

Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Красноярский государственный аграрный университет»

О. Е. Носкова

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Часть 1

СТАТИКА И КИНЕМАТИКА

Рекомендовано учебно-методическим советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Красноярский государственный аграрный университет» для внутривузовского использования в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по направлению подготовки 35.03.06 «Агроинженерия»

Электронное издание

Красноярск 2023

ББК 22.2я73

Н 84

Рецензенты:

К.В. Сафонов, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. каф. «Прикладная математика» Сибирского государственного университета науки и технологий им. акад. М.Ф. Решетнева

О.А. Масанский, канд. техн. наук, зав. каф. материаловедения и технологии обработки материалов Сибирского федерального университета

Н 84 ***Носкова, О. Е.***

Теоретическая механика. Ч. 1. Статика и кинематика [Электронный ресурс]: учебное пособие / *О. Е. Носкова*; Красноярский государственный аграрный университет. – Красноярск, 2023. – 183 с.

Представлено два основных раздела дисциплины «Теоретическая механика»: статика и кинематика. Содержится теоретический материал, контрольные вопросы для самопроверки, задания для самостоятельной работы студентов и примеры выполнения заданий.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 35.03.06 «Агроинженерия».

ББК 22.2я73

© Носкова О. Е., 2023

© ФГБОУ ВО «Красноярский государственный аграрный университет», 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	6
ВВЕДЕНИЕ	7
Глава 1. СТАТИКА	8
1.1. Введение в статику	8
1.1.1. Основные понятия и определения статики	8
1.1.2. Понятие силы	8
1.1.3. Аксиомы статики	11
1.1.4. Классификация сил	13
1.1.5. Системы сил	16
1.1.6. Связи и их реакции	17
1.2. Равновесие системы сходящихся сил	23
1.2.1. Геометрическое условие равновесия системы сходящихся сил	23
1.2.2. Аналитические условия равновесия	25
1.2.3. Теорема о трех непараллельных силах	26
1.2.4. Рекомендации по решению задач на равновесие системы сходящихся сил	27
1.3. Момент силы относительно точки и оси. Теория пар сил .	28
1.3.1. Момент силы относительно точки	28
1.3.2. Момент силы относительно оси	29
1.3.3. Сложение двух параллельных сил	32
1.3.4. Понятие пары сил	33
1.3.5. Определение главного вектора и главного момента системы сил	35
1.3.6. Теоремы о парах сил	36
1.3.7. Условия равновесия системы пар сил	38
1.4. Равновесие произвольной системы сил	39
1.4.1. Теорема о параллельном переносе сил. Теорема Пуансо	39
1.4.2. Теорема Вариньона	39
1.4.3. Приведение произвольной системы сил к единому центру	41
1.4.4. Частные случаи приведения плоской произвольной системы сил к простейшему виду	45
1.4.5. Условия равновесия произвольной системы сил	46
1.4.6. Условие равновесия параллельной системы сил	48

1.5. Статически определимые и неопределимые задачи.	
Составные конструкции	50
1.5.1. Статически определимые и статически не определимые задачи	50
1.5.2. Равновесие системы тел	51
1.5.3. Методы расчета усилий в стержнях ферм	54
1.6. Трение	58
1.6.1. Законы трения скольжения	58
1.6.2. Реакции связей шероховатых поверхностей. Угол трения	59
1.6.3. Равновесие тел при наличии трения	61
1.6.4. Трение качения	61
1.7. Центр тяжести	63
1.7.1. Центр тяжести твердого тела	63
1.7.2. Координаты центров тяжести однородных тел	64
1.7.3. Способы определения координат центров тяжести тел ..	65
Вопросы для самопроверки по главе 1 «Статика»	68
Задания для самостоятельной работы по статике	69
Задание 1.1. Определение равнодействующей плоской сходящейся системы сил	69
Задание 1.2. Равновесие плоской системы сходящихся сил	74
Задание 1.3. Равновесие произвольной плоской системы сил ..	79
Задание 1.4. Определение реакций связей произвольной плоской системы сил	85
Задание 1.5. Определение реакций связей для плоской системы тел	90
Задание 1.6. Определение центра тяжести плоской фигуры	105
Глава 2. КИНЕМАТИКА	113
2.1. Кинематика точки	113
2.1.1. Введение в кинематику	113
2.1.2. Способы задания движения точки	114
2.1.2.1. Естественный способ задания движения точки	114
2.1.2.2. Координатный способ задания движения	116
2.1.2.3. Векторный способ задания движения	118
2.1.2.4. Переход от координатного способа задания движения к естественному	119
2.1.3. Вектор скорости точки	120
2.1.4. Вектор ускорения точки.....	122

2.1.5. Определение скорости и ускорения точки при координатном способе задания движения	123
2.1.6. Определение скорости при естественном способе задания движения	127
2.1.7. Касательное и нормальное ускорение точки	128
2.1.8. Некоторые частные случаи движения точки	129
2.2. Кинематика твердого тела	133
2.2.1. Поступательное движение твердого тела	133
2.2.2. Вращательное движение твердого тела. Угловая скорость и угловое ускорение	135
2.2.3. Частные случаи вращательного движения твердого тела...	138
2.2.4. Скорости и ускорения точек при вращении твердого тела	139
2.2.5. Определение плоскопараллельного движения тела	143
2.2.6. Определение траекторий движения точек тела в плоскопараллельном движении	145
2.2.7. Определение скоростей точек тела при плоскопараллельном движении	146
2.2.8. Теорема о проекциях скоростей двух точек тела при плоскопараллельном движении тела	148
2.2.9. Мгновенный центр скоростей. Способы его определения	149
2.2.10. Способы определения мгновенного центра скоростей .	150
Вопросы для самопроверки по главе 2 «Кинематика»	153
Задания для самостоятельной работы по кинематике	154
Задание 2.1. Определение скорости и ускорения движения точки, заданного естественным способом	154
Задание 2.2. Определение кинематических характеристик движения точки, заданного координатным способом	161
Задание 2.3. Определение кинематических характеристик при поступательном и вращательном движении твердого тела	166
Задание 2.4. Определение кинематических характеристик при поступательном и вращательном движении твердого тела	173
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	181
ЛИТЕРАТУРА	182

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теоретическая механика является фундаментальной дисциплиной, закладывающей основы для изучения общетехнических наук (сопротивление материалов, детали машин, теория механизмов и машин), а также многих специальных дисциплин.

Изучение теоретической механики формирует у будущих специалистов склонности и способности к творческому мышлению, умение самостоятельно строить и использовать математические и физические модели объектов сельскохозяйственного назначения. В рамках данной дисциплины студенты получают возможность практического применения общих понятий математики и физики к исследованию технических систем сельскохозяйственного назначения, квалифицированно применяя для исследования основные алгоритмы высшей математики.

Законы и методы теоретической механики широко применяются при решении самых разнообразных и сложных инженерных задач – при проектировании и исследовании машин и механизмов сельскохозяйственной техники.

В представленном учебном пособии приведены основные положения разделов «Статика» и «Кинематика». Материал систематизирован в удобной для студентов форме.

В предлагаемом учебном пособии рассмотрены примеры решения типовых и профессионально-ориентированных задач, сопровождаемые соответствующими методическими рекомендациями; имеются задания для самостоятельной работы и контрольные вопросы для самопроверки студентов.

ВВЕДЕНИЕ

Современная сельскохозяйственная техника требует от инженерных кадров решения множества задач, связанных с исследованием механического движения и механического взаимодействия материальных тел.

Механика – это наука о механическом движении и взаимодействии материальных тел. Под **механическим движением** понимают изменение с течением времени взаимного положения материальных тел в пространстве. **Механическое взаимодействие** – это действие материальных тел друг на друга, в результате которого происходит изменение движения этих тел или изменение их формы (деформация).

Круг проблем, рассматриваемых в механике, очень велик, и с развитием этой науки в ней появился целый ряд самостоятельных областей, связанных с изучением механики твердых деформируемых тел, жидкостей и газов. К этим областям относятся теория упругости, теория пластичности, гидромеханика, аэромеханика, газовая динамика и ряд разделов прикладной механики, в частности: сопротивление материалов, статика сооружений, теория механизмов и машин, гидравлика, – а также многие специальные инженерные дисциплины. Однако во всех этих областях наряду со специфическими для каждой из них закономерностями и методами исследования опираются на ряд основных законов или принципов и используют многие понятия и методы, общие для всех областей механики. Рассмотрение этих общих понятий, законов и методов и составляет предмет **теоретической** (или **общей**) **механики**.

В основе механики лежат законы, называемые законами классической механики (или законами Ньютона), которые были установлены путем обобщения результатов многочисленных опытов и наблюдений и нашли подтверждение при практическом применении. Это позволяет рассматривать знания, основанные на законах механики, как достоверные знания, на которые можно смело опираться в практической деятельности.

По характеру рассматриваемых задач теоретическую механику принято разделять на три основных раздела: статику, кинематику и динамику. В **статике** излагается учение о силах и об условиях равновесия материальных тел под действием сил. В **кинематике** рассматриваются общие геометрические свойства движения тел. В **динамике** изучается движение материальных тел под действием сил.

Глава 1. СТАТИКА

1.1. Введение в статику

1.1.1. Основные понятия и определения статики

Статика (от греческого *statos*) – это раздел механики, в котором излагается общее учение о силах и изучаются условия равновесия материальных тел, находящихся под действием сил.

Под **равновесием** понимают состояние покоя тела по отношению к другим материальным телам. Если движением тела, по отношению к которому изучается равновесие, можно пренебречь, то равновесие называют **абсолютным**, в противном случае – **относительным**.

Условия равновесия тела зависят от того, является ли это тело твердым, жидким или газообразным. Равновесие жидких и газообразных тел изучается в курсах гидростатики и аэростатики. В теоретической механике рассматриваются только задачи о равновесии абсолютно твердых тел.

Абсолютно твердым телом называют такое материальное тело, геометрическая форма которого и размеры не изменяются ни при каких механических взаимодействиях со стороны других тел, а расстояние между любыми двумя его точками остается постоянным.

Материальной точкой называют простейшую модель материального тела любой формы, размеры которого достаточно малы и которое можно принять за геометрическую точку, имеющую определенную массу.

Системой материальных точек, или механической системой, называется совокупность материальных точек, в которой положение и движение каждой точки зависят от положения и движения других точек этой системы.

1.1.2. Понятие силы

Важнейшим понятием в теоретической механике является понятие силы. **Сила** – это модель механического взаимодействия объектов, она определяет интенсивность и направление этого взаимодействия. Силы обозначают латинскими буквами с черточками над ними ($\vec{P}, \vec{F}, \vec{N}$ и др.). Геометрически сила изображается вектором, который характеризуется:

- числовым значением (модулем);
- направлением;
- линией действия, которая пролегает вдоль вектора силы в оба направления.

Прямая, вдоль которой направлена сила, называется **линией действия силы** (рис. 1.1).



Рисунок 1.1 – Линия действия силы

За единицу силы в Международной системе единиц измерения (СИ) принимается ньютон (Н), килоньютон (кН), $1 \text{ кН} = 10^3 \text{ Н}$. 1 Н – это сила, изменяющая за 1 с скорость тела массой 1 кг на 1 м/с. Для измерения сил в статике пользуются динамометрами.

Проекцией силы на ось называют отрезок, заключенный между основаниями перпендикуляров, опущенных из начала и конца вектора силы на эту ось. Если направление проекции совпадает с положительным направлением оси, то проекция *положительна*, если проекция направлена в сторону, противоположную положительному направлению оси, то она является **отрицательной** (рис. 1.2).

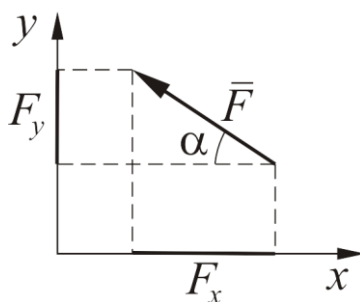


Рисунок 1.2 – Проекция силы на координатные оси

Модуль проекции силы на координатную ось определяется как произведение силы на косинус прилежащего угла. Величины проекций силы на координатные оси для рисунка 1.2 определяются по формулам

$$F_x = -F \cos \alpha; \quad F_y = F \sin \alpha.$$

Частные случаи определения проекции силы на ось:

– если сила перпендикулярна оси, то ее проекция равна нулю;

– если сила параллельна оси, то ее проекция равна модулю силы

(рис. 1.3).

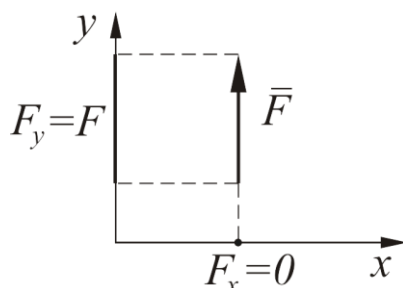


Рисунок 1.3 – Частный случай определения проекции силы на координатные оси

Совокупность нескольких сил, действующих на данное тело, называется **системой сил**. Если одну систему сил можно заменить другой, и при этом тело не изменит своего кинематического состояния, то эти системы считаются **эквивалентными**.

Уравновешенными системами сил называются системы сил, которые, будучи приложенными к покоящемуся телу, не изменяют его кинематического состояния, т. е. эквивалентны нулю.

Система сил, под действием которой свободное твердое тело может находиться в покое, называется **уравновешенной**, или **эквивалентной нулю**.

Сила, эквивалентная некоторой системе сил, называется **равнодействующей**.

На рисунке 1.4 сила \bar{R}_1 является равнодействующей сил \bar{P}_1 и \bar{P}_2 , а сила \bar{R}_2 является равнодействующей сил \bar{P}_3 и \bar{P}_4 .

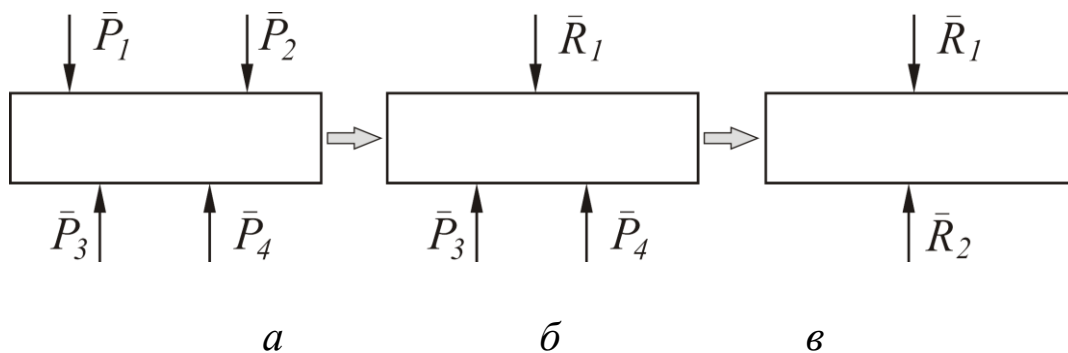


Рисунок 1.4 – Пример замены системы сил эквивалентной системой сил

Сила, равная по модулю равнодействующей и направленная по линии ее действия в противоположную сторону, называется **уравновешивающей силой**. Если к системе сил добавлена уравновешивающая сила, то полученная новая система находится в равновесии и эквивалентна нулю.

1.1.3. Аксиомы статики

Все теоремы и уравнения статики выводятся из нескольких исходных положений, принимаемых без математических доказательств и называемых аксиомами, или принципами, статики. **Аксиомы статики** представляют собою результат обобщений многочисленных опытов и наблюдений над равновесием и движением тел, неоднократно подтверждены практикой.

1. Аксиома инерции. Под действием взаимно уравновешивающихся сил твердое тело находится в состоянии покоя или движется равномерно и прямолинейно.

2. Аксиома равновесия двух сил. Две силы, приложенные к твердому телу, взаимно уравновешиваются только в том случае, если они равны по модулю, направлены по одной прямой в противоположные стороны (рис. 1.5).

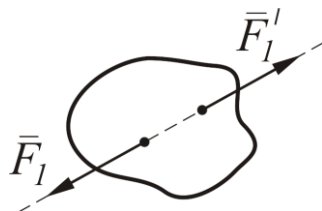


Рисунок 1.5 – Уравновешенные силы

3. Аксиома присоединения и исключения уравновешенных сил. Действие системы сил на свободное твердое тело не изменится, если к ней присоединить или из нее исключить систему взаимно уравновешивающихся сил (рис. 1.6).

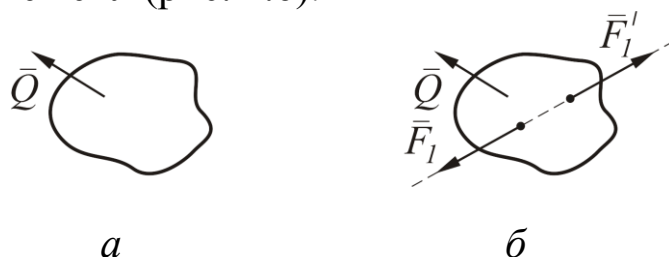


Рисунок 1.6 – Аксиома о присоединении и исключении уравновешенных сил

Система сил на рисунке 1.6, а, эквивалентна системе сил на рисунке 1.6, б.

Следствие из 2-й и 3-й аксиом. Действие силы на тело не изменится, если силу перенести вдоль линии ее действия и приложить в другой точке тела, лежащей на этой прямой. Согласно данному следствию, сила является **скользящим вектором**, т. е. ее можно приложить в любой точке вдоль линии действия (рис. 1.7).

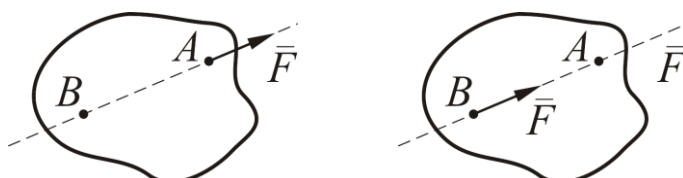
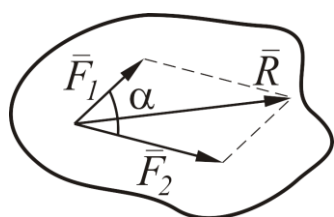


Рисунок 1.7 – Перенос силы вдоль линии ее действия

4. Аксиома параллелограмма сил. Равнодействующая двух пересекающихся сил приложена в точке их пересечения и равна геометрической сумме этих сил, т. е. определяется как диагональ параллелограмма, построенного на этих силах (рис. 1.8).



$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$$

Рисунок 1.8 – Аксиома параллелограмма сил

Модуль равнодействующей силы R можно определить по формуле

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1 F_2 \cos(\alpha)}. \quad (1.1)$$

5. Аксиома равенства действия и противодействия. Всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие (рис. 1.9).

Из этой аксиомы вытекает важное следствие: *сумма всех внутренних сил в абсолютно твердом теле равна нулю.*

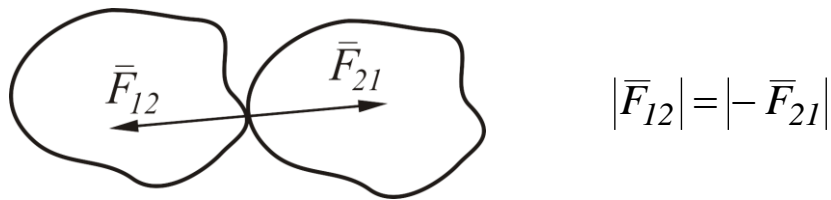


Рисунок 1.9 – Аксиома равенства действия и противодействия

6. Аксиома отвердевания. Равновесие сил, приложенных к деформирующемуся телу, сохраняется при его затвердевании. Эта аксиома утверждает, что условия равновесия абсолютно твердого тела являются необходимыми, но недостаточными для равновесия деформируемого тела.

Две основные задачи статики:

1. Приведение системы сил к простейшему виду и получение условий уравновешенности системы сил.
2. Получение уравнений равновесия и их использование в задачах статики.

1.1.4. Классификация сил

Силы можно разделить на следующие виды:

1. Внешние и внутренние:
 - **внешними** называются силы, действующие на материальные точки (тела) данной системы со стороны материальных точек (тел), не принадлежащих этой системе;
 - **внутренними** называются силы взаимодействия между материальными точками (телами) рассматриваемой системы.
2. Постоянные и переменные:
 - **постоянные** силы – силы, которые не изменяются с течением времени;
 - **переменные** силы – это силы, которые являются функцией какой-либо величины (например времени, координаты, скорости и др.).
3. Активные и реактивные:
 - **активными** называются силы, которые создают или способны создать движение твердого тела, если этому движению не препятствуют другие условия;
 - **реактивными** называются силы, не создающие движения, но ограничивающие перемещения (препятствующие перемещениям) твердого тела (реакции связей).

4. Сосредоточенные и распределенные:

- **сосредоточенными** называются силы, приложенные к одной точке тела (рис. 1.10);

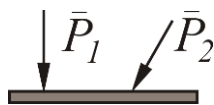


Рисунок 1.10 – Сосредоточенные силы

- **распределенной** нагрузкой называются силы, действующие на все точки:

– заданной длины тела (давление тяжелого цилиндрического катка на горизонтальную опорную поверхность) (рис. 1.11);



Рисунок 1.11 – Равномерно распределенная нагрузка по длине

– заданной площади тела (давление газа на стенки сосуда) (рис. 1.12).

Распределенная нагрузка характеризуется интенсивностью, которая указывает, сколько ньютонов приходится на единицу длины, площади или объема, поэтому измеряется в Н/м, Н/м², Н/м³.

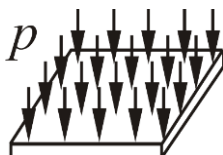


Рисунок 1.12 – Равномерно распределенная нагрузка по площади

– заданного объема тела (действие сил тяжести).

При решении задач распределенную нагрузку заменяют на сосредоточенную силу Q . В зависимости от характера распределенной нагрузки точка приложения и модуль сосредоточенной силы определяются по-разному.

При линейно распределенной нагрузке модуль ее всегда равен площади фигуры распределения нагрузки, а приложена она так, чтобы линия действия силы прошла через центр тяжести этой фигуры.

Рассмотрим два примера линейно распределенной нагрузки: равномерно распределенную и распределенную по закону треугольника.

Равномерно распределенная нагрузка по длине

Равномерно распределенная нагрузка характеризуется интенсивностью q распределенной нагрузки, Н/м. Для удобства расчета распределенную нагрузку заменяют сосредоточенной силой $Q = ql$, приложенной в центре участка приложения распределенной нагрузки и направленной в ту же сторону, что и распределенная нагрузка (рис. 1.13).

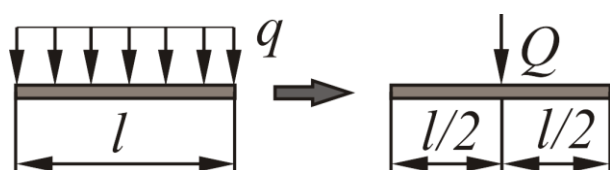


Рисунок 1.13 – Замена равномерно распределенной нагрузки по длине сосредоточенной силой

Нагрузка, распределенная по закону треугольника

Такая нагрузка характеризуется максимальным значением q_{max} интенсивности распределенной нагрузки q , которая заменяется сосредоточенной силой Q , расположенной на расстоянии $l/3$ от максимального значения интенсивности q (рис. 1.14).

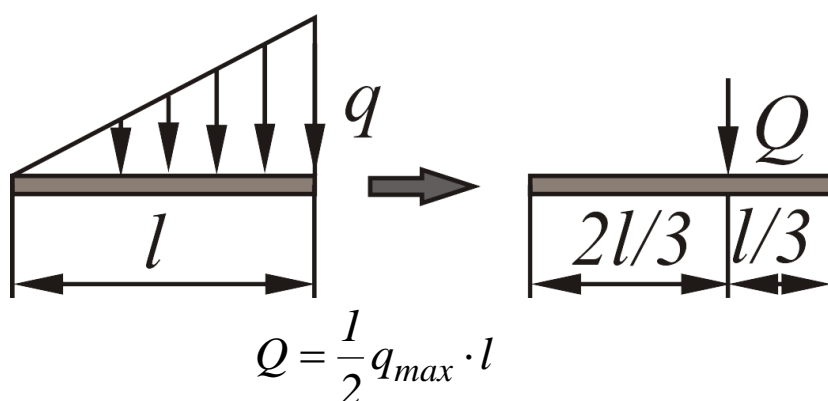


Рисунок 1.14 – Замена распределенной нагрузки по закону треугольника сосредоточенной силой

1.1.5. Системы сил

Система сил – совокупность нескольких сил, действующих на данную точку, тело или систему тел.

В зависимости от расположения сил выделяют различные системы сил (рис. 1.15).

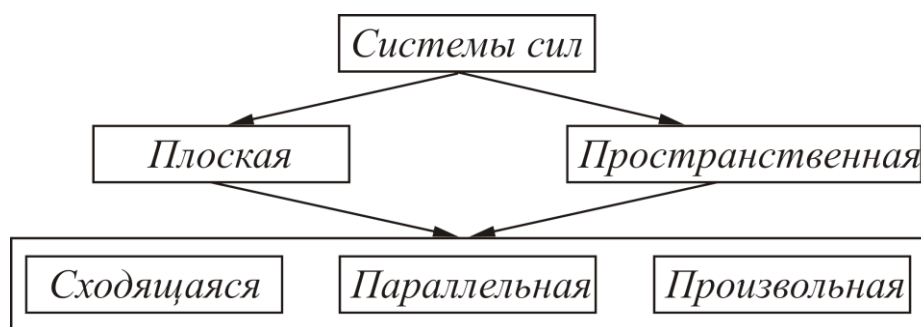


Рисунок 1.15 – Виды систем сил

Плоская система сил – это система, в которой все силы расположены в одной плоскости. Плоская система сил может быть сходящаяся, параллельная и произвольная.

Пространственная система сил – это система, в которой силы, действующие на тело, не находятся в одной плоскости, а ориентированы в пространстве. Она так же может быть сходящейся, параллельной и произвольной.

Сходящаяся система сил – это система, в которой все силы, действующие на тело или линии их действия, пересекаются в одной точке (рис. 1.16).

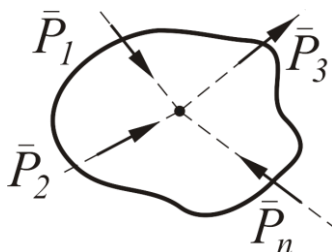


Рисунок 1.16 – Система сходящихся сил

Параллельная система сил – это система, в которой все силы, действующие на тело, параллельны друг другу (рис. 1.17).

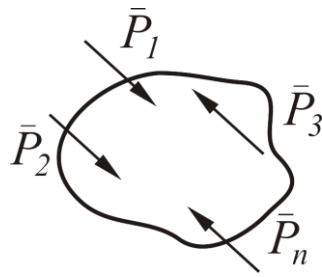


Рисунок 1.17 – Параллельная система сил

Произвольная система сил – это система, в которой все силы, действующие на тело, не параллельны друг другу и линии их действия не пересекаются в одной точке (рис. 1.18).

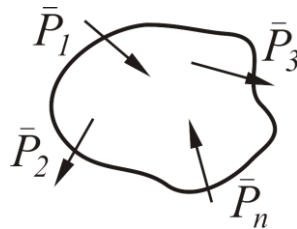


Рисунок 1.18 – Произвольная система сил

1.1.6. Связи и их реакции

Если твердое тело может получать любое перемещение в пространстве, то такое тело называется **свободным**, например свободное падение тела в пространстве.

Тело, перемещения которого в пространстве препятствуют какие-либо другие скрепленные или соприкасающиеся с ним тела, называется **несвободным**.

Связью называется все то, что ограничивает перемещение данного тела в пространстве.

Сила, с которой данная связь действует на тело, препятствуя перемещениям, называется **реакцией связи**.

Силы, не являющиеся реакциями связи, называются **активными силами** (такие, например, как сила тяжести). Особенностью активной силы является то, что ее модуль и направление не зависят от других, действующих на тело сил. Реакция связи отличается от действующих на тело активных сил тем, что ее численная величина всегда зависит от этих сил, если никакие активные силы на тело не действуют, то реакция связи равна нулю.

Направлена реакция связи в сторону, противоположную той, куда связь не дает перемещаться телу.

Все методы решения задач статики справедливы только для свободных тел, находящихся под действием сил, поэтому необходимо научиться несвободные тела делать свободными, используя принцип освобожденности от связей.

Принцип освобожденности от связей: несвободное тело можно считать свободным, если отбросить связи и заменить их действие соответствующими реакциями.

Основные виды связей и их реакции

Идеальная гладкая поверхность (острие, уступ). Идеально гладкой называют поверхность, трением о которую данного тела можно пренебречь (рис. 1.19).

