_{12}} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{10+8}{2}$$

Составим уравнение для определения заряда троса:

$$\varphi_{\text{тр}} = E h_{\text{тр}} + q_{\text{тр}} \alpha_{11} = 0.$$

Следовательно:

$$q_{\text{тр}} = -\frac{E h_{\text{тр}}}{\alpha_{11}} \text{ и } \varphi_A^{II} = E \left(h_A - h_{\text{тр}} \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} \right).$$

Изменение потенциала в точке A , отнесенное к значению потенциала в точке A до появления троса:

$$\frac{\Delta\varphi_A}{\varphi_A^I} = \frac{\varphi_A^I - \varphi_A^{II}}{\varphi_A^I} = \frac{E \left\{ h_A - \left(h_A - h_{\text{тр}} \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} \right) \right\}}{E h_A} = \frac{10 \cdot 0,251}{8} = 0,313;$$

$$\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} = \frac{\ln \frac{18}{2}}{\ln 4000} = \frac{2,08}{8,3} = 0,251.$$

ЗАДАНИЕ 11

В равномерное поле с напряженностью $E_0 = 10^3$ кВ/м внесен незаряженный металлический шар радиусом $a=1$ см. Найти E_R и E_θ в точке A . Координаты точки A : $R = 2$ см и $\theta = 30^\circ$.

РЕШЕНИЕ

Найдем составляющие напряженности электрического поля:

$$E_R = -\frac{\partial\varphi}{\partial R} = -E_0 \cos\theta(1 + 2a^3/R^3) = -10^6 \cdot 0,866 \left(1 + \frac{2}{8}\right) =$$

$$= -1,082 \cdot 10^6 \text{ В/м.}$$

$$E_\theta = -\frac{\partial\varphi}{R\partial\theta} = E_0 \sin\theta(1 - a^3/R^3) = 10^6 \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{8}\right) =$$

$$= 0,437 \cdot 10^6 \text{ В/м.}$$

Результирующая напряженность поля по модулю:

$$E = \sqrt{E_R^2 + E_\theta^2} = 1,168 \cdot 10^6 \text{ В/м.}$$

ЗАДАНИЕ 12

В воздухе создано равномерное электрическое поле напряженностью $E_0 = 10^3$ кВ/м. В это поле поместили диэлектрический цилиндр ($\varepsilon_{ai} = 4\varepsilon_0$) так, что его ось перпендикулярна полю. Найти напряженность поля E_i внутри цилиндра.

РЕШЕНИЕ

$$E_i = E_0 \frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon_{ai} + \varepsilon_0} = 10^3 \cdot \frac{2 \cdot 1}{4 + 1} = 4 \cdot 10^2 \text{ кВ/м.}$$

ЗАДАНИЕ 13

В некоторой области пространства имеется поле, потенциал которого зависит только от координаты x декартовой системы: $\varphi = 5x^3 - 60x^2$. Найти закон изменения плотности свободных зарядов в этом поле.

РЕШЕНИЕ

Уравнение Пуассона, описывающее поле, можно записать так:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{\rho_{\text{своб}}}{\varepsilon_a}.$$

Дважды дифференцируем φ по x :

$$\frac{d\varphi}{dx} = 15x^2 - 120x; \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 30x - 120.$$

$$\rho_{\text{своб}} = (-30x + 120)\varepsilon_a.$$

ЗАДАНИЕ 14

Вывести формулу для определения напряженности и потенциала поля, создаваемого заряженной осью длиной l (рис.2.29). Заряд на единицу длины оси равен τ .

РЕШЕНИЕ

Определим E и φ в произвольной точке k . Расположим оси декартовой системы координат в соответствии с рисунком 2.29.

Выделим отрезок оси длиной dx , на нем будет заряд τdx . В силу малости dx будем считать этот заряд точечным и по теореме Гаусса найдем создаваемую им напряженность поля в точке k :

$$dE = \frac{\tau dx}{4\pi\epsilon_a R^2}.$$

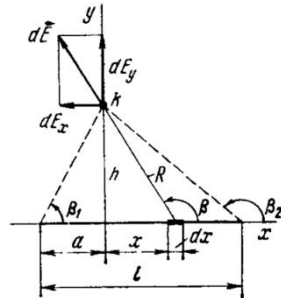


Рисунок 2.29 – Исходные данные

Проекция \vec{dE} на ось x :

$$dE_x = dE \cos(180 - \beta) = \frac{-\tau \cos \beta dx}{4\pi\epsilon_a R^2}.$$

Угол β отсчитываем от положительного направления dx к положительному направлению радиуса R (последний направлен от dx к точке k).

Проекция \vec{dE} на ось y :

$$dE_y = dE \sin(180 - \beta) = \frac{\tau \sin \beta dx}{4\pi\epsilon_a R^2}.$$

Заменим:

$$R = \frac{h}{\sin \beta}; \quad x = -h \operatorname{ctg} \beta; \quad dx = \frac{h d\beta}{\sin^2 \beta};$$

$$E_x = \frac{-\tau}{4\pi\epsilon_a h} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \cos \beta d\beta = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_a h} (\sin \beta_1 - \sin \beta_2);$$

$$E_y = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_a h} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sin \beta d\beta = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_a h} (\cos \beta_1 - \cos \beta_2);$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}.$$

Составляющая потенциала в точке k от точечного заряда τdx :

$$d\varphi = \frac{\tau dx}{4\pi\epsilon_a R} = \frac{\tau d\beta}{4\pi\epsilon_a \sin \beta};$$

$$\int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{d\beta}{\sin \beta} = -\operatorname{Arsh}(\operatorname{ctg} \beta); \quad \varphi = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_a} \left(\operatorname{Arsh} \frac{l-a}{h} + \operatorname{Arsh} \frac{a}{h} \right).$$

Контрольные вопросы

1. Записать закон Кулона и объяснить его физическую сущность.
2. Охарактеризуйте понятие «электростатическое поле».

3. Какая интегральная и дифференциальная связь существует между E и f ?
4. В чем смысл знака «минус» в формуле $E = -\text{grad } f$?
5. Могут ли быть замкнутыми силовые линии в электростатическом поле?
6. В чем отличие «свободных зарядов» от «связанных»?
7. В чем заключается явление электрической индукции?
8. Записать теорему Гаусса в дифференциальной форме.
9. Записать теорему Гаусса в интегральной форме.
10. Дайте определение емкости между двумя телами.
11. Что определяют потенциальные и емкостные коэффициенты?
12. Что определяют частичные емкости?
13. Охарактеризуйте поле точечного и линейного зарядов.
14. В чем отличие уравнения Лапласа и уравнения Пуассона для электростатического поля?
15. Дать понятие «поляризованность» в электростатическом поле.

Тема 3. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

3.1. Плотность тока

Если под воздействием внешних источников в проводящей среде (металлических проводниках, земле, жидкостях) создано электрическое поле, то в ней будет протекать электрический ток. Упорядоченное движение свободных электронов в металле и ионов в жидкости под действием электрического поля называют током проводимости.

При своем упорядоченном движении носители зарядов испытывают многочисленные столкновения с другими частицами вещества, которые находятся в тепловом движении. Эти столкновения затрудняют упорядоченное движение носителей зарядов и являются причиной сопротивления, оказываемого проводящей средой прохождению тока.

Свойство среды, характеризующее ее способность проводить ток, называют удельной проводимостью γ . Удельная проводимость γ , зависящая от физических свойств проводящего материала и температуры, измеряется в $\text{Ом}^{-1}\text{м}^{-1} = \text{См} \cdot \text{м}$.

Основной величиной в электрическом поле проводящей среды является плотность тока $\vec{\delta}$. Это векторная величина, направленная по напряженности электрического поля. Она численно равна отношению тока Δi , протекающего через элемент поверхности ΔS (перпендикулярный направлению напряженности поля в данной точке), к величине ΔS этой поверхности.

Если поверхность имеет конечные размеры, то направление вектора плотности тока во всех элементах, на которые может быть разбита эта поверхность, и направление элементов поверхности могут быть различны, и ток определяют по выражению:

$$I = \int_S \vec{\delta} d\vec{S}.$$

Таким образом, ток есть поток вектора плотности тока.

Ток в отличие от плотности тока является скаляром алгебраического характера.

При протекании постоянных токов как внутри проводящих тел, так и вне их существуют постоянные магнитные поля. Так как эти

поля неизменны во времени, то в поле не возникает явления электромагнитной индукции, то есть магнитное поле, созданное постоянным током, не оказывает влияния на электрическое поле постоянного тока. Поэтому электрическое и магнитное поля постоянного тока можно рассматривать отдельно.

3.2. Закон Ома и второй закон Кирхгофа в дифференциальной форме

Выделим в проводящей среде небольшой параллелепипед объемом ΔV . Длина ребра параллелепипеда Δl , площадь поперечного сечения ΔS . Расположим этот параллелепипед так, чтобы напряженность поля в нем была направлена параллельно ребру (рис. 3.1).

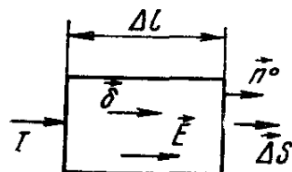


Рисунок 3.1 – Исходные данные

В силу малости объема можно считать, что напряженность электрического поля \vec{E} одна и та же во всем элементарном объеме; $\vec{\Delta l} = \Delta l \vec{n}^\circ$; $\vec{\Delta S} = \Delta S \vec{n}^\circ$, где \vec{n}° – единичный вектор по направлению $\vec{\Delta l}$, $\vec{\Delta S}$ и \vec{E} .

Ток равен:

$$I = \int \vec{\delta} d\vec{S} = \vec{\delta} \Delta \vec{S}.$$

Напряжение на элементе объема:

$$U = \vec{E} \vec{\Delta l} = RI.$$

Сопротивление элемента объема:

$$R = \frac{\Delta l}{\gamma \Delta S}.$$

Подставив в выражение $RI = \vec{E} \vec{\Delta l}$ эквиваленты R и I , получим:

$$\frac{\Delta l}{\gamma \Delta S} \vec{\delta} \Delta \vec{S} \vec{n}^\circ = \vec{E} \vec{\Delta l} \vec{n}^\circ,$$

$$\vec{\delta} = \gamma \vec{E}. \quad (3.1)$$

Соотношение (3.1) называют законом Ома в дифференциальной форме. Оно устанавливает связь между плотностью тока в данной точке проводящей среды и напряженностью поля в этой же точке.

Уравнение (3.1) справедливо для областей вне источников ЭДС. В областях, занятых источниками ЭДС, кроме электростатического поля существует еще так называемое стороннее электрическое поле, обеспечивающее непрерывное движение зарядов в электрической цепи.

Под сторонним электрическим полем понимают электрическое поле, обусловленное химическими, электрохимическими, тепловыми, термоэлектрическими процессами.

Напряженность стороннего поля обозначают $\vec{E}_{\text{стор}}$. В областях, занятых источниками ЭДС, полное значение напряженности поля равно геометрической сумме напряженности электростатического и стороннего полей.

Закон Ома в дифференциальной форме для областей, занятых источниками ЭДС, записывают следующим образом:

$$\vec{\delta} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}). \quad (3.2)$$

Уравнение (3.2) называют обобщенным законом Ома в дифференциальной форме.

Если от обеих частей уравнения (3.2) взять интеграл по замкнутому контуру, включающему в себя источник ЭДС, то из уравнения (3.2) будет получен второй закон Кирхгофа. Поэтому уравнение (3.2) называют также вторым законом Кирхгофа в дифференциальной форме.

3.3. Первый закон Кирхгофа в дифференциальной форме

Если в проводящей среде выделить некоторый объем, по которому протекает постоянный, не изменяющийся во времени ток, то можно сказать, что ток, который войдет в объем, должен равняться току, вышедшему из него, иначе в этом объеме происходило бы накопление электрических зарядов, что опыт не подтверждает. Сумму входящего в объем и выходящего из объема токов запишем:

$$\oint \vec{\delta} d\vec{S} = 0. \quad (3.3)$$

Если разделить левую и правую части (3.3) на одно и то же число (на объем, о котором шла речь), то равенство останется справедливым:

$$\frac{\oint \vec{\delta} d\vec{S}}{V} = 0.$$

Очевидно, что последнее соотношение будет справедливо и в том случае, если объем, находящийся внутри замкнутой поверхности, устремим к нулю:

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{\delta} d\vec{s}}{V} = \operatorname{div} \vec{\delta} = 0.$$

Таким образом, для постоянного, неизменного во времени поля в проводящей среде:

$$\operatorname{div} \vec{\delta} = 0.$$

Это соотношение называют первым законом Кирхгофа в дифференциальной форме. Оно означает, что в установившемся режиме (при постоянном токе) в любой точке поля нет ни истока, ни стока линий тока проводимости $\vec{\delta}$.

3.4. Дифференциальная форма закона Джоуля – Ленца

Если по какому-либо проводнику сопротивлением R протекает постоянный ток I , то в единицу времени (в секунду) в нем выделяется энергия, равная $I^2 R$. Определим энергию, выделяющуюся в единицу времени в единице объема проводящей среды (с этой целью воспользуемся рисунком 3.1):

$$\frac{I^2 R}{V} = \frac{(\delta \Delta S)^2}{\Delta l \Delta S} \left(\frac{\Delta l}{\gamma \Delta S} \right) = \frac{\delta^2}{\gamma} = \gamma E^2.$$

Следовательно, в единице объема проводящей среды в единицу времени выделяется энергия, численно равная γE^2 .

3.5. Уравнение Лапласа для электрического поля в проводящей среде

Так же как и в электростатическом поле, напряженность электрического поля в проводящей среде $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$.

В неизменном во времени поле:

$$\operatorname{div} \vec{\delta} = \operatorname{div} \gamma \vec{E} = 0.$$

Если у среды не изменяется от точки к точке, то есть если среда однородна и изотропна, то γ как постоянную величину можно вынести за знак дивергенции и, следовательно, вместо $\operatorname{div} \gamma \vec{E} = 0$ можно написать $\gamma \operatorname{div} \vec{E} = 0$ или

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 0, \\ \operatorname{div} (-\operatorname{grad} \varphi) &= 0 \end{aligned}$$

или

$$\nabla^2 \varphi = 0.$$

Таким образом, поле в однородной проводящей среде подчиняется уравнению Лапласа. Поле постоянного тока в проводящей среде является полем потенциальным. В нем в областях, не занятых источниками, $\oint \vec{E} d\vec{l}$.

3.6. Переход тока из среды с проводимостью γ_1 в среду с проводимостью γ_2 . Граничные условия

Определим, какие граничные условия выполняются при переходе тока из среды с одной проводимостью в среду с другой проводимостью.

На рисунке 3.2 линия OO есть граница раздела сред. Возьмем на границе плоский замкнутый контур 1234. Составим циркуляцию вдоль этого контура. Стороны 12 и 34 его весьма малы по сравнению со сторонами 23 и 41 (длину последних обозначим dl).

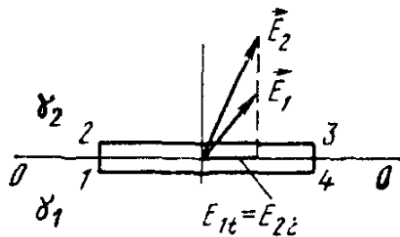


Рисунок 3.2 – Граница раздела сред

Так как $\oint \vec{E} d\vec{l}$ вдоль любого замкнутого контура равно нулю, то оно равно нулю и для контура 1234.

В силу малости отрезков 12 и 34 пренебрежем составляющими интеграла вдоль этих путей

$$E_{1t} dl - E_{2t} dl = 0 \text{ или } E_{1t} = E_{2t}. \quad (3.4)$$

На границе раздела равны нормальные составляющие плотностей токов.

При переходе тока из среды с одной проводимостью в среду с другой проводимостью непрерывна тангенциальная составляющая вектора \vec{E} и непрерывна нормальная составляющая плотности тока $\delta_{1n} = \delta_{2n}$. Отсюда следует, что полные значения вектора \vec{E} и вектора $\vec{\delta}$ в общем случае меняются скачком на границе раздела.

Если ток переходит из среды с большой проводимостью (например, из металла) в среду с малой (например, в землю), то тангенс

угла преломления меньше тангенса угла падения и, следовательно, угол преломления будет меньше угла падения.

3.7. Аналогия между полем в проводящей среде и электростатическим полем

По своей природе поле электростатическое и поле постоянного тока в проводящей среде различны. Электростатическое поле создается электрическими зарядами, неизменными во времени и неподвижными в пространстве, тогда как электрическое поле в проводящей среде – это поле, в котором электрические заряды имеют упорядоченное движение под действием внешнего источника. Тем не менее между двумя полями можно провести определенную формальную аналогию.

Электростатическое поле в областях, не занятых зарядами, удовлетворяет уравнению Лапласа. Электрическое поле постоянного тока в проводящей среде вне сторонних источников также ему удовлетворяет. В обоих полях имеют дело с вектором напряженности поля \vec{E} . С вектором электрического смещения $\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}$ можно сопоставить вектор плотности тока $\vec{\delta} = \gamma \vec{E}$. С потоком вектора \vec{D} (обозначим его буквой Ψ) $\Psi = \int_S \vec{D} \vec{ds}$ можно сопоставить поток вектора плотности электрического тока $I = \int_S \vec{\delta} \vec{ds}$.

Граничные условия на поверхности раздела двух диэлектриков:

$$E_{1t} = E_{2t} \text{ и } D_{1n} = D_{2n}.$$

Граничные условия на поверхности раздела двух сред с различной проводимостью:

$$E_{1t} = E_{2t} \text{ и } \delta_{1n} = \delta_{2n}.$$

Но если два поля удовлетворяют одному и тому же уравнению $\nabla^2 \varphi = 0$ и в них выполняются тождественные граничные условия для сходных величин, то при одинаковой форме граничных поверхностей на основании теоремы единственности можно сказать, что совокупность силовых и эквипотенциальных линий в этих двух полях будет одинаковой.

Эта формальная аналогия широко используется на практике. Так, например, если какое-либо электростатическое поле уже изучено, то все сведения о нем могут быть перенесены и на геометрически подобное поле в проводящей среде. Справедливо и обратное заключение.

3.8. Экспериментальное исследование полей

Если форма граничных поверхностей (электродов) сложна, то аналитический расчет поля осуществить довольно трудно. Непосредственно же определить потенциалы точек электростатического поля, помещая в них зонды, обычно также не удастся, потому что зонды даже при малой мощности, потребляемой индикаторами, своим присутствием искажают поле.

В этом случае поле исследуют экспериментально на модели, то есть прибегают к моделированию, либо в электролитической ванне, либо на твердой модели. Рассмотрим, как производится моделирование двухмерного поля в электролитической ванне.

В ванну с электролитом (например, с подкисленной водой) помещают электроды (рис. 3.3). Форма и их взаимное расположение должны быть точно такими же, как и в изучаемом электростатическом поле. Для того чтобы стенки ванны меньше искажали исследуемое поле, линейные размеры ванны должны в несколько раз превышать соответствующие линейные размеры исследуемого участка поля.

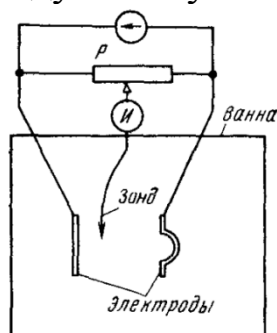


Рисунок 3.3 – Экспериментальная модель

Электроды соединяют с источником ЭДС низкой частоты (обычно 50 Гц). Использовать в качестве источника питания ЭДС постоянного тока нельзя, так как при постоянном токе будет происходить электролиз подкисленной воды и пузырьки газа, осаждаясь на электродах, будут искажать исследуемое поле. По электролиту проходит переменный ток.

С помощью вспомогательного реостата R , зонда и индикатора нуля I можно снять семейство эквипотенциальных линий в поле. Для этого движок реостата устанавливают в каком-либо фиксированном положении и, перемещая зонд так, чтобы индикатор показывал нуль, находят совокупность точек, потенциал которых равен потенциалу движка реостата. Далее перемещают движок реостата в новое положение и определяют координаты точек второй эквипотенциали и т. д.

Затем по семейству эквипотенциалей строят сетку силовых линий. При построении последней руководствуются тем, что силовые линии в любой точке поля должны быть перпендикулярны эквипотенциалам, в том числе и поверхностям электродов.

В электростатическом поле силовые линии перпендикулярны поверхностям электродов. В поле проводящей среды силовые линии, строго говоря, не совсем перпендикулярны поверхностям электродов. Но если проводимость электродов будет во много раз больше проводимости электролита, то с большой степенью точности можно считать, что силовые линии будут подходить к поверхностям электродов практически под прямым углом.

С помощью электролитической ванны можно моделировать и трехмерные поля. В этом случае ванну выполняют в виде куба или параллелепипеда, заполняют ее слабопроводящей жидкостью, а перемещение зонда в трех взаимно перпендикулярных направлениях обеспечивают специальным механическим приспособлением, находящимся вне ванны.

Моделирование с помощью электролитической ванны имеет известные недостатки – электролит загрязняется пылью из воздуха, испаряется, ванна может дать течь и т. п. Поэтому для моделирования более предпочтительны твердые модели, которые лишены этих недостатков. Твердая модель для моделирования двухмерных полей представляет собой лист электропроводной бумаги (в обычную бумагу при ее изготовлении добавлена сажа или графит), на которую ставят металлические электроды, и к ним подводят постоянное или синусоидальное напряжение. Ток проходит по бумаге от одного электрода к другому.

Семейство эквипотенциалей получают так же, как и в ванне. Бумага характеризуется своей удельной поверхностной проводимостью на единицу длины и ширины, которая много меньше удельной проводимости металлических электродов.

На практике используют твердые модели двух типов, один из них назовем исходным (в нем расположение электродов соответствует расположению электродов в исследуемом электростатическом поле), другой – дуальным или обращенным (в нем электроды располагают по граничным силовым линиям исходной модели).

Силовые и эквипотенциальные линии в исходной и дуальной моделях меняются местами.

3.9. Соотношение между проводимостью и емкостью

Если какие-либо электроды поместить в проводящую среду и присоединить к источнику ЭДС, то в проводящей среде пойдет ток. Если напряжение между электродами 1 и 2 равно U_{12} и по среде проходит ток I , то проводимость между электродами 1 и 2:

$$G = \frac{I}{U_{12}}.$$

Так как ток $I = \int \delta \vec{ds} = \gamma \int \vec{E} \vec{ds}$ и $U_{12} = \int_1^2 \vec{E} \vec{dl}$, то:

$$G = \frac{\gamma \int \vec{E} \vec{ds}}{\int_1^2 \vec{E} \vec{dl}}. \quad (3.5)$$

В свою очередь, в электрическом поле с электродами такой же конфигурации емкость между двумя частями электродов, на которых расположены одинаковые по величине и противоположные по знаку заряды Q , создающие поток Ψ вектора электрической индукции \vec{D} $\Psi = Q = \int \vec{D} \vec{ds}$, будет:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon_a \int \vec{E} \vec{ds}}{\int_1^2 \vec{E} \vec{dl}}. \quad (3.6)$$

Разделим (3.6) на (3.5) и после сокращения получим:

$$\frac{C}{G} = \frac{\epsilon_a}{\gamma}. \quad (3.7)$$

Емкость C между двумя телами, разделенными диэлектриком с абсолютной диэлектрической проницаемостью ϵ_a , так относится к проводимости G между теми же телами, если поместить их в среду с электрической проводимостью γ , как ϵ_a относится к γ .

Соотношение (3.7) позволяет по известному выражению емкости между какими-либо телами получить выражение для проводимости или совершить обратную операцию. Так, например, емкость двухпроводной линии:

$$C = \frac{\pi \epsilon_a l}{\ln(d/r)}, \quad (3.8)$$

где l – длина проводов; d – расстояние между осями проводов; r – радиус провода.

Чтобы получить выражение для проводимости между двумя параллельными проводами (цилиндрами), погруженными в среду с проводимостью γ , в соответствии с (3.7) заменим в (3.8) ϵ_a на γ . Тогда получим:

$$G = \frac{\pi \gamma l}{\ln(d/r)}. \quad (3.9)$$

3.10. Характеристика задач расчета электрического поля в проводящей среде и методов их решения

Так же, как и задачи электростатики, задачи расчета электрического поля в проводящей среде можно классифицировать по характеру величины, которая определяется в результате расчета, на задачи, у которых определяют точечные характеристики (плотность тока, потенциал), и задачи, в которых находят интегральные характеристики поля, например сопротивление между электродами или напряжение между некоторыми точками.

В зависимости от того, что задано и что определяется, все задачи расчета электрического поля в проводящей среде можно разделить на два основных типа.

В первом – заданы форма и расположение электродов (геометрия поля), свойства среды и интенсивность источников, создающих поле. Требуется найти либо точечные, либо интегральные характеристики поля.

Второй тип задачи является обратным по отношению к первому. Одной из задач второго типа может быть, например, следующая: при заданной точечной характеристике поля, заданных форме, расположении электродов и свойствах среды найти интенсивность источников, создающих это поле.

Задачи расчета электрического поля в проводящей среде могут быть решены:

- непосредственным интегрированием уравнений, описывающих поле;
- использованием аналитических решений для других статических невихревых полей;
- экспериментальным или графическим путем;
- методом зеркальных изображений.

3.11. Расчет электрического поля в диэлектрике, окружающем проводники с токами

Принято считать, что картина электрического поля в диэлектрике, окружающем проводники с токами, тождественна картине электрического поля в условиях электростатики. Это верно лишь приближенно, так как в условиях электростатики тангенциальная составляющая напряженности электрического поля на поверхности прово-

дующего тела равна нулю, тогда как при протекании постоянного тока по проводнику тангенциальная составляющая напряженности электрического поля на поверхности проводника, хотя и очень мала по сравнению с нормальной составляющей напряженности в той же точке, но не равна нулю. На числовом примере убедимся в том, что тангенциальная составляющая напряженности поля E_t во много раз меньше нормальной составляющей напряженности поля E_n .

Положим, что разность потенциалов U между двумя параллельными токонесущими медными шинами (рис. 3.4) равна 100 В, расстояние b между шинами 2 см, плотность тока $\delta = 2,5 \cdot 10^6$ А/м², $\gamma = 5,6 \cdot 10^7$ Ом⁻¹·м⁻¹. Тогда:

$$E_t = \frac{\delta}{\gamma} = 4,46 \cdot 10^{-2} \text{ В/м};$$

$$E_n = \frac{U}{b} = 5 \cdot 10^3 \text{ В/м};$$

$$\frac{E_n}{E_t} \approx 1,12 \cdot 10^5.$$

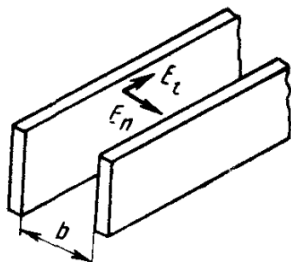


Рисунок 3. 4 – Медные шины

3.12. Исследование электрического поля постоянного тока в проводящей среде

ЗАДАНИЕ 1

Определить ток утечки коаксиального кабеля на 1 км длины. Пространство между жилой и оболочкой заполнено неидеальным диэлектриком, который обладает проводимостью $\gamma = 10^{-8}$ Ом⁻¹·м⁻¹. Радиус жилы r_1 , радиус оболочки $r_2 = e r_1$, где e – основание натуральных логарифмов. Напряжение между жилой и оболочкой 10 кВ.

РЕШЕНИЕ

Ток утечки:

$$I = UG.$$

Проводимость:

$$G = \frac{2\pi\gamma l}{\ln(r_2/r_1)} = \frac{2\pi \cdot 10^{-8} \cdot 10^3}{1} = 6,28 \cdot 10^{-5} \text{ Ом}.$$

Ток утечки через несовершенную изоляцию:

$$I = 10^4 \cdot 0,628 \cdot 10^{-4} = 0,628 \text{ А/км.}$$

ЗАДАНИЕ 2

Выполнить расчет поля заземления. Подвод тока к земле производится с помощью погруженных в землю заземлений. Ток стекает через заземлитель в землю и растекается по ее толще, с тем, чтобы собраться у другого электрода заземлителя. Земля выполняет роль обратного провода.

РЕШЕНИЕ

Если погрузить в землю металлическую полусферу, через которую в землю стекает ток I (рис. 3.5), и принять, что второй электрод, к которому будет подтекать ток, находится очень далеко, то плотность тока в земле на поверхности полусферы радиусом R будет равна:

$$\delta = I/2\pi R^2.$$

Напряженность поля:

$$E = \frac{\delta}{\gamma} = I/2\pi\gamma R^2.$$

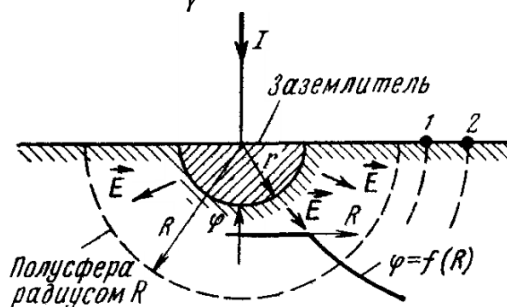


Рисунок 3.5 – Металлическая полусфера

Напряжение между двумя точками на поверхности земли (точки 1 и 2):

$$U_{12} = \int_{R_1}^{R_2} E dR = \frac{I}{2\pi\gamma} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{R^2} = -\frac{I}{2\pi\gamma} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) = \frac{I}{2\pi\gamma} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

На рисунке 3.5 изображена кривая изменения потенциала на поверхности земли. Найдем напряжение между точками 1 и 2, расположенными на расстоянии, примерно равном шагу человека ($R_1 = 22$ м, $R_2 = 23$ м). Через заземлитель стекает ток $I = 1000$ А (ток короткого замыкания), проводимость земли $\gamma = 10^{-2}$ Ом⁻¹·м⁻¹:

$$U_{12} = \frac{I}{2\pi\gamma} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1000}{2\pi \cdot 10^{-2}} \left(\frac{1}{22} - \frac{1}{23} \right) \approx 31,9 \text{ В.}$$

ЗАДАНИЕ 3

В морскую воду при $\gamma = 0,1$ Ом⁻¹·м⁻¹ вертикально опущены две металлические трубы наружным диаметром 5 см и длиной 3 м. Найти

проводимость G между трубами. Оси труб удалены на расстояние $d = 25$ м.

РЕШЕНИЕ

$$G = \frac{\pi\gamma l}{\ln(d/r)} = \frac{\pi \cdot 0,1 \cdot 3}{\ln(25/0,025)} = 0,13 \text{ См.}$$

ЗАДАНИЕ 4

Вывести формулу для определения проводимости G между плоскостями S_1 и S_2 проводящего тела проводимостью γ , имеющего форму клина (рис. 3. 6).

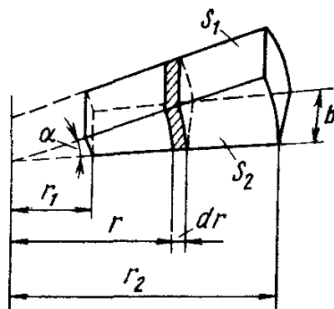


Рисунок 3.6 – Исходные данные

РЕШЕНИЕ

Проводимость заштрихованного пояска высотой αr , толщиной dr и шириной b :

$$dG = \frac{\gamma b dr}{\alpha r}.$$

Проводимость:

$$G = \frac{\gamma b}{\alpha} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\gamma b}{\alpha} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

ЗАДАНИЕ 5

В пластинке из алюминия ($\gamma_e = 3,57 \cdot 10^7 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$) создано равномерное электрическое поле напряженностью $E_0 = 0,1 \text{ В/м}$. Определить плотность тока в медном теле ($\gamma_i = 5,6 \cdot 10^7 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$), имеющем цилиндрическую форму и расположенном перпендикулярно полюсу.

РЕШЕНИЕ

Воспользуемся формулой (2.40) и аналогией, рассмотренной в п. 3.7:

$$E_i = E_0 \frac{2\gamma_e}{\gamma_e + \gamma_i} = 10^{-1} \frac{2 \cdot 3,57}{3,57 + 5,6} = 0,78 \cdot 10^{-1} \text{ В/м};$$

$$\delta_i = \gamma_i E_i = 5,6 \cdot 10^7 \cdot 0,78 \cdot 10^{-1} = 436 \cdot 10^4 \text{ А/м}^2.$$

Контрольные вопросы

1. Объясните физический смысл понятий «ток» и «плотность тока».

2. Записать закон Ома в дифференциальной форме.
3. Записать первый закон Кирхгофа в дифференциальной форме.
4. Записать выражения граничных условий на границе раздела сред с различными проводимостями.
5. Записать уравнение Лапласа для электрического поля в проводящей среде.
6. Записать уравнение Пуассона для электрического поля в проводящей среде
7. Записать закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме.
8. Как связаны углы падения и преломления с проводимостью сред на их границе?
9. Записать граничные условия на поверхности раздела двух диэлектриков.
10. Записать граничные условия на поверхности раздела двух сред с различными проводимостями.

Тема 4. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА

4.1. Основные величины магнитного поля

Магнитное поле постоянного тока – это одна из компонент электромагнитного поля, не изменяющегося во времени. Оно создается неизменными во времени токами, протекающими по проводящим телам, неподвижным в пространстве по отношению к наблюдателю. При протекании постоянных токов имеется и вторая компонента электромагнитного поля, а именно электрическое поле, но оно во времени не изменяется и потому не влияет на магнитное поле. Поэтому магнитное поле постоянного тока можно рассматривать независимо от электрического.

Магнитное поле характеризуется индукцией \vec{B} , намагниченностью \vec{J} и напряженностью магнитного поля \vec{H} . Эти три величины связаны соотношением:

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{J}) = \mu_0\mu_r\vec{H} = \mu_a\vec{H}, \quad (4.1)$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная, μ_r – относительная магнитная проницаемость; μ_a – абсолютная магнитная проницаемость.

Одним из основных проявлений магнитного поля является воздействие его на проводник с током, помещенный в это поле. Опыт показывает, что сила \vec{F} , с которой магнитное поле действует на элемент проводника длиной dl с током I , определяется следующим образом:

$$\vec{F} = I[dl\vec{B}]. \quad (4.2)$$

Эта сила направлена перпендикулярно индукции в данной точке поля и перпендикулярна элементу тока $I dl$. Если индукция \vec{B} и элемент длиной dl параллельны, то элемент тока не испытывает механического воздействия со стороны магнитного поля. Воздействие на элемент тока максимально, когда \vec{B} и $d\vec{l}$ взаимно перпендикулярны.

Из (4.2) следует, что индукция – это силовая характеристика поля, определенная при условии, что внесенный в данную точку поля элемент тока $I d\vec{l}$, расположенный перпендикулярно \vec{B} , не исказил магнитного поля, существовавшего до внесения в эту точку элемента тока. При таком расположении элемента тока индукция численно определяется так:

$$B = \lim_{dl \rightarrow 0} \frac{F}{I dl}.$$

При условии неискажения поля внесением элемента тока индукция – это сила, действующая на проводник длиной dl , равная единице, если по нему протекает ток I , равный единице. В СИ единицей индукции является тесла ($1 \text{ Тл} = 1 \text{ В} \cdot \text{с}/\text{м}^2$).

4.2. Закон полного тока в интегральной форме

Закон полного тока в интегральной форме устанавливает количественную связь между циркуляцией вектора \vec{H} по замкнутому контуру и током внутри контура – линейный интеграл от напряженности магнитного поля вдоль любого замкнутого контура равен полному току, пронизывающему замкнутый контур:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I. \quad (4.3)$$

Полный ток – это весь ток (ток проводимости и ток смещения), пронизывающий контур интегрирования.

Интегральную форму закона полного тока применяют, когда может быть использована симметрия в поле. Например, напряженность поля в некоторой точке A в поле уединенного прямого провода с током I (рис. 4.1) по закону полного тока определяют следующим образом.

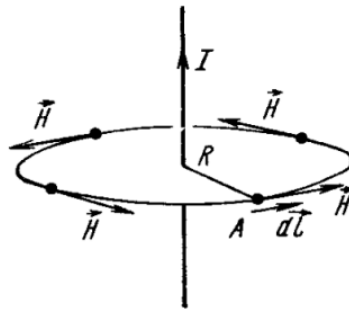


Рисунок 4.1 – Поле прямого провода

Проведем через точку A окружность радиусом R в плоскости, перпендикулярной оси провода, так, чтобы центр ее находился на этой оси. В силу симметрии напряженность поля во всех точках окружности численно одна и та же. Направление напряженности совпадает с касательной к окружности. Поэтому:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint H dl \cos 0^\circ = H \oint dl = H 2\pi R = I; \quad H = \frac{I}{2\pi R}.$$

С увеличением радиуса R напряженность магнитного поля убывает по гиперболическому закону.

Если какое-либо поле имеет сложный характер и не удастся составить замкнутый контур, все точки которого находились бы в симметричных условиях, то хотя интегральная форма записи закона полного тока справедлива и для такого контура, использовать ее для нахождения напряженности в любой точке поля так просто не удастся (H нельзя вынести из-под знака интеграла).

4.3. Дифференциальная форма закона полного тока

Соотношение (4.3) пригодно для контура любых размеров, в том числе и для весьма малого.

Выделим в какой-либо среде небольшой контур (рис. 4.2) и составим вдоль него циркуляцию вектора \vec{H} . Циркуляция напряженности поля вдоль этого контура равна току, пронизывающему обведенную площадь.

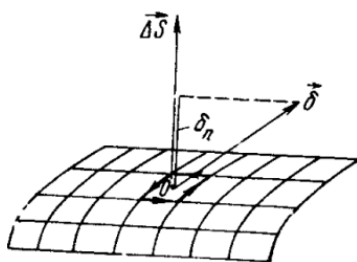


Рисунок 4.2 – Контур в среде

Если площадь мала, то можно полагать, что плотность тока $\vec{\delta}$ в пределах этой площади одинакова, и тогда ток, пронизывающий площадь, равен:

$$\Delta i = \vec{\delta} \Delta \vec{S} = \delta_n \Delta S.$$

Здесь δ_n – проекция вектора плотности тока $\vec{\delta}$ на нормаль к площади, т. е. на направление $\Delta \vec{S}$.

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \delta_n \Delta S.$$

За положительное направление нормали к площади принимают направление движения острия правого винта, головка которого вращается в направлении, принятом за положительное при обходе контура и составлении циркуляции.

Разделим обе части равенства на ΔS и устремим ΔS к нулю. Это будет соответствовать стягиванию рассматриваемой площади к нулю.

Предел полученного отношения:

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{H} d\vec{l}}{\Delta S} = \delta_n.$$

В левой части равенства находится величина, являющаяся проекцией ротора \vec{H} на направление нормали к площади ΔS . Следовательно, $rot_n \vec{H} = \delta_n$. Ротор – это функция, характеризующая поле в рассматриваемой точке в отношении способности к образованию вихрей.

Если площадь ΔS ориентировать в пространстве так, что направление нормали к ней совпадет с направлением вектора плотности тока $\vec{\delta}$ в данной точке поля, то тогда вместо равенства проекций двух векторов ($rot_n \vec{H}$ и δ_n) можно записать равенство самих векторов:

$$rot \vec{H} = \vec{\delta}. \quad (4.4)$$

Формула (4.4) и представляет собой закон полного тока в дифференциальной форме.