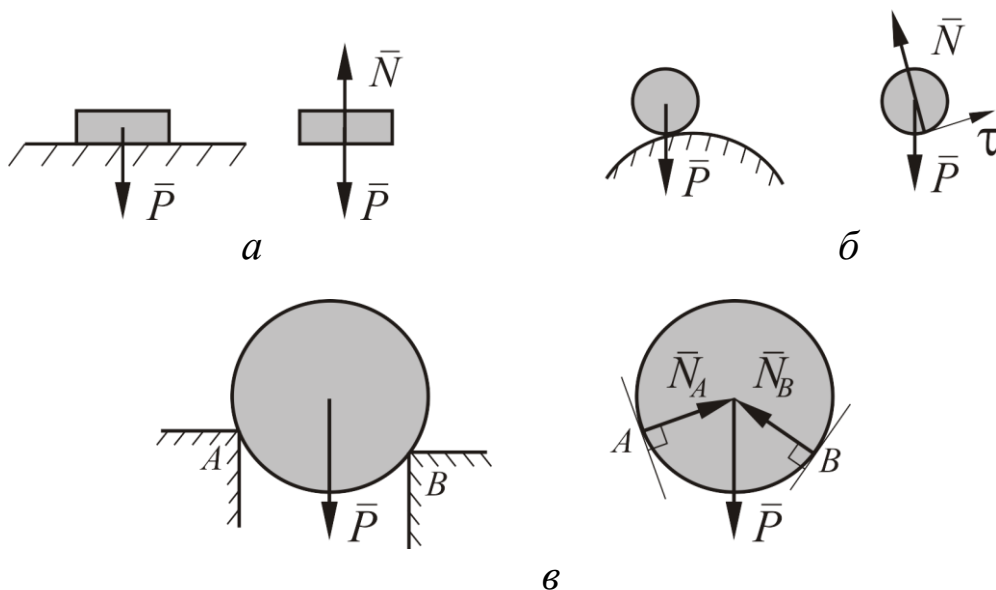


Рисунок 1.19 – Примеры определения направлений реакций связей в случае гладкой поверхности

Такой вид связи не дает телу перемещаться только по направлению общего перпендикуляра (нормали) к поверхностям соприкасающихся тел в точке их касания.

Гибкая связь (нерастяжимая нить, ремень, цепь и т. д.). Реакция гибкой связи направлена вдоль связи, при этом необходимо помнить, что гибкая связь работает только на растяжение (рис. 1.20).

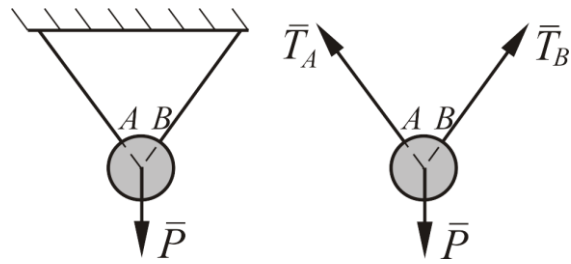


Рисунок 1.20 – Нерастяжимая нить

К гибким связям относятся ременные и цепные передачи, подвесные канаты и цепи (рис. 1.21).



Рисунок 1.21 – Примеры связей в виде нерастяжимых нитей

Жесткий невесомый стержень. Реакция стержня всегда направлена вдоль стержня (рис. 1.22). В отличие от гибкой связи, стержень может быть сжатым и растянутым.

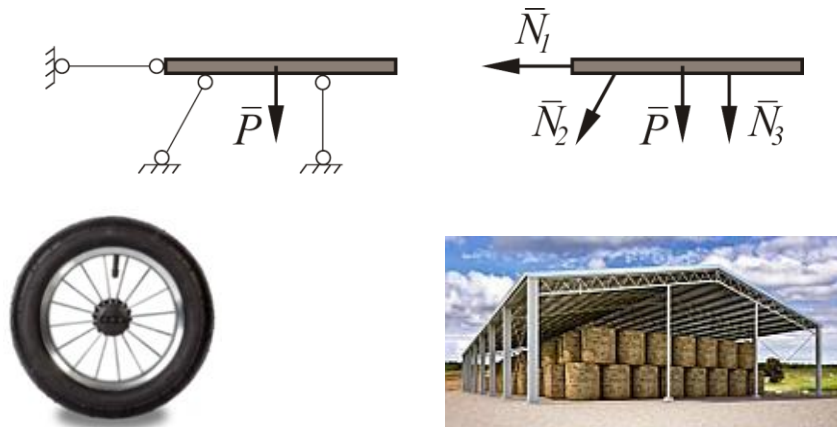


Рисунок 1.22 – Примеры связей в виде стержней

Шарнирно-неподвижная опора (цилиндрический шарнир) препятствует любому поступательному движению тела, но дает ей возможность свободно поворачиваться вокруг оси шарнира (рис. 1.23, 1.24).

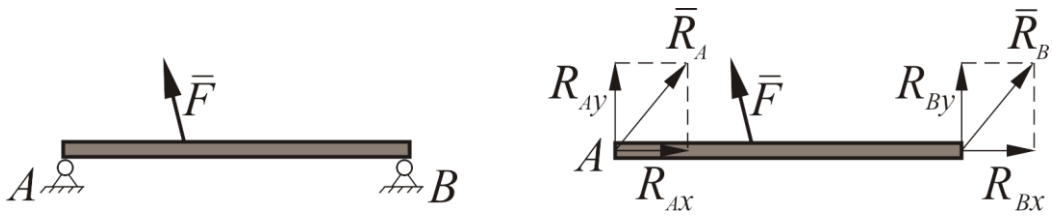


Рисунок 1.23 – Шарнирно-неподвижные опоры

Реакция шарнирно-неподвижной опоры проходит через центр шарнира, а модуль и направление ее неизвестны, поэтому полная реакция раскладывается на две составляющие (R_{Ax} , R_{Ay} и R_{Bx} , R_{By}) и определяется по формулам

$$\bar{R}_A = \bar{R}_{Ax} + \bar{R}_{Ay} \quad R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2}; \quad (1.2)$$

$$\bar{R}_B = \bar{R}_{Bx} + \bar{R}_{By} \quad R_B = \sqrt{R_{Bx}^2 + R_{By}^2}. \quad (1.3)$$



Рисунок 1.24 – Примеры шарнирно-неподвижных опор

Шарнирно-подвижная, или шарнирная, опора на катках. Реакция всегда будет направлена перпендикулярно опорной поверхности (рис. 1.25). Применяются в мостовых и других конструкциях для снятия температурных напряжений (рис. 1.26).

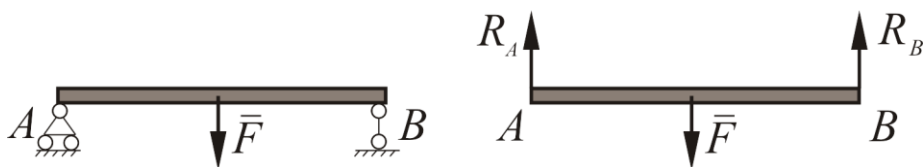


Рисунок 1.25 – Схемы шарнирно-подвижной опоры

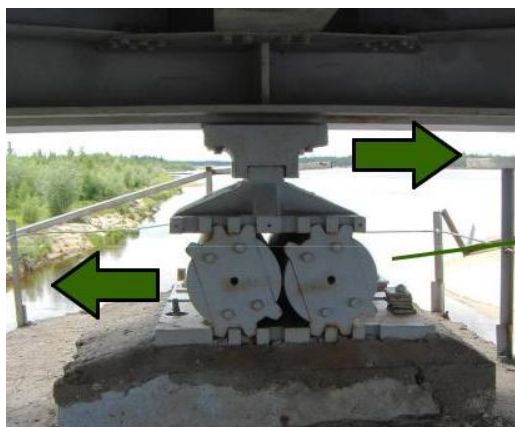


Рисунок 1.26 – Примеры шарнирно-подвижной опоры

Сферический шарнир. Сферический шарнир – это устройство, обеспечивающее вращение тела вокруг одной неподвижной точки. Полная реакция может иметь любое направление в пространстве, поэтому она раскладывается на три составляющие (X_0 , Y_0 , Z_0), направленные вдоль трех взаимно перпендикулярных осей x , y , z (рис. 1.27).

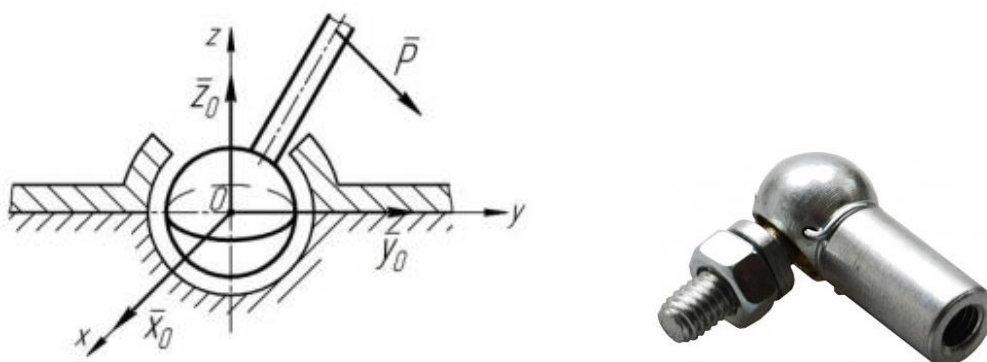


Рисунок 1.27 – Сферический шарнир

Жесткая заделка (консоль). Такая связь имеет место, когда одно тело жестко заделано в другое (например балка жестко заделана в стену) (рис. 1.28). В случае, когда внешняя нагрузка расположена в одной плоскости (плоское нагружение) (рис. 1.29, а), реакцию связи определяют две составляющие силы X_A и Y_A , а также реактивный момент M_A . В случае, когда внешняя нагрузка расположена в разных плоскостях (пространственное нагружение) (рис. 1.29, б), реакцию связи определяют три составляющие силы X_A , Y_A , Z_A , а также три составляющих реактивного момента M_{Ax} , M_{Ay} и M_{Az} .

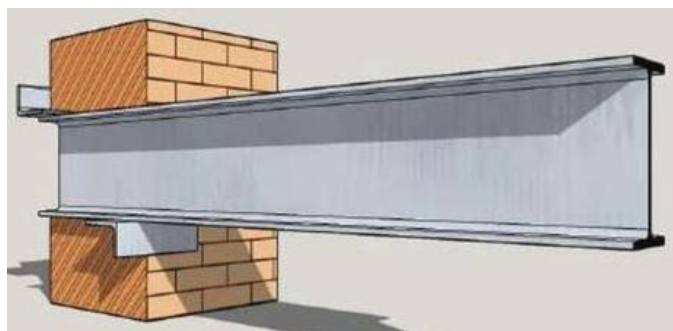


Рисунок 1.28 – Балка, жестко заделанная в стену

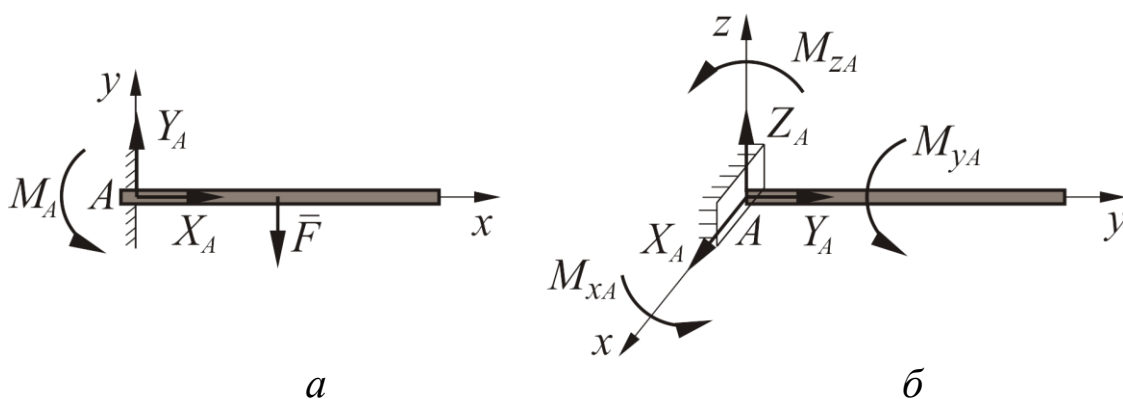


Рисунок 1.29 – Схемы жесткой заделки:
а – плоская задача; б – пространственная задача

Скользящей заделкой называется связь, которая ограничивает любое движение тела, кроме движения по направляющим заделки. Разновидности скользящих заделок и их реакции представлены на рисунке 1.30.

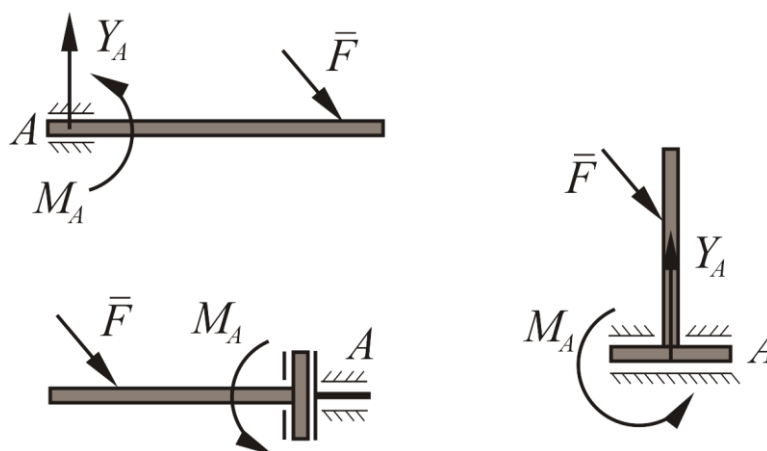


Рисунок 1.30 – Схемы скользящих видов связей

1.2. Равновесие системы сходящихся сил

Твердое тело, на которое действуют взаимно уравновешенные внешние силы, может не только находиться в покое, но и совершать движение «по инерции». Отсюда следует два вывода:

- условиям равновесия статики удовлетворяют силы, действующие как на покоящееся тело, так и на тело, движущееся «по инерции»;
- уравновешенность сил, приложенных к свободному твердому телу, является необходимым, но недостаточным условием равновесия самого тела. В покое тело будет находиться в том случае, если оно было в покое и до момента приложения к нему уравновешенных сил.

Силы называются сходящимися, если линии действия всех сил, составляющих систему, пересекаются в одной точке. Сходящиеся системы сил могут быть пространственными и плоскими.

Для равновесия приложенной к телу системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая этих сил была равна нулю:

$$\bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k = 0. \quad (1.4)$$

Условия равновесия для системы сходящихся сил можно выразить двумя способами: геометрическим и аналитическим.

1.2.1. Геометрическое условие равновесия системы сходящихся сил

Для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный на этих силах, был замкнут. При построении силового многоугольника данной системы сил, так как ее равнодействующая равна нулю, конец последней силы попадет в начало первой (рис. 1.31).

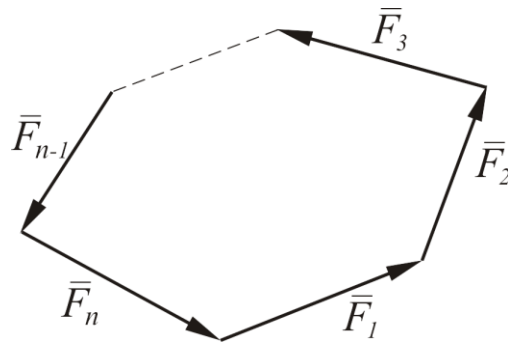


Рисунок 1.31 – Силовой многоугольник

Пример. Груз весом $P = 10$ кН удерживается двумя стержнями AB и BC равной длины ($AB = BC$) и прикрепленных к неподвижной опоре шарнирами A и B (рис. 1.32, а). Определить реакции в стержнях AB и BC , если угол $\alpha = 45^\circ$.

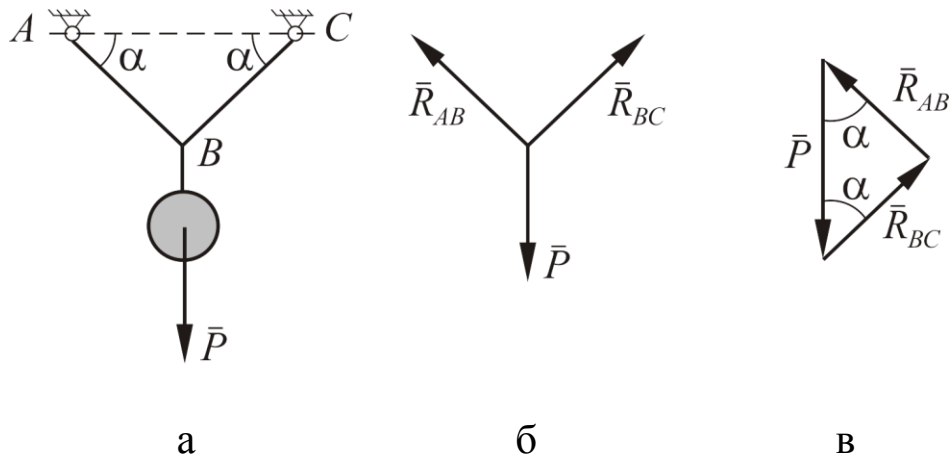


Рисунок 1.32 – Равновесие плоской системы сходящихся сил

Решение. Рассмотрим равновесие подвеса, на который действует внешняя сила P (вес груза). Мысленно отбросим связи (стержни AB и BC) и заменим их действие реакциями \bar{R}_{AB} и \bar{R}_{BC} (рис. 1.32, б). Реакции стержней направляем вдоль этих стержней, при этом направление выбираем произвольно. Все силы пересекаются в одной точке, следовательно, мы имеем дело с системой сходящихся сил.

Используя геометрическое условие равновесия для системы сходящихся сил, строим из этих сил (P , R_{AB} и R_{BC}) силовой треугольник, начиная с силы P (рис. 1.32, в). Для этого запишем условие равновесия в векторной форме:

$$\bar{P} + \bar{R}_{AB} + \bar{R}_{BC} = 0.$$

Учитывая, что $AB = BC$, получаем равнобедренный силовой треугольник, следовательно, реакции в стержнях будут равны по модулю $R_{AB} = R_{BC}$. Пользуясь теоремой синусов, определяем реакции в стержнях:

$$\frac{R_{AB}}{\sin 45} = \frac{R_{BC}}{\sin 45} = \frac{P}{\sin 90} = 10 \quad \Rightarrow \quad R_{AB} = R_{BC} = 7 \text{ кН}.$$

Из силового треугольника видно, что направления реакций в стержнях выбраны верно.

1.2.2. Аналитические условия равновесия

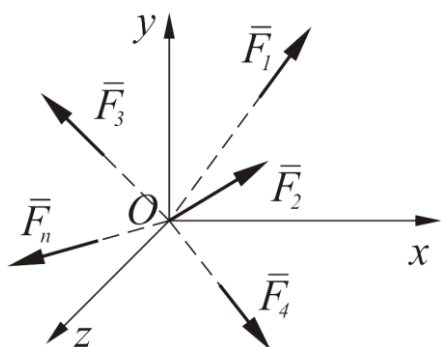
Для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил системы на каждую из трех координатных осей были равны нулю.

Модуль равнодействующей определяется через ее проекции:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 0, \quad (1.5)$$

следовательно, условия равновесия в аналитической форме имеют следующий вид:

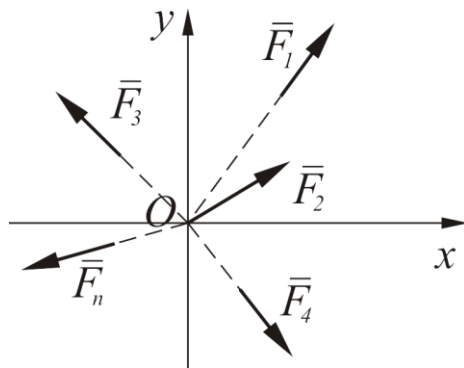
➤ для пространственной ССС (рис.1.33)



$$\left\{ \begin{array}{l} R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \\ R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \\ R_z = \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0 \end{array} \right. \quad (1.6)$$

Рисунок 1.33 – Пространственная ССС

➤ для плоской ССС (рис. 1.34)



$$\begin{cases} R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \\ R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

Рисунок 1.34 – Плоская ССС

Направление вектора равнодействующей \bar{R} сходящейся системы сил по отношению к координатным осям определяется направляющими косинусами:

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{R_x}{R}, \\ \cos \beta = \frac{R_y}{R}, \\ \cos \gamma = \frac{R_z}{R}, \end{cases} \quad (1.8)$$

где α , β и γ – углы наклона равнодействующей \bar{R} к осям x , y и z .

1.2.3. Теорема о трех непараллельных силах

При решении задач статики иногда удобно пользоваться теоремой о равновесии трех непараллельных сил: *если свободное тело находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, то линии их действия пересекаются в одной точке.*

Доказательство. Пусть на тело, находящееся в равновесии, действуют система из трех непараллельных сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$ (рис. 1.35). Следовательно $\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 = 0$. Перенесем силы \bar{F}_1 и \bar{F}_2 в точку O пересечения их линий действия и найдем их равнодействующую \bar{R} , которая будет приложена тоже в точке O .

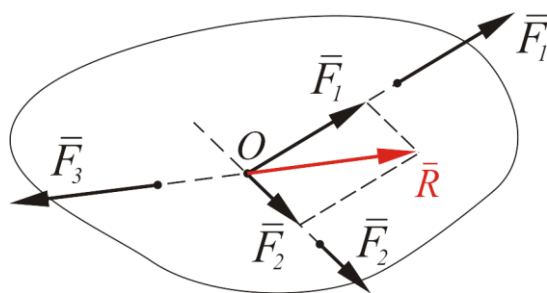


Рисунок 1.35 – Теорема о трех непараллельных силах

Сила \vec{F}_3 , будучи уравновешивающей системы сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , равна по модулю их равнодействующей \vec{R} и направлена по линии ее действия в противоположную сторону. Следовательно, линия действия силы \vec{F}_3 проходит через точку O , что и требовалось доказать.

1.2.4. Рекомендации по решению задач на равновесие системы сходящихся сил

Задачи на равновесие твердого тела, находящегося под действием системы сходящихся сил, можно решать, используя графический (геометрический) или аналитический методы.

Методические рекомендации к решению задач **графическим (геометрическим) способом**:

1. Выделить тело (точку), равновесие которого следует рассмотреть.
2. Изобразить все активные (заданные) силы, действующие на выделенное тело.
3. Освободить это тело от наложенных на него связей, заменив их действие реакциями связей.
4. Построить в масштабе замкнутый силовой многоугольник. При этом следует сначала сложить все заданные, а затем достроить неизвестные силы.
5. Определить неизвестные силы с учетом выбранного масштаба.

Методические рекомендации к решению задач **аналитическим способом**:

1. Выделить тело (точку), равновесие которого следует рассмотреть.
2. Изобразить все активные (заданные) силы, действующие на выделенное тело.

3. Освободить это тело от наложенных на него связей, заменив их действие реакциями связей.

4. Выбрать систему координат.

5. Составить уравнения равновесия для заданной сходящейся системы сил.

6. Решить уравнения равновесия относительно искомых величин.

1.3. Момент силы относительно точки и оси. Теория пар сил

1.3.1. Момент силы относительно точки

Понятие момента силы относительно точки определяет меру действия силы и вводится для характеристики способности силы повернуть тело вокруг заданной точки. При изучении плоской системы сил используется понятие **алгебраического момента**, при изучении пространственной системы – **векторного момента силы**.

Алгебраическим моментом силы относительно точки называют взятое со знаком «плюс» или «минус» произведение модуля силы на плечо силы относительно этой точки. Плечо силы h – кратчайшее расстояние между точкой и линией действия силы (рис. 1.36):

$$m_O(F) = \pm Fh. \quad (1.9)$$

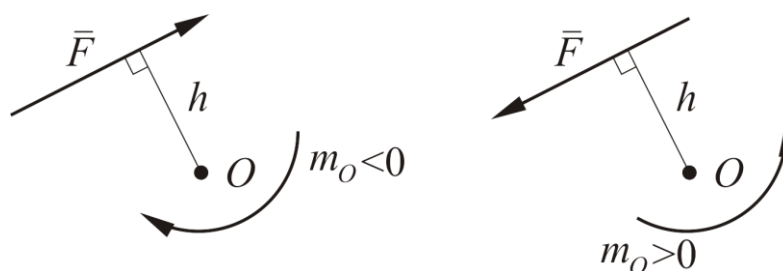


Рисунок 1.36 – Понятие алгебраического момента силы относительно точки

Единица измерения момента силы относительно точки – [Н·м].

Свойства момента силы относительно точки:

1. Момент силы не изменяется при переносе точки приложения силы вдоль ее линии действия.

2. Момент силы относительно центра O равен нулю только тогда, когда сила равна нулю или когда линия действия силы проходит через центр O (плечо равно нулю).

Векторным моментом силы относительно точки называют вектор, приложенный в этой точке и равный по модулю произведению силы на плечо. Он направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежат сила и точка, так, что с его конца можно видеть стремление силы вращать тело против хода часовой стрелки (рис. 1.37).

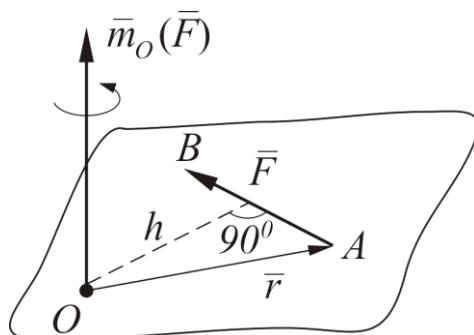


Рисунок 1.37 – Понятие векторного момента силы относительно точки

Векторный момент $\bar{m}_O(\bar{F})$ можно выразить через вектор силы \bar{F} , используя правило векторного произведения:

$$\bar{m}_O(\bar{F}) = \bar{r} \cdot \bar{F}, \quad (1.10)$$

где $\bar{r} = \overline{AO}$ – радиус-вектор точки приложения силы.

Модуль момента $|\bar{m}_O(\bar{F})|$ определяется также формулой

$$|\bar{m}_O(\bar{F})| = \pm Fh. \quad (1.11)$$

Понятие момента силы относительно оси используется при изучении пространственных систем сил.

1.3.2. Момент силы относительно оси

Алгебраическим моментом силы F относительно оси z называют величину, равную моменту проекции F_{Π} этой силы на плоскость, перпендикулярную к оси z , относительно точки O пересечения оси z с плоскостью Π (рис. 1.38):

$$m_z(\bar{F}) = \pm F_{\Pi} h. \quad (1.12)$$

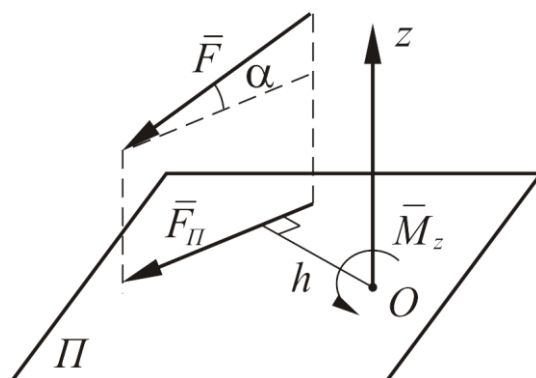


Рисунок 1.38 – Алгебраический момент силы относительно оси

Правило вычисления алгебраического момента силы относительно оси

1. Построить плоскость Π перпендикулярно оси z , относительно которой определяется момент, и показать точку пересечения оси с плоскостью – точка O .

2. Спроецировать силу \bar{F} на плоскость и найти модуль проекции $|\bar{F}_{\Pi}|$:

$$|\bar{F}_{\Pi}| = F \cos \alpha,$$

где α – угол между силой и плоскостью, параллельной Π .

3. Определить кратчайшее расстояние между точкой пересечения оси с плоскостью Π и линией проекции силы \bar{F}_{Π} – плечо h .

4. Вычислить произведение модуля проекции силы $|\bar{F}_{\Pi}|$ на плечо h и поставить знак (плюс или минус):

$$m_z(\bar{F}) = \pm F \cos(\alpha) \cdot h. \quad (1.13)$$

Момент силы относительно оси будет **положительным**, если сила \bar{F} (или проекция F_{Π}) стремится повернуть тело **против движения часовой стрелки**, если смотреть с положительного направления оси, в противном случае – **отрицательным**.

Момент силы относительно оси равен нулю, если:

1. Линия действия силы параллельна оси, относительно которой определяется момент силы.

2. Линия действия силы пересекает ось, относительно которой определяется момент силы.

Следовательно, момент силы относительно оси равен нулю, когда сила и ось лежат в одной плоскости.

Для определения векторного момента силы \vec{F} относительно оси z сначала определяют момент силы относительно точки O , лежащей на оси z . Моментом силы \vec{F} относительно точки O является вектор $\vec{OC} = \vec{m}_O(\vec{F})$, перпендикулярный плоскости треугольника OAB (рис. 1.39).

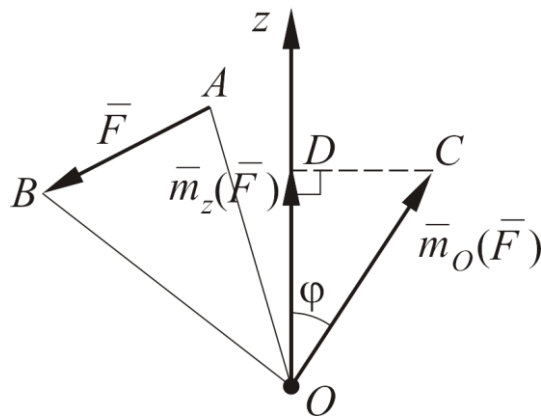


Рисунок 1.39 – Векторный момент силы относительно оси

Моментом силы относительно оси z будет проекция вектора \vec{OD} на ось z , т. е. отрезок $OD = OC \cos \varphi$. Обозначив момент силы относительно оси z через $m_z(\vec{F})$, получим

$$m_z(\vec{F}) = |\vec{m}_O(\vec{F})| \cos \varphi. \quad (1.14)$$

Векторным моментом силы F относительно оси z называют величину, равную проекции на эту ось вектора момента силы относительно любой точки, лежащей на этой оси.

Знак момента силы относительно оси определяется углом φ :

– при $\varphi < 90^\circ$ момент силы относительно оси положителен;

– при $\varphi > 90^\circ$ – отрицателен.

1.3.3. Сложение двух параллельных сил

Если на тело действуют две параллельные силы \bar{P}_1 и \bar{P}_2 одного направления, то равнодействующая \bar{R} имеет такое же направление, а ее модуль равен алгебраической сумме модулей слагаемых сил (рис. 1.40):

$$\bar{R} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2. \quad (1.15)$$

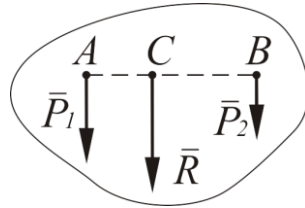


Рисунок 1.40 – Сложение двух параллельных сил, направленных в одну сторону

Точка C приложения равнодействующей делит отрезок AB на части обратно пропорциональные модулям сил:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{P_2}{P_1}.$$

По свойству пропорций

$$\frac{P_1}{BC} = \frac{P_2}{AC} = \frac{P_1 + P_2}{BC + AC}.$$

Отсюда следует равенство:

$$\frac{P_1}{BC} = \frac{P_2}{AC} = \frac{R}{AB}. \quad (1.16)$$

Если на тело действуют две параллельные силы \bar{P}_1 и \bar{P}_2 противоположного направления, то равнодействующая \bar{R} имеет направление силы, большей по модулю, и модуль, равный разности модулей этих сил (рис. 1.41):

$$R = P_1 - P_2. \quad (1.17)$$

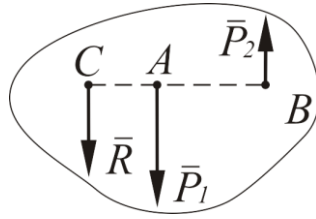


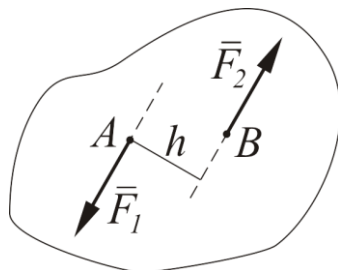
Рисунок 1.41 – Сложение двух параллельных сил, направленных в разные стороны

Точка C приложения равнодействующей лежит на продолжении отрезка AB за точкой приложения большей силы:

$$\frac{P_1}{BC} = \frac{P_2}{AC} = \frac{R}{AB}. \quad (1.18)$$

1.3.4. Понятие пары сил

Парой сил называется система двух параллельных сил, равных по модулю, лежащих на параллельных прямых и направленных в противоположные стороны (рис. 1.42):



$$|\vec{F}_1| = |-\vec{F}_2|$$

Рисунок 1.42 – Понятие пары сил


Плоскость, в которой лежат силы, составляющие пары, называется плоскостью ее действия. Пара сил, приложенная к твердому телу, стремится придать ему вращательное движение. Пара сил является такой системой сил, которую упростить нельзя; она *не имеет равнодействующей*. Для количественной характеристики действия пары сил на твердое тело вводят понятие алгебраического момента пары. **Алгебраическим моментом пары M** называют величину, равную моменту одной из сил пары относительно точки приложения другой силы (рис. 1.43).

$$M = m_B(F_1) = m_A(F_2) = \pm F_1 h = \pm F_2 h. \quad (1.19)$$

где h – кратчайшее расстояние между линиями действия сил (**плечо пары**).



Рисунок 1.43 – Алгебраический момент пары сил

Правило знаков моментов такое же, что и для алгебраического момента силы относительно точки. Если пара стремится повернуть плоскость своего действия против хода часовой стрелки, то ее момент положителен, по ходу часовой стрелки – отрицателен. Часто пару в плоской системе сил изображают дуговой стрелкой .

Очевидно, что сумма проекций сил пары на любую прямую равна нулю, следовательно, при составлении уравнений суммы проекций сил на какую-либо ось силы пары не учитывают.

Векторный момент пары сил \vec{M} направлен перпендикулярно плоскости пары в ту сторону, откуда вращение плоскости кажется происходящим против хода часовой стрелки (рис. 1.44). Модуль векторного момента пары сил равен модулю ее алгебраического момента.

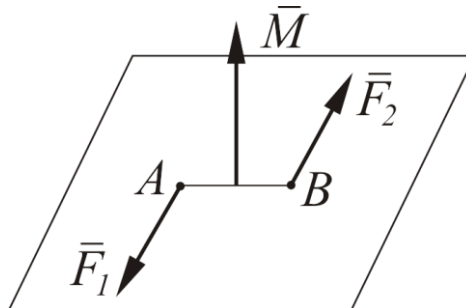


Рисунок 1.44 – Векторный момент пары сил

1.3.5. Определение главного вектора и главного момента системы сил

Главным вектором \bar{R} системы сил $\{\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n\}$ называют величину, равную векторной сумме всех этих сил:

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k. \quad (1.20)$$

Главный вектор равен замыкающей стороне силового многоугольника (рис. 1.45).

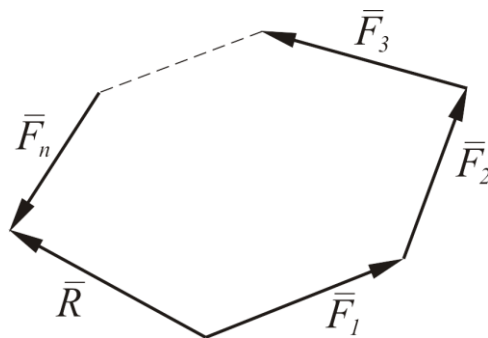


Рисунок 1.45 – Силовой многоугольник для определения главного вектора

Главным моментом системы сил относительно центра называют величину, равную сумме моментов всех сил относительно этого центра.

$$\bar{M}_O = \bar{m}_O(\bar{F}_1) + \bar{m}_O(\bar{F}_2) + \dots + \bar{m}_O(\bar{F}_n) = \sum_{k=1}^n \bar{m}_O(\bar{F}_k). \quad (1.21)$$

Главный момент также можно изобразить замыкающей стороной многоугольника, построенного из моментов сил (рис. 1.46).

Главный вектор \bar{R} и главный момент \bar{M}_O являются основными характеристиками системы сил.

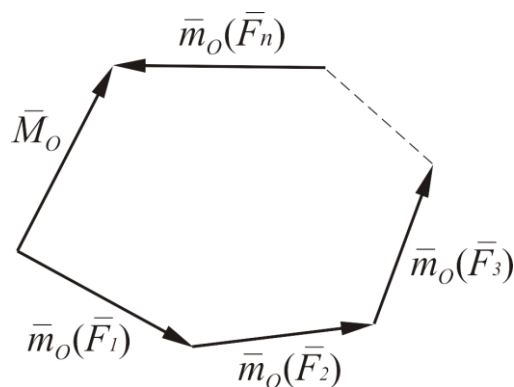


Рисунок 1.46 – Силовой многоугольник для определения главного момента

Проекции главного вектора и главного момента на оси координат определяются как сумма проекций всех сил и моментов системы на координатные оси:

$$\begin{cases} R_x = \sum F_{kx}, & R_y = \sum F_{ky}, & R_z = \sum F_{kz}, \\ M_x = m_x(\bar{F}_{kx}), & M_y = m_y(\bar{F}_{ky}), & M_z = m_z(\bar{F}_{kz}). \end{cases} \quad (1.22)$$

Модули R и M_O определяются по найденным проекциям:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}; \quad (1.23)$$

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}. \quad (1.24)$$

1.3.6. Теоремы о парах сил

Теорема о сумме моментов сил пары: сумма моментов сил пары относительно любого центра равна моменту пары (рис. 1.47):

$$\bar{M}_O(\bar{F}_1) + \bar{M}_O(\bar{F}_2) = \bar{M}(\bar{F}_1; \bar{F}_2), \quad (1.25)$$

т. е.

$$F_1 h_1 + F_2 h_2 = F_1 h. \quad (1.26)$$

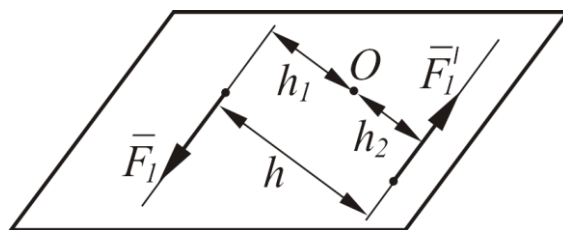


Рисунок 1.47 – Теорема о сумме моментов сил пары

Теорема об эквивалентности пар сил, лежащих в одной плоскости: пары сил, лежащие в одной плоскости, эквивалентны, если их алгебраические моменты равны, т. е. равны модули пар и одинаковы направления их действия.

Пусть пары сил $(\vec{F}_1; \vec{F}'_1)$ и $(\vec{F}_2; \vec{F}'_2)$ лежат в одной плоскости. Если моменты этих пар сил равны – $M(\vec{F}_1; \vec{F}'_1) = M(\vec{F}_2; \vec{F}'_2)$ и направлены в одну сторону, то пары сил эквивалентны (рис. 1.48).

Из теоремы следует, что *если пару перемещать и поворачивать как угодно в плоскости ее действия, изменять ее плечо и одновременно силы, но сохранять ее алгебраический момент, то будут получаться пары сил, эквивалентные исходной.*

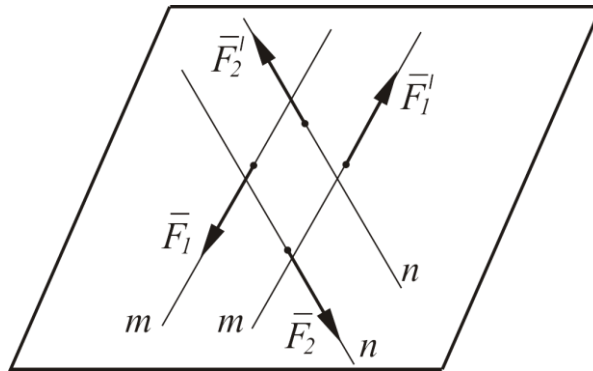


Рисунок 1.48 – Теорема об эквивалентности пар сил, лежащих в одной плоскости

Теорема об эквивалентности пар сил, лежащих в параллельных плоскостях: пары сил, лежащие в параллельных плоскостях, эквивалентны, если равны их векторные моменты.

Пусть пары сил $(\vec{F}_1; \vec{F}'_1)$ и $(\vec{F}_2; \vec{F}'_2)$ лежат в параллельных плоскостях. Если моменты этих пар сил равны $\vec{M}_1(\vec{F}_1; \vec{F}'_1) = \vec{M}_2(\vec{F}_2; \vec{F}'_2)$ и направлены в одну сторону, то пары сил эквивалентны (рис. 1.49).

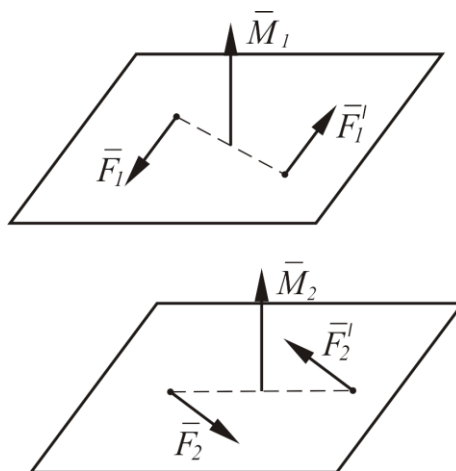


Рисунок 1.49 – Теорема об эквивалентности пар сил, лежащих в параллельных плоскостях

Из теоремы следует, что пару сил можно переносить из одной плоскости ее действия в другую, параллельную исходной, и что вектор момента пары сил – свободный, т. е. может быть приложен в любой точке тела.

Теорема о сложении пар сил: при сложении двух пар, действующих на твердое тело и лежащих в пересекающихся плоскостях, момент результирующей пары равен геометрической сумме моментов составляющих пар.

Данную теорему можно применить для любого количества пар сил (рис. 1.50).

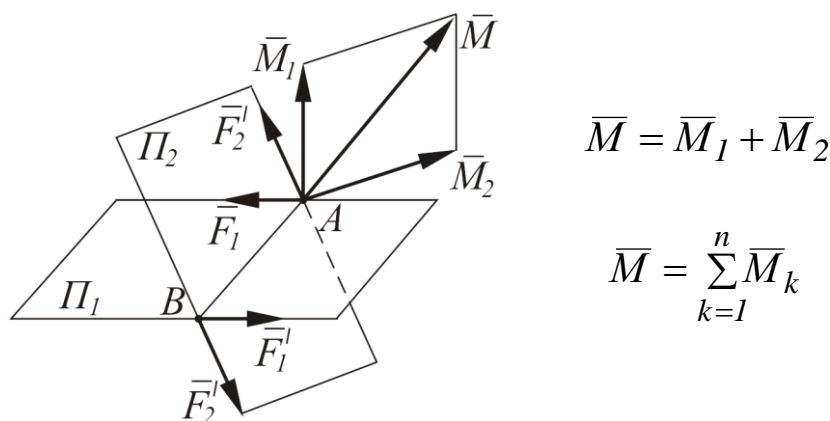


Рисунок 1.50 – Теорема о сложении пар сил

1.3.7. Условия равновесия системы пар сил

Если тело под действием системы пар находится в равновесии, то момент результирующей пары равняется нулю:

$$\bar{M} = \sum_{k=1}^n \bar{M}_k = 0. \quad (1.27)$$

В проекции на оси координат получим

$$\begin{cases} \bar{M}_x = \sum_{k=1}^n \bar{M}_{kx} = 0, \\ \bar{M}_y = \sum_{k=1}^n \bar{M}_{ky} = 0, \\ \bar{M}_z = \sum_{k=1}^n \bar{M}_{kz} = 0. \end{cases} \quad (1.28)$$

Если пары расположены в одной плоскости, векторы моментов их будут параллельны. Момент результирующей пары определится как алгебраическая сумма моментов пар:

$$M = \sum_{k=1}^n M_k = 0.$$

1.4. Равновесие произвольной системы сил

1.4.1. Теорема о параллельном переносе сил. Теорема Пуансо

Силу, приложенную к твердому телу, можно переносить, не изменяя ее действия на тело, из данной точки в любую другую точку тела, приложив при этом пару сил с моментом, равным моменту переносимой силы относительно точки переноса.

Пусть на твердое тело действует сила F , приложенная в точке A (рис. 1.51). Действие этой силы на тело не изменится, если к ней в точке B присоединить уравновешенную систему сил F' и F'' , такую, что $|\vec{F}'| = |-\vec{F}''| = |\vec{F}|$. Полученная система трех сил представляет собой силу F' , равную силе F , но приложенную в точке B , и пару сил F и F'' с моментом $M = M_B(F)$.

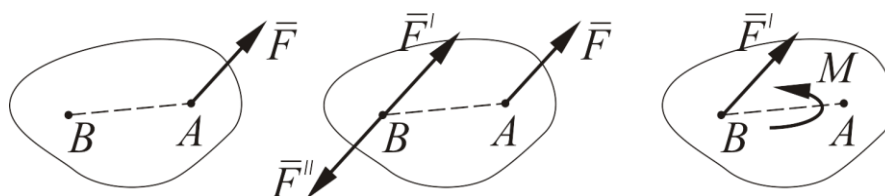


Рисунок 1.51 – Теорема о параллельном переносе сил

Этот метод приведения силы был предложен французским математиком и механиком Луи Пуансо, называется *методом Пуансо*.

1.4.2. Теорема Вариньона

Теорема Вариньона: *если данная система сил имеет равнодействующую, то момент равнодействующей относительно любого центра равен сумме моментов всех сил системы относительно того же центра.*

Если $\bar{R} = \sum \bar{F}_k$ – равнодействующая, то

$$M_O(\bar{R}) = \sum M_O(\bar{F}_k). \quad (1.29)$$

Эту теорему удобно использовать в тех случаях, когда плечо силы относительно заданного центра с точки зрения геометрии вычислить нелегко, а плечи составляющих сил относительно того же центра находятся просто.

Пример. Пусть к телу приложена сила F (рис. 1.52). Определить момент этой силы относительно точки A . Момент силы F относительно точки A будет равен

$$\bar{M}_A(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F}$$

или

$$\bar{M}_A(\bar{F}) = -F \cdot l.$$

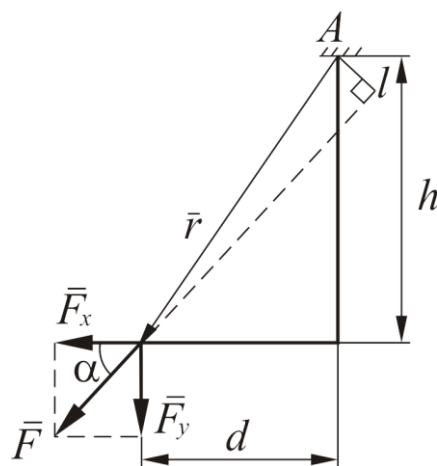


Рисунок 1.52 – Пример определения момента силы относительно точки по теореме Вариньона

Чтобы не определять плечо l , представим вектор силы F в виде ее проекций на оси x и y (рис. 1.52). Тогда сила F и ее момент относительно точки A в аналитической форме

$$\bar{F} = \bar{F}_x + \bar{F}_y,$$

$$\bar{M}_A(\bar{F}) = -F_x h + F_y d = -F \cos(\alpha) h + F \sin(\alpha) d.$$

1.4.3. Приведение произвольной системы сил к единому центру

Любую систему сил, действующую на твердое тело, можно привести к одной силе, равной их главному вектору, приложенной в **центре приведения**, и к одной паре сил с моментом, равным главному моменту системы сил относительно центра приведения.

Главным вектором системы сил называется вектор, равный векторной сумме всех сил системы:

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_k. \quad (1.30)$$

Главным моментом системы относительно центра O называется вектор, равный векторной сумме моментов всех сил системы относительно центра O :

$$\bar{M}_O = \sum \bar{M}_O(\bar{F}_k). \quad (1.31)$$

Таким образом, пространственную систему сил в общем случае можно привести к главному вектору \bar{R} и главному моменту \bar{M}_O .

Рассмотрим приведение произвольной плоской системы сил к произвольному центру. Пусть на твердое тело действует произвольная система сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2 \dots \bar{F}_n$ (рис. 1.53). Выберем точку O за центр приведения. Используя метод Пуансо, перенесем все силы в центр O , присоединяя при этом соответствующие пары. Теперь на тело будет действовать система сил $\bar{F}'_1, \bar{F}'_2 \dots \bar{F}'_n$, для которой $\bar{F}_1 = \bar{F}'_1, \bar{F}_2 = \bar{F}'_2 \dots \bar{F}_n = \bar{F}'_n$, приложенных в центре O , и система пар сил, моменты которых равны:

$$\bar{M}_1 = \bar{M}_O(\bar{F}_1), \quad \bar{M}_2 = \bar{M}_O(\bar{F}_2) \dots \bar{M}_n = \bar{M}_O(\bar{F}_n).$$

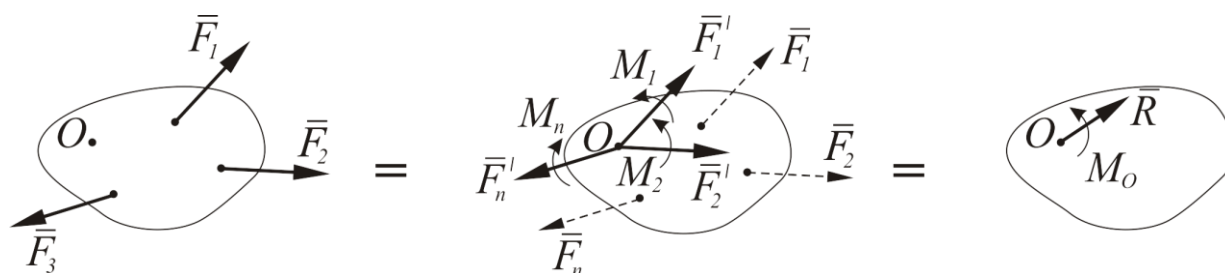


Рисунок 1.53 – Определение главного вектора и главного момента произвольной плоской системы сил

Сходящиеся силы, приложенные в точке O , заменим одной силой \bar{R} (главным вектором), приложенной в точке O , для которой $\bar{R} = \sum \bar{F}_k$. Пары сил сложим по теореме о сложении пар и заменим одной парой с моментом, равным их геометрической сумме $\bar{M}_O = \sum \bar{M}_O(\bar{F}_k)$.

Следует отметить, что сила R (главный вектор) не является в данном случае равнодействующей, так как заменяет систему сил не одна, а вместе с парой сил \bar{M}_O (главным моментом).

Значение главного вектора \bar{R} не зависит от выбора центра приведения, а значение момента \bar{M}_O – зависит, поэтому всегда необходимо указывать, относительно какого центра определяется главный момент.

Пример. На раму действуют силы $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \bar{F}_4$ (рис. 1.54). Определить величину главного вектора \bar{R}_O и главного момента \bar{M}_O относительно центра O , если

$\bar{F}_1 = 10 \text{ кН}$, $\bar{F}_2 = 20 \text{ кН}$, $\bar{F}_3 = 30 \text{ кН}$, $\bar{F}_4 = 40 \text{ кН}$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $a = 1 \text{ м}$, $b = 2 \text{ м}$, $c = 1 \text{ м}$.

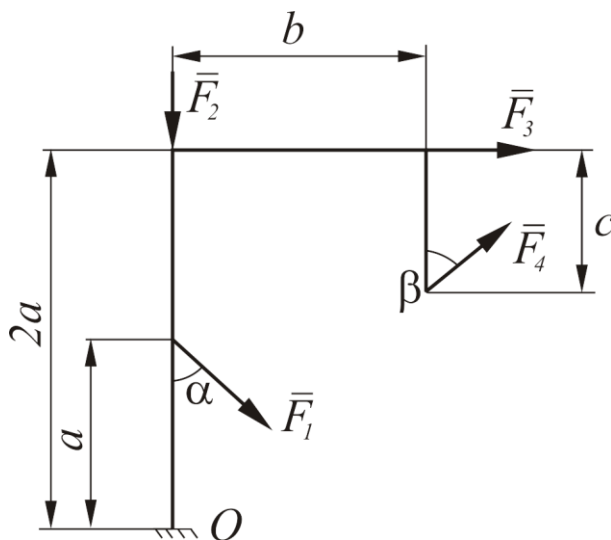


Рисунок 1.54 – Плоская рама, нагруженная произвольной плоской системой сил

Решение. На раму действует плоская произвольная система сил (рис. 1.54). Проведем координатные оси. Разложим силы F_1 и F_4 на составляющие по осям координат (рис. 1.55):

$$F_{1x} = F_1 \sin(\alpha), \quad F_{1y} = -F_1 \cos(\alpha),$$

$$F_{4x} = F_4 \sin(\beta), \quad F_{4y} = F_4 \cos(\beta).$$

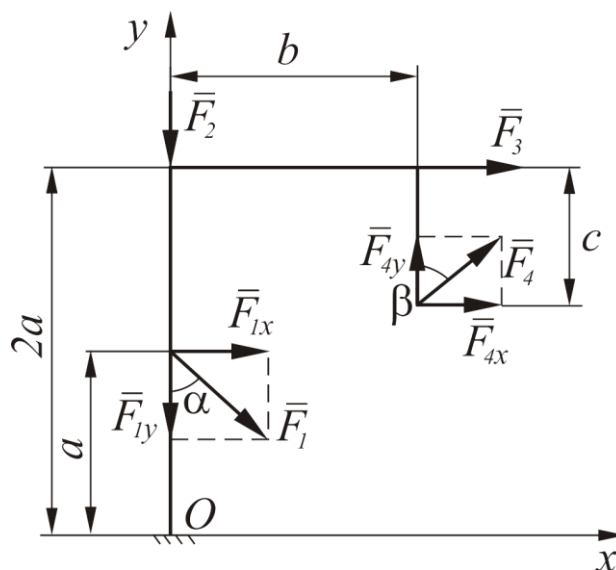


Рисунок 1.55 – Пример определения главного вектора и главного момента произвольной плоской системы сил

Для нахождения главного вектора определим сначала его проекции на оси x и y .

$$R_x = \sum F_{kx} = F_1 \sin(\alpha) + F_3 + F_4 \sin(\beta) = 67 \text{ кН};$$

$$R_y = \sum F_{ky} = -F_1 \cos(\alpha) - F_2 + F_4 \cos(\beta) = -8,6 \text{ кН}.$$

Модуль главного вектора определим по формуле

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 67,5 \text{ кН}.$$

Определим угол наклона главного вектора R к оси x (рис. 1.56):

$$\cos(\varphi) = \frac{R_x}{R} = 0,99,$$

$$\varphi = \arccos(0,99) = 8,1^\circ.$$

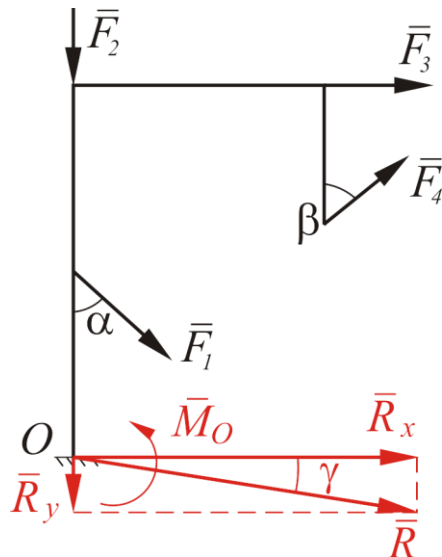


Рисунок 1.56 – Результат определения главного вектора и главного момента для плоской рамы

Для определения главного момента относительно центра O воспользуемся теоремой Вариньона:

$$\bar{M}_O = \sum \bar{M}_O(\bar{F}_k) = \bar{M}_O(\bar{F}_1) + \bar{M}_O(\bar{F}_2) + \bar{M}_O(\bar{F}_3) + \bar{M}_O(\bar{F}_4).$$

Определим моменты сил относительно центра O :

$$\bar{M}_O(\bar{F}_1) = \bar{M}_O(\bar{F}_{1x}) + \bar{M}_O(\bar{F}_{1y}) = -F_1 \sin(\alpha) \cdot a = -5 \text{ кНм},$$

$\bar{M}_O(\bar{F}_2) = 0 \text{ кНм}$, так как сила \bar{F}_2 проходит через точку O .

$$\bar{M}_O(\bar{F}_3) = -F_3 \cdot 2a = -60 \text{ кНм},$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_O(\bar{F}_4) &= \bar{M}_O(\bar{F}_{4x}) + \bar{M}_O(\bar{F}_{4y}) = \\ &= F_4 \sin(\beta) \cdot (2a - c) + F_4 \cos(\beta) \cdot b = 88,8 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

Подставляем полученные значения моментов сил в теорему Вариньона:

$$\bar{M}_O = \sum \bar{M}_O(\bar{F}_k) = -5 - 60 + 88,8 = 23,8 \text{ кНм}.$$

Так как главный момент получился положительным, значит, он направлен против хода часовой стрелки.

1.4.4. Частные случаи приведения плоской произвольной системы сил к простейшему виду

1. Если $\bar{R} = 0$, $\bar{M}_O \neq 0$, то система сил приводится только к главному моменту (паре сил), модуль которого не зависит от выбора центра приведения (рис. 1.57).

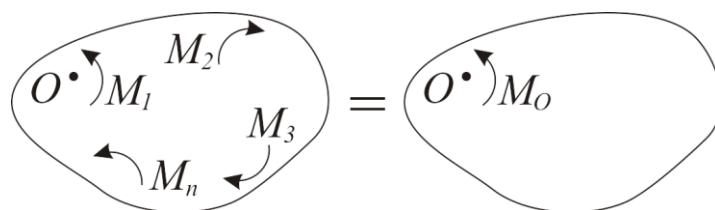


Рисунок 1.57 – Приведение произвольной плоской системы сил к простейшему виду при $\bar{R} = 0$, $\bar{M}_O \neq 0$

2. Если $\bar{R} \neq 0$, $\bar{M}_O = 0$, то система сил приводится к равнодействующей, линия действия которой проходит через центр приведения (рис. 1.58).

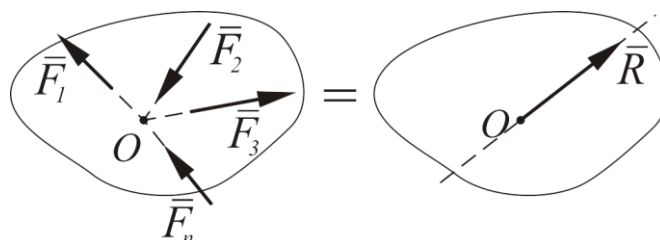


Рисунок 1.58 – Приведение произвольной плоской системы сил к простейшему виду при $\bar{R} \neq 0$, $\bar{M}_O = 0$

Этот случай возможен, например, когда изучается приведение к простейшему виду системы сходящихся сил, линии действия которых пересекаются в одной точке. В этом случае получаем теорему о сложении системы сходящихся сил.

Теорема. Система сходящихся сил имеет равнодействующую, равную векторной сумме данных сил, а ее линия действия проходит через точку пересечения линий действия этих сил.

3. Если $\bar{R} \neq 0$, $\bar{M}_O \neq 0$, то система сил приводится к равнодействующей, линия действия которой не проходит через центр приведения O , а проходит через другую точку C , где $OC = \frac{M_O}{R}$ (рис. 1.59).

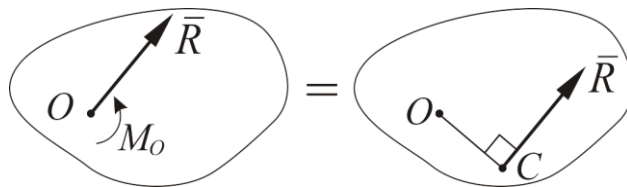


Рисунок 1.59 – Приведение произвольной плоской системы сил к простейшему виду при $\bar{R} \neq 0$, $\bar{M}_O \neq 0$

4. Если $\bar{R} = 0$, $\bar{M}_O = 0$, то система сил находится в равновесии.