4.4. Раскрытие выражения закона полного тока в декартовой системе координат

Равенство двух векторов $rot \vec{H}$ и $\vec{\delta}$ означает, что равны проекции их на ось x , проекции на ось y и проекции на ось z . Проекция $rot \vec{H}$ на ось z равна $rot_z \vec{H}_{\Delta S_z \rightarrow 0} = \frac{\oint \vec{H} d\vec{l}}{\Delta S_z}$, проекция вектора $\vec{\delta}$ на ось z есть δ_z .

Проекция ротора на направление оси z :

$$rot_z \vec{H} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \delta_z.$$

Проекция ротора на направление оси x :

$$rot_x \vec{H} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \delta_x.$$

Проекция ротора на направление оси y :

$$rot_y \vec{H} = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \delta_y.$$

$$rot \vec{H} = \vec{i} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right). \quad (4.5)$$

4.5. Запись ротора в виде векторного произведения

Формально $rot \vec{H}$ можно представить в виде векторного произведения оператора пространственного дифференцирования ∇ на вектор \vec{H} :

$$\left[\left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) (\vec{i}H_x + \vec{j}H_y + \vec{k}H_z) \right] = \\ = \vec{i} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right).$$

4.6. Раскрытие $\text{rot } \vec{H}$ в виде определителя в декартовой системе

Ротор любого вектора, используемого в теории электромагнитного поля, можно представить в виде определителя третьего порядка.

$\text{rot } \vec{H}$ в декартовой системе записывают в виде следующего определителя:

$$\text{rot } \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}. \quad (4.6)$$

Непосредственное раскрытие определителя показывает, что получается выражение (4.5).

4.7. Выражение проекций ротора в цилиндрической и сферической системах координат

Выражение проекций ротора \vec{H} :

в цилиндрической системе координат:

$$\begin{cases} \text{rot}_r \vec{H} = \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial H_\alpha}{\partial z}; \\ \text{rot}_\alpha \vec{H} = \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r}; \\ \text{rot}_z \vec{H} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (rH_\alpha) - \frac{\partial H_r}{\partial \alpha} \right]. \end{cases} \quad (4.7)$$

в сферической системе координат:

$$\begin{cases} \text{rot}_R \vec{H} = \frac{1}{R \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta H_\alpha) - \frac{\partial H_\theta}{\partial \alpha} \right]; \\ \text{rot}_\theta \vec{H} = \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial H_R}{\partial \alpha} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (RH_\alpha); \\ \text{rot}_\alpha \vec{H} = \frac{1}{R} \left[\frac{\partial}{\partial R} (RH_\theta) - \frac{\partial H_R}{\partial \theta} \right]. \end{cases} \quad (4.8)$$

4.8. Принцип непрерывности магнитного потока

Магнитный поток есть поток вектора магнитной индукции через некоторую поверхность:

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}.$$

Индекс S под знаком интеграла свидетельствует о том, что интеграл взят по поверхности S . Если поверхность замкнута сама на себя (например, поверхность шара), то поток, пронизывающий замкнутую поверхность:

$$\Phi = \oint \vec{B} d\vec{S}.$$

Вошедший внутрь любого объема магнитный поток равен магнитному потоку, вышедшему из того же объема. Следовательно, алгебраическая сумма вошедшего в объем и вышедшего из объема потоков равна нулю:

$$\oint \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (4.9)$$

Выражение (4.9) – математическая запись принципа непрерывности магнитного потока.

Разделим обе части (4.9) на объем V , находящийся внутри замкнутой поверхности S , и найдем предел отношения, когда объем V стремится к нулю:

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{B} d\vec{S}}{V} = 0 \quad \text{или} \quad \text{div} \vec{B} = 0. \quad (4.10)$$

Соотношение (4.10) – дифференциальная форма принципа непрерывности магнитного потока. Оно пригодно для любой точки магнитного поля. В любой точке этого поля нет ни истока, ни стока линий вектора магнитной индукции. Линии вектора \vec{B} нигде не прерываются, они представляют собой замкнутые сами на себя линии (окружность – пример замкнутой на себя линии).

4.9. Скалярный потенциал магнитного поля

Вихревыми называют поля, в которых ротор векторной величины, описывающей поле, отличен от нуля. Так как для магнитного поля постоянного тока $\text{rot} \vec{H} = \vec{\delta}$, то во всех точках пространства, где $\vec{\delta} \neq 0$, поле вектора \vec{H} является вихревым. В областях пространства, где $\vec{\delta} = 0$, $\text{rot} \vec{H} = 0$, магнитное поле можно рассматривать как потенциальное.

Для совокупности точек, где $\vec{\delta} = 0$, $\text{rot} \vec{H} = 0$, магнитное поле можно рассматривать как потенциальное, то есть как поле, каждая точка которого имеет скалярный магнитный потенциал. Для таких областей можно принять:

$$\vec{H} = -\text{grad} \varphi_M. \quad (4.11)$$

Так как

$$\operatorname{div} \vec{B} = \operatorname{div} \mu_a \vec{H} = 0,$$

то при $\mu_a = \text{const}$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0.$$

Подставив в последнее выражение равенство (4.11), получим:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi_M = 0.$$

Значит, скалярный потенциал магнитного поля φ_M , о котором может идти речь только для областей, не занятых током, подчиняется уравнению Лапласа:

$$\nabla^2 \varphi_M = 0. \quad (4.12)$$

Разность скалярных магнитных потенциалов между точками 1 и 2 называют падением магнитного напряжения между точками 1 и 2 (рис. 4.3).

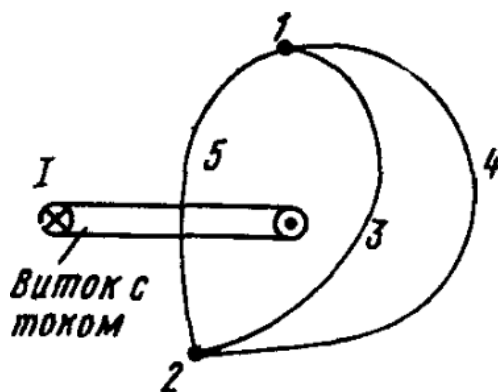


Рисунок 4.3 – Падение магнитного напряжения

Падение магнитного напряжения между точками 1 и 2 по пути 132 (рис. 4.3) равно падению магнитного напряжения между теми же точками по другому пути, например 142, в том случае, когда эти пути образуют замкнутый контур, ток внутри которого равен нулю.

Если замкнутый контур, образованный двумя путями, охватывает некоторый не равный нулю ток, то падение магнитного напряжения по первому пути не равно падению магнитного напряжения по второму пути – они будут различаться на величину тока, охваченного контуром. Последнее вытекает из закона полного тока:

$$\int_{132} \vec{H} \vec{dl} + \int_{251} \vec{H} \vec{dl} = -I \text{ или } \int_{132} \vec{H} \vec{dl} = -I + \int_{152} \vec{H} \vec{dl}.$$

$$\int_{152} \vec{H} \vec{dl} \neq \int_{132} \vec{H} \vec{dl}.$$

4.10. Граничные условия

В магнитном поле имеют место граничные условия:

$$H_{1t} = H_{2t}. \quad (4.13)$$

$$B_{1n} = B_{2n}. \quad (4.14)$$

Условие (4.13) означает, что на границе раздела двух однородных и изотропных сред, различных в магнитном отношении (различные μ_r), равны тангенциальные составляющие векторов напряженности магнитного поля.

Условие (4.14) свидетельствует о равенстве нормальных составляющих векторов магнитных индукций на границе раздела.

Для того чтобы убедиться в справедливости (4.14), на границе раздела выделим небольшой плоский параллелепипед и подсчитаем потоки вектора \vec{B} через нижнюю грань (рис. 4.4) – $B_{1n}\Delta S$ и верхнюю $B_{2n}\Delta S$. Сумма потоков равна нулю: $-B_{1n}\Delta S + B_{2n}\Delta S = 0$. Следовательно, $B_{1n} = B_{2n}$.

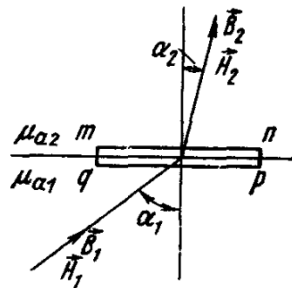


Рисунок 4.4 – Граница раздела сред

Из (4.13) и (4.14) вытекает соотношение:

$$\frac{tg\alpha_1}{tg\alpha_2} = \frac{\mu_{a1}}{\mu_{a2}}. \quad (4.15)$$

Оно дает связь между углом падения α_1 и углом преломления α_2 .

4.11. Векторный потенциал магнитного поля

Для расчета магнитных полей широко используют векторный потенциал, или вектор – потенциал магнитного поля. Его обозначают \vec{A} . Это векторная величина, плавно изменяющаяся от точки к точке, ротор которой равен магнитной индукции:

$$\vec{B} = rot\vec{A}. \quad (4.16)$$

Основанием для представления индукции в виде ротора от вектора-потенциала служит то, что дивергенция любого ротора тождественно равна нулю.

Известно, что в магнитном поле $div \vec{B} = 0$. Подстановка в это равенство $rot \vec{A}$ вместо \vec{B} дает выражение, тождественно равное нулю:

$$div rot \vec{A} = 0. \quad (4.17)$$

4.12. Уравнение Пуассона для вектора-потенциала

Умножим обе части (4.4) на магнитную проницаемость среды μ_a :

$$\mu_a rot \vec{H} = \mu_a \vec{\delta}.$$

Будем работать с полями, которые можно подразделить на отдельные области, так что магнитные проницаемости μ_a в каждой отдельной области постоянны. Если μ_a постоянна, то ее можно подвести под знак ротора:

$$rot \mu_a \vec{H} = rot \vec{B} = \mu_a \cdot \vec{\delta}. \quad (4.18)$$

В (4.18) вместо \vec{B} подставим $rot \vec{A}$, тогда получим:

$$rot rot \vec{A} = \mu_a \vec{\delta}.$$

Операция взятия ротора от ротора – это операция двойного векторного произведения и выполняется следующим образом:

$$rot rot \vec{A} = [\nabla[\nabla \vec{A}]] = grad div \vec{A} = \mu_a \vec{\delta}. \quad (4.19)$$

Так как \vec{A} есть расчетная функция, то в магнитном поле постоянного тока ее можно подчинить требованию:

$$div \vec{A} = 0. \quad (4.20)$$

Это требование означает, что линии вектора \vec{A} есть замкнутые сами на себя линии. С учетом (4.20) уравнение (4.19) приобретает вид:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_a \vec{\delta}. \quad (4.21)$$

Уравнение (4.21) представляет собой уравнение Пуассона. В отличие от уравнения Пуассона (2.23), составленного относительно скалярной величины φ , уравнение (4.21) составлено относительно векторной величины. Вместо \vec{A} в (4.21) подставим $\vec{i}A_x + \vec{j}A_y + \vec{k}A_z$ и плотность тока заменим на $\vec{i}\delta_x + \vec{j}\delta_y + \vec{k}\delta_z$:

$$\nabla^2 \vec{i}A_x + \nabla^2 \vec{j}A_y + \nabla^2 \vec{k}A_z = -\mu_a \vec{i}\delta_x - \mu_a \vec{j}\delta_y - \mu_a \vec{k}\delta_z.$$

Последнее уравнение разбивается на три уравнения, составленные относительно скалярных величин A_x, A_y, A_z :

$$\begin{aligned} \nabla^2 A_x &= -\mu_a \delta_x; \\ \nabla^2 A_y &= -\mu_a \delta_y; \\ \nabla^2 A_z &= -\mu_a \delta_z. \end{aligned}$$

4.13. Выражение магнитного потока через циркуляцию вектора-потенциала

Магнитный поток, пронизывающий какую-либо поверхность S :

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}. \quad (4.22)$$

Так как:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}, \text{ то } \Phi = \int_S \text{rot } \vec{A} d\vec{S}. \quad (4.23)$$

На основании теоремы Стокса поверхностный интеграл может быть преобразован в линейный:

$$\int_S \text{rot } \vec{A} d\vec{S} = \oint \vec{A} d\vec{l}. \quad (4.24)$$

Таким образом:

$$\Phi = \oint \vec{A} d\vec{l}. \quad (4.25)$$

Для определения магнитного потока, пронизывающего некоторую площадь (поверхность) S , необходимо подсчитать циркуляцию вектора-потенциала по замкнутому контуру, на который опирается поверхность S .

4.14. Векторный потенциал элемента тока

Определим величину и направление составляющей векторного потенциала \vec{A} , создаваемой током i , протекающим по элементу линейного проводника длиной dl . Пусть расстояние от элемента тока до произвольной точки пространства обозначено через R (рис. 4.5) ($R \gg dl$).

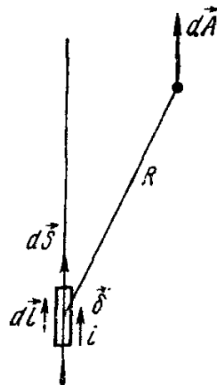


Рисунок 4.5 – Элемент линейного проводника

В соответствии с общим выражением:

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0 \delta dV}{4\pi R}, \text{ но } \delta dV = \delta d\vec{S} dl = i dl,$$

где dS – площадь поперечного сечения проводника.

Следовательно,

$$d\vec{A} = \frac{\mu_a i d\vec{l}}{4\pi R}. \quad (4.26)$$

Составляющая векторного потенциала от элемента тока имеет такое же направление в пространстве, как и ток в элементе проводника.

4.15. Взаимное соответствие электростатического (электрического) и магнитного полей

Между картинами электростатического и магнитного полей постоянного тока в областях, не занятых током, может быть соответствие двух типов.

Первый тип – когда одинаково распределение линейных зарядов в электростатическом поле и линейных токов в магнитном поле. В этом случае картина магнитного поля (сетка поля) подобна картине соответствующего электростатического поля. Отличие состоит лишь в том, что силовым линиям электростатического поля отвечают эквипотенциальные линии магнитного поля, а эквипотенциалам электростатического поля – силовые линии магнитного.

Второй тип – когда одинакова форма граничных эквипотенциальных поверхностей в электростатическом и магнитном полях постоянного тока. В этом случае картина поля оказывается совершенно одинаковой.

4.16. Задачи расчета магнитных полей

Рассмотрим некоторые типы задач расчета магнитных полей.

Первый тип – определение индуктивности какого-либо контура или взаимной индуктивности двух контуров.

Второй тип – определение сил, действующих в магнитном поле на движущийся электрон, неподвижный проводник с током, ферромагнитные массы в магнитном поле.

Третий тип – расчет поля, создаваемого заданным распределением токов в пространстве.

Четвертый тип – расчет магнитных экранов. *Магнитными экранами* называют устройства, предназначенные для ослабления магнитного поля в заданной области пространства по сравнению с маг-

нитным полем вне экрана. К магнитной экранировке прибегают, например, для защиты чувствительных приборов от влияния посторонних магнитных полей, в частности от влияния магнитного поля Земли.

Пятый тип – нахождение распределения токов в некотором объеме для получения заданной картины магнитного поля. Так, например, в морском деле большое значение имеет дегауссировка кораблей: корабль, обладая большой ферромагнитной массой, возмущает магнитное поле Земли не только в непосредственной близости от себя, но и на достаточно большом расстоянии. Соответствующие индикаторы на возмущение магнитного поля Земли могут привести в действие находящиеся поблизости самодвижущиеся мины (имеются в виду условия военного времени), и в результате корабль может оказаться подорванным. Чтобы этого не случилось, на кораблях устанавливают специальные намагничивающие обмотки, которые располагают таким образом, чтобы скомпенсировать возмущение магнитного поля Земли вблизи корабля.

4.17. Общая характеристика методов расчета и исследования магнитных полей

Методы расчета и исследования магнитных полей можно подразделить на три группы: аналитическая, графическая и экспериментальная.

Группу аналитических методов объединяет все чисто аналитического порядка приемы интегрирования уравнения Пуассона (для областей, занятых током), уравнения Лапласа (для областей, не занятых током), применение методов зеркальных и конформных отображений и др.

В силу трудностей математического характера классические аналитические методы позволяют решать относительно небольшой круг задач.

В тех случаях, когда расчет поля аналитическими методами вызывает затруднения, прибегают к графическому методу построения картины поля или к исследованию магнитного поля на модели. Графические методы построения картины поля применимы к двумерным безвихревым полям. Применяют также метод интегральных уравнений, предполагающий использование ЭВМ и значительно расширяющий круг решаемых задач.

4.18. Графическое построение картины поля и определение по ней магнитного сопротивления

На рисунке 4.6 изображены части полюса и якоря машины постоянного тока (на которых не размещены обмотки с током). Размер, перпендикулярный рисунку, принят достаточно большим – только при этом условии поле можно считать плоскопараллельным. Так как магнитная проницаемость стали много больше магнитной проницаемости воздуха, то магнитные силовые линии практически перпендикулярны поверхности полюса и якоря. Следовательно, их поверхности являются эквипотенциальными. Построение семейства силовых и эквипотенциальных линий производят «на глаз», руководствуясь следующим: силовые линии должны быть перпендикулярны поверхностям полюса и якоря и так расположены по отношению друг к другу, чтобы после проведения эквипотенциалей образовались криволинейные прямоугольники, для которых отношение средней ширины b к средней длине a было бы приблизительно одинаково для всех прямоугольников. При первом построении это, возможно, не удастся сделать достаточно хорошо, но после нескольких попыток, особенно при наличии некоторого навыка и с учетом симметрии в поле (если она имеется), удастся построить сетку поля так, что $b_1/a_1 = b_2/a_2 = b_3/a_3 = \dots$. При этом потоки во всех силовых трубках одинаковы. Это облегчает подсчет магнитного сопротивления.

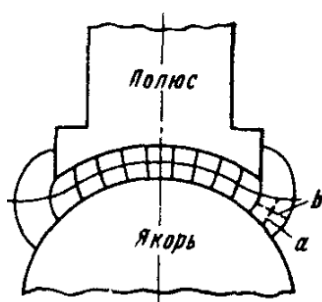


Рисунок 4.6 – Части полюса и якоря машины постоянного тока

4.19. Опытное исследование картины магнитного поля

Опытное исследование картины магнитного поля производят различными методами.

Первый метод основан на явлении электромагнитной индукции и состоит в следующем. Плоскую, очень малых размеров рамку с намотанной на нее обмоткой помещают в исследуемую область поля и

соединяют с баллистическим гальванометром. При коммутации тока в обмотках аппарата (или машины), поле в воздушном зазоре которого исследуется, или при быстром удалении рамки в область, где магнитное поле заведомо слабое (в последнем случае ток в обмотках не переключают), измеряют количество электричества, протекшее по баллистическому гальванометру, и по нему судят о среднем значении индукции в рамке. Затем рамку помещают в другую точку поля и снова определяют индукцию и т. д. Этот метод дает возможность исследовать магнитные поля практически любой конфигурации в пространстве вне ферромагнетиков.

Второй метод исследования безвихревого поля – метод моделирования полями тока в проводящей среде – основан на аналогии между полем в проводящей среде и магнитным безвихревым полем. Он состоит в следующем. Для снятия картины плоскопараллельного поля в воздушном зазоре какого-либо аппарата или машины из листа металла (например, из стального листа) изготавливают увеличенную модель исследуемого участка поля.

Третий метод – применение преобразователей Холла – кристаллических или пленочных. Они дают возможность измерять индукцию в диапазоне примерно от 1 мТл до нескольких Тл.

Качественное исследование магнитного поля часто производят с помощью стальных опилок, которые насыпают на плоский лист из неферромагнитного материала, помещают в магнитное поле и слегка по листу постукивают. Опилки расположатся вдоль силовых линий. По густоте силовых линий можно качественно судить об интенсивности магнитного поля. Вместо опилок нередко используют мельчайшие порошки окислов железа, находящихся во взвешенном состоянии в какой-либо жидкости, например керосине. Этот способ широко применяют при магнитной дефектоскопии изделий из ферромагнитных материалов.

4.20. Магнитное экранирование

Положим, что в равномерном магнитном поле напряженностью H_1 надо заэкранировать некоторую область пространства, например цилиндрическую, так, чтобы напряженность поля в ней была во много раз меньше, чем напряженность внешнего поля.

Цилиндрический экран внутренним радиусом a и наружным b имеет относительную магнитную проницаемость (рис. 4.7, а). Внут-

ренную область обозначим I, область тела экрана – II, область снаружи экрана – III.

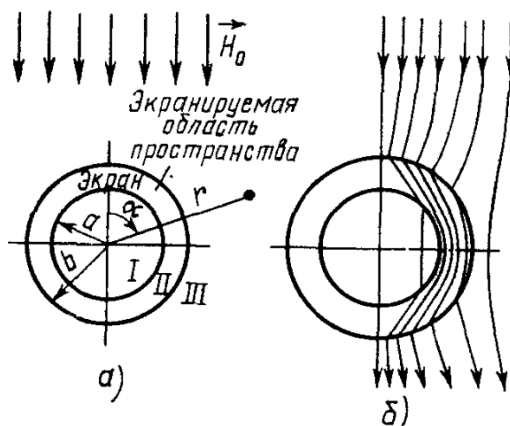


Рисунок 4.7 – Цилиндрический экран:
а – области экрана; б – картина линий магнитной индукции

В областях I и III относительная магнитная проницаемость равна единице. Так как во всех трех областях нет тока, то магнитное поле в них описывается уравнением Лапласа $\nabla^2 \varphi_M = 0$. Экран будем полагать достаточно протяженным вдоль оси z (ось z перпендикулярна чертежу), φ_M зависит только от координат r и α цилиндрической системы. Раскроем уравнение $\nabla^2 \varphi_M = 0$ в цилиндрической системе:

$$\nabla^2 \varphi_M = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial^2 \varphi_M}{\partial r^2} \right) = 0.$$

Решение его методом Фурье дает:

для первой области:

$$\varphi_M^I = \left(C_1 r + \frac{C_2}{r} \right) \cos \alpha;$$

для второй области:

$$\varphi_M^{II} = \left(C_3 r + \frac{C_4}{r} \right) \cos \alpha;$$

для третьей области:

$$\varphi_M^{III} = \left(C_5 r + \frac{C_6}{r} \right) \cos \alpha.$$

Постоянная интегрирования, с точностью до которой определяется потенциал, принята здесь равной нулю.

Для определения шести постоянных составим шесть уравнений.

1. Сопоставим φ_M^{III} с выражением «на бесконечности» $\varphi_M = H_0 r \cos \alpha$. Из сопоставления находим, что $C_5 = H_0$.

2. В первой области при $r = 0$, φ_M должно оставаться конечным. Это может быть только в том случае, если в выражении будет отсутствовать слагаемое $\frac{C_2}{r}$. Оно будет отсутствовать при $C_2 = 0$.

3. Равенство φ_M^I и φ_M^{II} при $r = a$ дает уравнение:

$$C_1 a = C_3 a + \frac{C_4}{a}.$$

Условие непрерывности потенциала эквивалентно условию равенства тангенциальных составляющих напряженности поля на границе раздела при $r = a$.

4. Равенство φ_M на границе между второй и третьей (при $r = b$) областями приводит к уравнению:

$$C_5 b + \frac{C_6}{b} = C_3 b + \frac{C_4}{b}.$$

5. Равенство нормальных составляющих индукции: $B_r = -\mu_a \frac{\partial \varphi_M}{\partial r}$ на границе между первой и второй областями (при $r = a$):

$$C_1 = \left(C_3 - \frac{C_4}{a^2} \right) \mu_{r2}.$$

6. Равенство нормальных составляющих индукции (при $r = b$) дает уравнение:

$$C_5 - \frac{C_6}{b^2} = \left(C_3 - \frac{C_4}{b^2} \right) \mu_{r2}.$$

Совместное решение всех уравнений приводит к выражению потенциала в первой области:

$$\varphi_M^I = H_0 \frac{2qb^2}{\Delta} r \cos \alpha,$$

или при переходе к декартовой системе координат (ось x направлена вверх, $x = r \cos \alpha$):

$$\varphi_M^I = H_0 \frac{2qb^2}{\Delta} x. \quad (4.27)$$

Здесь:

$$q = \frac{2\mu_{r2}}{(1+\mu_{r2})^2} \approx \frac{2}{\mu_{r2}}, \quad \Delta = b^2 - \beta^2 \alpha^2, \quad \beta = \frac{\mu_{r2}-1}{\mu_{r2}+1} \approx 1.$$

Напряженность поля в первой области (по модулю):

$$H^I = \frac{\partial \varphi_M^I}{\partial x} = H_0 \frac{2qb^2}{\Delta}. \quad (4.28)$$

Если экран разъемный (выполнен из двух половинок, разрезы по образующим цилиндра), то для лучшего экранирования в постоянном магнитном поле щель между половинками экрана следует расположить параллельно линиям внешнего магнитного поля. Если щель расположить перпендикулярно линиям внешнего магнитного поля, то экранирование ухудшится, так как щель создает значительное магнитное сопротивление для прохождения магнитного потока.

Отношение напряженности поля внутри экрана к напряженности внешнего поля H_0 :

$$\frac{H^I}{H_0} = \frac{2qb^2}{\Delta} \approx \frac{4}{\mu_{r2}} \frac{b^2}{b^2 - a^2}. \quad (4.29)$$

Формула (4.29) приближенна ($\beta = 1$ и $q = 2/\mu_{r2}$). Из нее можно заключить, что чем больше μ_{r2} и чем толще стенка экрана, тем сильнее его экранирующее действие.

На рисунке 4.7, б качественно показана картина линий магнитной индукции при наличии экрана. Из рисунка видно, что силовые линии магнитного поля в большинстве стремятся пройти по стенкам экрана и лишь небольшая часть их заходит в экранируемую область.

Коэффициентом экранирования магнитного экрана называют отношение $k = H_0/H^I$, для цилиндрического экрана $k = \frac{\mu_{r2}(b^2 - a^2)}{4b^2}$.

4.21. Применение метода зеркальных изображений

Для расчета магнитных полей, создаваемых линейными токами, протекающими вблизи стальных масс, широко применяют метод зеркальных изображений. Допустим, что в воздухе или в какой-либо другой среде (назовем ее первой средой) с магнитной проницаемостью μ_{a1} параллельно плоскости раздела сред проходит провод с током I_1 (рис. 4.8, а).

Пусть вторая среда имеет магнитную проницаемость μ_{a2} . Требуется найти напряженность поля в любой точке первой и второй сред. С этой целью в расчет вводят фиктивные или расчетные токи I_2 и I_3 . Провод с током I_2 помещают зеркально по отношению к проводу с заданным током I_1 , а провод с током I_3 помещают там, где расположен провод с током I_1 .

Два неизвестных тока I_2 и I_3 применим таким образом, чтобы удовлетворить двум граничным условиям на границе раздела сред.

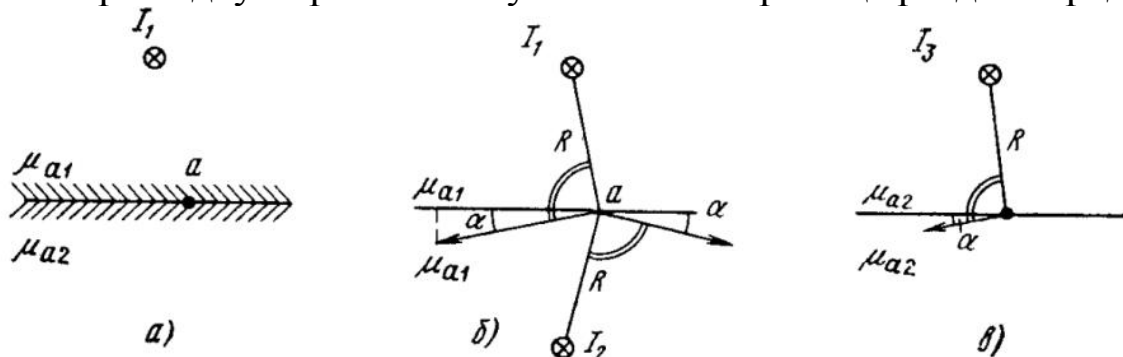


Рисунок 4.8 – Плоскость раздела сред:
а – с проводом; б – поле в верхнем полупространстве;
в – поле в нижнем полупространстве

Поле в верхнем полупространстве (там, где расположен ток I_1 – рис. 4.8, б) определится от двух токов: от заданного I_1 и фиктивного I_2 , причем и верхнее и нижнее полупространства при этом заполняет среда с магнитной проницаемостью μ_{a1} . Поле в любой точке нижнего полупространства определится током I_3 , а верхнее и нижнее пространство имеют $\mu_a = \mu_{a2}$ (рис. 4.8, в). Составим уравнения для определения токов I_2 и I_3 . Если взять произвольную точку a на границе раздела сред, то ее можно считать принадлежащей как первой, так и второй среде. Если считать ее принадлежащей первой среде, то тангенциальная составляющая напряженности поля в ней будет соответствовать левой части уравнения (4.30), а если второй среде, то правой части данного уравнения:

$$\left(\frac{I_1}{2\pi r} - \frac{I_2}{2\pi r}\right)\cos\alpha = \frac{I_3}{2\pi r}\cos\alpha. \quad (4.30)$$

Отсюда получим первую связь между токами: $I_1 - I_2 = I_3$.

Для получения второй связи составим уравнение, выражающее собой равенство нормальных составляющих магнитной индукции в произвольной точке a на границе раздела:

$$\left(\frac{I_2}{2\pi r} + \frac{I_1}{2\pi r}\right)\mu_{a1}\sin\alpha = \frac{I_3}{2\pi r}\mu_{a2}\sin\alpha, \quad (4.31)$$

$$I_1 + I_2 = I_3 \frac{\mu_{a2}}{\mu_{a1}}.$$

Совместное решение дает:

$$I_2 = \frac{\mu_{a2} - \mu_{a1}}{\mu_{a1} + \mu_{a2}} I_1; \quad I_3 = \frac{2\mu_{a1}}{\mu_{a1} + \mu_{a2}} I_1.$$

4.22. Закон Био – Савара – Лапласа

Согласно закону Био – Савара – Лапласа, при отсутствии ферромагнитных сред отрезок линейного провода \vec{dl} , по которому течет ток I в направлении \vec{dl} , в точке, удаленной на расстояние R от элемента тока, создает магнитную индукцию, определяемую следующим образом:

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[\vec{dl} \vec{R}_0]}{R^2}, \quad (4.32)$$

где \vec{R}_0 – единичный вектор, проведенный от \vec{dl} к точке, в которой подсчитываем магнитную индукцию (рис. 4.9).

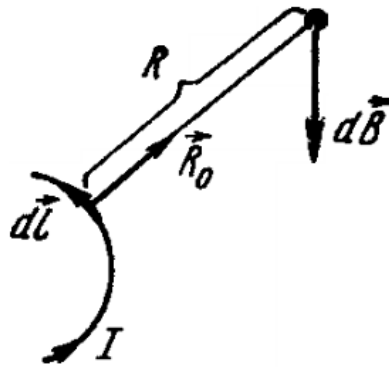


Рисунок 4.9 – Отрезок линейного провода и магнитная индукция

Результирующая индукция в этой точке равна:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{[\vec{dl} \vec{R}_0]}{R^2}.$$

В этой формуле интегрирование производят по всей длине замкнутого контура с током.

Формула (4.32) следует из (4.26), если учесть, что $\vec{dB} = \text{rot} \vec{dA}$.

Если в формуле (4.32) ток I как постоянную величину ввести в векторное произведение и заменить $I \vec{dl}$ на $\vec{\delta} dV$, где dV – элемент объема проводника с плотностью тока $\vec{\delta}$, то:

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{\delta} \vec{R}_0] dV}{R^2}; \quad (4.33)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{[\vec{\delta} \vec{R}_0]}{R^2} dV. \quad (4.34)$$

Формула (4.33) – вторая форма записи закона. В формуле (4.32) интегрирование производят по объему, занятому током.

Обратим внимание на два положения.

1. Структура формул (4.32) и (4.33) сходна со структурой формулы для напряженности электрического поля точечного заряда, полученной в параграфе 2.4 из закона Кулона.

2. Полезно сопоставить закон полного тока с законом Био – Савара – Лапласа. Оба эти закона позволяют определять магнитную индукцию, создаваемую током. Однако закон полного тока применим только к замкнутым контурам с токами, тогда как закон Био – Савара – Лапласа применим не только к замкнутым контурам стоками, но и к отрезкам проводников с токами (к элементам тока). Поэтому закон Био – Савара – Лапласа более универсален.

4.23. Исследование магнитного поля постоянного тока

ЗАДАНИЕ 1

$\mu_{r2} = 10^4$; $a=5$ см; $b=5,5$ см. Найти отношение $\frac{H^I}{H_0}$.

РЕШЕНИЕ

$$\frac{H^I}{H_0} = \frac{4}{\mu_{r2}} \frac{b^2}{b^2 - a^2} = \frac{4}{10^4} \frac{5,5^2}{5,5^2 - 5^2} = 0,0023,$$

то есть напряженность поля внутри экрана составляет всего 0,23 % от напряженности H_0 и $k=434$.

ЗАДАНИЕ 2

Найти напряженности поля в точках m и n (рис. 4.10, а). Геометрические размеры в сантиметрах даны на рисунке. $I_1 = 10$ А.

Магнитные проницаемости: $\mu_{r1} = 1$; $\mu_{r2} = 999$.

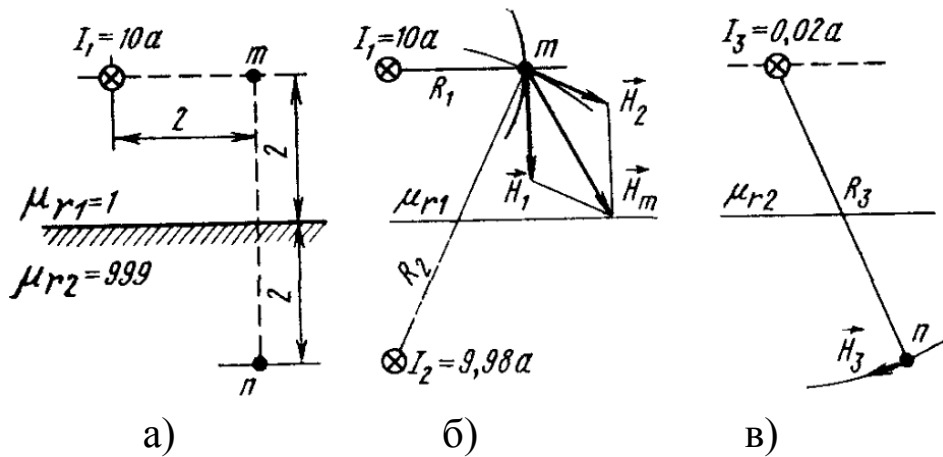


Рисунок 4.10 – Исходные данные

РЕШЕНИЕ

$$I_2 = \frac{\mu_{r2} - \mu_{r1}}{\mu_{r1} + \mu_{r2}} I_1 = \frac{999 - 1}{999 + 1} 10 = 9,98 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{2\mu_{r1}}{\mu_{r1} + \mu_{r2}} I_1 = \frac{2}{999 + 1} 10 = 0,02 \text{ А}.$$

Для определения напряженности поля в точке m , расположенной в том же полупространстве (среде) что и ток I_1 , применим рисунок 4.10, б:

$$\vec{H}_m = \vec{H}_1 + \vec{H}_2.$$

По закону полного тока:

$$H_1 = \frac{I_1}{2\pi R_1} = \frac{10}{2\pi \cdot 0,02} = 79,5 \text{ А/м};$$

$$H_2 = \frac{I_2}{2\pi R_2} = \frac{9,98}{2\pi \cdot 4,48 \cdot 10^{-2}} = 35,4 \text{ А/м}.$$

Графическим путем находим $H_1 = 101 \text{ А/м}$. Напряженность поля в точке n (рис. 4.9, в):

$$H_3 = H_n = \frac{I_3}{2\pi R_3} = \frac{0,02}{2\pi \cdot 4,48 \cdot 10^{-2}} = 0,0715 \text{ А/м}.$$

ЗАДАНИЕ 3

Определить емкость и индуктивность на 1 м длины кабельной двухпроводной линии с цилиндрической проводящей броней. Картина поля в сечении кабельной линии дана на рисунке 4.10 ($\epsilon_r = 2,5$).

РЕШЕНИЕ

Изображенная на рисунке 4.11 картина поля справедлива для электрического и магнитного полей. Причем силовым линиям электрического поля соответствуют эквипотенциали магнитного поля.

Число силовых трубок электрического поля $m = 10,5 \cdot 2 = 21$. Число ячеек в трубке $n = 10$ (пять от провода до брони, пять от брони до провода). Отношение $b/a \approx 1$. Число силовых трубок магнитного поля $t = 10$, число ячеек в трубке $n = 21$. Найдем емкость на 1 м длины кабеля ($l=1\text{м}$):

$$C = \frac{\epsilon_r l b m}{a n} = \frac{2,5 \cdot 8,86 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 21}{10} = 46 \cdot 10^{-12} \text{ Ф}.$$

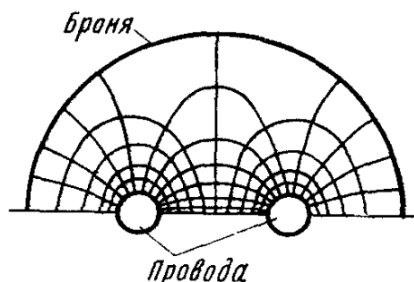


Рисунок 4.11 – Картина поля

По определению, индуктивность L равна отношению потокосцепления к создающему его току $L = \psi/I$. В данной задаче имеется всего один виток (прямой и обратный провода). Поэтому потокосцепление ψ равно потоку Φ между проводами (индуктивностью, обусловленной потокосцеплением в теле проводов, в силу его малости пренебрегаем).

По закону полного тока ток I может быть заменен на $\oint \vec{H} \vec{dl}$ по замкнутому контуру, окружающему провод. В свою очередь $\oint \vec{H} \vec{dl}$ представляет собой падение магнитного напряжения U_M по этому контуру. Следовательно:

$$L = \psi/I = \frac{\Phi}{\oint \vec{H} \vec{dl}} = \frac{\Phi}{U_M} = G_M.$$

Таким образом, индуктивность L в данном примере равна магнитной проводимости G_M . Для определения последней воспользуемся формулой:

$$G_M = L = \frac{\mu_a l b m}{a n} = \frac{1,256 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 10}{21} = 6 \cdot 10^{-7} \text{ Гн.}$$

ЗАДАНИЕ 4

Найти магнитный поток, пронизывающий биметаллический провод на длине $l = 1$ м.

РЕШЕНИЕ

Разобьем путь интегрирования $\Phi = \oint \vec{A} \vec{dl}$ на четыре участка: первый участок от точки 1 до точки 2 (рис. 4.12); второй – от 2 до 3; третий – от 3 до 4, четвертый – от 4 до 1.