1.4.5. Условия равновесия произвольной системы сил

Произвольная пространственная система сил

Для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на три координатные оси (x , y , z) и суммы моментов всех сил относительно этих осей равнялись нулю (рис. 1.60).

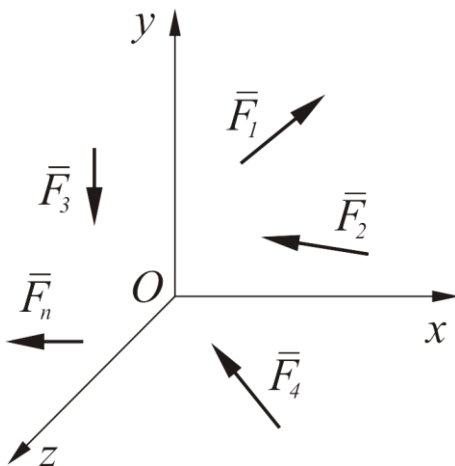


Рисунок 1.60 – Произвольная пространственная система сил

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k) = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k) = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0 \quad \sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k) = 0. \end{array} \right. \quad (1.32)$$

Произвольная плоская система сил

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор \bar{R} и главный момент \bar{M}_O этой системы сил относительно любого центра O равнялись нулю, т. е. $\bar{R} = 0$, $\bar{M}_O = 0$.

Если записать выражение для главного вектора через его проекции $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$, то для равновесия произвольной плоской системы сил должны выполняться следующие условия:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 0; \quad (1.33)$$

$$\bar{M}_O = 0. \quad (1.34)$$

Существует 3 вида (формы) условий равновесия плоской произвольной системы сил.

Первый вид условий равновесия (основной):

$$\left\{ \begin{array}{l} R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \\ R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \\ \sum_{k=1}^n M_O(\bar{F}_k) = 0. \end{array} \right. \quad (1.35)$$

Второй вид условий равновесия:

$$\begin{cases} R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \\ \sum_{k=1}^n M_A(\bar{F}_k) = 0; \\ \sum_{k=1}^n M_B(\bar{F}_k) = 0, \end{cases} \quad (1.36)$$

где прямая AB не должна быть перпендикулярна оси ox (рис. 1.61).

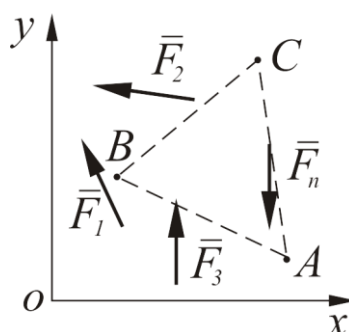


Рисунок 1.61 – Произвольная плоская система сил

Третий вид условий равновесия:

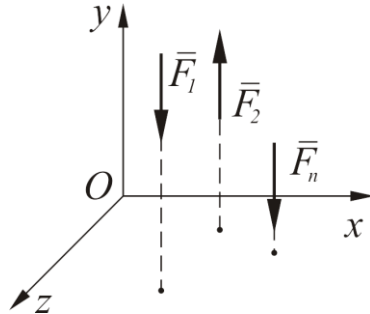
$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n M_A(\bar{F}_k) = 0; \\ \sum_{k=1}^n M_B(\bar{F}_k) = 0; \\ \sum_{k=1}^n M_C(\bar{F}_k) = 0, \end{cases} \quad (1.37)$$

где точки A , B и C не должны лежать на одной прямой.

1.4.6. Условие равновесия параллельной системы сил

Параллельная система сил – это система, в которой все силы, действующие на тело, лежат на параллельных прямых.

Для равновесия **пространственной параллельной системы сил** необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на ось, параллельную линиям действия сил, равнялась нулю, и суммы моментов всех сил относительно двух оставшихся осей также равнялись нулю.



$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \\ \sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k) = 0; \\ \sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k) = 0. \end{cases} \quad (1.38)$$

Рисунок 1.62 – Пространственная система параллельных сил

Существует 2 вида (формы) условий равновесия для **плоской произвольной системы сил**.

Первый вид условий равновесия (основной):

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \\ \sum_{k=1}^n M_O(\bar{F}_k) = 0. \end{cases} \quad (1.39)$$

Для равновесия плоской параллельной системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на ось, параллельную линиям действия сил, равнялась нулю, и сумма моментов всех сил относительно какой-либо точки, принадлежащей плоскости действия системы сил, также равнялась нулю.

Второй вид условий равновесия:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n M_A(\bar{F}_k) = 0; \\ \sum_{k=1}^n M_B(\bar{F}_k) = 0, \end{cases} \quad (1.40)$$

где прямая AB не параллельна оси oy (рис. 1.63).

Для равновесия плоской параллельной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех сил относительно двух произвольных точек, принадлежащих плоскости действия системы сил и не лежащих на прямой, параллельной линиям действия сил, равнялись нулю.

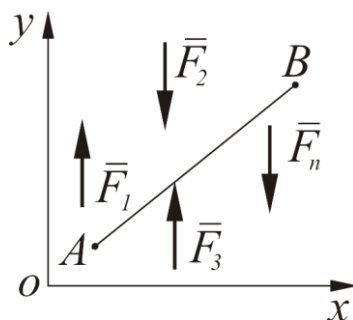


Рисунок 1.63 – Плоская система параллельных сил

1.5. Статически определимые и неопределимые задачи. Составные конструкции

1.5.1. Статически определимые и статически неопределимые задачи

Для каждой системы сил можно составить определенное число уравнений равновесия – от одного для системы сил, имеющих общую линию действия, до шести для произвольной пространственной системы сил. Очевидно, что для однозначного определения неизвестных величин их число не должно превышать число уравнений равновесия.

Задачи статики, в которых число независимых величин равно числу уравнений равновесия, составленных для системы сил, называют **статически определимыми**. Если же число неизвестных величин превышает число уравнений равновесия, то такую задачу методом составления уравнений равновесия решить невозможно. Такие задачи называются **статически неопределимыми**.

Например, если балка опирается на два неподвижных шарнира, то количество реакций связи равно четырем, а уравнений равновесия

можно составить только три (рис. 1.64). Поэтому такая задача является статически неопределимой.

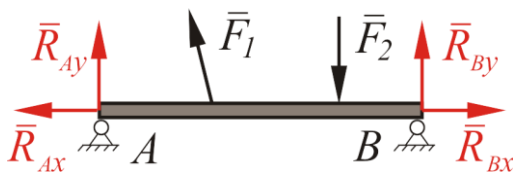


Рисунок 1.64 – Пример статически неопределимой задачи

1.5.2. Равновесие системы тел

Систему, состоящую из нескольких тел, свободно опирающихся друг на друга или соединенных между собой подвижными соединениями (шарниры, стержни, тросы и др.), называют **системой тел**.

Силы, действующие на систему тел, подразделяют на внешние и внутренние.

Внешними называют силы, с которыми на тело рассматриваемой системы действуют тела, не входящие в эту систему.

Внутренними называют силы взаимодействия между телами рассматриваемой системы.

Примером системы тел является соединение трактора 1 с сельскохозяйственным агрегатом 2 (плугом) (рис. 1.65). К внешним силам этой системы относятся: силы тяжести (G_1, G_2) трактора и плуга, силы сопротивления почвы (F_1, F_2), реакции опорных поверхностей (R_1, R_2, R_3). К внутренним силам системы тел относятся силы взаимодействия между трактором и агрегатом (T_1, T_2).

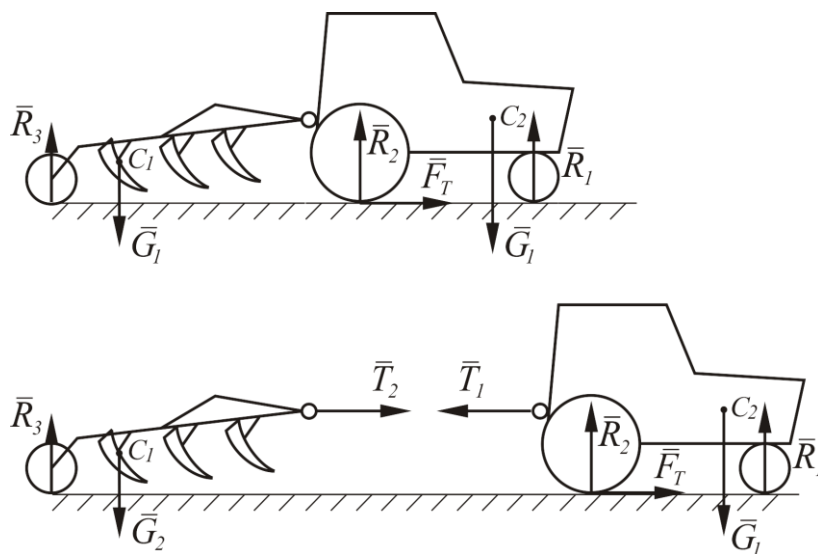


Рисунок 1.65 – Пример системы тел

Если система тел находится в равновесии, то и каждое тело, входящее в систему, тоже находится в состоянии равновесия. Это позволяет рассматривать равновесие системы тел как в целом, так и каждого тела отдельно. Составляя уравнения равновесия для каждого тела отдельно, мы определяем внутренние силы, которые при рассмотрении равновесия тел, составляющих систему, переходят в разряд внешних сил. По аксиоме равенства действия и противодействия внутренние силы между телами будут равны по модулю и противоположны по направлению $|\vec{T}_1| = |-\vec{T}_2|$. Поэтому для рассмотрения равновесия составной конструкции ее расчленяют, заменяя внутренние связи соответствующими реакциями, и рассматривают равновесие каждой части отдельно, а также конструкции целиком (при необходимости).

Для примера рассмотрим определение реакций связи для технической системы, приведенной выше.

Пример. Машинный агрегат, состоящий из трактора и прицепного плуга, находится в состоянии равновесия (рис. 1.66). Определить силу тяги F_T трактора и реакции связи R_1, R_2, R_3 с опорной поверхностью, если известны:

M_C – момент сопротивления на ведомом колесе трактора и колесе прицепного плуга;

G_1, G_2 – вес трактора и навесного плуга;

l_1, l_2 – расстояние от центра тяжести трактора до центров его колес;

l_3 – расстояние от центра заднего колеса трактора до сцепки;

l_4 – расстояние от сцепки до центра тяжести плуга;

l_5 – расстояние от центра тяжести плуга до центра транспортного колеса плуга;

h_1 – расстояние от центра тяжести трактора до опорной поверхности;

h_2 – расстояние от сцепки до опорной поверхности.

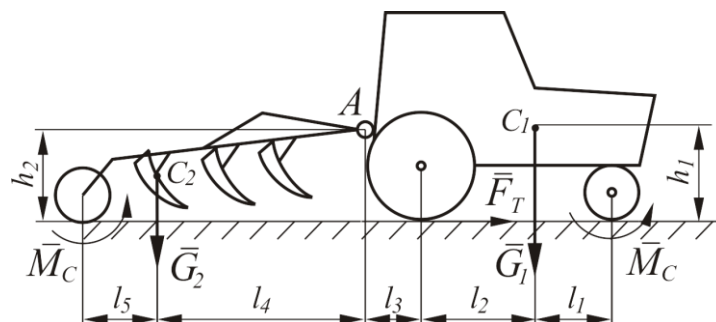


Рисунок 1.66 – Трактор с прицепным плугом

Решение. Для определения реакций связи отбрасываем опорную поверхность и заменяем ее действие реакциями R_1, R_2, R_3 (рис. 1.67). Система сил, действующая на составную конструкцию, представляет собой произвольную плоскую систему сил, для которой можно составить три уравнения равновесия. Данная система является один раз статически неопределимой, так как количество неизвестных величин на единицу больше количества уравнений равновесия.

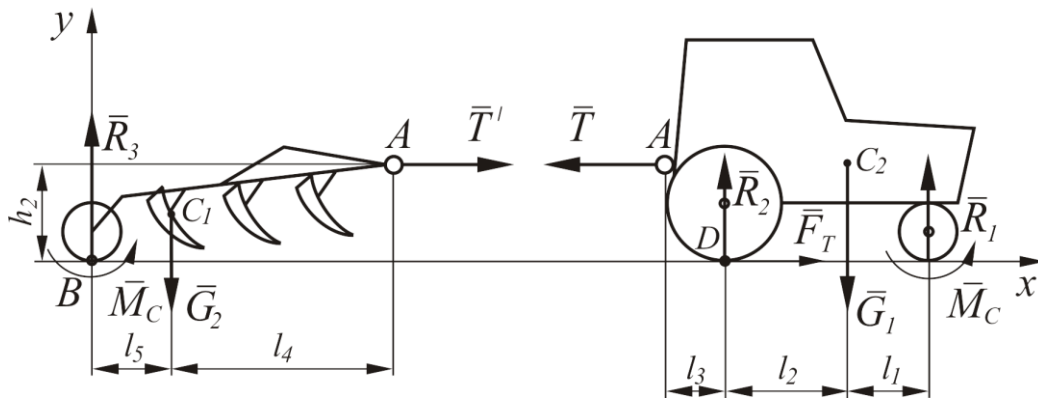


Рисунок 1.67 – Схема для определения реакций связей для системы, состоящей из трактора и навесного плуга

Для раскрытия статической неопределимости разобьем составную конструкцию на две части и рассмотрим отдельно равновесие трактора и плуга. Реакции внутренней связи шарнира A (\bar{T}, \bar{T}') равны по модулю, но противоположны по направлению.

Сначала рассмотрим равновесие плуга, составив уравнения равновесия:

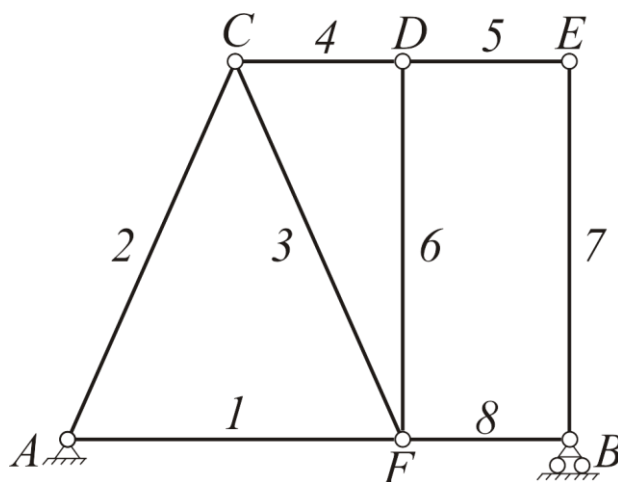
$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma M_A = 0: \quad -R_3(l_5 + l_4) + G_2 l_4 + M_C = 0 \quad \Rightarrow R_3 = \frac{G_2 l_4 + M_C}{l_5 + l_4} \\ \Sigma M_B = 0: \quad -T'_1 h_2 - G_2 l_5 + M_C = 0 \quad \Rightarrow T'_1 = \frac{M_C - G_2 l_5}{h_2} \end{array} \right.$$

Для определения реакций R_1 и R_2 рассмотрим равновесие трактора, учитывая что $|\bar{T}| = |-\bar{T}'|$. Составляем уравнения равновесия и определяем неизвестные реакции и тяговое усилие трактора:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma F_x = 0; \quad F_T - T = 0 \quad \Rightarrow F_T = T \\ \Sigma M_D = 0: \quad R_1(l_1 + l_2) - G_1 l_2 + T h_2 + M_C = 0 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow R_1 = \frac{G_1 l_2 - T h_2 - M_C}{l_1 + l_2} \\ \Sigma F_y = 0; \quad R_1 + R_2 - G_1 = 0 \quad \Rightarrow R_2 = G_1 - R_1 \end{array} \right. .$$

1.5.3. Методы расчета усилий в стержнях ферм

Ферма – это шарнирно-стержневая, геометрически неизменяемая конструкция. Если все стержни лежат в одной плоскости, ферма называется **плоской** (рис. 1.68). Шарнирное соединение стержней позволяет считать, что силы всегда направлены вдоль стержней. Точки соединения стержней называют **узлами** и обозначают буквами, а стержни нумеруют по порядку. Все внешние силы прикладываются к ферме только в узлах. При расчете фермы трением в узлах и весом стержней пренебрегают или распределяют веса стержней по узлам. Расчет фермы сводится к определению усилий в опорах фермы и в ее стержнях под действием внешних нагрузок.



Ограничимся рассмотрением плоских ферм. В таких фермах число стержней k и число узлов n связаны соотношением

$$k = 2n - 3. \quad (1.41)$$

Величину k называют статической определимостью фермы.

Если $k < 2n - 3$, то ферма нежесткая.

Если $k > 2n - 3$, то ферма статически неопределима.

Так, например, для фермы на рисунке выше:

$$\begin{aligned} k &= 8, & n &= 6; \\ 8 &< 2 \cdot 6 - 3 = 9, \end{aligned}$$

т. е. ферма нежесткая.

Для расчета ферм существует несколько методов:

- метод вырезания узлов;
- метод сечений (метод Риттера);
- графический метод;
- метод диаграммы Максвелла – Кремоны.

Рассмотрим два первых метода.

Метод вырезания узлов. Этот метод состоит в том, что мысленно вырезают узлы фермы, рассматривая их равновесие. Действие отброшенной части фермы заменяют усилиями, возникающими в стержнях, которые попадают в разрез. Поэтому схема нагружения узла будет представлять систему сходящихся сил на плоскости, для которой можно составить только два уравнения равновесия.

Так как в начале расчета фермы неизвестно, какие стержни растянуты и какие сжаты, то условно предполагают, что все стержни растянуты и направляют усилия от узлов. Если в результате вычислений получается ответ со знаком минус, то соответствующий стержень сжат.

При расчете ферм сначала составляют уравнения равновесия для фермы в целом и определяют неизвестные опорные реакции. Для плоской фермы, показанной на рисунке 1.69, – это реакции R_{Ax} , R_{Ay} , R_B . Все углы между стержнями фермы считают известными.

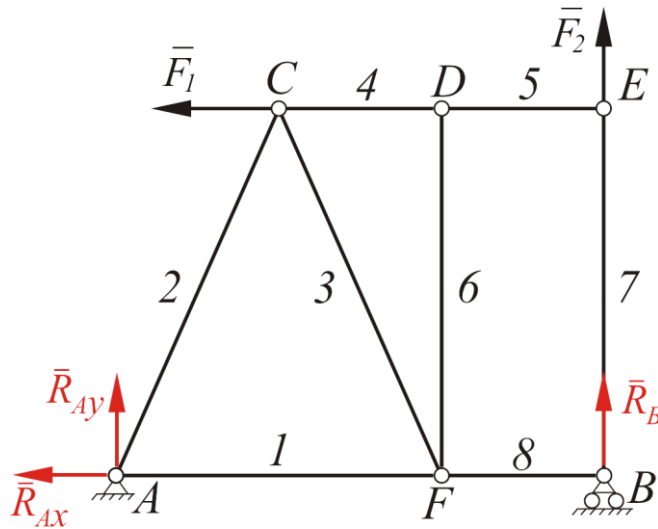


Рисунок 1.69 – Плоская ферма

После определения реакций выделяют узел, в котором сходятся два стержня, например узел A . Действие стержней на узел заменяем усилиями T_1 и T_2 , направляя их вдоль стержней от узла (рис. 1.70). Для узла A составляют уравнения равновесия, из которых определяют T_1 и T_2 .

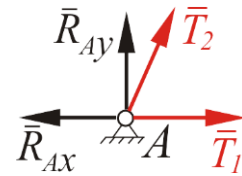


Рисунок 1.70 – Схема усилий в узле A

Затем выделяют следующий узел C , в котором сходятся три стержня (2, 3 и 4) (рис. 1.71). Усилия в стержнях 3 и 4 подлежат определению. Действие стержня 1 на узел C заменяем реакцией T'_2 , направляя ее в сторону противоположную реакции T_2 . Вновь составляют уравнения равновесия, из которых определяют T_3 и T_4 .

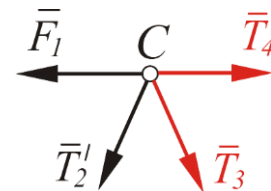


Рисунок 1.71 – Схема усилий в узле C

Дальнейшая последовательность рассмотрения узлов определяется так, чтобы число неизвестных сил, приложенных к узлу, не превышало двух. В рассматриваемом примере остается рассмотреть равновесие узлов D , E , и F и определить реакции в стержнях T_5 , T_6 , T_7 , T_8 .

Усилия в стержнях узла B (T_7 , T_8) определяются в предыдущих расчетах. Поэтому уравнения равновесия для узла B служат для проверки правильности расчетов.

Метод сечений (метод Риттера). Этим методом удобно пользоваться для определения усилий в отдельных стержнях фермы, в частности для проверочных расчетов. Идея метода состоит в том, что ферму разделяют на две части сечением, проходящим через три стержня, в которых (или в одном из которых) требуется определить усилие, и рассматривают равновесие одной из этих частей. Действие отброшенной части заменяют соответствующими силами, направляя их вдоль разрезанных стержней от узлов. Затем составляют уравнения равновесия так, чтобы в каждом уравнении была только одна неизвестная сила.

Рассмотрим применение метода сечений для предыдущего примера:

1. Сначала, как и при расчете методом вырезания узлов, определяют реакции опор R_{Ax} , R_{Ay} , R_B , рассматривая равновесие всей фермы в целом.

2. Затем разделяют ферму сечением, проходящим через три стержня, силы в которых необходимо определить (рис. 1.72).

3. Отбрасывают одну из частей фермы (левую или правую). Действие отброшенной части на оставшуюся заменяют силами, направленными вдоль стержней от узлов (узлы A и C).

4. Составляют уравнения равновесия для произвольной плоской системы сил, откуда определяют неизвестные усилия (T_1 , T_3 , T_4).

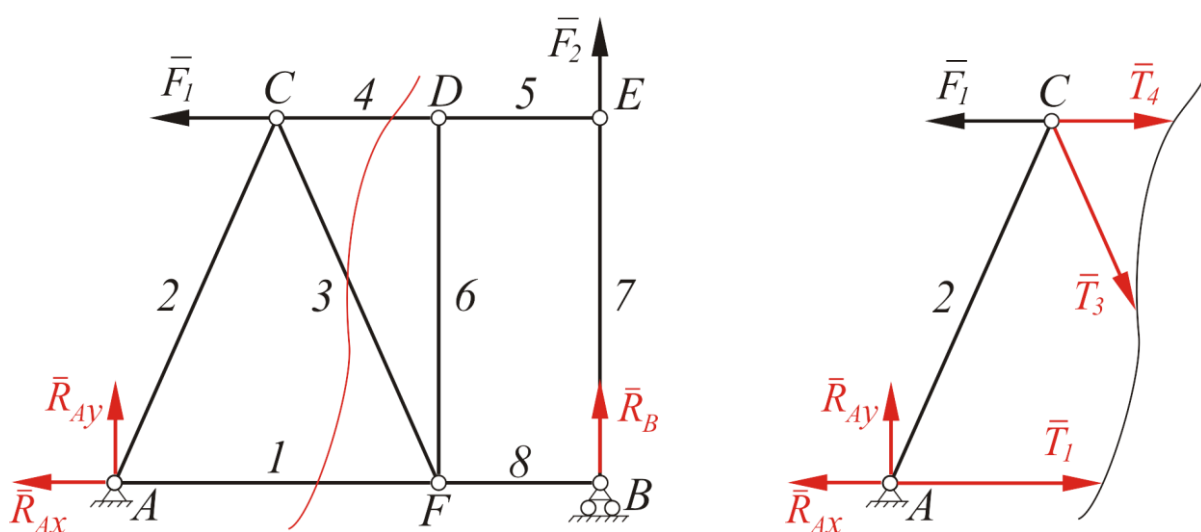


Рисунок 1.72 – Метод сечений

1.6. Трение

Рассматривая равновесие несвободных тел, мы пренебрегали силами трения и все поверхности считали абсолютно гладкими. В действительности поверхности всех тел обладают той или иной степенью шероховатости и реакции их не будут направлены по нормальям к этим поверхностям.

Трение играет в природе и технике огромную роль, в одних случаях полезную, в других – вредную. Трение вызывает износ трущихся поверхностей, уменьшает долговечность машин и механизмов. Но без трения невозможна работа различных винтовых соединений, невозможно движение автомашин, поездов, людей и т. д.

Трением называется сопротивление, которое возникает при движении или стремлении к движению одного тела по поверхности другого.

По характеру взаимного перемещения тел различают трение скольжения и трение качения и верчения.

1.6.1. Законы трения скольжения

Трение скольжения появляется при стремлении одного тела двигаться по поверхности другого в плоскости соприкосновения тел.

В инженерных расчетах обычно исходят из ряда установленных опытным путем закономерностей, которые с достаточной для практики точностью отражают основные особенности явления трения. Такие закономерности при трении называют **законами трения скольжения при покое**:

1. При стремлении сдвинуть одно тело по поверхности другого в плоскости соприкосновения тел возникает сила трения, которая может изменяться в пределах

$$0 \leq F_{mp} \leq F_{np}, \quad (1.42)$$

где F_{np} – предельная сила трения.

Сила трения направлена в сторону, противоположную той, куда действующие силы стремятся сдвинуть тело.

2. Величина предельной силы трения равна произведению статического коэффициента трения на нормальную реакцию опоры:

$$F_{np} = f_0 N. \quad (1.43)$$

Статический коэффициент трения (коэффициент трения покоя) f_0 определяется опытным путем и зависит от материала соприкасающихся поверхностей.

3. Величина предельной силы трения в довольно широких пределах не зависит от размера соприкасающихся при трении поверхностей. Объединяя вместе первый и второй законы, получаем, что при равновесии силы трения покоя:

$$F_{mp} \leq f_0 N. \quad (1.44)$$

Следует отметить, что пока груз находится в покое, сила трения F_{mp} равна сдвигающей силе Q , а не величине $F_{np} = f_0 N$. Значение F_{np} сила трения принимает только тогда, когда положение равновесия становится предельным.

Примеры значений статического коэффициента трения:

- дерево по дереву – $f_0 = 0,4 \div 0,7$;
- металл по металлу – $f_0 = 0,15 \div 0,25$;
- сталь по льду – $f_0 = 0,027$.

Все изложенное выше относится к случаю трения скольжения при покое. При движении сила трения направлена в сторону, противоположную движению, и равна:

$$F_{mp} = f \cdot N, \quad (1.45)$$

где f – динамический коэффициент трения скольжения.

Динамический коэффициент трения скольжения является величиной отвлеченной, определяется опытным путем и зависит не только от материала, но и от скорости движения тел.

1.6.2. Реакции связей шероховатых поверхностей.

Угол трения

До сих пор при решении задач статики мы пренебрегали силами трения, считая все соприкасающиеся поверхности абсолютно гладкими. Реакция реальной (шероховатой) связи будет складываться из двух составляющих: из нормальной реакции и перпендикулярной к ней силы трения F_{np} (рис. 1.73). Следовательно, полная реакция R будет отклонена от нормали к поверхности на некоторый угол. При изменении силы трения от нуля до предельного значения F_{np} реакция R будет меняться от N до R_{np} , а ее угол с нормалью будет расти от нуля до некоторого предельного значения φ_0 . *Наибольший угол φ_0 , который полная реакция шероховатой связи образует с нормалью к поверхности, называется углом трения.*

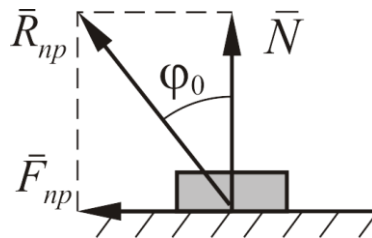


Рисунок 1.73 – Реакция связей шероховатой поверхности

Из чертежа видно, что

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{F_{np}}{N}. \quad (1.46)$$

Так как $F_{np} = f_0 N$, то отсюда следует связь между углом трения и коэффициентом трения:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = f_0. \quad (1.47)$$

При равновесии полная реакция R , в зависимости от сдвигающих сил, может проходить как угодно внутри угла трения. Когда равновесие становится предельным, реакция будет отклонена от нормали на угол φ_0 .

Если к телу, лежащему на шероховатой поверхности, приложить силу P , образующую угол α с нормалью, то тело сдвинется только то-

гда, когда сдвигающее усилие $P \sin \alpha$ будет больше $F_{np} = f_0 P \cos \alpha$ (где $N = P \cos \alpha$) (рис. 1.74). Но неравенство $P \sin \alpha > f_0 P \cos \alpha$, в котором $f_0 = \operatorname{tg} \varphi_0$, т. е. при $\alpha > \varphi_0$. Следовательно, тело можно сдвинуть только при условии, если внешняя сила образует с нормалью угол больший угла трения.

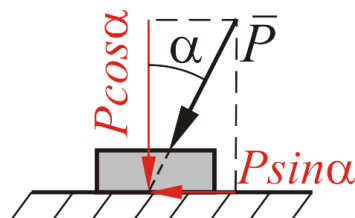


Рисунок 1.74 – Условие равновесия при наличии сил трения

1.6.3. Равновесие тел при наличии трения

Изучение равновесия тел с учетом сил трения сводится к рассмотрению предельного состояния равновесия, когда сила трения достигает своего наибольшего значения F_{np} . При аналитическом решении задач реакцию шероховатой связи в этом случае изображают двумя составляющими N и $F_{np} = f_0 N$. Затем составляют обычные условия равновесия статики, подставляют в них вместо F_{np} величину $f_0 N$ и, решая полученные уравнения, определяют искомые величины.

При геометрическом решении реакцию шероховатой связи удобнее изображать одной силой R , которая в предельном положении равновесия будет отклонена от нормали к поверхности на угол φ_0 .

1.6.4. Трение качения

Трением качения называют сопротивление, возникающее при качении одного тела по поверхности другого.

Рассмотрим лежащий на шероховатой поверхности цилиндрический каток радиуса R и весом P (рис. 1.75). Если к оси катка приложить силу Q , меньшую предельной силы трения F_{np} , то в точке A возникает сила трения F_{mp} , численно равная Q , которая будет препятствовать скольжению цилиндра по плоскости. Если считать нормальную реакцию N тоже приложенной в точке A , то она уравнивает силу P , а силы Q и F образуют пару сил, вызывающую качение цилиндра.

дра. При такой схеме качение должно начаться, как видим, под действием любой, сколь угодно малой силы Q .

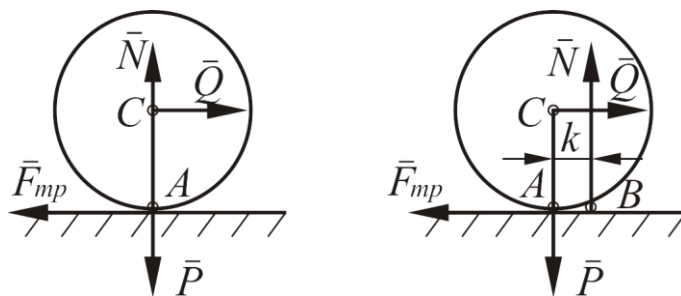


Рисунок 1.75 – Трение качения цилиндрического катка

Истинная картина выглядит иначе. Фактически, вследствие деформации тел, касание их происходит вдоль некоторой площадки AB . При действии силы Q интенсивность давления у края A убывает, а у края B возрастает. В результате реакция N оказывается смещенной в сторону действия силы Q . С увеличением силы Q это смещение растет до некоторой предельной величины k . Таким образом, в предельном положении на каток будут действовать пара (Q_{np}, F) с моментом $Q_{np} \cdot R$ и уравновешивающая ее пара (N, P) с моментом $N \cdot k$. Из равенства моментов следует:

$$Q_{np} \cdot R = N \cdot k$$

или

$$Q_{np} = \frac{k}{R} N. \quad (1.48)$$

Пока $Q < Q_{np}$, каток находится в покое; при $Q > Q_{np}$ начинается качение.

Величина k , равная смещению нормальной реакции, называется **коэффициентом трения качения**. Данный коэффициент измеряется в сантиметрах и зависит от материала соприкасающихся тел.

Отношение k/R для большинства материалов значительно меньше статического коэффициента трения f_0 . Этим объясняется то, что в

технике, когда это возможно, стремятся заменить трение скольжения на трение качения (колеса, катки, шариковые подшипники и т. п.).

1.7. Центр тяжести

1.7.1. Центр тяжести твердого тела

Согласно закону всемирного тяготения на все материальные частицы, расположенные вблизи поверхности Земли, действуют силы тяжести, направленные к центру Земли. Для тел, размеры которых малы по сравнению с радиусом Земли, силы тяжести частиц тела можно считать параллельными друг другу и сохраняющимися для каждой частицы постоянной величиной при любых поворотах тела.

Равнодействующую сил тяжести p_1, p_2, \dots, p_n , действующих на частицы данного тела, обозначим P (рис. 1.76). Модуль этой силы равен весу тела и определяется следующим образом:

$$P = \sum p_k . \quad (1.49)$$

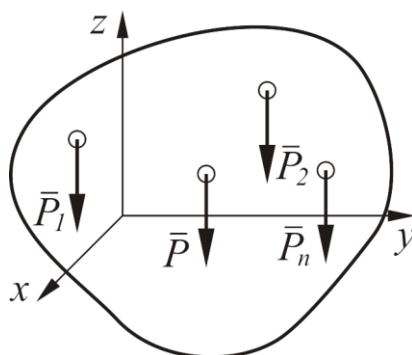


Рисунок 1.76 – Определение центра тяжести твердого тела

При любом повороте тела в пространстве силы остаются приложенными в одних и тех же точках и параллельными друг другу, изменяется только их направление по отношению к телу. При этом равнодействующая P будет также поворачиваться по отношению к телу и будет проходить при любых положениях тела через одну и ту же точку C , неизменно связанную с телом. Эта точка называется **центром тяжести тела**.

Таким образом, **центром тяжести твердого тела** называется неизменно связанная с этим телом точка, через которую проходит линия действия равнодействующей сил тяжести частиц данного тела, при любом положении тела в пространстве.

Координаты центра тяжести тела, как центра параллельных сил, определяются формулами

$$\begin{cases} x_C = \frac{\sum p_k x_k}{P}, \\ y_C = \frac{\sum p_k y_k}{P}, \\ z_C = \frac{\sum p_k z_k}{P}, \end{cases} \quad (1.50)$$

где x_k, y_k, z_k – координаты точек приложения сил тяжести частиц тела;
 p_k – вес k -й частицы тела.

1.7.2. Координаты центров тяжести однородных тел

Для однородного тела вес p_k любой его части пропорционален объему v_k этой части:

$$p_k = \gamma v_k, \quad (1.51)$$

а вес P всего тела пропорционален объему V этого тела:

$$P = \gamma V, \quad (1.52)$$

где γ – вес единицы объема.

Подставляя эти значения P и p_k в формулы для определения координат центра тяжести твердого тела, получаем *координаты центра тяжести объема V* :

$$\begin{cases} x_C = \frac{\sum p_k x_k}{P} = \frac{\sum \gamma \cdot v_k \cdot x_k}{\gamma \cdot V} = \frac{\sum v_k x_k}{V}, \\ y_C = \frac{\sum p_k y_k}{P} = \frac{\sum \gamma \cdot v_k \cdot y_k}{\gamma \cdot V} = \frac{\sum v_k y_k}{V}, \\ z_C = \frac{\sum p_k z_k}{P} = \frac{\sum \gamma \cdot v_k \cdot z_k}{\gamma \cdot V} = \frac{\sum v_k z_k}{V}. \end{cases} \quad (1.53)$$

Как видно, центр тяжести однородного тела зависит только от его геометрической формы, а от величины γ не зависит. По этой причине точку C с координатами x_C , y_C , z_C называют **центром тяжести объема V** .

Путем аналогичных рассуждений для однородной плоской и тонкой пластины получим *координаты центра тяжести площади S* :

$$\begin{cases} x_C = \frac{\sum s_k x_k}{S}, \\ y_C = \frac{\sum s_k y_k}{S}, \\ z_C = \frac{\sum s_k z_k}{S}, \end{cases} \quad (1.54)$$

где S – площадь всей пластины;
 s_k – площади ее частей.

Аналогично получают формулы для *координат центра тяжести линии*:

$$\begin{cases} x_C = \frac{\sum l_k x_k}{L}, \\ y_C = \frac{\sum l_k y_k}{L}, \\ z_C = \frac{\sum l_k z_k}{L}, \end{cases} \quad (1.55)$$

где L – длина всей линии;
 l_k – длины ее частей.

1.7.3. Способы определения координат центров тяжести тел

Для определения положения центров тяжести однородных тел, имеющих простую геометрическую форму, или сложных тел, образованных из простых, можно использовать следующие способы: **симметрии, разбиения на части, дополнения** или, иначе, **способ отрицательных объемов или площадей**.

1. **Способ симметрии.** Если однородное тело имеет плоскость, ось или центр симметрии, то центр тяжести его находится в этой плоскости, на оси или в центре симметрии.

Например, однородное круглое кольцо имеет центр симметрии в центре кольца, и, следовательно, там будет и центр тяжести. Прямоугольная пластинка имеет две оси симметрии, и центр тяжести находится на пересечении этих осей и т. д.

2. **Способ разбиения на части.** Если тело сложной формы можно разбить на конечное число частей, у которых положение центров тяжести известно, то точное положение центра тяжести определяется по формулам (см. выше) без привлечения интегрального исчисления.

Пример. С помощью взвешивания определено давление тракторного плуга (рис. 1.77) на полевое колесо $P_{\Pi} = 3,5 \text{ кН}$, на бороздное колесо $P_{Б} = 4 \text{ кН}$ и на заднее колесо $P_{З} = 2,5 \text{ кН}$. Расположение колес показано на рисунке: $a = 0,6 \text{ м}$; $b = 4 \text{ м}$; $c = 2 \text{ м}$; $d = 0,2 \text{ м}$.

Определить координаты проекции центра тяжести плуга на горизонтальной плоскости $xу$.

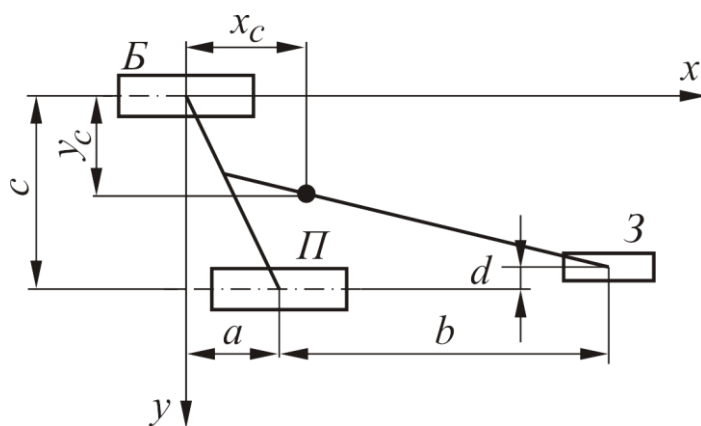


Рисунок 1.77 – Определение центра тяжести тракторного плуга

Решение. Координаты центра тяжести тракторного плуга будем определять относительно плоской системы координат, совместив ее начало с центром колеса B .

Определим суммарное давление плуга на опорные колеса:

$$P = \sum p_k = P_{\Pi} + P_B + P_3 = 3,5 + 4 + 2,5 = 10 \text{ кН}.$$

Определим координаты центров колес относительно выбранной системы координат:

$$\begin{aligned}x_{\Pi} &= a = 0,6 \text{ м}; & y_{\Pi} &= c = 2 \text{ м}; \\x_B &= 0 \text{ м}; & y_B &= 0 \text{ м}; \\x_3 &= a + b = 4,6 \text{ м}; & y_3 &= c - d = 1,8 \text{ м}.\end{aligned}$$

Определим координаты x_C и y_C центра тяжести тракторного плуга:

$$\begin{aligned}x_C &= \frac{\sum p_k x_k}{P} = \frac{P_{\Pi} x_{\Pi} + P_B x_B + P_3 x_3}{P} = \frac{3,5 \cdot 0,6 + 4 \cdot 0 + 2,5 \cdot 4,6}{10} = 1,36 \text{ м}; \\y_C &= \frac{\sum p_k y_k}{P} = \frac{P_{\Pi} y_{\Pi} + P_B y_B + P_3 y_3}{P} = \frac{3,5 \cdot 2 + 4 \cdot 0 + 2,5 \cdot 1,8}{10} = 1,15 \text{ м}.\end{aligned}$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ ПО ГЛАВЕ 1 «СТАТИКА»

1. Что изучает раздел теоретической механики «Статика»?
2. Чем характеризуется сила?
3. Дайте определение проекции силы на координатную ось.
4. Что такое уравновешенная и эквивалентная система сил?
5. Перечислите основные аксиомы статики.
6. Какие бывают системы сил и какие условия должны выполняться для их равновесия?
7. Перечислите основные виды связей и их реакции.
8. Сформулируйте принцип освобожденности от связей.
9. Дайте определение алгебраического и векторного момента сил относительно точки и оси.
10. Как определить равнодействующую двух параллельных сил?
11. Что такое пара сил? Дайте определение алгебраического и векторного момента пары сил.
12. Сформулируйте теорему о параллельном переносе сил.
13. В чем смысл теоремы Вариньона?
14. Как определить главный вектор и главный момент относительно центра системы сил?
15. Перечислите частные случаи приведения плоской произвольной системы сил к простейшему виду.
16. Что такое статически неопределимая задача?
17. Как раскрывается статическая неопределимость для систем тел?
18. Перечислите и раскройте смысл методов расчета ферм.
19. Раскройте смысл основных законов трения при покое.
20. Что такое угол трения? При каком условии тело будет находиться в равновесии при наличии сил трения скольжения?
21. При каком условии тело будет находиться в равновесии при наличии сил трения качения?
22. Как определить центр тяжести твердого тела?

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО СТАТИКЕ

Задание 1.1. Определение равнодействующей плоской сходящейся системы сил

Вариант задания в таблицах 1.1 и 1.2 выбирается по номеру студента в списке группы.

Для заданной системы сходящихся сил необходимо определить равнодействующую двумя способами (графическим и аналитическим) и сравнить полученные результаты. Значения сил и углов приведены в таблице 1.1, схемы – в таблице 1.2.

Таблица 1.1 – Числовые значения для задания 1.1

Номер варианта	F_1 , кН	F_2 , кН	F_3 , кН	F_4 , кН	α , град.	β , град.
1	10	25	30	10	30	20
2	15	10	20	38	45	25
3	20	12	30	28	20	20
4	25	15	35	35	25	35
5	24	22	40	42	15	15
6	6	20	25	30	35	60
7	30	15	40	20	30	55
8	12	6	38	30	40	45
9	18	9	26	35	60	50
10	22	30	10	40	35	30
11	34	16	10	25	50	35
12	45	20	30	40	55	30
13	40	30	10	38	40	45
14	38	18	26	26	20	20
15	8	22	35	10	25	25
16	10	16	30	10	20	15
17	16	32	40	30	35	35
18	15	30	40	10	15	30
19	20	28	10	35	60	40
20	24	10	38	20	55	60
21	20	12	28	30	45	35
22	9	28	35	40	50	50
23	12	24	42	38	30	60
24	25	40	30	25	35	35
25	30	15	40	20	30	55
26	20	30	40	10	45	30

Таблица 1.2 – Схемы к заданию 1.1

Номер варианта	Схема	Номер варианта	Схема	Номер варианта	Схема
1		7		13	
2		8		14	
3		9		15	
4		10		16	
5		11		17	
6		12		18	

Номер варианта	Схема	Номер варианта	Схема	Номер варианта	Схема
19		22		25	
20		23		26	
21		24			

Пример выполнения задания 1.1

Дано. Для системы сходящихся сил F_1, F_2, F_3 и F_4 (см. рис. 1.78) определить равнодействующую сил **графическим и аналитическим методами**, если известны численные значения и направления сил: $F_1 = 10 \text{ Н}, F_2 = 4 \text{ Н}, F_3 = 6 \text{ Н}, F_4 = 8 \text{ Н}$.

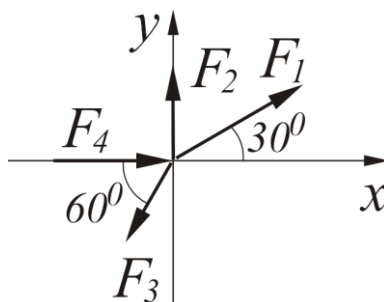


Рисунок 1.78 – Схема к примеру задания 1.1

Решение

Графический способ

Для определения равнодействующей системы сходящихся сил графическим способом построим силовой многоугольник (рис. 1.79), согласно векторному уравнению равновесия:

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_4.$$

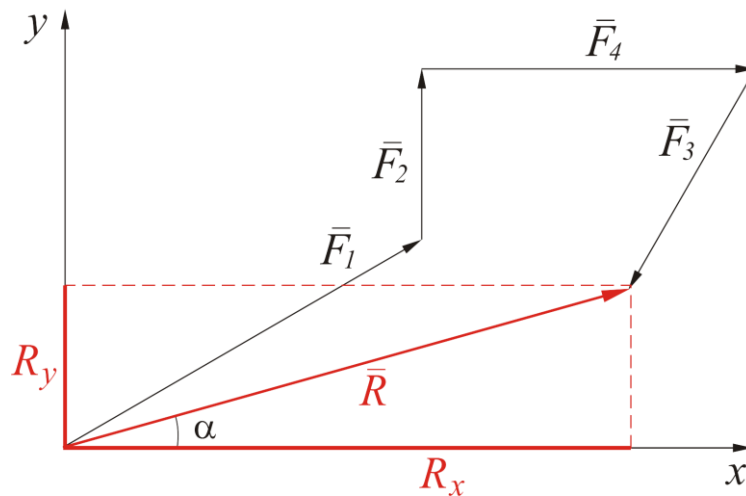


Рисунок 1.79 – Силовой многоугольник

Равнодействующая сил является вектором, замыкающим силовой многоугольник, причем очередность построения векторов заданных сил может быть произвольной.

Для построения силового многоугольника задаемся масштабом, например $1 \text{ см} = 1 \text{ Н}$ (масштаб рекомендуется выбирать таким образом, чтобы вектор минимальной силы был не менее 2 см).

Согласно выбранному масштабу определяем длины заданных сил: $F_1 - 10 \text{ см}$, $F_2 - 4 \text{ см}$, $F_3 - 6 \text{ см}$, $F_4 - 8 \text{ см}$.

По правилу сложения векторов, чтобы сложить векторы, надо из конца одного вектора отложить начало другого вектора, причем силы параллельны заданным направлениям.

Равнодействующая сил направлена из начала первого вектора в конец последнего вектора (в нашем случае из начала вектора F_1 в конец вектора F_3).

Измеряем длину равнодействующей силы ($R=14 \text{ см}$) и определяем ее величину с учетом масштаба:

$$R = 14 \text{ Н.}$$

Измеряем угол наклона равнодействующей заданной системы сил к оси x :

$$\alpha = 15^\circ.$$

Аналитический способ

Определим проекции равнодействующей системы сходящихся сил на координатные оси x и y .

$$R_x = \sum F_{ix} = F_1 \cos 30^\circ - F_3 \cos 60^\circ + F_4 = 10 \cdot 0,866 - 6 \cdot 0,5 + 8 = 13,66 \text{ Н};$$

$$R_y = \sum F_{iy} = F_1 \sin 30^\circ - F_3 \sin 60^\circ + F_2 = 10 \cdot 0,5 - 6 \cdot 0,866 + 4 = 3,8 \text{ Н}.$$

Модуль равнодействующей определяем по формуле

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{13,66^2 + 3,8^2} = 14,18 \text{ Н}.$$

Определим угол наклона равнодействующей к оси x :

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R} = \frac{13,66}{14,18} = 0,96;$$

$$\alpha = 15^\circ.$$

Вывод: результаты для равнодействующей и ее угла наклона к оси x , полученные двумя способами, получились одинаковые.

Задание 1.2. Равновесие плоской системы сходящихся сил

Вариант задания в таблицах 1.3 и 1.4 выбирается по номеру студента в списке группы.

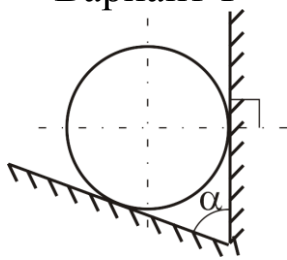
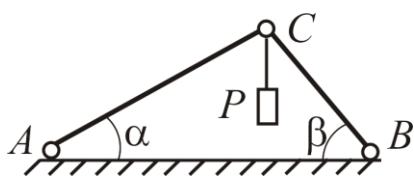
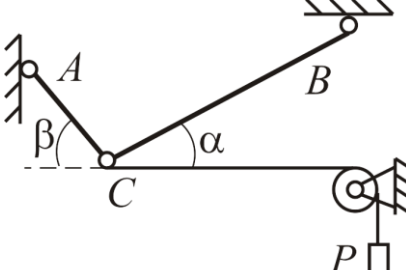
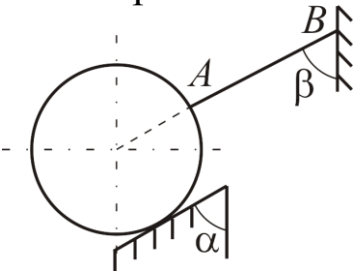
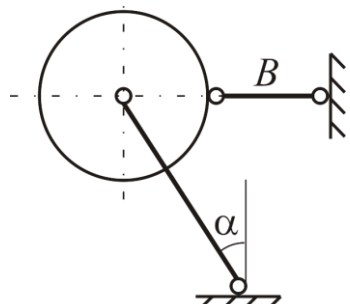
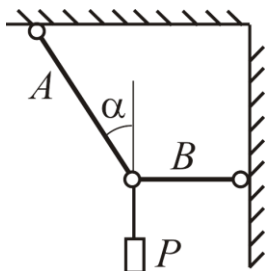
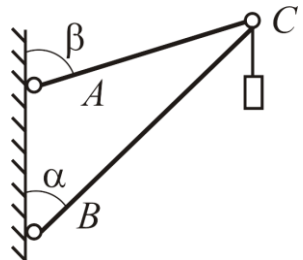
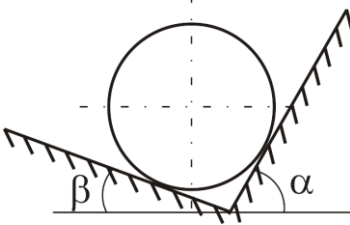
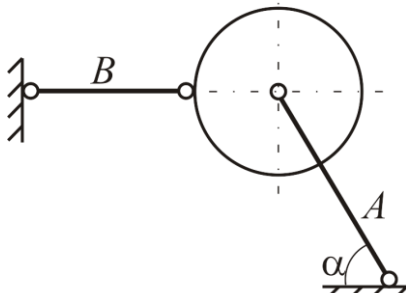
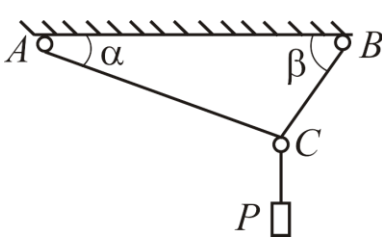
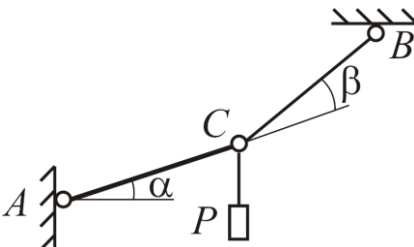
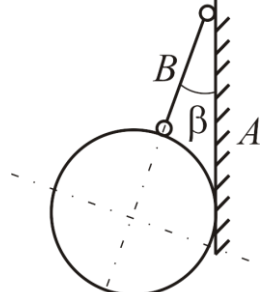
Для заданной плоской системы сходящихся сил, находящейся в состоянии равновесия, определить величину и направление силы, указанной в таблице 1.3, если считать вес груза – P , вес шара – Q .

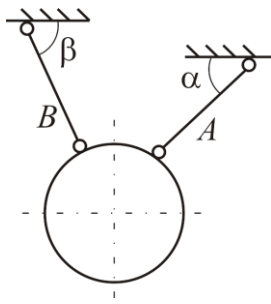
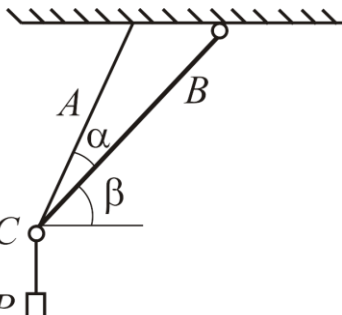
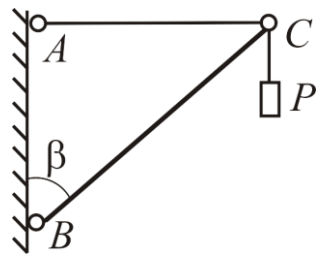
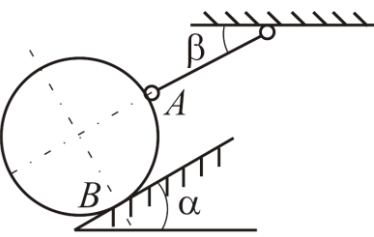
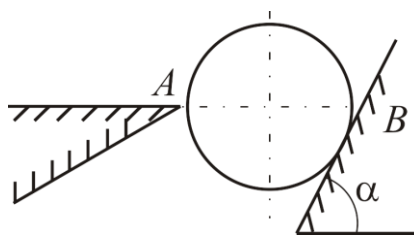
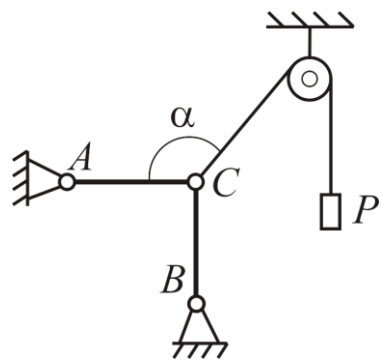
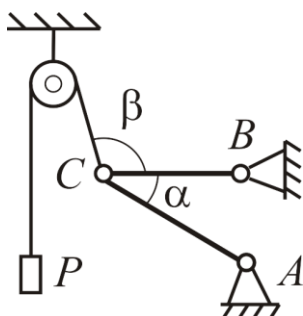
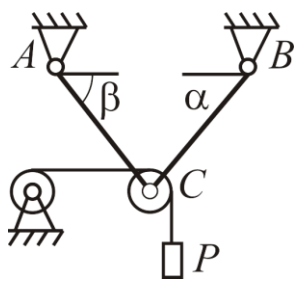
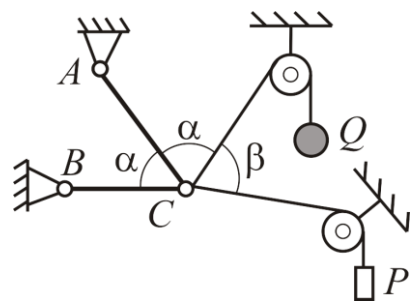
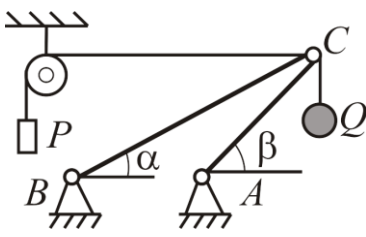
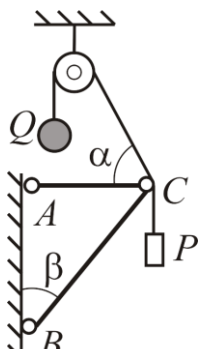
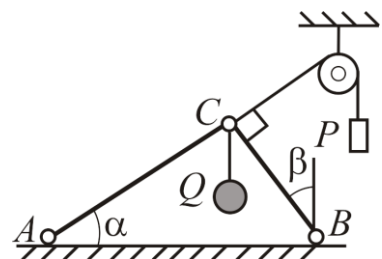
Таблица 1.3 – Числовые значения для задания 1.2

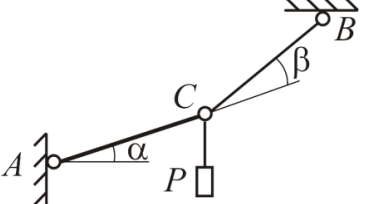
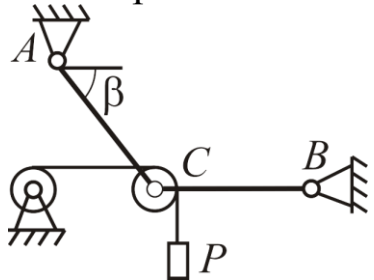
Номер варианта	P , кН	Q , кН	α , град.	β , град.	Определить
1	–	40	60	–	Давление шара на наклонную и вертикальную плоскости
2	10	–	30	60	Реакции в стержнях ВС и АС
3	12	–	30	45	Реакции в стержнях ВС и АС
4	–	6	60	60	Давление шара на плоскость и натяжение нити АВ
5	–	25	30	–	Реакции в стержнях А и В
6	40	–	30	–	Реакции в стержнях А и В
7	30	–	30	60	Реакции в стержнях ВС и АС
8	–	18	60	30	Реакции связей
9	–	30	75	–	Реакции в стержнях А и В
10	50	–	60	30	Натяжение нитей ВС и АС
11	24	–	30	30	Натяжение нити ВС и реакцию в стержне АС
12	–	22	–	30	Реакции связей
13	–	10	30	60	Реакции связей
14	10	–	20	45	Реакцию в стержне ВС и натяжение нити АС
15	15	–	–	30	Реакцию в стержне ВС и натяжение нити АС
16	–	40	45	45	Реакции связей
17	–	26	60	–	Реакции связей
18	190	–	140	–	Реакции в стержнях ВС и АС
19	100	–	30	120	Реакции в стержнях ВС и АС
20	30	–	60	60	Реакции в стержнях ВС и АС
21	60	40	60	105	Реакции в стержнях ВС и АС
22	150	80	30	45	Реакции в стержнях ВС и АС
23	20	20	45	45	Реакции в стержнях ВС и АС
24	20	40	30	30	Реакции в стержнях ВС и АС
25	30	–	20	33	Натяжение нити ВС и реакцию в стержне АС
26	50	–	–	45	Реакции в стержнях ВС и АС

Задачу необходимо решить двумя способами: аналитическим и графическим.

Таблица 1.4 – Схемы к заданию 1.2

<p>Вариант 1</p> 	<p>Вариант 2</p> 	<p>Вариант 3</p> 
<p>Вариант 4</p> 	<p>Вариант 5</p> 	<p>Вариант 6</p> 
<p>Вариант 7</p> 	<p>Вариант 8</p> 	<p>Вариант 9</p> 
<p>Вариант 10</p> 	<p>Вариант 11</p> 	<p>Вариант 12</p> 

<p>Вариант 13</p> 	<p>Вариант 14</p> 	<p>Вариант 15</p> 
<p>Вариант 16</p> 	<p>Вариант 17</p> 	<p>Вариант 18</p> 
<p>Вариант 19</p> 	<p>Вариант 20</p> 	<p>Вариант 21</p> 
<p>Вариант 22</p> 	<p>Вариант 23</p> 	<p>Вариант 24</p> 

Вариант 25	Вариант 26	
		

Пример выполнения задания 1.2

Дано. Груз весом $G = 60$ кН подвешен при помощи каната, перекинутого через блок A и идущего к лебедке D (рис. 1.80). Определить реакции в стержнях AC и AB крана.