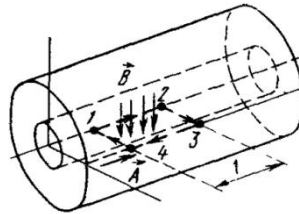


Рисунок 4.12 – Биметаллический провод

В соответствии с этим:

$$\oint \vec{A} \vec{dl} = \int_1^2 \vec{A} \vec{dl} + \int_2^3 \vec{A} \vec{dl} + \int_3^4 \vec{A} \vec{dl} + \int_4^1 \vec{A} \vec{dl}.$$

$$\int_1^2 \vec{A} \vec{dl} = 0, \text{ так как значение } A \text{ при } r=0 \text{ равно нулю.}$$

На втором и четвертом участках $\int \vec{A} \vec{dl}$ также равен нулю, так как угол между \vec{A} и \vec{dl} равен $\pm 90^\circ$, а $\cos 90^\circ = 0$. $\int \vec{A} \vec{dl}$ не равен нулю только на третьем участке, где

$$A_{r=r_2} = -\frac{\mu_a \delta_2 r_2^2}{4} + C_3 \ln r_2 + C_4,$$

а угол между A и \vec{dl} равен 180° ($\cos 180^\circ = -1$). Поэтому:

$$\Phi = \int_3^4 \vec{A}_{r=r_2} \vec{dl} = -A_{r=r_2} \cdot l.$$

ЗАДАНИЕ 5

В воздухе создано равномерное магнитное поле напряженностью $H_0 = 240$ А/м. В это поле поместили ферромагнитный шарик, относительная магнитная проницаемость которого $\mu_{ri}=20$. Найти индукцию в шарике.

РЕШЕНИЕ

Воспользуемся аналогией между электростатическим и безвихревым магнитным полями. В формуле (2.40) заменим E_0 на H_0 и ϵ_a на μ_a . Получим:

$$H_i = H_0 \frac{3\mu_{re}}{2\mu_{re} + \mu_{ri}} = 240 \cdot \frac{3 \cdot 1}{2 + 20} 32,7 \text{ А/м.}$$

Индукция в шарике:

$$= 20 \cdot 32,7 \cdot 1,256 \cdot 10^{-6} = 8,21 \cdot 10^{-4} \text{ Т.}$$

ЗАДАНИЕ 6

Вдоль трубы с внутренним радиусом R_1 и наружным R_2 (рис. 4.13) протекает постоянный ток I . Вывести формулы для определения напряженности поля H внутри трубы, в теле ее и снаружи трубы.

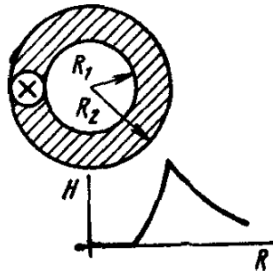


Рисунок 4.13 – Исходные данные

РЕШЕНИЕ

Напряженность поля в любой из указанных областей найдем по закону полного тока. Если провести окружность радиусом $R < R_1$ с центром на оси трубы, то эта окружность не охватит тока. Поэтому при $R \leq R_1$, $H = 0$, то есть во внутренней полости трубы магнитное поле отсутствует. Плотность тока в трубе:

$$\delta = \frac{I}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}.$$

Окружность радиусом $R_1 \leq R \leq R_2$ охватывает ток $\delta\pi$. Поэтому в этом интервале изменений R :

$$H = \frac{I(R^2 - R_1^2)}{2\pi R(R_2^2 - R_1^2)}.$$

Снаружи трубы при $R \geq R_2$ напряженность поля убывает по гиперболическому закону $H = I/2\pi R$. График $H = f(R)$ изображен на рисунке 4.13.

ЗАДАНИЕ 7

С помощью формулы (4.34) определить магнитную индукцию в точке m , создаваемую отрезком линейного провода с током I (рис. 4.14). Точка m удалена от провода на расстояние b .

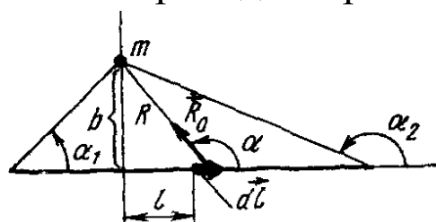


Рисунок 4.14 – Исходные данные

РЕШЕНИЕ

Угол между \vec{dl} и \vec{R}_0 обозначим α . Из геометрических соображений имеем:

$$R = \frac{b}{\sin\alpha}, l = -b \operatorname{ctg}\alpha.$$

Следовательно:

$$dl = \frac{bd\alpha}{\sin^2\alpha}; \quad |[\vec{dl} \vec{R}_0]| = dl \cdot 1 \cdot \sin\alpha;$$

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \sin\alpha d\alpha; \quad B = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin\alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2).$$

При выбранном направлении тока вектор \vec{B} направлен к читателю.

Если провод будет бесконечно длинный, то $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 180^\circ$, а $\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2 = 2$ и $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}$, что совпадает с результатом, получаемым по закону полного тока.

Индукция в центре квадратного витка с током I и стороной a в четыре раза больше, чем от одной стороны и равна:

$$B = \frac{\mu_0 I / 2\sqrt{2}}{\pi a}.$$

В центре треугольного витка:

$$B = \frac{9 \mu_0 I}{2 \pi a}.$$

ЗАДАНИЕ 8

Вывести формулу для определения напряженности магнитного поля на оси кругового витка с током I (рис. 4.15). Радиус витка принять равным a .

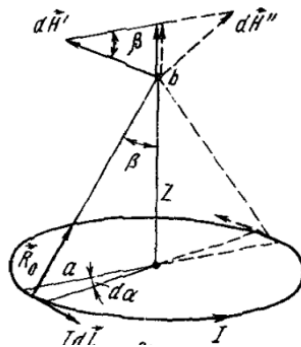


Рисунок 4.15 – Исходные данные

РЕШЕНИЕ

Выделим элемент тока $I \vec{dl}$. Напряженность поля \vec{dH} , создаваемая этим элементом в точке b на оси витка, находящейся на расстоянии z от плоскости витка, равна:

$$H = \frac{I}{4\pi} \frac{[\vec{dl} \vec{R}_0]}{(a^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Напряженность \vec{dH} перпендикулярна \vec{dl} и R_0 . От диаметрально противоположного элемента тока $I \vec{dl}$ в той же точке b будет напряженность \vec{dH}'' . По модулю \vec{dH}' и \vec{dH}'' одинаковы.

При геометрическом суммировании \vec{dH}' и \vec{dH}'' будет получен вектор, направленный по оси витка:

$$H = \int_0^{2\pi} \frac{I a \sin \beta \, d\alpha}{4\pi(a^2+z^2)} = \frac{Ia}{4\pi(a^2+z^2)} \cdot \frac{a}{(a^2+z^2)^{1/2}} \int_0^{2\pi} d\alpha = \frac{Ia^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}}.$$

ЗАДАНИЕ 9

Используя решение задания 8, вывести формулу для определения индукции на оси цилиндрической катушки с током I (рис. 4.16). Высота катушки h , средний радиус ее a , число витков w .

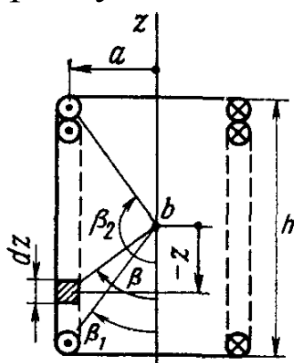


Рисунок 4.16 – Исходные данные

РЕШЕНИЕ

В произвольной точке b на оси от элемента тока dz :

$$dB = \frac{\mu_0 I w}{h} dz \frac{a^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}};$$

$$\cos \beta = \frac{-z}{(a^2+z^2)^{1/2}};$$

$$-d(\cos \beta) = \frac{a^2 dz}{(a^2+z^2)^{3/2}};$$

$$dB = -\frac{\mu_0 I w}{2h} d(\cos \beta);$$

$$B = -\frac{\mu_0 I w}{2h} \int_{\beta_1}^{\beta_2} d(\cos \beta) = \frac{\mu_0 I w}{2h} (\cos \beta_1 - \cos \beta_2).$$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение магнитного поля постоянного тока.
2. Записать выражение для магнитной индукции. Размерность магнитной индукции.
3. Записать выражение для механической силы в магнитном поле.
4. Записать интегральную форму закона полного тока.

5. Записать дифференциальную форму закона полного тока.
6. Раскрыть выражение закона полного тока в декартовой системе координат.
7. Раскрыть выражение закона полного тока в цилиндрической системе координат.
8. Раскрыть выражение закона полного тока в сферической системе координат.
9. Записать $\operatorname{rot} \mathbf{H}$ в виде определителя в декартовой системе координат.
10. Охарактеризовать принцип непрерывности магнитного потока.
11. Дать определение вихревого и потенциального магнитного поля.
12. Записать выражение для скалярного магнитного потенциала.
13. Записать уравнение Лапласа для скалярного магнитного потенциала.
14. Записать выражение магнитной индукции через вектор-потенциал магнитного поля.
15. Записать уравнение Пуассона для вектора-потенциала магнитного поля.
16. Записать выражение магнитного потока через циркуляцию вектора-потенциала.
17. В чем сущность магнитного экранирования?
18. Записать выражение коэффициента магнитного экранирования для цилиндрического экрана.
19. Записать выражение закона Био – Савара – Лапласа.

Тема 5. ПЕРЕМЕННОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

5.1. Определение переменного электромагнитного поля

Под переменным электромагнитным полем понимают совокупность изменяющихся во времени и взаимно связанных и обуславливающих друг друга электрического и магнитного полей. Оно определяется двумя векторными величинами – напряженностью электрического поля \vec{E} и напряженностью магнитного поля \vec{H} .

Переменное электромагнитное поле является одним из видов материи. Оно обладает энергией, массой, количеством движения, может превращаться в другие виды материи и самостоятельно существовать в виде электромагнитных волн. Любые возмущения поля в диэлектрике с огромной скоростью, для вакуума равной примерно $3 \cdot 10^8$ м/с, передаются на большие расстояния.

При исследовании процессов в переменном электромагнитном поле пользуются уравнениями Максвелла. Систему уравнений Максвелла образуют четыре уравнения:

1) уравнение (5.1), выражающее связь между ротором напряженности магнитного поля и плотностью тока в той же точке поля, – первое уравнение Максвелла;

2) уравнение (5.3), которое определяет связь между ротором напряженности электрического поля и скоростью изменения магнитного поля в той же точке поля, – второе уравнение Максвелла;

3) уравнение $div \vec{B} = 0$, выражающее принцип непрерывности магнитного потока (оно следует из (5.4) после взятия от обеих частей его дивергенции);

4) уравнение $div \vec{E} = \rho_{своб} / \epsilon_a$, выражающее связь между источником напряженности электрического поля и плотностью свободных зарядов в той же точке поля.

Эту систему дополняют уравнением непрерывности (5.3) и теоремой Умова – Пойнтинга (5.6).

5.2. Первое уравнение Максвелла

Первое уравнение Максвелла записывают следующим образом:

$$rot \vec{H} = \vec{\delta} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (5.1)$$

В правой части его имеются две плотности тока: плотность тока проводимости $\vec{\delta}$ и плотность тока электрического смещения $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$. Ток электрического смещения возникает в любом диэлектрике, в том числе и в вакууме, при изменении напряженности электрического поля во времени. Ток смещения порождает магнитное поле так же, как и ток проводимости. Природа тока проводимости и тока смещения неодинакова, оба они обладают одним и тем же свойством – вызывать магнитное поле.

Смысл первого уравнения Максвелла состоит в том, что всякое изменение электрического смещения во времени $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ в некоторой точке поля на таких же правах, как и ток проводимости, вызывает в этой точке вихрь магнитного поля $rot \vec{H}$, то есть вызывает вихревое магнитное поле. Если среда однородна и изотропна, то $\epsilon_a = const$, и тогда:

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

При зарядке конденсатора через него протекает ток. Этот ток протекает через диэлектрик и является током смещения. Если, например, взять незаряженный плоский воздушный конденсатор и подключить его к источнику ЭДС напряжением U через сопротивление R , то напряжение на обкладках конденсатора будет расти по закону $u_c = \left(1 - e^{\frac{-t}{RC}}\right)$. Так как напряженность электрического поля в плоском конденсаторе равна:

$$E = u_c/d,$$

где d – расстояние между обкладками, то:

$$E = \frac{U}{d} \left(1 - e^{\frac{-t}{RC}}\right).$$

Емкость плоского конденсатора:

$$C = \epsilon_a S/d.$$

Ток смещения, протекающий через единицу поверхности сечения диэлектрика, взятой перпендикулярно силовым линиям:

$$\epsilon_a \frac{\partial E}{\partial t} = \epsilon_a \frac{U}{d} \cdot e^{\frac{-t}{RC}} \frac{1}{RC} = \frac{U}{RS} \cdot e^{\frac{-t}{RC}}.$$

Через поверхность S ток смещения в 5 раз больше, то есть он равен току проводимости, протекающему по проводникам, соединяющим конденсатор с источником ЭДС.

Первое уравнение Максвелла представляет собой закон полного тока в дифференциальной форме.

5.3. Уравнение непрерывности

Линии полного тока $(\vec{\delta} + \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$ являются непрерывными. Физически это означает, что на границе проводящей среды и диэлектрика ток проводимости переходит в ток смещения.

Можно математически сформулировать **принцип непрерывности (замкнутости) линий полного тока**. С этой целью от обеих частей уравнения (5.1) возьмем дивергенцию. Дивергенция от ротора тождественно равна нулю. Поэтому:

$$\operatorname{div} \left(\vec{\delta} + \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0. \quad (5.2)$$

Уравнение (5.2) можно записать в другой форме:

$$\operatorname{div} \vec{\delta} = - \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{D}.$$

Но $\operatorname{div} \vec{D} = \rho_{\text{своб}}$. Поэтому:

$$\operatorname{div} \delta = - \frac{\partial \rho_{\text{своб}}}{\partial t}. \quad (5.3)$$

Уравнение непрерывности (5.3) называют также **законом сохранения заряда**. Этот закон означает, что электрический заряд не уничтожаем, он может только перемещаться из одного места в другое.

5.4. Второе уравнение Максвелла

Второе уравнение Максвелла записывают следующим образом:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (5.4)$$

Физический смысл его состоит в том, что всякое изменение магнитного поля во времени $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ в какой-либо точке поля возбуждает вихрь или ротор электрического поля в той же точке поля, то есть вызывает вихревое электрическое поле.

Второе уравнение Максвелла представляет собой дифференциальную форму закона электромагнитной индукции.

Как в первом, так и во втором уравнении Максвелла участвуют частные (неполные) производные во времени. Объясняется это тем, что уравнения Максвелла записаны для таких тел и контуров, которые неподвижны по отношению к выбранной системе координат.

5.5. Уравнения Максвелла в комплексной форме записи

Уравнения (5.1) и (5.4) записаны для мгновенных значений. Если H и E изменяются во времени синусоидально, то можно воспользоваться символическим методом и записать эти уравнения в иной форме.

Пусть $H = H_m \sin(\omega t + \psi_E)$ и $E = E_m \sin(\omega t + \psi_E)$.

Можно записать $H = I_m H_m e^{j\omega t}$ (I_m – мнимая часть) или, условно, $H \rightarrow \dot{H}_m e^{j\omega t}$, где комплексная амплитуда $\dot{H}_m = H_m e^{j\omega t}$. $\dot{E}_m = E_m e^{j\omega t}$ (\rightarrow значок соответствия).

Так как напряженности E и H , кроме того, что они меняются во времени по синусоидальному закону, являются функциями векторными, то есть определенным образом ориентированными в пространстве векторами, то над ними ставят стрелку и точку: $\dot{\vec{E}}_m$ и $\dot{\vec{H}}_m$.

Стрелка означает, что речь идет о векторе в пространстве, точка – о том, что проекции этого вектора на любую из координатных осей во времени изменяются синусоидально. Тогда δ можно заменить на $\gamma \vec{E} e^{j\omega t}$; $\varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ на $j\omega \varepsilon_a \vec{E} e^{j\omega t} \left(\frac{\partial}{\partial t} \dot{\vec{E}}_m e^{j\omega t} \right)$; $rot \vec{H}$ на $rot \left(\dot{\vec{H}} e^{j\omega t} \right) = e^{j\omega t} rot \dot{\vec{H}}$.

Первое уравнение Максвелла запишем так:

$$e^{j\omega t} rot \dot{\vec{H}} = (\gamma \dot{\vec{E}} + j\omega \varepsilon_a \dot{\vec{E}}) e^{j\omega t}.$$

После сокращения на $e^{j\omega t}$ получим:

$$rot \dot{\vec{H}} = \gamma \dot{\vec{E}} + j\omega \varepsilon_a \dot{\vec{E}}. \quad (5.5)$$

Аналогично второе уравнение Максвелла в комплексной форме:

$$rot \dot{\vec{E}} = -j\omega \mu_a \dot{\vec{H}}. \quad (5.6)$$

5.6. Теорема Умова – Пойнтинга для мгновенных значений

Теорема Умова – Пойнтинга описывает энергетические соотношения в поле.

Теорема Умова – Пойнтинга имеет две формы записи: первая – для мгновенных значений, вторая – комплексная форма для синусоидально изменяющихся величин.

Энергия электрического поля в единице объема равна $\varepsilon_a E^2/2$. Энергия магнитного поля в единице объема – $\mu_a H^2/2$. Энергия в объеме dV равна:

$$(\varepsilon_a E^2/2) + \mu_a H^2/2)dV.$$

Чтобы образовать выражение, в которое вошла бы полная энергия в объеме dV , умножим (5.1) на $\vec{E}dV$, а (5.4) на $\vec{H}dV$. Получим:

$$\vec{E}rot\vec{H}dV = \left(\gamma\vec{E}\vec{E} + \varepsilon_a\vec{E}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \right) dV = \left(\gamma E^2 + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\varepsilon_a E^2}{2} \right) dV. \quad (5.7)$$

$$\vec{H}rot\vec{E}dV = \left(-\mu_a\vec{H}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \right) dV = \left(-\frac{\partial}{\partial t} \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV. \quad (5.8)$$

Из (5.7) вычтем (5.8):

$$(\vec{E}rot\vec{H} - \vec{H}rot\vec{E})dV = \left\{ \gamma E^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) \right\} dV. \quad (5.9)$$

Так как $div[\vec{E}\vec{H}] = \vec{H}rot\vec{E} - \vec{E}rot\vec{H}$, то левая часть (5.9) есть $-div[\vec{E}\vec{H}]dV$. Следовательно:

$$-div[\vec{E}\vec{H}]dV = \left\{ \gamma E^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) \right\} dV.$$

Для сокращения записи обозначим векторное произведение \vec{E} на \vec{H} через $\vec{\Pi}$, то есть примем, что:

$$\vec{\Pi} = [\vec{E}\vec{H}],$$

$\vec{\Pi}$ это *вектор Пойнтинга*; размерность его равна ВА/м².

Таким образом, вектор Пойнтинга имеет размерность мощности (или энергии в единицу времени), отнесенной к единице поверхности, и направление его совпадает с направлением движения острия правого винта, если головку последнего вращать по кратчайшему направлению от \vec{E} к \vec{H} .

Следовательно:

$$-div\vec{\Pi}dV = \left\{ \gamma E^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) \right\} dV. \quad (5.10)$$

Распространим (5.10) на некоторый объем конечных размеров. С этой целью проинтегрируем (5.10) по объему V :

$$-\int_V div\vec{\Pi}dV = \int_V \gamma E^2 dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV.$$

Подобно тому, как поверхностный интеграл по теореме Стокса преобразовывается в линейный (см. 4.13): $\int_S rot\vec{A}d\vec{S} = \oint \vec{A}d\vec{l}$, объемный интеграл в свою очередь может быть преобразован в поверхностный. Это преобразование осуществляют с помощью теоремы Остроградского – Гаусса $\int_V div\vec{\Pi}dV = \oint_S \vec{\Pi}dS$.