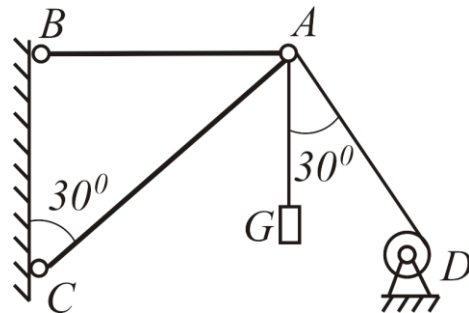


Рисунок 1.80 – Схема к примеру решения задания 1.2

Решение

Аналитический способ

Для решения данной задачи рассмотрим равновесие конструкции, находящейся под действием системы сходящихся сил, которые пересекаются в точке A .

Для определения реакций используем аксиому связей: отбрасываем стержни AB и AC и заменяем их действие реакциями R_{AB} и R_{AC} , направляя их вдоль стержней. Усилие в канате T равно весу груза G и направлено вдоль каната от точки A к точке D .

Изображаем расчетную схему, учитывая все силы, сходящиеся в точке A (рис. 1.81).

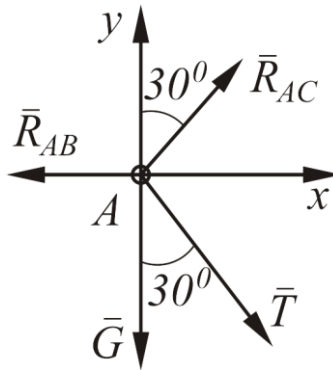


Рисунок 1.81 – Расчетная схема

Для данной системы сходящихся сил можно составить два уравнения равновесия, из которых определим неизвестные реакции связи R_{AB} и R_{AC} :

$$\sum F_y = 0; R_{AC} \cos 30^\circ - G - T \cos 30^\circ = 0,$$

так как $|G| = |T|$, то

$$R_{AC} = \frac{G + T \cos 30^\circ}{\cos 30^\circ} = 129,3 \text{ кН}.$$

$$\sum F_x = 0; -R_{AB} + R_{AC} \cos 60^\circ + T \cos 60^\circ = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_{AB} = R_{AC} \cos 60^\circ + T \cos 60^\circ = 94,6 \text{ кН}.$$

Графический способ

Для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы векторный многоугольник, построенный на векторах всех сил, должен быть замкнутый.

Для построения силового многоугольника выберем масштаб: в 1 см – 10 кН.

Построение силового многоугольника начинаем с заданных усилий (T , G), изображая их с учетом направлений (рис. 1.82).

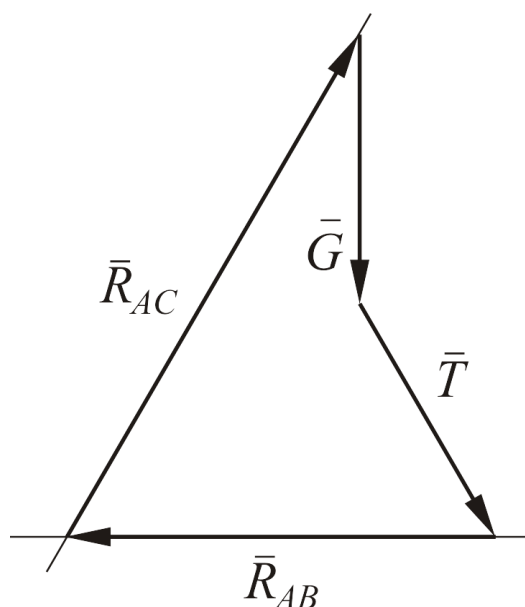


Рисунок 1.82 – Силовой многоугольник

Для определения направления неизвестных реакций проводим из начала первого вектора (G) и конца второго вектора (T) прямые параллельные неизвестным реакциям до их пересечения. Затем достраиваем силовой многоугольник так, чтобы он получился замкнутым. Замеряем длины векторов неизвестных реакций (R_{AB} , R_{AC}) и определяем их величины с учетом выбранного масштаба.

Получаем $R_{AB} = 9,4\text{см} \cdot 10 = 94\text{кН}$, $R_{AC} = 12,9\text{см} \cdot 10 = 129\text{кН}$.

Сравниваем полученные результаты, полученные двумя способами.

Ответ: $R_{AB} = 94,6\text{кН}$, $R_{AC} = 129,3\text{кН}$.

Задание 1.3. Равновесие произвольной плоской системы сил

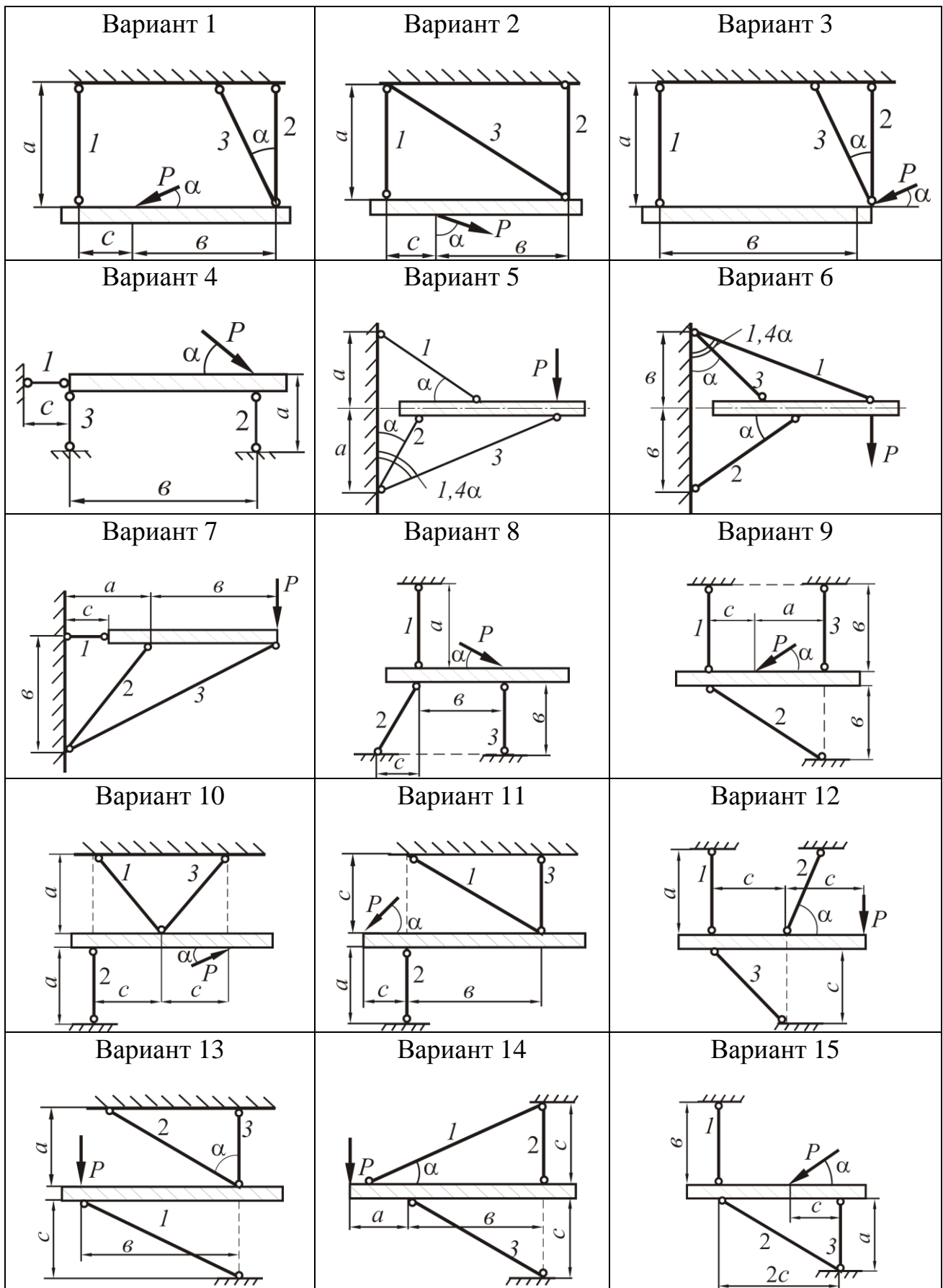
Вариант задания в таблицах 1.5 и 1.6 выбирается по номеру студента в списке группы.

Для статически определимой стержневой системы, нагруженной силой P , необходимо определить реакции связей. **Толщиной удерживаемого бруса пренебречь.**

Таблица 1.5 – Числовые значения для задания 1.3

Номер варианта	P , кН	a , м	b , м	c , м	α , град.
1	10	0,9	1	0,3	30
2	15	1	1,5	0,6	35
3	12	0,9	1,8	–	40
4	18	1,1	1,7	0,5	25
5	20	1,3	–	–	45
6	22	–	2	–	28
7	25	1,2	1,7	0,6	–
8	17	0,8	1,6	0,2	39
9	11	0,7	1,5	0,3	40
10	16	1,3	–	0,6	37
11	20	1,4	1,8	1,3	35
12	25	1,8	–	1,5	30
13	30	0,8	1,6	0,2	26
14	19	0,2	2	0,8	30
15	22	0,8	1,8	0,7	45
16	30	0,9	1,9	0,7	40
17	25	0,8	1,5	0,2	25
18	32	0,7	1,2	0,5	22
19	35	0,9	1,6	–	15
20	16	1	1	1,2	23
21	18	1,1	1,4	0,4	–
22	10	0,8	–	0,2	–
23	27	1,3	1,6	0,6	25
24	17	1,3	1,4	1,5	–
25	35	1,5	1,3	1	60
26	19	0,2	2	0,8	30

Таблица 1.6 – Схемы к заданию 1.3



<p>Вариант 16</p>	<p>Вариант 17</p>	<p>Вариант 18</p>
<p>Вариант 19</p>	<p>Вариант 20</p>	<p>Вариант 21</p>
<p>Вариант 22</p>	<p>Вариант 23</p>	<p>Вариант 24</p>
<p>Вариант 25</p>	<p>Вариант 26</p>	

Пример выполнения задания 1.3

Дано. Для статически определимой стержневой системы (рис. 1.83), нагруженной силой P , необходимо определить реакции связей. Высоту жесткого бруса считать малой по сравнению с размерами конструкции и в расчетах ее не учитывать. $P = 2$ кН; $a = 2$ м; $v = 2,5$; $c = 0,5$ м.

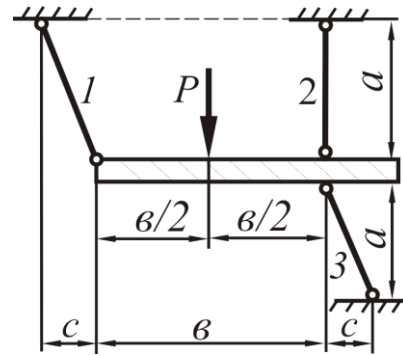


Рисунок 1.83 – Схема к примеру задания 1.3

Решение. Рассмотрим равновесие жесткого бруса. Для освобождения бруса от связей мысленно отбросим стержни и заменим их действие реакциями N_1 , N_2 и N_3 (рис. 1.84). Реакции определим, составив уравнения равновесия.

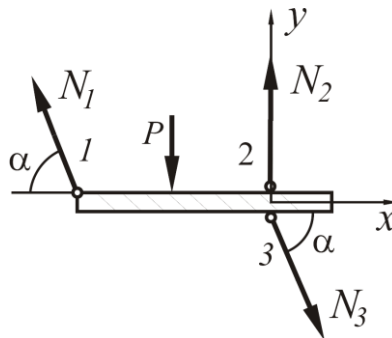


Рисунок 1.84 – Расчетная схема к примеру решения задания 1.3

Из схемы нетрудно заметить, что угол наклона стержня 1 и стержня 3 к оси x одинаков. Обозначим этот угол через α .

Уравнение проекций всех сил на ось x :

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = -N_1 \cos \alpha + N_3 \cos \alpha = 0. \quad (1)$$

Уравнение проекций всех сил на ось y :

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = N_1 \sin \alpha + N_2 - N_3 \sin \alpha - P = 0. \quad (2)$$

Сумма моментов всех сил относительно точки O :

$$\sum_{k=1}^n m_O(F_{kx}) = -N_1 b \sin \alpha + P \frac{b}{2} = 0. \quad (3)$$

Определим $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$:

$$\cos \alpha = \frac{c}{l}; \quad \sin \alpha = \frac{a}{l};$$

$$l = \sqrt{a^2 + c^2}.$$

Решая систему из трех уравнений (1), (2) и (3), найдем усилия в стержнях.

Из уравнения (3) определяем усилие в первом стержне N_1 :

$$N_1 = \frac{Pb}{2b \sin \alpha} = \frac{P}{2 \sin \alpha} = \frac{2}{2 \sin 30} = 2 \text{ кН}.$$

Из уравнения (1) определяем усилие в третьем стержне N_3 :

$$N_3 = N_1 = 2 \text{ кН}.$$

Из уравнения (2) определяем усилие во втором стержне N_2 :

$$N_2 = N_3 \sin \alpha + P - N_1 \sin \alpha = 2 \sin 30 + 2 - 2 \sin 30 = 2 \text{ кН}.$$

Задание 1.4. Определение реакций связей произвольной плоской системы сил

Для консольной либо шарнирно опертой балки, нагруженной изгибающими моментами и поперечными нагрузками, необходимо определить реакции связей.

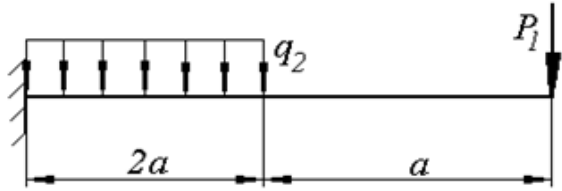
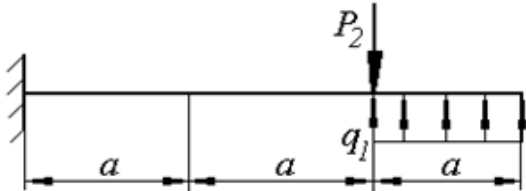
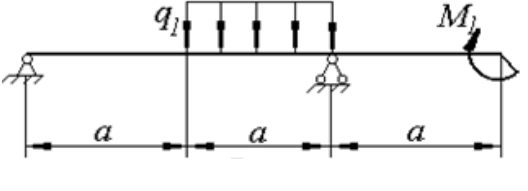
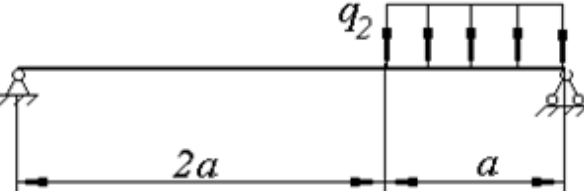
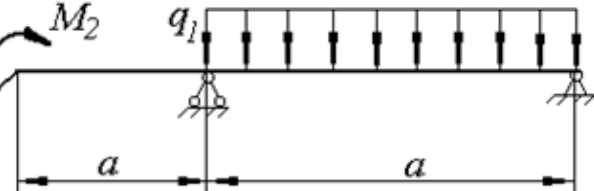
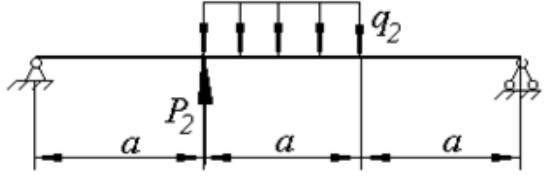
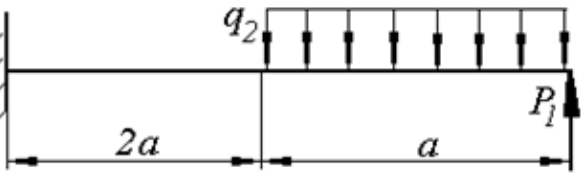
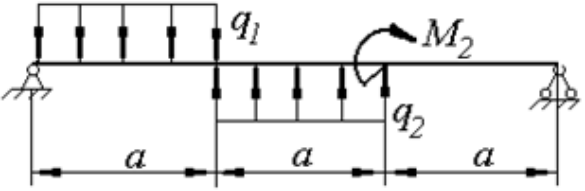
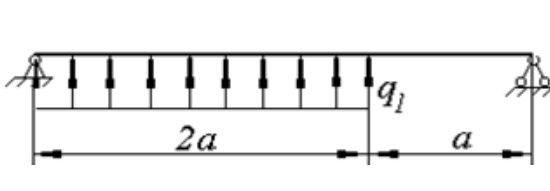
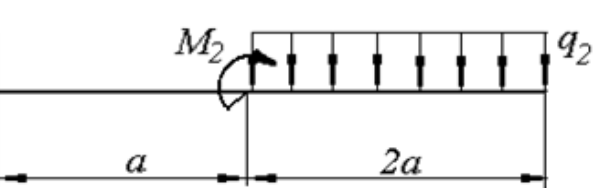
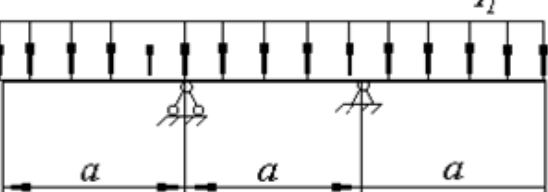
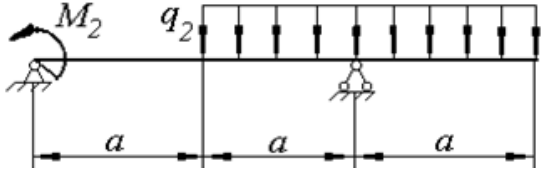
Вариант схемы выбирается из таблицы 1.8 по номеру студента в списке группы, численные значения выбираются произвольно из таблицы 1.7.

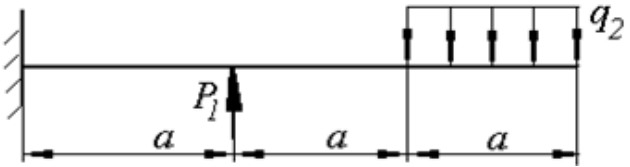
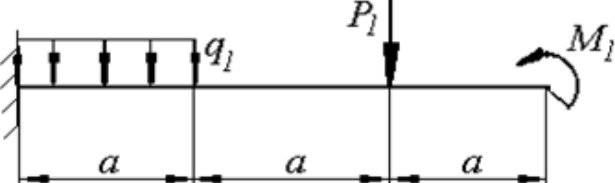
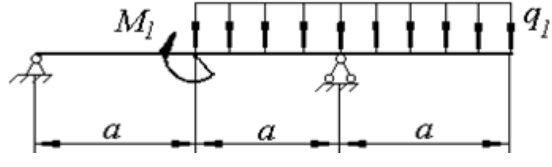
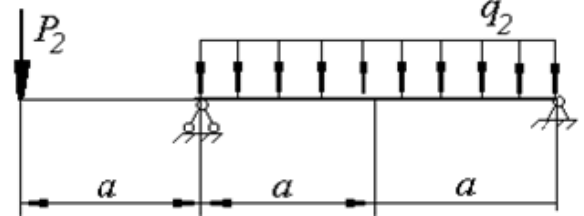
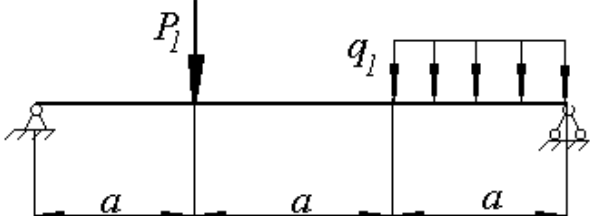
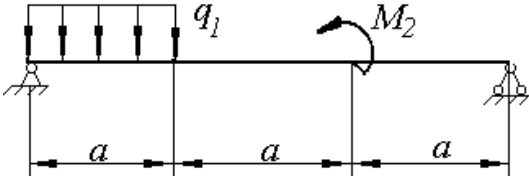
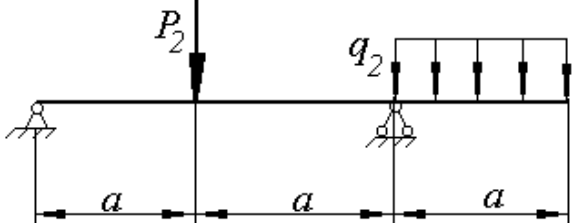
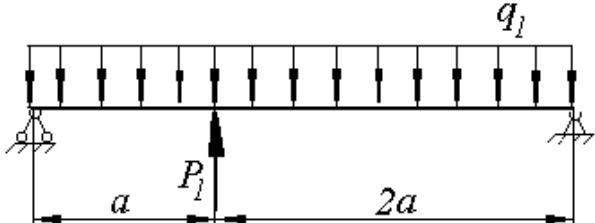
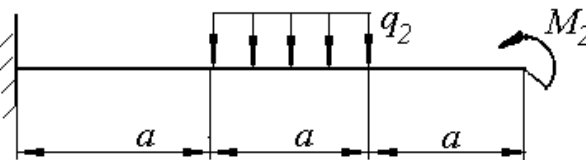
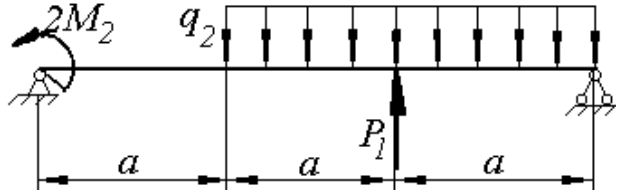
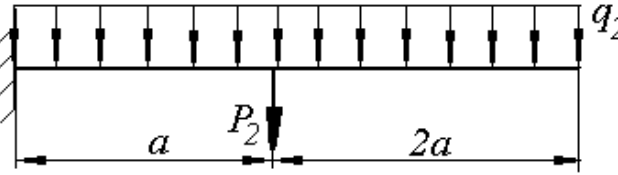
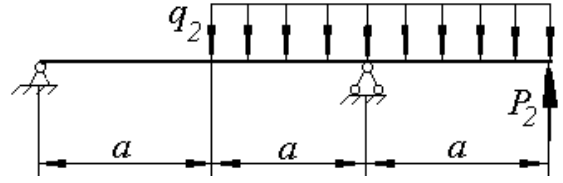
Таблица 1.7 – Числовые значения для задания 1.4

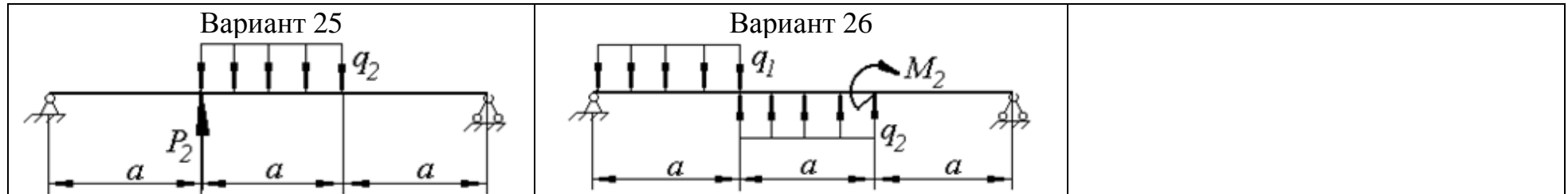
Номер варианта	P_1 , кН	P_2 , кН	q_1 , кН/м	q_2 , кН/м	M_1 , кНм	M_2 , кНм
1	10	80	10	70	15	90
2	20	70	15	80	25	80
3	30	60	20	90	35	70
4	40	50	25	60	45	50
5	50	40	30	50	55	40
6	60	30	35	40	65	30
7	70	10	40	30	75	20
8	80	20	45	20	85	50
9	10	50	55	50	95	10
0	20	70	65	20	90	30

Принять для всех балок $a = 1$ м.

Таблица 1.8 – Схемы к заданию 1.4

<p>Вариант 1</p> 	<p>Вариант 2</p> 	<p>Вариант 3</p> 
<p>Вариант 4</p> 	<p>Вариант 5</p> 	<p>Вариант 6</p> 
<p>Вариант 7</p> 	<p>Вариант 8</p> 	<p>Вариант 9</p> 
<p>Вариант 10</p> 	<p>Вариант 11</p> 	<p>Вариант 12</p> 

<p>Вариант 13</p> 	<p>Вариант 14</p> 	<p>Вариант 15</p> 
<p>Вариант 16</p> 	<p>Вариант 17</p> 	<p>Вариант 18</p> 
<p>Вариант 19</p> 	<p>Вариант 20</p> 	<p>Вариант 21</p> 
<p>Вариант 22</p> 	<p>Вариант 23</p> 	<p>Вариант 24</p> 



Пример выполнения задания 1.4

Дано. Для шарнирно опертой балки (рис. 1.85) определить реакции связей, если $M = 10$ кН·м; $P = 10$ кН; $q = 50$ кН/м; $a = 1$ м; $b = 1$ м; $c = 1$ м.

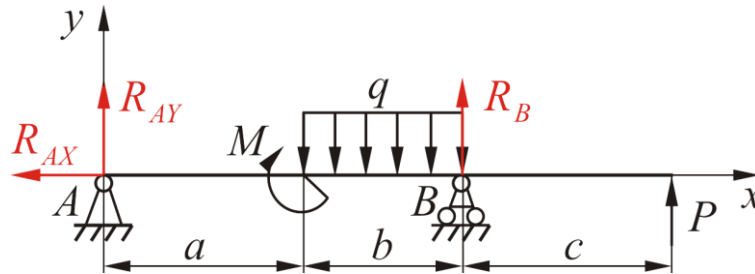


Рисунок 1.85 – Схема к примеру решения задания 1.4

Решение. Для освобождения балки от связей (шарниры А и В) мысленно отбросим удерживающие шарниры и заменим их действие реакциями R_{Ay} , R_{Ax} и R_B (рис. 1.85). Для определения реакций связей составим уравнения равновесия для произвольной плоской системы сил:

$$\sum F_x = 0: -R_{Ax} = 0$$

$$\sum M_A = 0: R_B(a+b) + P(a+b+c) - q \cdot b \left(a + \frac{b}{2} \right) - M = 0;$$

$$\sum M_B = 0: R_A(a+b) - Pc - q \frac{b^2}{2} + M = 0.$$

Из этих уравнений равновесия определим реакции R_A и R_B :

$$R_A = \frac{Pc + q \frac{b^2}{2} - M}{(a+b)} = \frac{10 \cdot 1 + 50 \frac{1^2}{2} - 10}{2} = 12,5 \text{ кН},$$

$$R_B = \frac{-P(a+b+c) + q \cdot b \left(a + \frac{b}{2} \right) + M}{a+b} = \frac{-10 \cdot 3 + 50 \cdot 1 \cdot 1,5 + 10}{2} = 27,5 \text{ кН}.$$

В качестве проверки составляем уравнение равновесия $\sum F_y = 0$:

$$\sum F_y = 0: R_A + R_B - qb + P = 12,5 + 27,5 - 50 + 10 = 0.$$

Реакции опор определены верно.

Задание 1.5. Определение реакций связей для плоской системы тел

Вариант схемы выбирается из таблицы 1.10 по номеру студента в списке группы, численные значения выбираются произвольно из таблицы 1.9.

Конструкция состоит из жесткого уголка и стержня, которые в точке C соединены друг с другом шарниром или свободно опираются друг на друга. В зависимости от варианта задания внешними связями, наложенными на конструкцию, будут шарнирно-подвижная опора, цилиндрический шарнир, жесткая заделка, гладкая плоскость, невесомый стержень.