Теорему Умова – Пойнтинга для мгновенных значений записывают следующим образом:

$$-\oint_S \vec{\Pi}dS = \int_V \gamma E^2 dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV. \quad (5.11)$$

Левая часть (5.11) представляет собой поток вектора Пойнтинга (направленный внутрь объема) сквозь любую замкнутую поверхность S , ограничивающую некоторый объем V .

В соответствии с уравнением Джоуля – Ленца в дифференциальной форме γE^2 – энергия, выделяющаяся в виде теплоты в единице объема в единицу времени.

Поэтому $\int_V \gamma E^2 dV$ есть энергия, выделяющаяся в виде теплоты в единицу времени в объеме V ; $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right)$ есть скорость изменения запаса электромагнитной энергии в единице объема.

Но скорость изменения электромагнитной энергии есть мощность. Следовательно, поток вектора Пойнтинга сквозь любую замкнутую поверхность, ограничивающую объем V , равен мощности, выделяющейся в объеме V в виде теплоты, и мощности, идущей на приращение энергии электромагнитного поля.

Теорему Умова – Пойнтинга следует трактовать как уравнение энергетического баланса, левая часть (5.11) есть мощность или энергия в единицу времени, доставляемая в виде потока вектора Пойнтинга внутрь некоторого объема; правая часть (5.11) есть энергия, расходуемая в единицу времени внутри объема.

Соотношение (5.11) было получено в предположении, что среда внутри объема V однородна и изотропна, а также в предположении, что отсутствует отраженная волна и внутри объема нет источников электродвижущей силы.

Если поле не изменяется во времени, то:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) = 0 \text{ и } -\oint \vec{\Pi} d\vec{S} = \int_V \gamma E^2 dV.$$

Формула (5.11) учитывает возможность прохождения потока вектора $\vec{\Pi}$ транзитом через объем V . Электромагнитная энергия от места ее генерирования передается к месту потребления по диэлектрику (провода же в линиях передачи выполняют двойную роль: они являются каналами, по которым проходит ток, и организаторами структуры поля в диэлектрике).

Покажем справедливость этого утверждения на простейшем примере. Пусть энергия постоянного тока передается по коаксиальному кабелю (рис. 5.1). Радиус жилы r_1 , внутренний радиус оболочки r_2 . Примем проводимость материала жилы и оболочки настолько большой (теоретически бесконечной большой), что напряженности

поля в жиле и оболочке стремятся к нулю. Пространство между жилой и оболочкой заполнено диэлектриком.

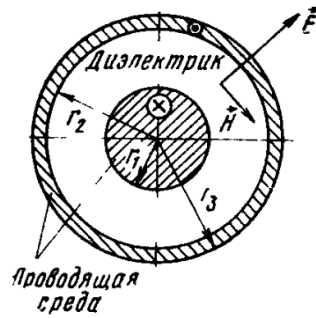


Рисунок 5.1 – Модель коаксиального кабеля

Убедимся, что энергия, передаваемая приемнику в единицу времени, равная UI , действительно канализируется по диэлектрику.

С этой целью подсчитаем поток вектора Пойнтинга через поперечное сечение диэлектрика, в рассматриваемом примере представляющее собой кольцо с внутренним радиусом r_1 и наружным r_2 . Напряженность магнитного поля в диэлектрике по закону полного тока:

$$H = \frac{I}{2\pi r}.$$

Напряженность электрического поля в диэлектрике при постоянном токе определяется так же, как и в условиях электростатики:

$$E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_a r l} = \frac{U}{r \ln \frac{r_2}{r_1}},$$

где Q – полный заряд жилы на длине l ; U – напряжение между жилой и оболочкой.

Следовательно, в некоторой точке диэлектрика, расположенной на расстоянии r от оси $r_1 \leq r \leq r_2$:

$$\Pi = EH = \frac{UI}{2\pi r^2 \ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Поток вектора Пойнтинга через кольцо с радиусами r_1 и r_2 :

$$\int \vec{\Pi} d\vec{S} = \int_{r_1}^{r_2} \Pi 2\pi r dr = 2\pi \frac{UI}{2\pi \ln \frac{r_2}{r_1}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = UI.$$

Таким образом, вся поступающая к приемнику энергия передается по диэлектрику. По жиле и оболочке энергия к приемнику не передается. Если учесть, что γ конечна и напряженность электрического поля в жиле и оболочке направлена по току и не равна нулю, то нетрудно убедиться в наличии потока вектора Пойнтинга через боковую поверхность провода внутрь провода, то есть провода сами потребляют из диэлектрика энергию на покрытие тепловых потерь.

5.7. Теорема Умова – Пойнтинга в комплексной форме записи

Рассмотрим вопрос о полной мощности в цепи переменного тока. Полная мощность:

$$\tilde{S} = \dot{U}I^* = P + jQ.$$

Пусть цепь переменного тока содержит последовательно соединенные активные сопротивления C , индуктивность L и емкость C . Тогда реактивная мощность:

$$Q = I^2 X = I^2 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = \omega (I^2 L - I^2 \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2 C) = 2\omega (\omega_M - \omega_3).$$

$$\omega_M = LI^2/2; \omega_3 = CU_C^2/2,$$

где U_C – напряжение на конденсаторе.

Таким образом, реактивная мощность Q равна разности между магнитной ω_M и электрической ω_3 энергиями цепи, умноженной на 2ω . Подобно тому, как в цепи переменного тока для вычисления полной мощности \tilde{S} надо умножить комплекс напряжения \dot{U} на сопряженный комплекс тока I^* , вводится комплексный вектор Пойнтинга $\vec{\Pi} = [\vec{E}\vec{H}]$. Вместо $-\oint \vec{\Pi} d\vec{S}$ теперь будет:

$$-\oint \vec{\Pi} d\vec{S} = - \int_V \text{div} \vec{\Pi} dV = \int_V (\dot{\vec{E}} \text{rot} \vec{H}^* - \text{rot} \dot{\vec{E}}) dV.$$

В соответствии с (5.5) и (5.6):

$$\text{rot} \dot{\vec{H}} = \gamma \dot{\vec{E}} + j\omega \epsilon_a \dot{\vec{E}}, \quad \text{rot} \dot{\vec{E}} = -j\omega \mu_a \dot{\vec{H}}.$$

$$\text{rot} \vec{H}^* = \gamma \vec{E}^* - j\omega \epsilon_a \vec{H}^*$$

$$\dot{\vec{E}} \text{rot} \vec{H}^* - \vec{H}^* \text{rot} \dot{\vec{E}} = \gamma \dot{\vec{E}} \vec{E}^* - j\omega \epsilon_a \dot{\vec{E}} + j\omega \mu_a \dot{\vec{H}} \vec{H}^* =$$

$$= \gamma E^2 + 2j\omega \left(\frac{\mu_a H^2}{2} - \frac{\epsilon_a E^2}{2} \right).$$

Поэтому:

$$-\oint \vec{\Pi} d\vec{S} = \int_V \gamma E^2 dV + j2\omega \int \left(\frac{\mu_a H^2}{2} - \frac{\epsilon_a E^2}{2} \right) dV. \quad (5.12)$$

Первое слагаемое правой части (5.12) представляет собой активную мощность, второе – реактивную. Таким образом, теорему Умова – Пойнтинга можно записать еще следующим образом:

$$-\oint \vec{\Pi} d\vec{S} = P + jQ.$$

В таком виде ее часто используют для определения активного и внутреннего реактивного сопротивлений проводников на переменном токе.

5.8. Уравнения Максвелла для проводящей среды

Рассмотрим особенности распространения электромагнитной волны в проводящей среде с проводимостью γ и магнитной проницаемостью μ_a .

Запишем первое и второе уравнения Максвелла в комплексной форме для синусоидально изменяющихся во времени E и H :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \gamma \vec{E} + j\omega \varepsilon_a \vec{E}; \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -j\omega \mu_a \vec{H}. \end{aligned}$$

В проводящей среде даже при очень высоких частотах произведение $\omega \varepsilon_a$ много меньше проводимости γ . Поэтому с большой степенью точности слагаемым $j\omega \varepsilon_a \vec{E}$ в первом уравнении Максвелла для проводящих сред можно пренебречь.

Таким образом, первое и второе уравнения Максвелла для проводящей среды приобретают вид:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \gamma \vec{E}. \quad (5.13)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -j\omega \mu_a \vec{H}. \quad (5.14)$$

Эти два уравнения представляют собой уравнения с двумя неизвестными \vec{E} и \vec{H} . Решим их совместно. С этой целью возьмем ротор от уравнения (5.13):

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{H} - \nabla^2 \vec{H} = \gamma \operatorname{rot} \vec{E}.$$

Учтем, что $\operatorname{div} \vec{H} = 0$, и поэтому $\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{H} = 0$. Вместо $\operatorname{rot} \vec{E}$ в соответствии с (4.2) подставим $-j\omega \mu_a \vec{H}$. Получим:

$$\nabla^2 \vec{H} = j\omega \gamma \mu_a \vec{H}. \quad (5.15)$$

Уравнение (5.15) является дифференциальным относительно \vec{H} . В общем случае, когда \vec{H} зависит от всех трех или даже только от двух координат, решение (5.15) довольно сложно. Поэтому ограничимся рассмотрением решения этого уравнения для частных случаев — для плоской и цилиндрической электромагнитных волн.

5.9. Плоская электромагнитная волна

Под *плоской электромагнитной волной* понимают волну, векторы \vec{E} и \vec{H} которой расположены в плоскости $хоу$, перпендикулярной

направлению распространения волны (ось z) и изменяющиеся только в функции координаты z и времени t . В дальнейшем под плоской волной будем понимать *плоскую линейно поляризованную* волну, в которой вектор \vec{E} направлен вдоль одной, а вектор \vec{H} вдоль другой координатной оси плоскости $хоу$. Плоская линейно поляризованная волна показана на рисунке 5.2. На рисунке изображены для одного и того же момента времени векторы \vec{E} и \vec{H} в двух параллельных плоскостях, перпендикулярных оси z декартовой системы координат. Во всех точках первой плоскости (рис. 5.2, а) напряженность электрического (магнитного) поля одинакова по величине и направлению. Во всех точках второй плоскости (рис. 5.2, б) напряженность электрического (магнитного) поля также одинакова по величине и направлению, но не равна напряженности поля в первой плоскости.

В силу самого определения плоской волны:

$$\frac{\partial \dot{H}}{\partial x} = 0, \frac{\partial \dot{H}}{\partial y} = 0, \frac{\partial \dot{E}}{\partial x} = 0.$$

$$\frac{\partial \dot{E}}{\partial y} = 0.$$

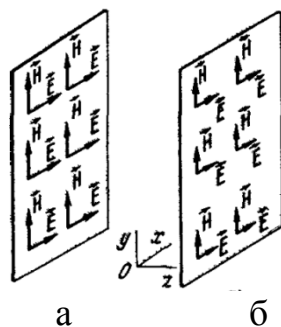


Рисунок 5.2 – Плоская электромагнитная волна:
а – первая плоскость; б – вторая плоскость

В плоской волне \vec{E} и \vec{H} являются функциями только одной координаты, в рассматриваемом случае функцией только z .

Повернем координатные оси таким образом, чтобы ось y совпала с напряженностью магнитного поля \vec{H} . При этом $\vec{H} = j\vec{H}$, где \vec{j} – единичный орт оси y декартовой системы координат. Подставим $\vec{H} = j\vec{H}$ в уравнение (5.15) и раскроем ∇^2 :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) j\vec{H} = j\omega\gamma\mu_a j\vec{H}. \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial^2 \dot{H}}{\partial x^2} = 0 \text{ и } \frac{\partial^2 \dot{H}}{\partial y^2} = 0.$$

Тогда будем иметь:

$$\frac{\partial^2 \dot{H}}{\partial z^2} = j\omega\gamma\mu_a \dot{H}. \quad (5.17)$$

В этом уравнении вместо частной написана обыкновенная производная. Переход от частной производной к обыкновенной для плоской волны является естественным, так как \dot{H} – это функция только одной переменной z .

Уравнение (5.17) представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Его решение записывают следующим образом:

$$\dot{H} = \dot{C}_1 e^{pz} + \dot{C}_2 e^{-pz}. \quad (5.18)$$

где \dot{C}_1 и \dot{C}_2 – постоянные интегрирования; это комплексы, которые определяют из граничных условий; для каждой конкретной задачи свои постоянные.

Из характеристического уравнения $p^2 = j\omega\gamma\mu_a$ найдем постоянную распространения:

$$p = \sqrt{j\omega\gamma\mu_a}. \quad (5.19)$$

γ берется в единицах $(\text{Ом м})^{-1}$, μ_a в Гн/м , постоянная распространения p измеряется в м^{-1} . Так как $\sqrt{j} = \sqrt{e^{j90^\circ}} = e^{j45^\circ} = (1 + j)/\sqrt{2}$, то p можно представить и так:

$$p = k(1 + j), \quad (5.20)$$

где

$$k = \sqrt{\frac{\omega\gamma\mu_a}{2}}. \quad (5.21)$$

Найдем напряженность электрического поля с помощью уравнений (5.13) и (5.18). Из (5.13) следует, что $\vec{E} = \frac{1}{\gamma} \text{rot} \vec{H}$.

Найдем $\text{rot} \vec{H}$. В соответствии с уравнением (5.18) (учитывая, что $\frac{\partial \dot{H}}{\partial x} = \frac{\partial \dot{H}}{\partial y} = 0$) имеем:

$$\text{rot} \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & H & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \left(-\frac{\partial \dot{H}}{\partial z} \right). \quad (5.22)$$

Откуда следует:

$$\vec{E} = \vec{i} \left(-\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \dot{H}}{\partial z} \right). \quad (5.23)$$

$$\frac{\partial \dot{H}}{\partial z} = p [\dot{C}_1 e^{pz} - \dot{C}_2 e^{-pz}]. \quad (5.24)$$

Выражение (5.23) показывает, что напряженность электрического поля в плоской волне при выбранном расположении осей координат направлена вдоль оси x , об этом свидетельствует присутствие единичного орта оси x (орта \vec{i}). Таким образом, в плоской электромагнитной волне между \vec{E} и \vec{H} есть пространственный сдвиг в 90° (\vec{E} направлено по оси x , а \vec{H} – по оси y). Частное от деления p на γ принято называть *волновым сопротивлением*:

$$Z_B = \frac{p}{\gamma} \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{\gamma}} e^{j45^\circ}. \quad (5.25)$$

Волновое сопротивление Z_B , измеряемое в Омах, зависит от свойств среды (от γ и μ_a) и угловой частоты ω . В соответствии с (5.23) и (5.24) проекция \vec{E} на ось x равна:

$$\dot{E} = \dot{E}_{\text{пад}} + \dot{E}_{\text{отр}},$$

где $\dot{E}_{\text{пад}} = Z_B \dot{C}_2 e^{-pz}$, $\dot{E}_{\text{отр}} = -Z_B \dot{C}_1 e^{pz}$.

Проекция \vec{H} на ось y в соответствии с (4.6):

$$\dot{H} = \dot{H}_{\text{пад}} + \dot{H}_{\text{отр}},$$

где $\dot{H}_{\text{пад}} = \dot{C}_2 e^{-pz}$, $\dot{H}_{\text{отр}} = \dot{C}_1 e^{pz}$.

Компоненты падающей волны $\vec{E}_{\text{пад}}$ и $\vec{H}_{\text{пад}}$ дают вектор Пойнтинга $\vec{P}_{\text{пад}}$ (рис. 5.3, а), направленный вдоль положительного направления оси z . Следовательно, движение энергии падающей волны происходит вдоль положительного направления оси z .

Компоненты отраженной волны $\vec{E}_{\text{отр}}$ и $\vec{H}_{\text{отр}}$ дают вектор Пойнтинга $\vec{P}_{\text{отр}}$ (рис. 5.3, б), направленный вдоль отрицательного направления оси z . Это означает, что отраженная волна несет с собой энергию вдоль отрицательного направления оси z .

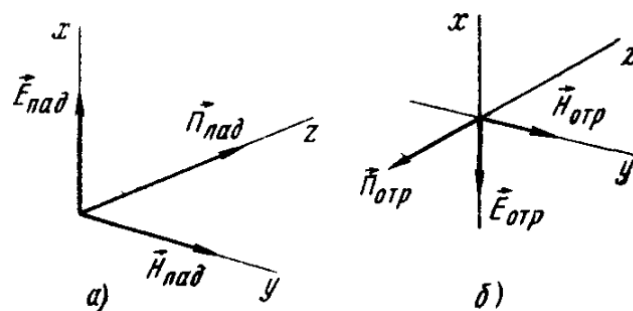


Рисунок 5.3 – Вектор Пойнтинга:

а – вдоль положительного направления оси z ;

б – вдоль отрицательного направления оси z

Волновое сопротивление можно трактовать как отношение $\dot{E}_{\text{пад}}/\dot{H}_{\text{пад}}$. Так как волновое сопротивление является числом комплексным и имеет аргумент 45° , то сдвиг во времени между $\dot{E}_{\text{пад}}$ и $\dot{H}_{\text{пад}}$ для одной и той же точки поля тоже равен 45° .

5.10. Распространение плоской электромагнитной волны в однородном проводящем полупространстве

Рассмотрим вопрос о распространении плоской электромагнитной волны в однородной проводящей среде, простирающейся теоретически в бесконечность (рис. 5.4).

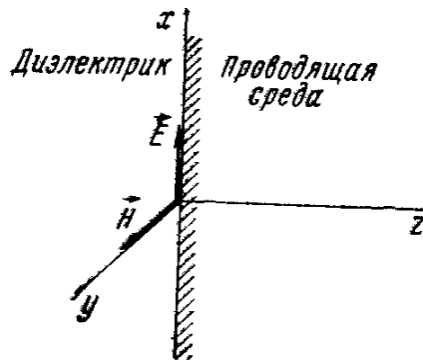


Рисунок 5.4 – Диэлектрик и проводящая среда

Электромагнитная волна проникает из диэлектрика в проводящую среду и распространяется в ней. Так как среда простирается теоретически в бесконечность и падающая волна в толще проводящей среды не встречает границы, которая «возмутила» бы ее распространение, то отраженной волны в данном случае не возникает.

При наличии только одной падающей волны $\dot{H} = \dot{C}_2 e^{-pz}$ и $\dot{E} = Z_B \dot{C}_2 e^{-pz}$.

Постоянную интегрирования \dot{C}_2 найдем из граничных условий. Если обозначить напряженность магнитного поля на поверхности проводящей среды через $\dot{H}_a = H_a e^{j\psi_a}$, то при $z=0$ $\dot{C}_2 = \dot{H}_a$. Поэтому с учетом (5.20):

$$\dot{H} = H_a e^{-kz} e^{-jkz} e^{j\psi_a}. \quad (5.26)$$

$$\dot{E} = H_a e^{-kz} \sqrt{\frac{\omega\mu_a}{\gamma}} e^{-jkz} e^{j\psi_a} e^{j45^\circ} \quad (5.27)$$

Чтобы записать выражения для мгновенных значений H и E , необходимо правые части (5.26) и (5.27) умножить на $e^{j\omega t}$ и взять мнимые части от получившихся произведений.