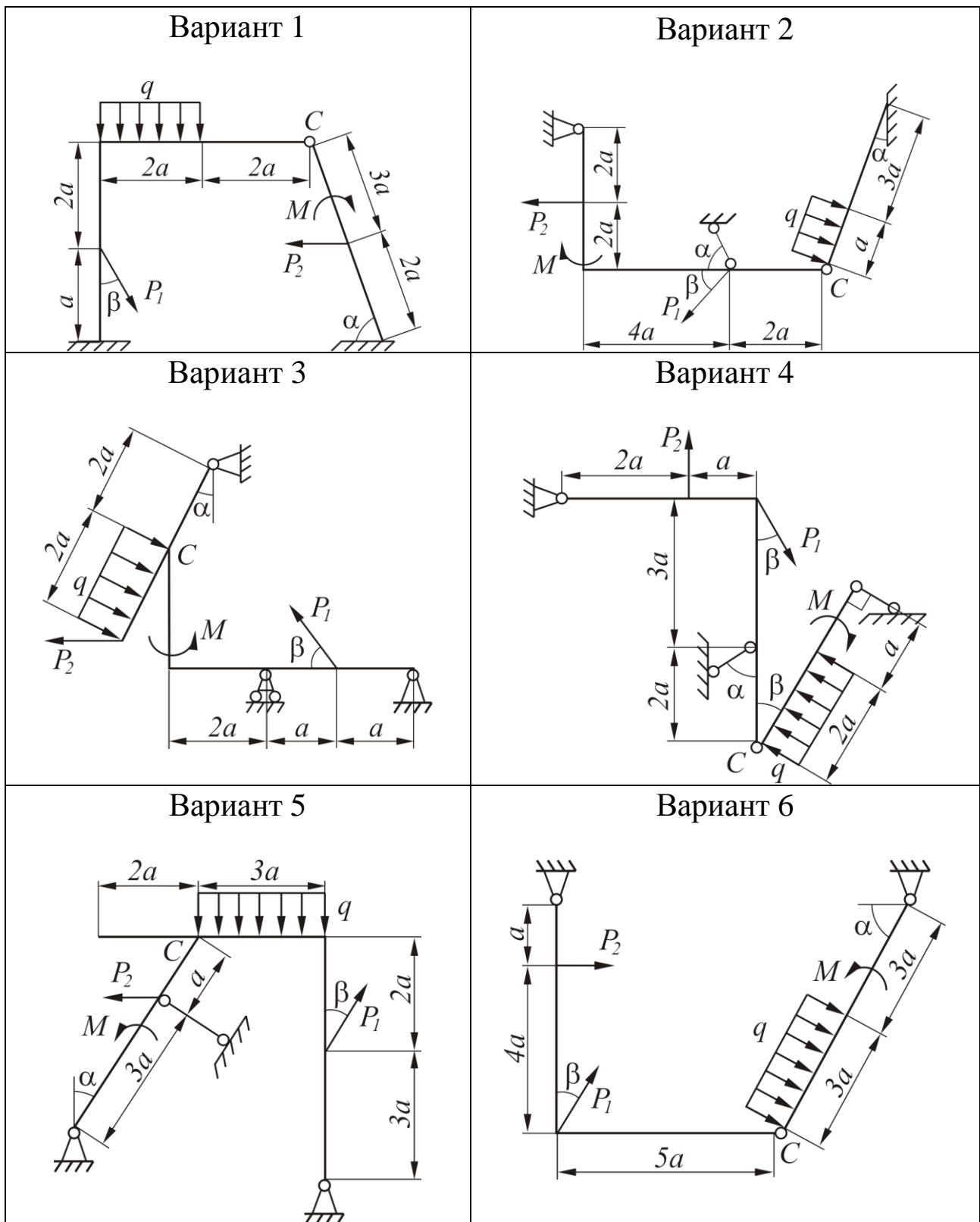
На каждую конструкцию действуют четыре нагрузки: две сосредоточенные силы P_1 и P_2 , сосредоточенный момент M и равномерно-распределенная нагрузка q .

В задании требуется определить реакции связей, вызванные заданными внешними нагрузками.

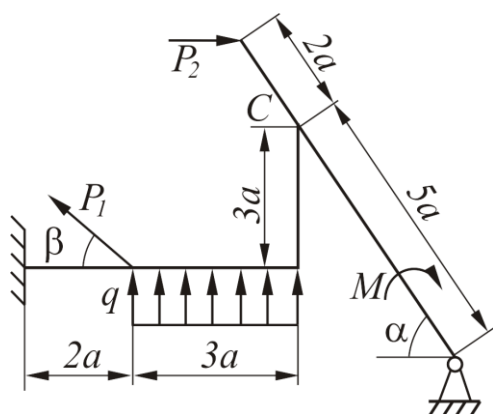
Таблица 1.9 – Числовые значения для задания 1.5

Номер варианта	P_1 , кН	P_2 , кН	q , кН/м	M , кНм	α , град.	β , град.
1	10	80	10	15	20	40
2	20	70	15	25	30	50
3	30	60	20	35	40	60
4	40	50	25	45	50	70
5	50	40	30	55	45	40
6	60	30	35	65	60	30
7	70	10	40	75	60	20
8	80	20	45	85	40	50
9	10	50	55	95	70	45
0	20	70	65	90	45	30

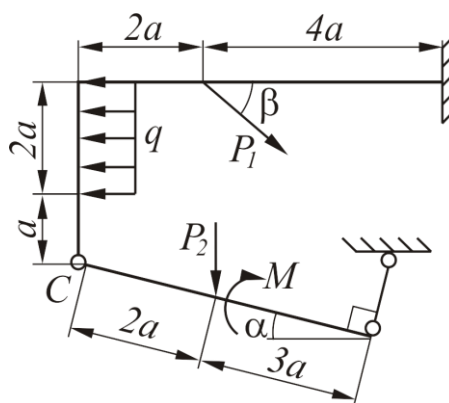
Таблица 1.10 – Схемы к заданию 1.5



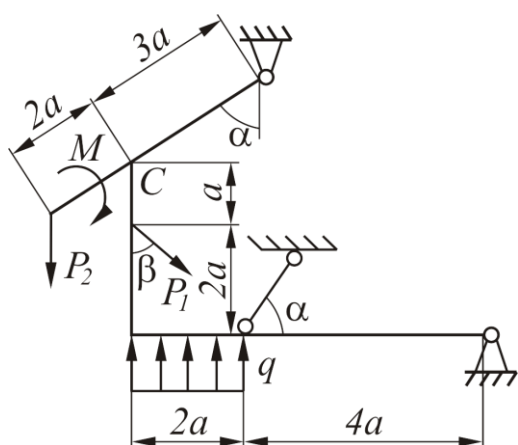
Вариант 7



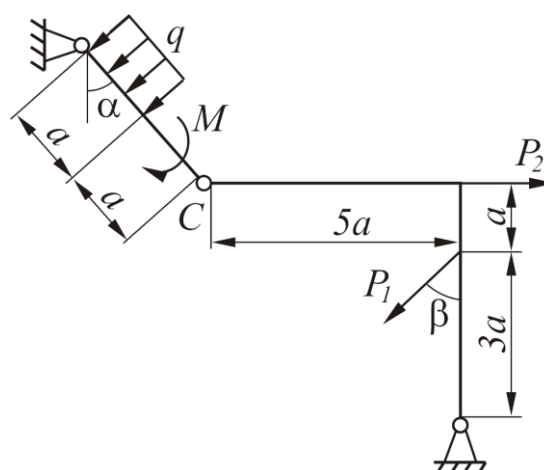
Вариант 8



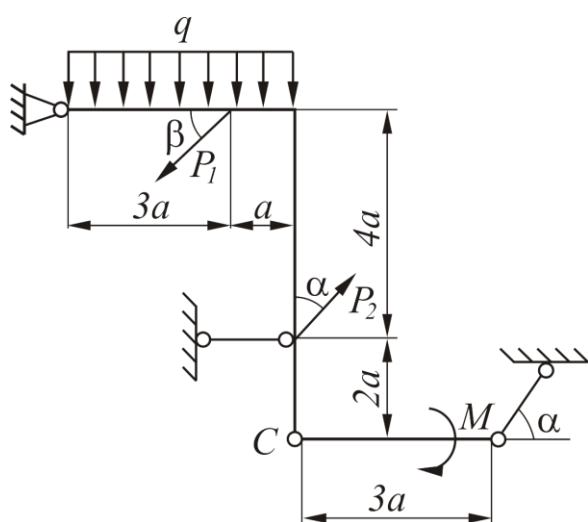
Вариант 9



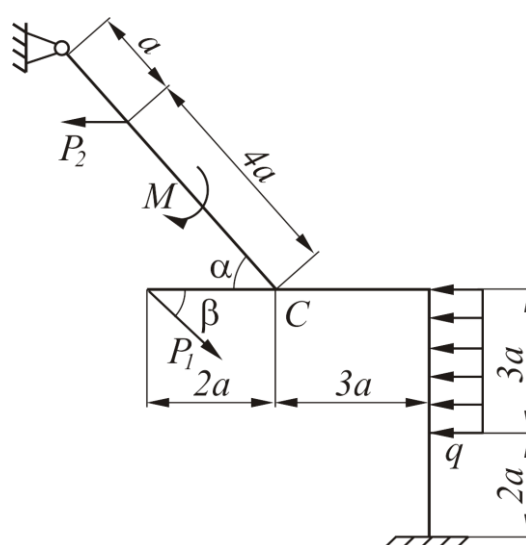
Вариант 10



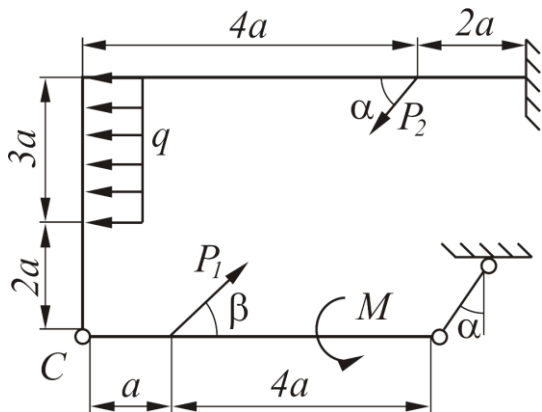
Вариант 11



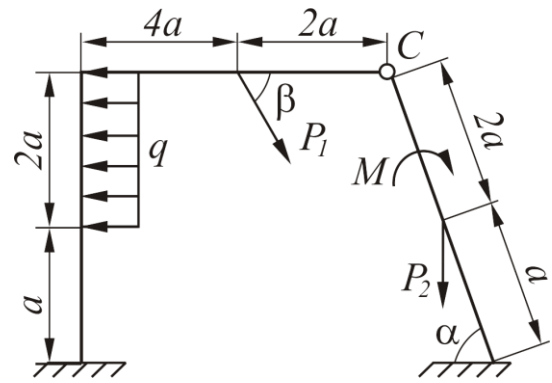
Вариант 12



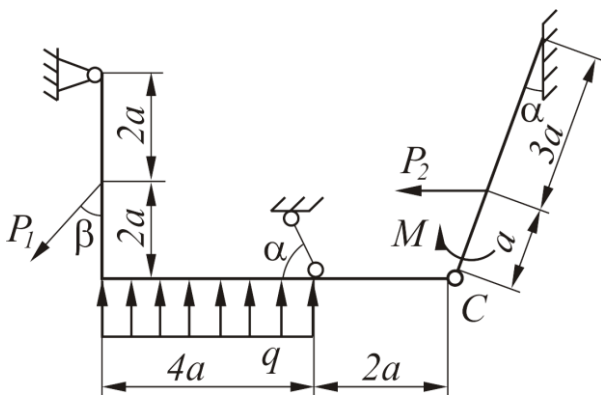
Вариант 13



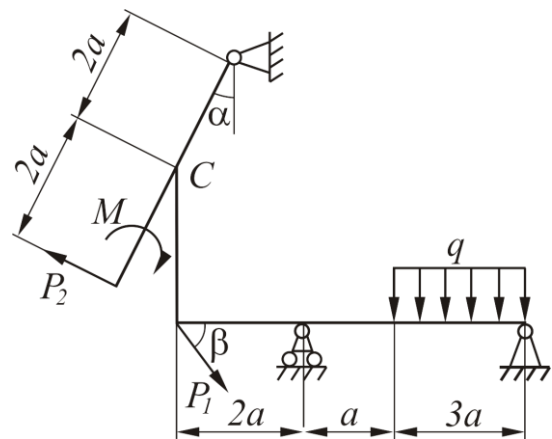
Вариант 14



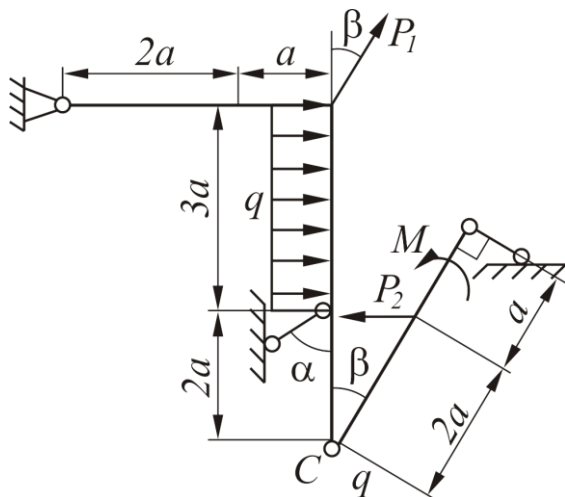
Вариант 15



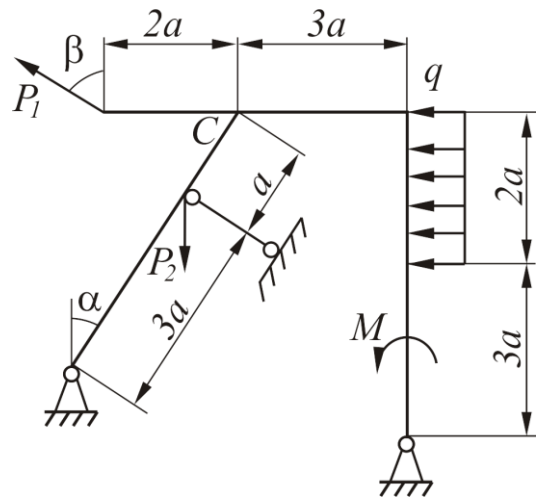
Вариант 16



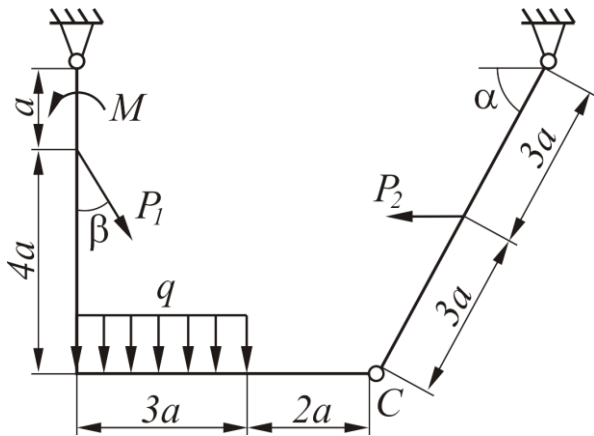
Вариант 17



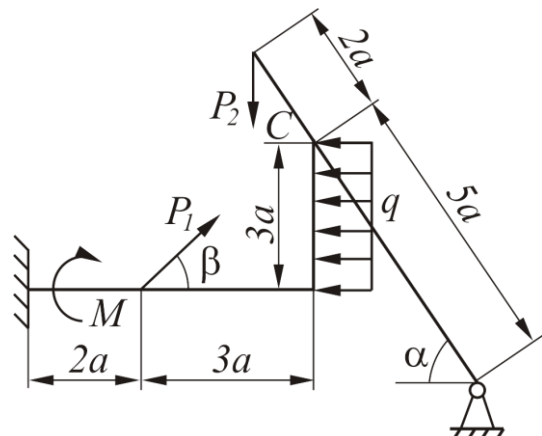
Вариант 18



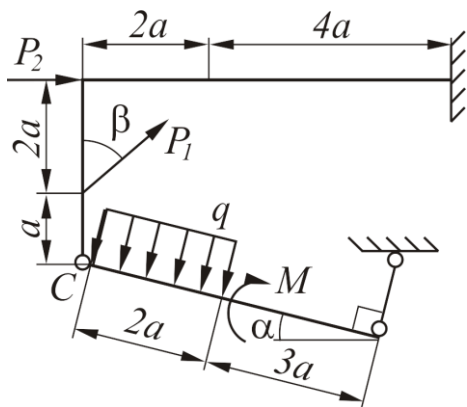
Вариант 19



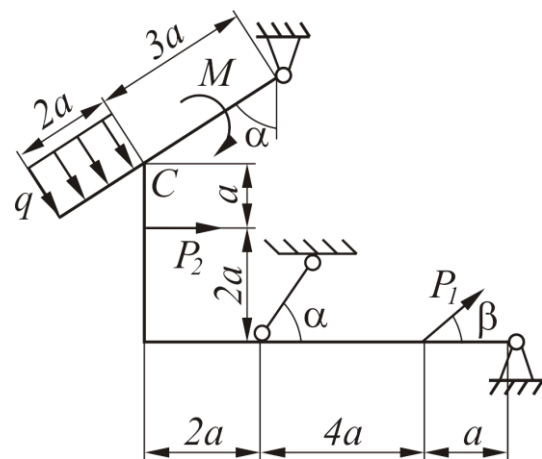
Вариант 20



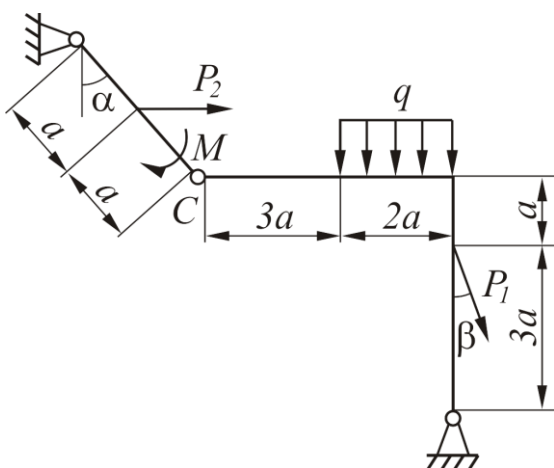
Вариант 21



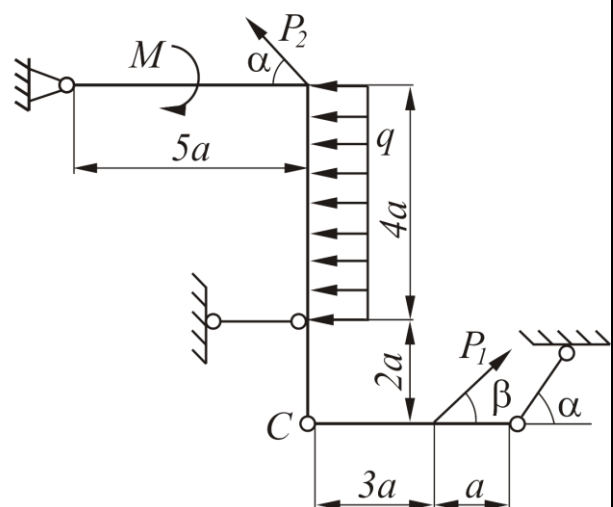
Вариант 22

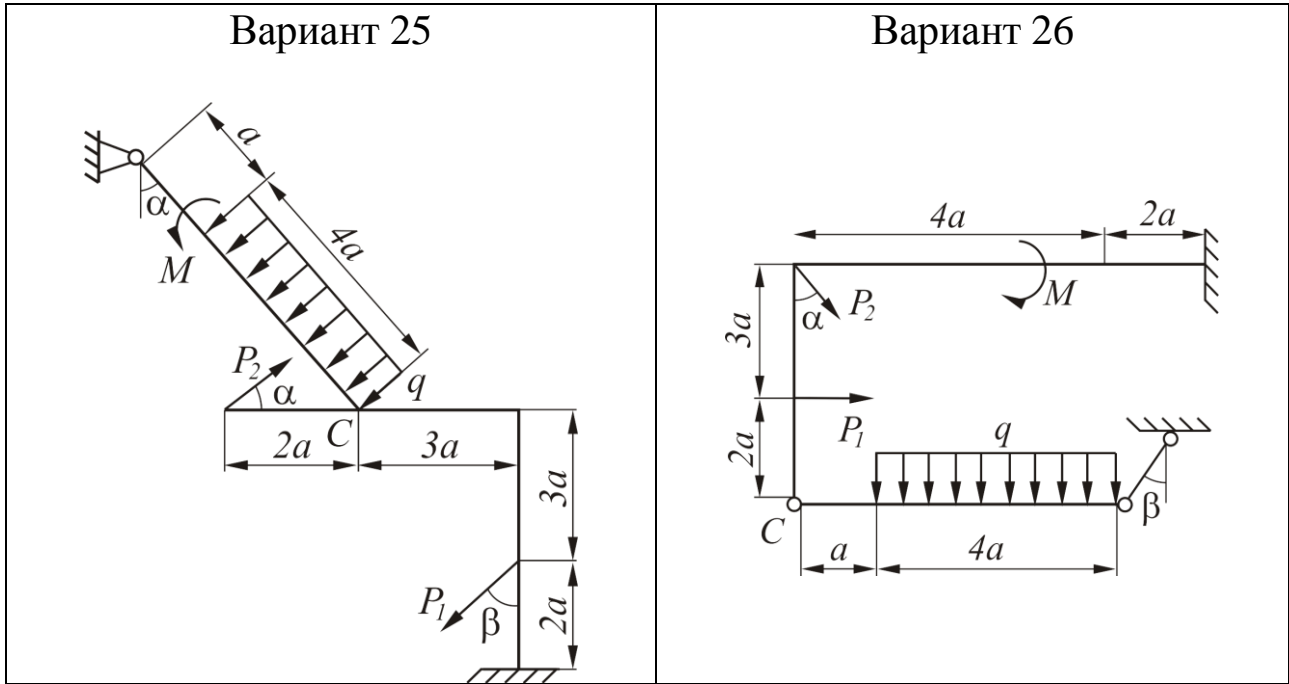


Вариант 23



Вариант 24





Пример выполнения задания 1.5

Дано. Система тел (рис. 1.86) состоит из стержня и опирающегося на него в точке C жесткого уголка. Стержень наклонен под углом α к оси x и опирается на цилиндрический шарнир и шарнирно-подвижную опору. Жесткий уголок закреплен цилиндрическим шарниром.

Определить реакции связей системы тел, если известно, что:

$P_1 = 10$ кН; $P_2 = 30$ кН; $M = 40$ кНм; $q = 20$ кН/м; $a = 1$ м;
 $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 60^\circ$.

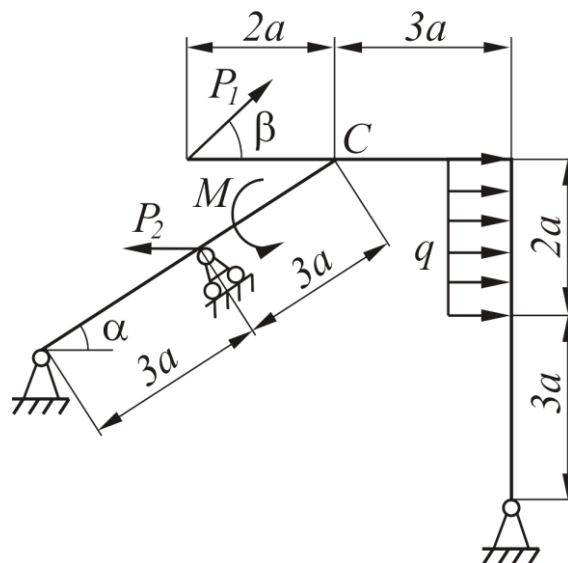


Рисунок 1.86 – Схема к примеру решения задания 1.5

Решение

1. Обозначим ключевые узлы системы тел (точки A , B и D) (рис. 1.87). По аксиоме связей отбросим все связи и заменим их действие реакциями (R_{Ax} , R_{Ay} , R_{Bx} , R_{By} и R_D). Так как для произвольной плоской системы сил можно составить только три независимых уравнения равновесия, а реакций получилось пять, то данная система является статически неопределимой. Для раскрытия статической неопределимости расчленим конструкцию на две части и рассмотрим равновесие стержня и жесткого угольника отдельно.

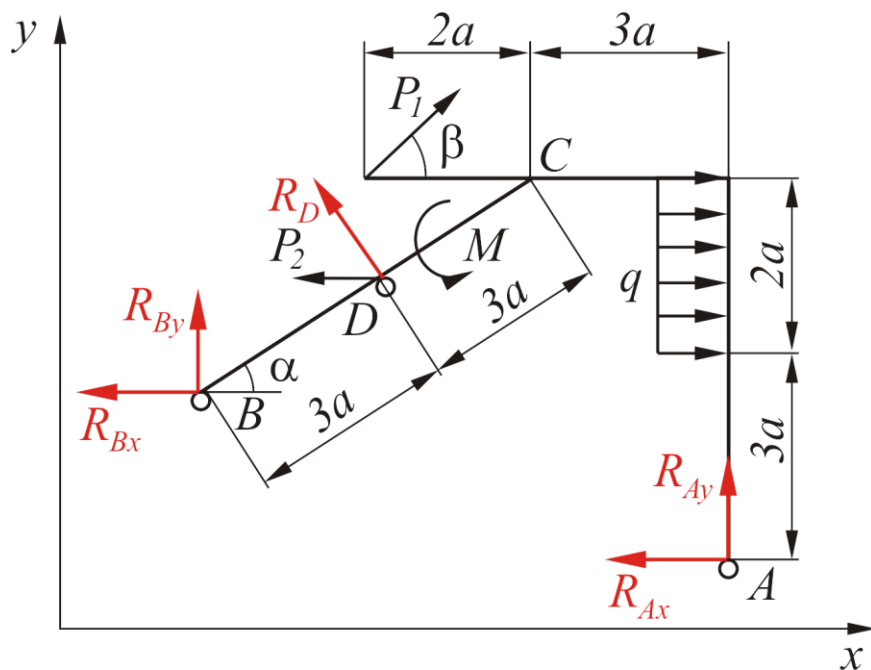


Рисунок 1.87 – Расчетная схема для системы тел

2. Рассмотрим равновесие жесткого угольника. Для этого отбросим стержень, а в точке C заменим его действие реакцией R_C (рис. 1.88).

Таким образом, для жесткого угольника имеем три неизвестные реакции, поэтому рассматриваемая система сил является статически определимой. Для определения неизвестных реакций составим уравнения равновесия:

$$\sum M_A = 0: -P_1 \sin \beta \cdot 5a - P_1 \cos \beta \cdot 5a - q \cdot 2a \cdot 4a + R_C \cdot 3a = 0.$$

$$R_C = \frac{P_1 \sin \beta \cdot 5a + P_1 \cos \beta \cdot 5a + q \cdot 2a \cdot 4a}{3a} =$$

$$= \frac{10 \sin 60 \cdot 5 + 10 \cos 60 \cdot 5 + 20 \cdot 8}{3} = 76,1 \text{ кН};$$

$$\sum F_x = 0: P_1 \cos \beta + q \cdot 2a - R_{Ax} = 0.$$

Из этого уравнения найдем реакцию R_{Ax} :

$$R_{Ax} = P_1 \cos \beta + q \cdot 2a = 10 \cos 60 + 20 \cdot 2 = 45 \text{ кН};$$

$$\sum F_y = 0: P_1 \sin \beta - R_C + R_{Ay} = 0.$$

Из этого уравнения найдем реакцию R_{Ay} :

$$R_{Ay} = -P_1 \sin \beta + R_C = -10 \sin 60 + 76,1 = 67,4 \text{ кН}.$$

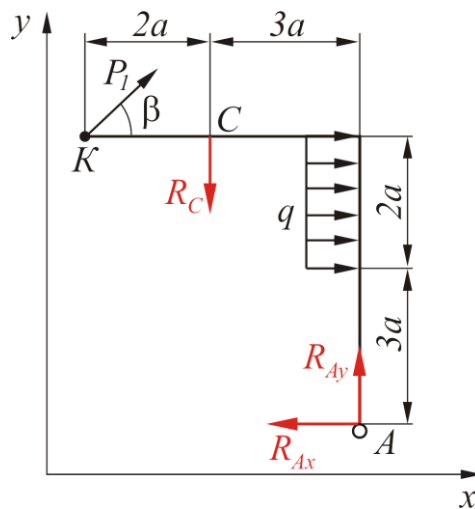


Рисунок 1.88 – Расчетная схема для жесткого угольника

Прежде чем приступить к рассмотрению равновесия стержня, сделаем проверку:

$$\sum M_K = 0: q \cdot 2a \cdot a - R_C \cdot 2a + R_{Ay} \cdot 5a - R_{Ax} \cdot 5a = 0;$$

$$20 \cdot 2 - 76,1 \cdot 2 + 67,4 \cdot 5 - 45 \cdot 5 = 0.$$

$$0 \equiv 0.$$

Проверка сошлась, значит, реакции определены верно.

3. Рассмотрим равновесие стержня. Для этого в точке С заменим действие отброшенного жесткого угольника реакцией R'_C , направив ее в сторону противоположную R_C (рис. 1.89), так как $|R'_C| = |-R_C|$.

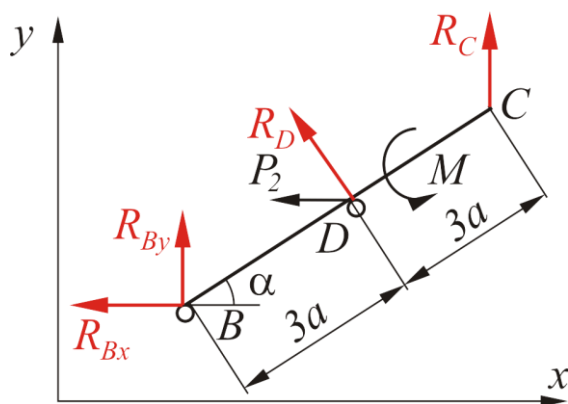


Рисунок 1.89 – Расчетная схема для стержня

Для стержня, находящегося в равновесии под действием произвольной плоской системы сил, составим три уравнения равновесия:

$$\sum M_B = 0: P_2 \sin \alpha \cdot 3a + R_D \cdot 3a + R_C \cos \alpha \cdot 6a + M = 0.$$

Из этого уравнения найдем реакцию R_D :

$$R_D = \frac{-P_2 \sin \alpha \cdot 3a - R_C \cos \alpha \cdot 6a - M}{3a}.$$

$$R_D = \frac{-30 \sin(30) \cdot 3 - 76,1 \cos(30) \cdot 6 - M}{3} = -160,1 \text{ кН}.$$

Знак «минус» говорит о том, что реакция R_D направлена в противоположную сторону.

$$\sum F_x = 0: -R_{Bx} - P_2 - R_D \sin \alpha = 0.$$

Из этого уравнения найдем реакцию R_{Bx} :

$$R_{Bx} = -P_2 - R_D \sin \alpha - R_{Ax} = -30 + 160,1 \sin(30) = 50,05 \text{ кН}.$$

$$\sum F_y = 0: R_{By} + R_D \cos \alpha + R_C = 0.$$

Из этого уравнения найдем реакцию R_{By} :

$$R_{By} = -R_D \cos \alpha - R_C = 160,1 \cos(30) - 76,1 = 61,8.$$

Чтобы убедиться в правильности решения, составим проверочное уравнение:

$$\sum M_C = 0: -R_{Bx} \sin \alpha \cdot 6a - R_{By} \cos \alpha \cdot 6a - P_2 \sin \alpha \cdot 3a - R_D \cdot 3a + M = 0;$$

$$-50,05 \sin(30) \cdot 6 - 62,5 \cos(30) \cdot 6 - 30 \sin(30) \cdot 3 + 160,1 \cdot 3 + 40 = 0$$

$$0 \equiv 0.$$

Проверка сошлась, значит, реакции определены верно.