Тогда получим:

$$H = H_a e^{-kz} \sin(\omega t - kz + \psi_a). \quad (5.28)$$

$$E = H_a \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{\gamma}} e^{-kz} \sin(\omega t - kz + \psi_a + 45^\circ). \quad (5.29)$$

Проанализируем полученные выражения. Амплитуда $H = H_a e^{-kz}$; амплитуда $E = H_a \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{\gamma}} e^{-kz}$. С увеличением z множитель e^{-kz} уменьшается по показательному закону. Следовательно, по мере проникновения электромагнитной волны в проводящую среду амплитуды E и H уменьшаются по показательному закону. На рисунке 5.5 изображены огибающие амплитуд H , построенные на основе $H_a e^{-kz}$.

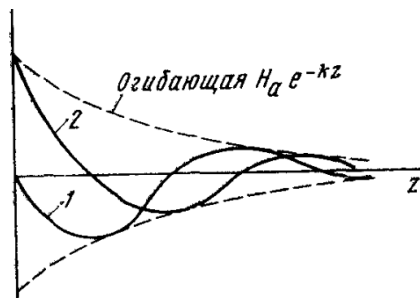


Рисунок 5.5 – Огибающие амплитуд

Мгновенное значение H и E определяется аргументом синуса, который в выражении (5.28), например, зависит от z и от ωt . Если принять $\omega t = const$, то на графике мгновенных значений H в функции от z будет получена кривая 1 при $\omega t + \psi_a = 0$ и кривая 2 при $\omega t + \psi_a = 90^\circ$.

Для того чтобы охарактеризовать, насколько быстро уменьшается амплитуда падающей волны по мере проникновения волны в проводящую среду, вводят понятие «глубина проникновения».

5.11. Глубина проникновения и длина волны

Под *глубиной проникновения* Δ понимают расстояние вдоль направления распространения волны (вдоль оси z), на котором амплитуда падающей волны E (или H) уменьшается в $e = 2,71$ раз. Глубину проникновения определяют с помощью выражения:

$$e^{-k\Delta} = e^{-1}.$$

Отсюда следует, что:

$$k\Delta = 1$$

или

$$\Delta = 1/k. \quad (5.30)$$

Глубина проникновения зависит от свойств проводящей среды (γ и μ_r) и частоты ω . Так, если электромагнитная волна имеет частоту $f = 5000$ Гц и проникает в проводящую среду, у которой $\gamma = 10^7 (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}$ и $\mu_r = 10^3$, то:

$$k = \sqrt{\frac{\omega\gamma\mu_a}{2}} = \sqrt{\frac{2\pi \cdot 5000 \cdot 10^3 \cdot 1,256 \cdot 10^{-6} \cdot 10^7}{2}} = 14100 \text{ м}^{-1}.$$

Под *длиной волны* λ в проводящей среде понимают расстояние вдоль направления распространения волны (вдоль оси z), на котором фаза колебания изменяется на 2π . Длину волны определяют из уравнения $\lambda k = 2\pi$, отсюда:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}. \quad (5.31)$$

Для рассмотренного числового примера:

$$\lambda = \frac{2\pi}{14100} \approx 0,000445 \text{ м}.$$

Иногда пользуются понятием фазовой скорости распространения электромагнитной волны в проводящей среде. Под *фазовой скоростью* понимают скорость, с которой надо было бы перемещаться вдоль оси z , чтобы колебание имело одну и ту же фазу. Фаза колебания определяется выражением $\omega t - kz + \psi_a$.

Производная от постоянной есть нуль, поэтому:

$$\frac{d}{dt}(\omega t - kz + \psi_a) = 0$$

или

$$\omega - k \frac{dz}{dt} = 0; \quad \frac{dz}{dt} = v_{\text{фаз}}; \quad v_{\text{фаз}} = \frac{\omega}{k}. \quad (5.32)$$

Для рассмотренного числового примера:

$$v_{\text{фаз}} = \frac{2\pi \cdot 5000}{14100} \approx 2,25 \text{ м/с}.$$

5.12. Магнитный поверхностный эффект

В качестве примера распространения плоских электромагнитных волн в проводящей среде рассмотрим поле в стальном листе при прохождении вдоль листа переменного магнитного потока $\dot{\Phi}_m$. Лист (рис. 5.6) имеет толщину $2a$, высоту h ($h \gg 2a$) и большую протя-

женность в направлении, перпендикулярном рисунку. Средняя плотность магнитного потока по сечению листа $\dot{B}_{\text{cp}} = \dot{\Phi}_m / 2ah$.

Задача состоит в определении законов изменения \dot{H} и \dot{E} по сечению листа. В силу симметрии напряженность магнитного поля на левой поверхности листа та же, что и на правой поверхности листа. Обозначим ее через \dot{H}_a и будем полагать известной (в дальнейшем выразим ее через \dot{B}_{cp}).

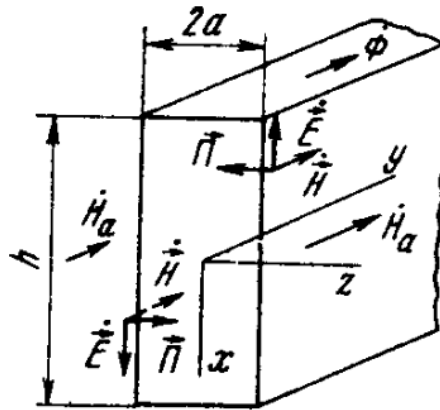


Рисунок 5.6 – Поле в стальном листе

Так как толщина листа много меньше высоты листа, то искажающим влиянием краев листа на поле можно в первом приближении пренебречь и считать, что в лист с двух сторон проникает плоская электромагнитная волна.

Расположим оси координат декартовой системы в соответствии с рисунком 5.6. Примем, как и прежде, $\dot{\vec{H}} = \dot{j}H$. Общее решение для \dot{H} :

$$\dot{H} = \dot{C}_1 e^{-pa} + \dot{C}_2 e^{pa}.$$

Из граничных условий найдем постоянные интегрирования. При $z = -a$, то есть для точек, находящихся на левой стороне листа:

$$\dot{H}_a = \dot{C}_1 e^{-pa} + \dot{C}_2 e^{pa}. \quad (5.33)$$

При $z = +a$:

$$\dot{H}_a = \dot{C}_1 e^{pa} + \dot{C}_2 e^{-pa}. \quad (5.34)$$

Совместное решение (5.33) и (5.34) относительно \dot{C}_1 и \dot{C}_2 дает:

$$\dot{C}_1 = \dot{C}_2 = \frac{\dot{H}_a}{e^{pa} + e^{-pa}} = \frac{\dot{H}_a}{2ch pa}.$$

Следовательно, в произвольной точке:

$$\dot{H} = \frac{\dot{H}_a}{2ch pa} (e^{pz} + e^{-pz}) = \dot{H}_a \frac{ch pz}{ch pa}. \quad (5.35)$$

Напряженность электрического поля:

$$\dot{\vec{E}} = \dot{\vec{i}} \left(-\frac{1}{\gamma} \frac{d\dot{H}}{dz} \right) = -\dot{\vec{i}} \left(\frac{p}{\gamma} \dot{H}_a \frac{shpz}{chpa} \right) = -\dot{\vec{i}} \dot{E},$$

где

$$\dot{E} = \frac{p}{\gamma} \dot{H}_a \frac{shpz}{chpa}. \quad (5.36)$$

При $z = +a$ напряженность \dot{E} направлена вверх (вдоль оси $-x$); при $z = -a$ – вниз (вдоль оси $+x$). Вектор Пойнтинга направлен к средней плоскости листа (внутри листа).

Ток, возникающий при прохождении по листу переменного магнитного потока, принято называть *вихревым*. Вектор плотности вихревого тока $\dot{\delta} = \gamma \dot{E}$ в любой точке листа коллинеарен с вектором \dot{E} в этой же точке. Магнитная индукция в произвольной точке:

$$\dot{B} = \mu_a \dot{H} = \frac{\mu_a \dot{H}_a ch pz}{ch pa}. \quad (5.37)$$

Среднее значение магнитной индукции в листе:

$$\dot{B}_{cp} = \frac{1}{a} \int_0^a \dot{B} dz = \frac{\mu_a \dot{H}_a ch pa}{ap ch pa} = \frac{\mu_a \dot{H}_a th pa}{ap}. \quad (5.38)$$

Если считать \dot{B}_{cp} известной и равной $\frac{\Phi_m}{2ah}$, то из (5.37) можно найти напряженность поля на поверхности листа:

$$\dot{H}_a = \frac{ap \dot{B}_{cp}}{\mu_a th pa}. \quad (5.39)$$

Аргумент $pa = ka + jka$ является комплексом, и $th pa$ есть гиперболический тангенс от комплексного аргумента; он также является комплексом:

$$th pa = th(ka + jka) = \frac{sh 2ka + j \sin 2ka}{ch 2ka + \cos 2ka}. \quad (5.40)$$

Отношение среднего значения магнитной индукции по сечению листа \dot{B}_{cp} к напряженности поля на поверхности листа \dot{H}_a называют *комплексной магнитной проницаемостью*:

$$\widetilde{\mu}_a = \frac{\mu_a th pa}{ap}; \quad \widetilde{\mu}_a = \mu_0 \widetilde{\mu}_r.$$

Она зависит от величины μ_r , частоты ω и толщины листа. При больших значениях аргумента $2ka$ $sh 2ka \approx ch 2ka$ значения этих функций намного больше 1. Поэтому при больших значениях $2ka$:

$$th pa \approx \frac{sh 2ka}{ch 2ka} \approx 1$$

и комплексная магнитная проницаемость $\widetilde{\mu}_a = \mu_a / pa$.

Например, при толщине листа $2a = 0,015$ см $\mu_r = 20000$,
 $f = 50000$ Гц, $\gamma = 1,8 \cdot 10^6 (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}$, $k = \sqrt{\frac{\omega\gamma\mu_a}{2}} = 84200$; $p =$
 $84200\sqrt{2}e^{j45^\circ}$; $ka = 6,31$; $2ka = 12,62$; $th pa = \frac{sh 12,62}{ch 12,62} \approx 1$.

Следовательно:

$$\widetilde{\mu}_a = \frac{\mu_a}{pa} = \frac{20000\mu_0}{84200\sqrt{2}e^{j45^\circ} \cdot 0,000015} = 2250e^{-j45^\circ} \mu_0.$$

Напряженность поля в средней плоскости листа (при $z=0$):

$$\dot{H}_{z=0} = \frac{\dot{H}_a}{ch pa}.$$

Отношение напряженности поля на краю листа (при $z=a$) к напряженности поля в средней плоскости листа:

$$\frac{\dot{H}_a}{\dot{H}_{z=0}} = ch pa. \quad (5.41)$$

Левая и правая части формулы (5.41) являются комплексами. Модуль $ch pa$ показывает, во сколько раз модуль \dot{H}_a больше модуля $\dot{H}_{z=0}$. Найдем модуль $ch pa$. С этой целью запишем два сопряженных комплекса: $ch(ka + jka) = ch ka \cos ka + j \sin ka \sin ka$ и $ch(ka - jka) = ch ka \cos ka - j sh ka \sin ka$.

Произведение сопряженных комплексов дает квадрат модуля. Следовательно:

$$|ch pa|^2 = ch(ka + jka)ch(ka - jka) = \frac{1}{2}[ch 2ka + \cos 2ka].$$

Таким образом:

$$|ch pa| = \sqrt{\frac{ch 2ka + \cos 2ka}{2}}. \quad (5.42)$$

Рассмотрим числовой пример. Пусть $\mu_r = 100$; $f = 500$ Гц; $\gamma = 10^7 (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}$; $k=1410 \text{ м}^{-1}$.

Найдем отношение напряженности поля в средней плоскости к напряженности поля на поверхности листа при толщине листа: $2a=1$ мм; 2 мм; 4 мм; $2ka=1,41$; $2,82$; $5,64$; $1/|ch pa|=0,91$; $0,52$; $0,1$.

Таким образом, напряженность поля в средней плоскости листа может быть много меньше напряженности поля на краю листа. Явление неравномерного распределения поля по сечению проводящего тела, вызванное затуханием электромагнитной волны при ее распространении в проводящую среду, называют *поверхностным эффектом*. Если вдоль листа направлен магнитный поток, то поверхностный эффект часто называют *магнитным*, если вдоль плоской шины направлен переменный ток, то – *электрическим* поверхностным эф-

фектом. Природа их одна и та же, а слова «магнитный» или «электрический» свидетельствуют лишь о том, что направлено вдоль листа (шины): поток или ток.

5.13. Электрический поверхностный эффект в прямоугольной шине. Эффект близости

При электрическом поверхностном эффекте вдоль пластины (шины) направлен синусоидальный ток I частоты ω (рис. 5.7). В этом случае поле внутри пластины определяется по формулам:

$$\dot{H} = -\frac{i}{2h} \frac{sh pz}{sh pa}, \quad \dot{E} = \frac{p}{\gamma} \frac{i}{2h} \frac{ch pz}{sh pa}, \quad \delta = \gamma \dot{E}.$$

Модуль $sh pa$ определим по формуле:

$$|ch pa| = \sqrt{\frac{1}{2}(ch 2ka - \cos 2ka)}.$$

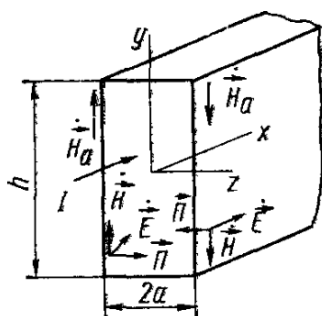


Рисунок 5.7 – Поле внутри пластины

Сопротивление единицы длины шины (пластины):

$$Z = R + jX = \frac{p}{\gamma 2h th pa}.$$

Рассмотрим две параллельные, близко расположенные плоские шины (рис. 5.8). По данным шинам будет протекать в противоположных направлениях синусоидально изменяющийся во времени ток I частоты ω , а размеры $2a \ll h$ и $2b \ll h$.

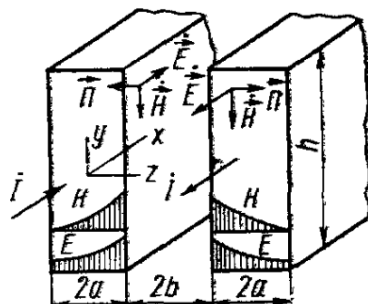


Рисунок 5.8 – Две параллельные плоские шины

Поместив начало декартовой системы координат в средней плоскости левой шины и учтя, что слева от левой шины напряженность поля $H=0$, а в пространстве между шинами $\dot{H} = -\dot{I}/h$ (в этом можно убедиться на основании закона полного тока), получим формулы для \dot{H} и \dot{E} в левой шине:

$$\dot{H} = -\frac{\dot{I}}{h} \frac{\text{sh } p(a+z)}{\text{sh } 2pa}, \quad \dot{E} = \frac{p \dot{I}}{\gamma h} \frac{\text{ch } p(a+z)}{\text{sh } 2pa}.$$

Поле одной шины влияет на распределение поля в другой шине. Это явление называют *эффектом близости*. Комплексное сопротивление единицы длины двух плоских шин, расположенных в воздухе, равно двум комплексным сопротивлениям самих шин плюс индуктивное сопротивление, обусловленное магнитным потоком, проходящим в пространстве между шинами:

$$Z = R + jX = \frac{2p}{\gamma h \text{th } 2pa} + j \frac{\mu_0 \omega 2b}{h}.$$

5.14. Поверхностный эффект в цилиндрическом проводе

По цилиндрическому проводу радиусом a протекает синусоидальный ток \dot{I} частотой ω . Требуется вывести формулы для определения плотности тока $\dot{\delta}$ и напряженности \dot{H} в любой точке сечения провода. Полагаем обратный провод настолько далеко удаленным от прямого, что влияние обратного провода на поле в прямом проводе можно не учитывать.

Решение проведем в цилиндрической системе координат (рис. 5.9). Плотность тока $\dot{\delta}$ направлена по оси z , поэтому $\dot{\delta} = \dot{z}_0 \delta$.

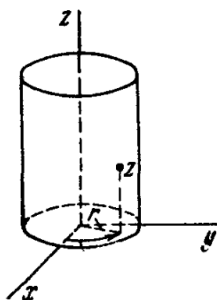


Рисунок 5.9 – Цилиндрическая система координат

Воспользуемся уравнениями (5.13) и (5.14), предварительно умножив последнее на γ .

Получим:

$$\text{rot} \dot{H} = \dot{\delta}, \quad (5.43)$$

$$\operatorname{rot} \dot{\delta} = -j\omega\gamma\mu_a \dot{H}, \quad (5.44)$$

или

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \dot{\delta} &= -j\omega\gamma\mu_a \dot{\delta}, \\ (\operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{\delta} - \nabla^2 \dot{\delta}) \dot{z}_0 &= (-j\omega\gamma\mu_a) \dot{\delta} \dot{z}_0. \end{aligned}$$

В установившемся режиме $\operatorname{div} \dot{\delta}$. Поэтому $\nabla^2 \dot{\delta} = j\omega\gamma\mu_a \dot{\delta}$. Раскроем $\nabla^2 \dot{\delta}$ в цилиндрической системе координат и учтем, что $\dot{\delta}$ от α и от z не зависит. Получим:

$$\frac{1}{r} \left(\frac{d\dot{\delta}}{dr} + r \frac{d^2\dot{\delta}}{dr^2} \right) = j\omega\gamma\mu_a \dot{\delta},$$

или

$$\frac{d^2\dot{\delta}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\dot{\delta}}{dr} = j\omega\gamma\mu_a \dot{\delta}.$$

Обозначим:

$$-j\omega\gamma\mu_a = q^2.$$

Тогда:

$$\frac{d^2\dot{\delta}}{d(qr)^2} + \frac{1}{qr} \frac{d\dot{\delta}}{d(qr)} + \dot{\delta} = 0. \quad (5.45)$$

Уравнение (5.45) является частным случаем уравнения Бесселя при $r=0$. Роль x играет qr , а роль y – $\dot{\delta}$.

Решение уравнения (5.45) можно записать следующим образом:

$$\dot{\delta} = \dot{A}J_0(qr) + \dot{B}N_0(qr), \quad (5.46)$$

где A и B – постоянные интегрирования; $J_0(qr)$ – функция Бесселя нулевого порядка первого рода; $N_0(qr)$ – функция Бесселя нулевого порядка второго рода.

Функция $N_0(qr)$ обладает той особенностью, что при $qr = 0$ она обращается в бесконечность. Но из физических соображений ясно, что плотность тока должна быть всюду конечна, в том числе и на оси провода. Поэтому слагаемое $\dot{B}N_0(qr)$ в решении отбрасываем. Следовательно:

$$\dot{\delta} = \dot{A}J_0(qr). \quad (5.47)$$

В соответствии с уравнением (5.43) и формулами (5.44) и (4.7):

$$\dot{H} = \frac{\dot{A}}{q} J_1(qr), \quad (5.48)$$

где $J_1(qr)$ – функция Бесселя первого рода первого порядка.

Определим постоянную интегрирования \dot{A} . С этой целью по закону полного тока найдем \dot{H} на поверхности провода (при $r=a$) и приравняем его значению \dot{H} , которое получается из формулы (5.48):

$$\frac{i}{2\pi a} = \frac{\dot{A}}{q} J_1(qa),$$

$$\dot{A} = \frac{qi}{2\pi a J_1(qa)}. \quad (5.49)$$

Подставим найденное значение \dot{A} в формулы (5.47) и (5.48):

$$\dot{\delta} = \frac{qi J_0(qr)}{2\pi a J_1(qa)}; \quad (5.50)$$

$$\dot{H} = \frac{i J_1(qr)}{2\pi a J_1(qa)}. \quad (5.51)$$

С помощью этих формул можно определить комплекс плотности тока $\dot{\delta}$ и комплекс напряженности поля \dot{H} в любой точке сечения провода. Радиус r может принимать значения от 0 до a . Для точки на оси провода $r=0$; для точек на поверхности $r=a$. Плотность тока на оси провода:

$$\dot{\delta}_0 = \frac{qi}{2\pi a J_1(qa)}. \quad (5.52)$$

Плотность тока на поверхности провода:

$$\dot{\delta}_a = \dot{\delta}_0 J_0(qa) \quad (5.53)$$

5.15. Исследование переменного электромагнитного поля

ЗАДАНИЕ 1

Определить тангенс угла α , составляемого напряженностью электрического поля с нормалью к поверхности жилы в точке, принадлежащей поверхности жилы коаксиального кабеля (рис. 5.10), а также подсчитать величину потока вектора Пойнтинга через боковую поверхность жилы на длине в 1 м и сопоставить величину потока вектора Пойнтинга с потерями энергии в жиле на длине в 1 м. Радиус медной жилы $r_1 = 0,3$ см; внутренний радиус оболочки $r_2 = 1$ см. Протекающий по кабелю постоянный ток $I=50$ А. Напряжение между жилой и оболочкой $U=10$ кВ.

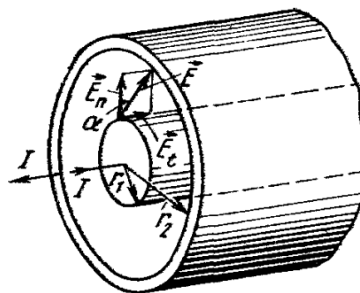


Рисунок 5.10 – Исходные данные

РЕШЕНИЕ

Нормальная составляющая напряженности электрического поля на поверхности жилы:

$$E_n = \frac{U}{r_1 \ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{10^4}{0,003 \cdot \ln \frac{1}{0,3}} = 2,77 \cdot 10^5 \text{ В/м.}$$

Тангенциальная составляющая напряженности электрического поля на поверхности жилы по закону Ома:

$$E_t = \frac{I}{\pi r_1^2 \gamma} = \frac{50}{\pi \cdot 0,003^2 \cdot 5,8 \cdot 10^7} = 3,05 \cdot 10^{-2} \text{ В/м.}$$

Вектор напряженности электрического поля \vec{E} составляет с нормалью к поверхности жилы угол α , тангенс которого:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{E_t}{E_n} = 1,1 \cdot 10^{-7}.$$

Напряженность магнитного поля на поверхности жилы, по закону полного тока:

$$H = \frac{I}{2\pi r_1} = \frac{50}{2\pi \cdot 0,003} = 2650 \text{ А/м.}$$

Для определения величины потока вектора Пойнтинга внутрь жилы на длине в 1 м следует умножить составляющую вектора Пойнтинга $E_t H$, проникающую внутрь жилы, на величину боковой поверхности жилы на длине в 1 м:

$$E_t \cdot H \cdot 2\pi r_1 \cdot 1 = 3,05 \cdot 10^{-2} \cdot 2650 \cdot 2\pi \cdot 0,003 \cdot 1 = 1,523 \text{ Вт.}$$

Эта величина равна потерям энергии в жиле кабеля на длине в 1 м:

$$I^2 R = I^2 \frac{l}{\gamma S} = 50^2 \frac{1}{5,8 \cdot 10^7 \pi \cdot 0,003^2} = 1,523 \text{ Вт.}$$

ЗАДАНИЕ 2

На рисунке 5.11, *а* *б* изображен сердечник трансформатора и один виток, окружающий сердечник. Концы витка обозначены *a* и *b*. Намагничивающая обмотка трансформатора на рисунке не показана. По сердечнику проходит синусоидально изменяющийся во времени магнитный поток $\Phi = \Phi_m \sin \omega t$. Поток вне сердечника отсутствует. К концам витка *a* и *b* присоединим вольтметр электродинамической системы с сопротивлением R_V один раз в соответствии с рисунком 5.11, *а*, другой в соответствии с рисунком 5.11, *б*. Определить показание вольтметра в этих двух случаях, полагая, что активное сопротивление самого витка $R_B \ll R_V$ и что индуктивность рассеяния L_S витка ничтожно мала.

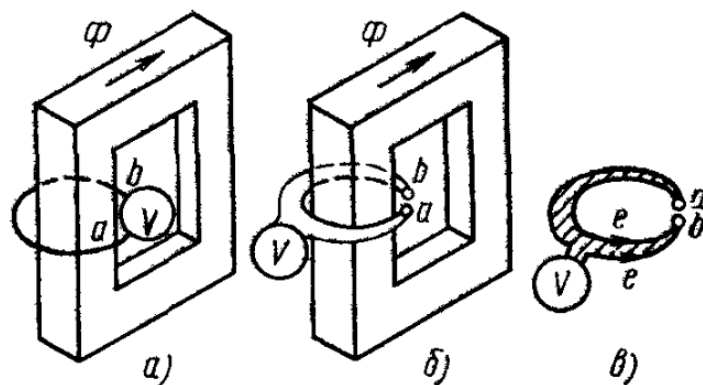


Рисунок 5.11 – Исходные данные:

а – сердечник трансформатора с вольтметром; б – сердечник трансформатора с вольтметром; в – один виток

РЕШЕНИЕ

Обозначим ток в контуре i и для рисунка 5.11, а составим уравнение по второму закону Кирхгофа:

$$iR_B + iR_V + L_S \frac{d\Phi}{dt} = 0.$$

Пренебрегая слагаемыми iR_B и $L_S \frac{di}{dt}$ по сравнению с iR_V и $\frac{d\Phi}{dt}$, обозначив $iR_B = U_B$, найдем показание вольтметра в схеме:

$$U_V = \frac{\omega \Phi_m}{\sqrt{2}}.$$

В схеме рисунка 5.11, б вольтметр покажет нуль. Это можно пояснить двояко.

1. Провода, идущие от точек a и b витка к вольтметру, образуют второй виток, в котором изменяющимся магнитным потоком наводится такая же ЭДС, что и в основном витке (рис. 5.11, в). При обходе контура, состоящего из двух витков, убеждаемся, что суммарная ЭДС в контуре равна нулю.

2. Такой же вывод сделаем, если учтем, что суммарный поток, пронизывающий заштрихованную площадь контура (рис. 5.11), в, равен нулю (поток вне сердечника по условию отсутствует).

Показание вольтметра зависит от того, как расположены провода от вольтметра до объекта измерения.

ЗАДАНИЕ 3

По стальному проводу $\gamma = 10^7 (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}$; $\mu_r = 10^3$; диаметр 6,04 мм течет синусоидальный ток $I=100$ А частотой 50 Гц. Определить плотность тока на поверхности и оси провода.

РЕШЕНИЕ

$$\sqrt{\omega \gamma \mu_a} = \sqrt{2\pi \cdot 50 \cdot 1,256 \cdot 10^{-6} \cdot 10^3 \cdot 10^7} = 1985 \text{ м}^{-1};$$

$$q = 1985\sqrt{-j} = 1985e^{-j45^\circ}; \quad a\sqrt{\omega\gamma\mu_a} = 0,00302 \cdot 1985 = 6.$$

По таблице 5.1 найдем:

$$J_0(qa) = J_0(6\sqrt{-j}) = 11,5e^{j219,6^\circ}; \quad b_0 = 11,5; \quad \beta_0 = 219,6^\circ;$$

$$J_1(qa) = J_1(6\sqrt{-j}) = 10,85e^{j133,45^\circ}; \quad b_1 = 10,85; \quad \beta_1 = 133,45^\circ.$$

По формуле (5.52) определим плотность на оси провода:

$$\delta_0 = \frac{qi}{2\pi a J_1(qa)} = 96,5 \cdot 10^4 e^{-j178^\circ 30'} \text{ А/м}^2.$$

По формуле (5.53) плотность тока на поверхности провода:

$$\delta_a = \delta_0 J_0(qa) = 111 \cdot 10^5 e^{j41,1^\circ} \text{ А/м}.$$

Таблица 5.1 – Модули и аргументы функций $J_0(qr)$, $J_1(qr)$

$r\sqrt{\omega\gamma\mu_a}$	b_0	β_0	b_1	β_1
0	1	0	0	-45,0
1	1,015	14,22	0,501	-37,84
2	1,229	52,28	1,041	-16,73
3	1,95	96,52	1,8	15,71
4	3,439	138,19	3,173	53,90
5	6,231	178,93	5,812	93,55
6	11,501	219,62	10,850	133,45
7	21,548	260,29	20,50	173,51
8	40,82	300,92	39,07	213,69
9	77,96	341,52	74,97	253,95
10	149,8	382,10	144,58	294,27

Контрольные вопросы

1. Дать определения переменного электромагнитного поля.
2. Сколько уравнений Максвелла используется при исследовании процессов в переменном электромагнитном поле?
3. Записать первое уравнение Максвелла в дифференциальной форме.
4. Записать уравнение непрерывности переменного электромагнитного поля.
5. Записать второе уравнение Максвелла в дифференциальной форме.
6. Записать уравнения Максвелла в комплексной форме.

7. Записать уравнение теоремы Умова – Пойнтинга для мгновенных значений.
8. Какой смысл знака «минус» в левой части записи теоремы Умова – Пойнтинга?
9. Записать уравнение теоремы Умова – Пойнтинга в комплексной форме.
10. В чем суть теоремы Стокса, применяемой при выводе уравнений Максвелла?
11. Пояснить, в силу каких величин абсолютная диэлектрическая и магнитная проницаемости, а также проводимость могут оказаться комплексными числами.
12. Какие среды называют изотропными и анизотропными?
13. Записать уравнения Максвелла для проводящей среды.
14. От каких факторов зависит постоянная распространения электромагнитной волны?
15. Записать выражение для определения глубины проникновения электромагнитной волны.
16. Какой угол в пространстве составляют векторы E и H падающей электромагнитной волны?
17. Записать выражение для определения длины электромагнитной волны.
18. Записать выражение для фазовой скорости электромагнитной волны.
19. В чем отличие между магнитным и электрическим поверхностным эффектом?
20. Чем следует руководствоваться при проектировании электромагнитного экрана?
21. В чем заключается эффект близости?
22. Как при помощи теоремы Умова – Пойнтинга определить активное и внутреннее индуктивное сопротивления проводника при переменном токе?
23. Сформулируйте основные принципы экранирования в магнитном и электромагнитном полях.

ТЕСТЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Цепь с распределенными параметрами – это такая длинная линия, в которой сколь угодно малый элемент линии обладает сопротивлением и индуктивностью, а между проводами – проводимостью и емкостью:

- 1) да;
- 2) нет.

2. Найдите соответствие параметров однородной линии:

- 1) вторичные параметры: коэффициент распространения электромагнитной волны, волновое сопротивление линии;
- 2) первичные параметры: сопротивление прямого и обратного проводов, индуктивность петли, проводимость между проводами, емкость между проводами.

3. Найдите соответствие параметров электромагнитной волны:

- а) фазовая скорость электромагнитной волны;
- б) длина электромагнитной волны;
- в) коэффициент отражения электромагнитной волны;
- 1) $\lambda = 2\pi/\beta$;
- 2) $c = \omega/\beta$;
- 3) $\rho = U_{об}/U_{пр}$.

4. Найдите соответствие:

- а) согласованная нагрузка длинной линии;
- б) линия без искажений;
- 1) $L_0/C_0 = r_0/g_0$;
- 2) $Z_H = Z_C = U_2/I_2$.

5. Линия без потерь – это линия, в которой сопротивление проводов линии и проводимость утечки между проводами равны не нулю:

- 1) нет;
- 2) да.

6. Электростатическое поле – это поле, созданное совокупностью электрических зарядов, неподвижных в пространстве по отношению к наблюдателю и неизменных во времени:

- 1) да;
- 2) нет.

7. Найдите соответствие:

Закон Кулона

1) два точечных заряда в вакууме взаимодействуют друг с другом с силой, прямо пропорциональной произведению зарядов и обратно пропорциональной расстоянию между ними;

2) силовая характеристика поля, определенная при условии, что внесенный в данную точку электростатического поля заряд не искажил поле, существовавшее до внесения этого заряда.

8. Найдите соответствие:

а) теорема Гаусса в интегральной форме;

б) теорема Гаусса в дифференциальной форме;

1) $\operatorname{div} \vec{D} = \rho_{\text{своб}}$;

2) $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum q_{\text{своб}} / \epsilon_0 \epsilon$.

9. Выберите уравнение Пуассона:

1) $\nabla^2 \varphi = 0$;

2) $\nabla^2 \varphi = -\rho_{\text{своб}} / \epsilon_a$.

10. Выберите граничные условия на границе двух диэлектриков:

1) $E_t=0$; $D=\sigma$;

2) $E_{1t} = E_{2t}$; $D_{1n} = D_{2n}$.

11. Закон Ома в дифференциальной форме для электрического поля постоянного тока в проводящей среде:

1) $\vec{\delta} = \gamma \vec{E}$;

2) $\vec{\delta} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}})$.

12. Первый закон Кирхгофа в дифференциальной форме для электрического поля постоянного тока:

1) $\vec{\delta} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}})$;

2) $\operatorname{div} \vec{\delta} = 0$.

13. Найдите соответствие:

а) дифференциальная форма закона Джоуля – Ленца для электрического поля постоянного тока в проводящей среде;

б) уравнение Лапласа для электрического поля постоянного тока в проводящей среде;

- 1) $\nabla^2 \varphi = 0$;
- 2) $I^2 R/V = \gamma E^2$.

14. Связь между углом падения и углом преломления тока при прохождении из одной среды в другую для электрического поля постоянного тока в проводящей среде $\frac{\operatorname{tg} \beta_1}{\operatorname{tg} \beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$:

- 1) да;
- 2) нет.

15. Найдите соответствие характеристик магнитного поля постоянного тока:

- а) магнитная индукция;
- б) намагниченность;
- в) напряженность магнитного поля;

- 1) \vec{J} ;
- 2) \vec{B} ;
- 3) \vec{H} .

16. Выберите интегральную форму закона полного тока:

- 1) $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\delta}$;
- 2) $\oint \vec{H} d\vec{l} = I$.

17. Граничные условия на границе раздела двух сред с различными магнитными проницаемостями $H_{1t} = H_{2t}$; $B_{1n} = B_{2n}$:

- 1) да;
- 2) нет.

18. Найдите соответствие:

а) выражение магнитной индукции через векторный потенциал магнитного поля;

б) выражение магнитного потока через циркуляцию векторного потенциала магнитного поля;

в) уравнение Пуассона для векторного потенциала магнитного поля;

- 1) $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$;
- 2) $\nabla^2 \vec{A} = -\mu_a \vec{\delta}$;
- 3) $\Phi = \oint \vec{A} d\vec{l}$.

19. Используя метод зеркальных изображений, рассчитать магнитное поле, возникающее в двух средах с различной магнитной проницаемостью при протекании постоянного электрического тока в одной из сред:

- 1) можно;
- 2) нельзя.

20. Переменное электромагнитное поле – это:

- 1) совокупность изменяющихся во времени и взаимно связанных и обуславливающих друг друга электрического и магнитного полей;
- 2) совокупность изменяющихся во времени и взаимно не связанных электрического и магнитного полей.

21. Найдите соответствие системы уравнений Максвелла:

- а) первое уравнение Максвелла;
- б) второе уравнение Максвелла;
- в) третье уравнение Максвелла;
- г) четвертое уравнение Максвелла;

1) $\operatorname{div} \vec{B} = 0$;

2) $\operatorname{div} \vec{E} = \rho_{\text{своб}} / \epsilon_a$;

3) $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\delta} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$;

4) $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

22. Теорема Умова – Пойнтинга описывает энергетические соотношения в электромагнитном поле:

- 1) да;
- 2) нет.

23. Найдите соответствие уравнений Максвелла для переменного электромагнитного поля в однородной и изотропной проводящей среде:

- а) первое уравнение;
- б) второе уравнение;

1) $\operatorname{rot} \vec{E} = -j\omega\mu_a \vec{H}$;

2) $\operatorname{rot} \vec{H} = \gamma \vec{E}$.

24. Найдите глубину проникновения магнитной волны в проводящую среду для которой: частота $f=5000$ Гц, электропроводность $\gamma = 10^7$ (Ом*м)⁻¹, относительная магнитная проницаемость среды $\mu_r = 10^3$:

- 1) 0,00007 м;
- 2) 0,0001 м.

25. Найдите длину электромагнитной волны, если коэффициент $k=14100$ 1/м

- 1) 0,000445 м;
- 2) 0,008 м.

26. Найдите фазовую скорость электромагнитной волны, если частота $f=5000$ Гц, коэффициент $k=14100$ 1/м.

- 1) 2,22 м/с;
- 2) 3,1 м/с.

27. Программный комплекс ELCUT позволяет выполнять расчеты электростатического поля, магнитного поля постоянных токов, электромагнитного поля, электротехнических устройств.

- 1) да;
- 2) нет.

28. В картине магнитного поля, полученной в результате расчетов в программе ELCUT, магнитные линии должны быть:

- 1) замкнуты;
- 2) разорваны.

29. Программа ELCUT позволяет рассчитывать характеристики и параметры линий электропередач, заземлителей, магнитных систем электрических контакторов, разрядников

- 1) да;
- 2) нет.

30. В программе ELCUT рассчитать электромагнитное поле электротехнических устройств в трехмерной декартовой системе координат рассчитать:

- 1) можно;
- 2) нельзя.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Содержание рассмотренных в пособии разделов направлено на то, чтобы оказать помощь студентам в приобретении знаний в области анализа электромагнитных явлений в электроэнергетических и электротехнических устройствах и системах для обеспечения эффективности производственной деятельности.

Рассмотренные в пособии темы курса являются базисными для понимания методов подхода к решению инженерных задач как в области передачи электромагнитной энергии, так и в задачах преобразования этой энергии в приборах управления, электромеханических устройствах автоматики и преобразовательной техники.

Материал учебного пособия обеспечивает необходимый уровень подготовки по электротехнике специалистов по направлению подготовки 35.03.06 «Агроинженерия», профиль «Электрооборудование и электротехнологии в АПК».

ЛИТЕРАТУРА

1. Бакалов, В.П. Основы теории цепей: учеб. для вузов / В.П. Бакалов, В.Ф. Дмитриков, Б.И. Крук; под ред. В.П. Бакалова. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Горячая линия – Телеком, 2007. – 597 с.
2. Бессонов, Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи / Л.А. Бессонов. – М.: Юрайт, 2012. – 701 с.
3. Бессонов, Л.А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле: учебник / Л.А. Бессонов. - 10-е изд. – М.: Гардарики, 2003. – 317 с.
4. Демирчян, К.С. Теоретические основы электротехники: учеб. для вузов. в 3 т. Том 3. / К.С. Демирчян, Л.Р. Нейман, Н.В. Коровкин, В.Л. Чечурин. – 4-е изд. – СПб.: Питер, 2003. – Т. 3. – 377 с.
5. Демирчян, К.С. Теоретические основы электротехники: учеб. для вузов / К.С. Демирчян, Л.Р. Нейман, Н.В. Коровкин. – 5-е изд. – СПб.: Питер, 2009. – Т. 1. – 512 с.
6. Демирчян, К.С. Теоретические основы электротехники: учебник для вузов / К.С. Демирчян, Л.Р. Нейман, Н.В. Коровкин. – 5-е изд. – СПб.: Питер, 2009. – Т. 2 – 432 с.
7. Петренко, Ю.В. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи с распределенными параметрами: учеб. пособие / Ю.В. Петренко. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2019. – 64 с.

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ.
ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ.
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ**

Учебное пособие

*Христинич Роман Мирославович
Христинич Елена Витальевна*

Электронное издание

Редактор Т.М. Мастрич

Подписано в свет 30.10.2023. Регистрационный номер 88
Редакционно-издательский центр Красноярского государственного аграрного университета
660017, Красноярск, ул. Ленина, 117
e-mail: rio@kgau.ru