Пример выполнения задания 1.5 при помощи программы Microsoft Excel

Данная задача сводится к решению системы шести уравнений, которую можно легко решить при помощи программы Microsoft Excel.

Рассмотрим алгоритм решения системы уравнений матричным способом в программе Microsoft Excel.

1. Создаем матрицу, состоящую из коэффициентов уравнений равновесия, соблюдая определенный порядок.

Для этого надо переписать уравнения равновесия в следующем порядке:

– все слагаемые уравнения, содержащие неизвестные реакции записываем в левой части уравнения. Причем неизвестные реакции (корни уравнения) во всех уравнениях записываются в одном и том же порядке;

– все известные (заданные) члены уравнений переносим в правую часть.

Например, в нашем случае установим следующую последовательность во всех уравнениях неизвестных реакций связей: R_{Ax} , R_{Ay} , R_{Bx} , R_{By} , R_D , R_C .

При решении данной задачи нами было составлено 6 уравнений равновесия:

$$\sum M_A = 0: -P_1 \sin \beta \cdot 5a - P_1 \cos \beta \cdot 5a - q \cdot 2a \cdot 4a + R_C \cdot 3a = 0;$$

$$\sum F_x = 0: P_1 \cos \beta + q \cdot 2a - R_{Ax} = 0;$$

$$\sum F_y = 0: P_1 \sin \beta - R_C + R_{Ay} = 0;$$

$$\sum M_B = 0: P_2 \sin \alpha \cdot 3a + R_D \cdot 3a + R_C \cos \alpha \cdot 6a + M = 0;$$

$$\sum F_x = 0: -R_{Bx} - P_2 - R_D \sin \alpha = 0;$$

$$\sum F_y = 0: R_{By} + R_D \cos \alpha + R_C = 0.$$

Перепишем эти уравнения в заданной нами последовательности, перенося известные слагаемые в правую часть уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_C \cdot 3a = P_1 \sin \beta \cdot 5a + P_1 \cos \beta \cdot 5a + q \cdot 2a \cdot 4a, \\ R_{Ax} = P_1 \cos \beta + q \cdot 2a, \\ R_{Ay} - R_C = -P_1 \sin \beta, \\ R_D \cdot 3a + R_C \cos \alpha \cdot 6a = -P_2 \sin \alpha \cdot 3a - M, \\ R_{Bx} + R_D \sin \alpha = -P_2, \\ R_{By} + R_D \cos \alpha + R_C = 0. \end{array} \right.$$

Подставим в полученную систему уравнений заданные значения:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_C = 76,1 \\ R_{Ax} = 45 \\ R_{Ay} - R_C = -8,6 \\ 3R_D + 5,2R_C = -85 \\ R_{Bx} + 0,5R_D = -30 \\ R_{By} + 0,86R_D + R_C = 0 \end{array} \right.$$

Заполняем матрицу числами, которые являются корнями уравнений в заданной ранее последовательности. Если в уравнении какой-то корень отсутствует, то в этом случае коэффициент считается равным «нулю», а если при корне нет коэффициента, то он равен «единице».

R_{AX}	R_{AY}	R_{BX}	R_{BY}	R_D	R_C
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	-1
0	0	0	0	3	5,2
0	0	1	0	0,5	0
0	0	0	1	0,86	1

2. Набираем эту матрицу в программе Microsoft Excel (рис. 1.90).

The screenshot shows an Excel spreadsheet with two tables. The first table, located in cells A1:F7, contains the coefficient matrix with headers R_{AX} , R_{BX} , R_{AY} , R_{BY} , R_D , and R_C . The second table, located in cells H2:M7, contains a vector column with values 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0 in rows 2 through 7 respectively.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	R_{AX}	R_{BX}	R_{AY}	R_{BY}	R_D	R_C								
2	0	0	0	0	0	1		0	0	0	0	0	1	
3	1	0	0	0	0	0		1	0	0	0	0	0	
4	0	0	1	0	0	-1		0	0	1	0	0	-1	
5	0	0	0	0	3	5,2		0	0	0	0	3	5,2	
6	0	1	0	0	0,5	0		0	1	1	1	0,5	0	
7	0	0	0	1	0,86	1		0	0	0	1	0,86	1	

Рисунок 1.90 – Матрица коэффициентов системы уравнений равновесия

Отдельно набираем значения, находящиеся в правой части уравнений (получаем вектор-столбец) (рис. 1.91).

Н	И	Ж	К	Л	М	Н	О	Р
0	0	0	0	0	1		76,1	
1	0	0	0	0	0		45	
0	0	1	0	0	-1		-8,6	
0	0	0	0	3	5,2		-85	
0	1	1	1	0,5	0		-30	
0	0	0	1	0,86	1		0	

Рисунок 1.91 – Вектор столбец системы уравнений равновесия

3. Теперь для нахождения корней уравнений матричным способом сначала определяем обратную матрицу. Для этого в программе Microsoft Excel существует оператор *МОБР*.

Для того чтобы воспользоваться данным оператором, выделяем область пустых ячеек, которая по размеру равна диапазону исходной матрицы. В нашем случае 6 на 6 (рис. 1.92).

0	0	0	0	0	1	76,1
1	0	0	0	0	0	45
0	0	1	0	0	-1	-8,6
0	0	0	0	3	5,2	-85
0	1	1	1	0,5	0	-30
0	0	0	1	0,86	1	0

Рисунок 1.92 – Выделение области для обратной матрицы

Запускаем мастер функций и переходим в категорию «Математические». В выпадающем списке выбираем оператор «МОБР» (рис. 1.93).

The screenshot shows the Excel interface with the 'Master Functions' dialog box open. The 'МОБР' function is highlighted in the list. Red circles and arrows indicate the selection of the function and the target cell range.

Рисунок 1.93 – Выбор оператора МОБР

В открывшемся окне «Аргумент функции» нужно указать диапазон матрицы. Проще всего это сделать, выделив мышкой область матрицы (рис. 1.94).

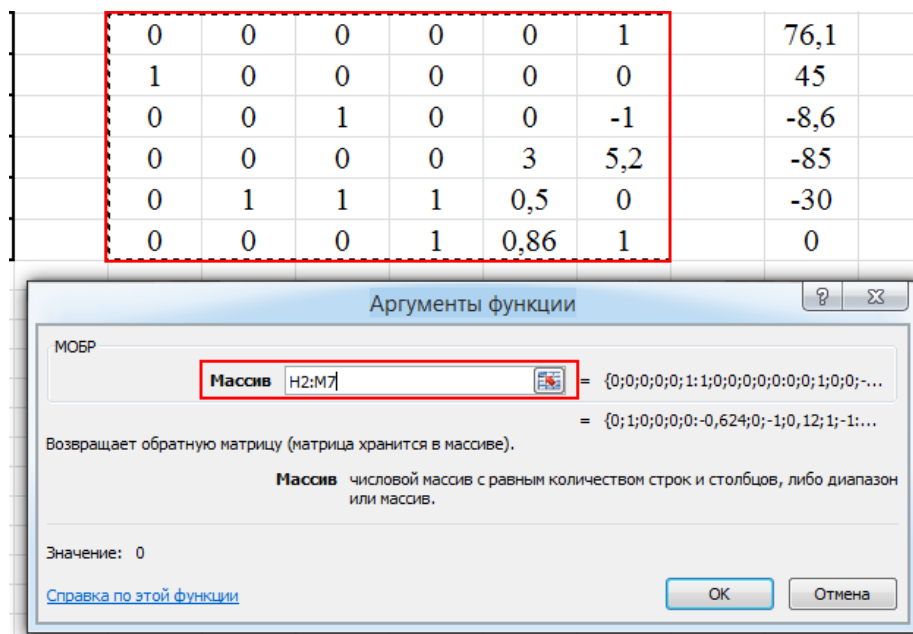


Рисунок 1.94 – Выбор поля матрицы в операторе МОБР

После чего, не нажимая на кнопку «ОК», производим нажатие сочетания клавиш Ctrl+Shift+Enter. В итоге получаем обратную матрицу (рис. 1.95).

0	0	0	0	0	1	76,1
1	0	0	0	0	0	45
0	0	1	0	0	-1	-8,6
0	0	0	0	3	5,2	-85
0	1	1	1	0,5	0	-30
0	0	0	1	0,86	1	0

0	1	0	0	0	0
-0,624	0	-1	0,12	1	-1
1	0	1	0	0	0
0,490667	0	0	-0,28667	0	1
-1,733333	0	0	0,333333	0	0
1	0	0	0	0	0

Рисунок 1.95 – Обратная матрица

Затем по матричному методу надо умножить обратную матрицу на вектор столбец. Для этого в программе есть специальный оператор «МУМНОЖ».

Прежде чем запускать данный оператор, выделяем область из столбца, у которого число строк равно числу корней уравнений. В нашем случае количество неизвестных реакций равно шести, поэтому выделяем столбец из шести строк (рис. 1.96).

0	0	0	0	0	1	76,1
1	0	0	0	0	0	45
0	0	1	0	0	-1	-8,6
0	0	0	0	3	5,2	-85
0	1	1	1	0,5	0	-30
0	0	0	1	0,86	1	0
0	1	0	0	0	0	
-0,624	0	-1	0,12	1	-1	
1	0	1	0	0	0	
0,490667	0	0	-0,28667	0	1	
-1,73333	0	0	0,333333	0	0	
1	0	0	0	0	0	

Рисунок 1.96 – Выбор области результатов вычислений

Запускаем мастер функций и в разделе «Математические» выбираем оператор «МУМНОЖ». В открывшемся окне «Аргументы функции» необходимо заполнить поля «Массив 1» и «Массив 2». «Массив 1» соответствует диапазону обратной матрицы, а «Массив 2» – диапазону области результатов. Для этого, как и в прошлый раз, при помощи мыши выделяем по очереди две эти области. Вследствие чего в полях «Массив 1» и «Массив 2» появляются соответствующие диапазоны (рис. 1.97).

0	0	0	0	0	1	76,1
1	0	0	0	0	0	45
0	0	1	0	0	-1	-8,6
0	0	0	0	3	5,2	-85
0	1	1	1	0,5	0	-30
0	0	0	1	0,86	1	0
0	1	0	0	0	0	
-0,624	0	-1	0,12	1	-1	
1	0	1	0	0	0	
0,490667	0	0	-0,28667	0	1	
-1,73333	0	0	0,333333	0	0	
1	0	0	0	0	0	

0	1	0	0	0	0	
-0,624	0	-1	0,12	1	-1	
1	0	1	0	0	0	
0,490667	0	0	-0,28667	0	1	
-1,73333	0	0	0,333333	0	0	
1	0	0	0	0	0	

Аргументы функции

МУМНОЖ

① Массив1 H9:M14 = {0;1;0;0;0;-0,624;0;-1;0,12;1;-1;...}

② Массив2 O2:O7 = {76,1;45;-8,6;-85;-30;0}

Рисунок 1.97 – Определение опций оператора «МУМНОЖ»

После чего, опять не нажимая на кнопку «ОК», производим нажатие сочетания клавиш Ctrl+Shift+Enter. В итоге получаем в выбранном поле результаты решения системы уравнений (рис. 1.98).

0	0	0	0	0	1		76,1
1	0	0	0	0	0		45
0	1	0	0	0	-1		-8,6
0	0	0	0	3	5,2		-85
0	0	1	0	0,5	0		-30
0	0	0	1	0,86	1		0
0	1	0	0	0	0	RAX	45
1	0	1	0	0	0	RAY	67,5
0,866667	0	0	-0,16667	1	0	RBX	50,12
0,490667	0	0	-0,28667	0	1	RBY	61,7064
-1,73333	0	0	0,333333	0	0	RD	-160,24
1	0	0	0	0	0	RC	76,1

Рисунок 1.98 – Результаты расчета системы уравнений

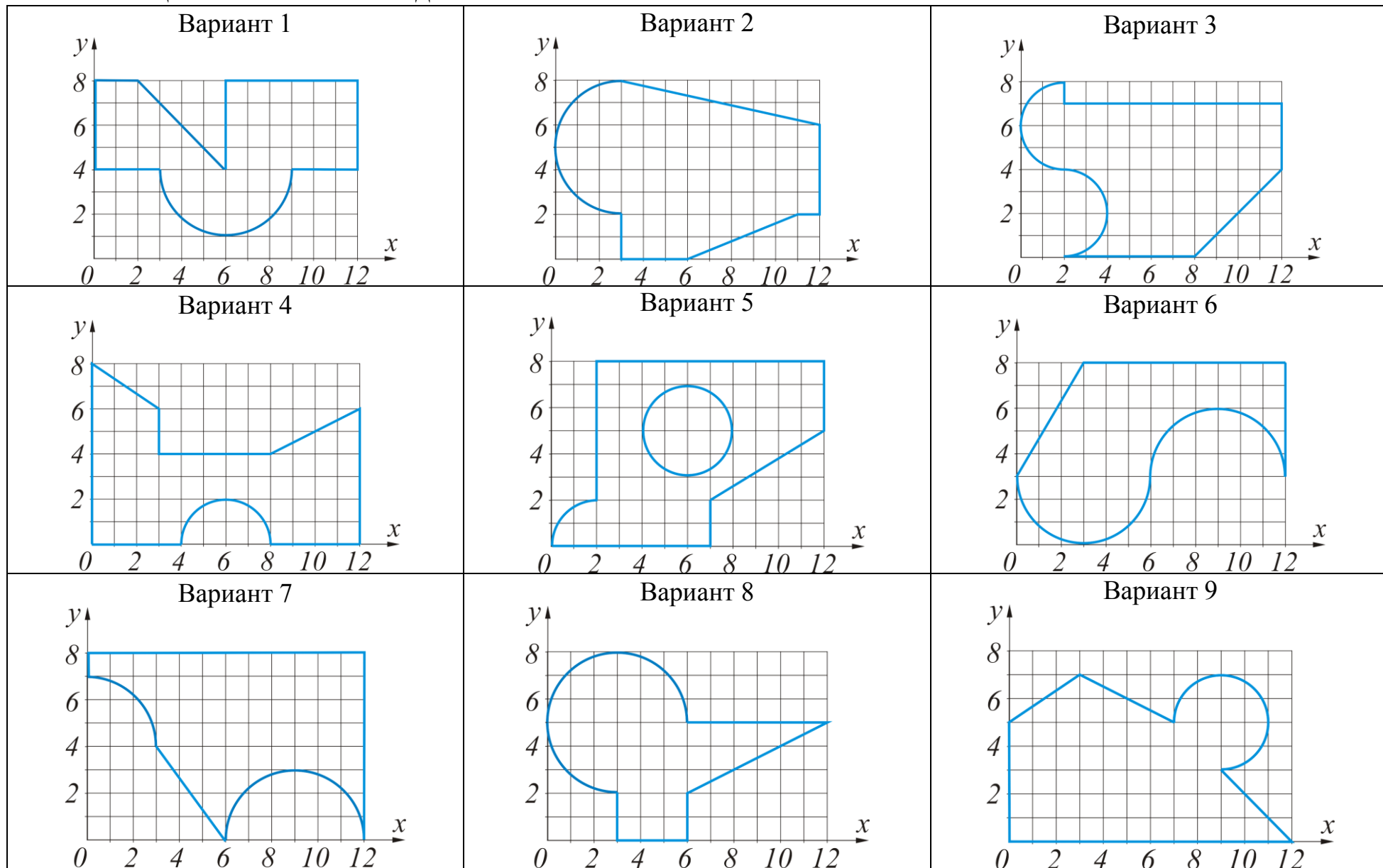
Если сравнить полученные значения с результатами аналитического расчета, видно, что результаты двух расчетов совпадают.

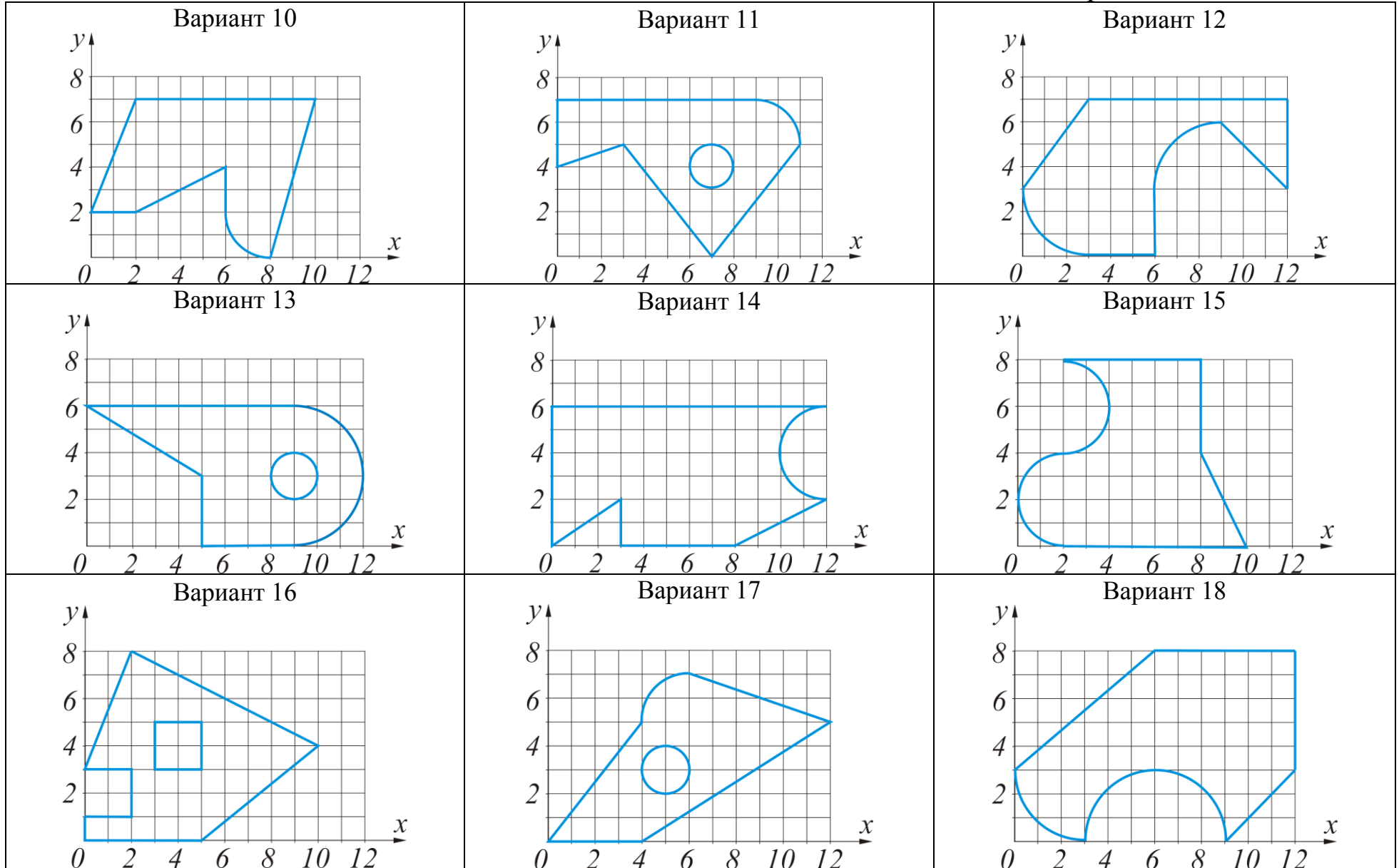
Задание 1.6. Определение центра тяжести плоской фигуры

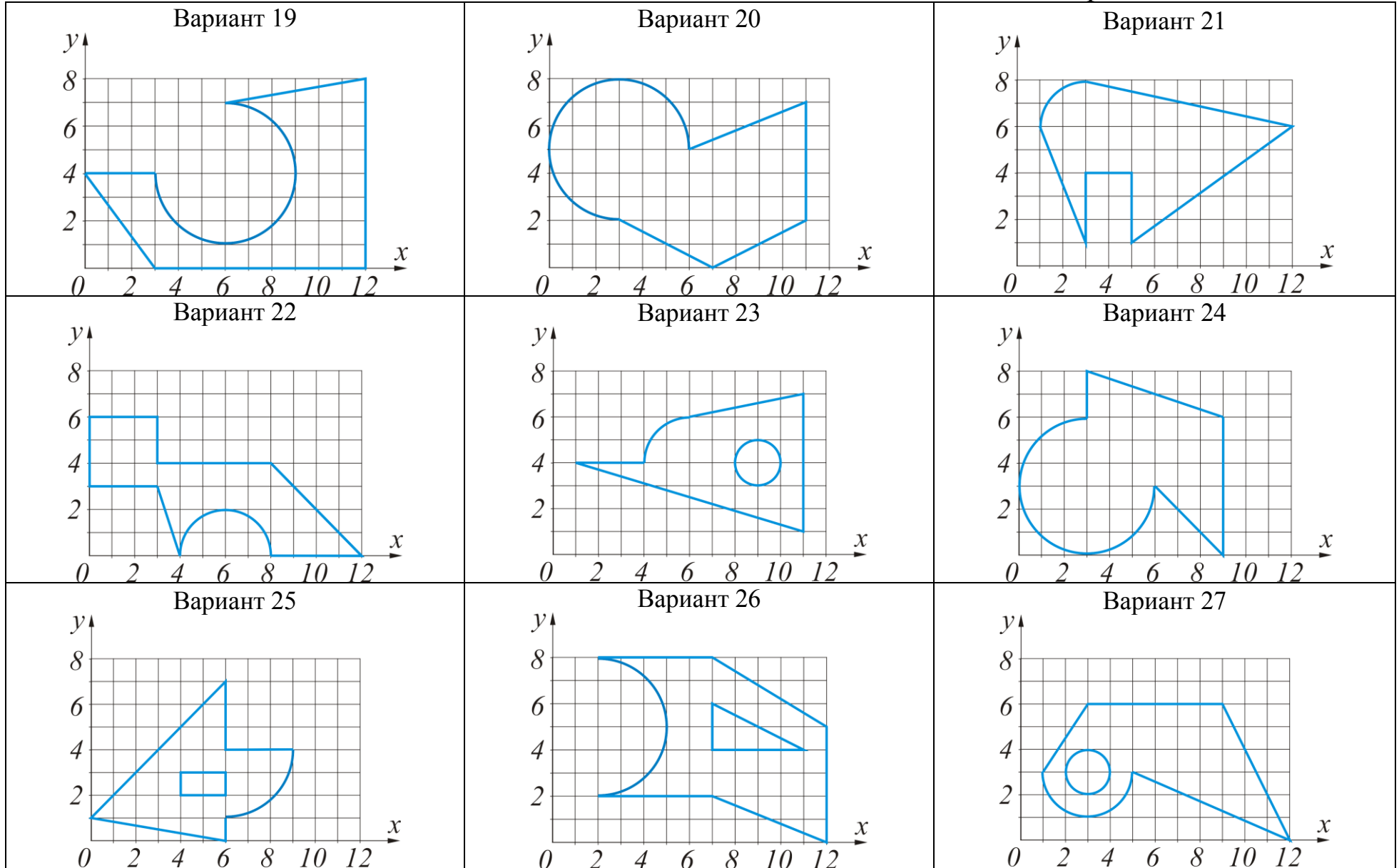
Вариант задания выбирается из таблицы 1.11 по номеру студента в списке группы

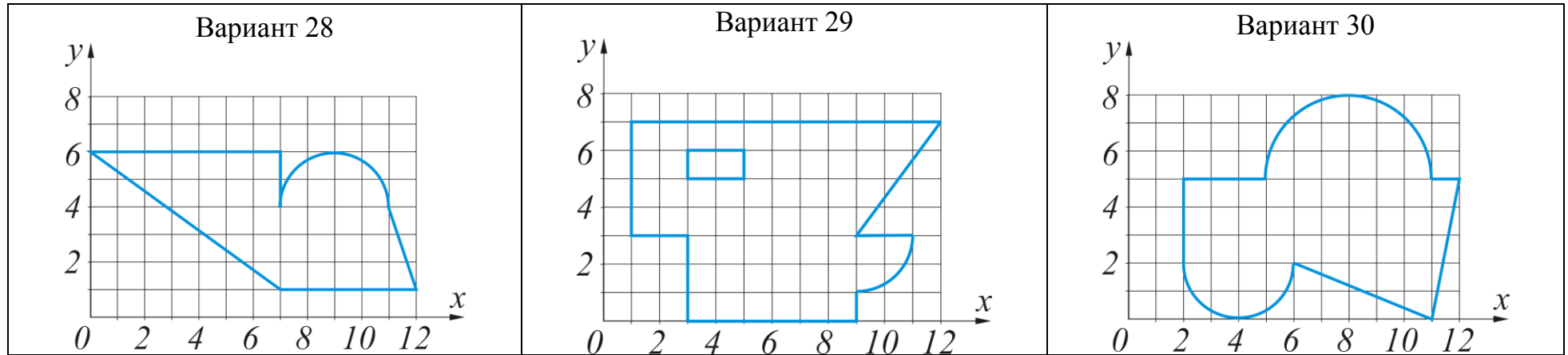
Для заданной плоской фигуры (табл. 1.11) необходимо определить площадь S и координаты центра тяжести фигуры x_C , y_C . Шкалы осей на схеме заданы в метрах. Криволинейный участок контура является дугой половины или четверти окружности.

Таблица 1.11 – Схемы к заданию 1.6









Пример выполнения задания 1.5

Дано. Для плоской фигуры (рис. 1.99) необходимо определить площадь S и координаты центра тяжести фигуры x_C, y_C . Шкалы осей на схеме заданы в метрах. Криволинейный участок контура является дугой половины или четверти окружности.

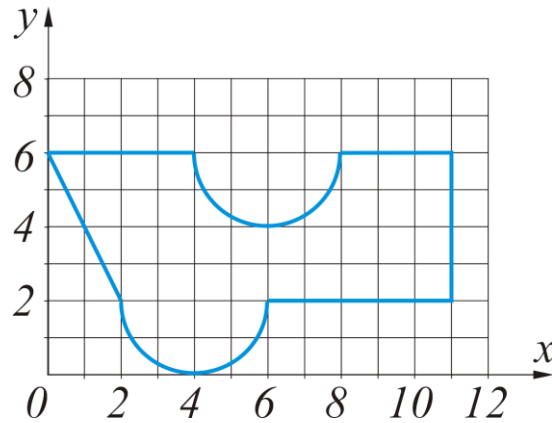


Рисунок 1.99 – Схема плоской фигуры

Решение. Разбиваем плоскую фигуру на простые отдельные части, положение центров тяжести которых известны. Центр тяжести прямоугольника и окружности находится в их геометрических центрах. Положение центра тяжести других фигур, встречающихся в задачах (треугольник, сектор окружности) определяются по формулам (см. теоретическую часть).

Представим фигуру в виде одного треугольника 1, прямоугольника 2, полукруга 3 и выреза 4 в виде полукруга (рис. 1.100).

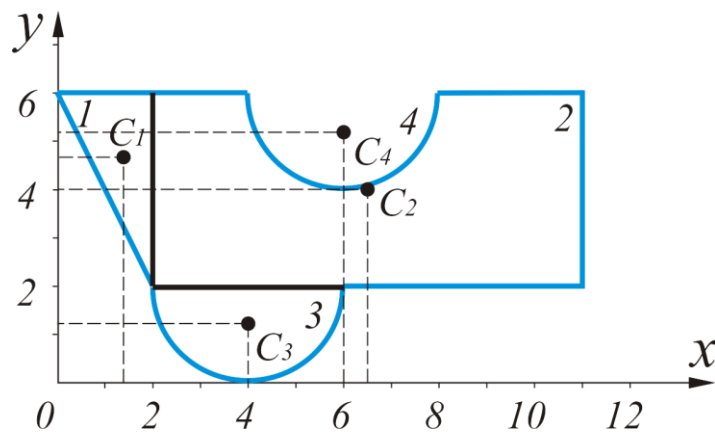


Рисунок 1.100 – Расчетная схема для плоской фигуры

2. Определим площадь S_i и координаты центра тяжести x_{Ci}, y_{Ci} каждой фигуры с учетом расположения плоской фигуры относительно системы координат Oxy .

Площадь треугольника S_1 и координаты его центра тяжести x_{C1} , y_{C1} :

$$S_1 = \frac{1}{2} 2 \cdot 4 = 4 \text{ м}^2,$$

$$x_{C1} = \frac{2}{3} 2 = 1,33 \text{ м},$$

$$y_{C1} = 2 + \frac{2}{3} 4 = 4,66 \text{ м}.$$

Площадь прямоугольника S_2 и координаты его центра тяжести x_{C2} , y_{C2} :

$$S_2 = 9 \cdot 4 = 36 \text{ м}^2,$$

$$x_{C2} = 2 + \frac{1}{2} 9 = 6,5 \text{ м},$$

$$y_{C2} = 2 + \frac{1}{2} 4 = 4 \text{ м}.$$

Площадь полукруга S_3 и координаты его центра тяжести x_{C3} , y_{C3} :

$$S_3 = \frac{\pi \cdot R^2}{2} = \frac{\pi \cdot 2^2}{2} = 6,28 \text{ м}^2,$$

$$x_{C3} = 2 + \frac{4}{2} = 4 \text{ м},$$

$$y_{C3} = 2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{R \sin \alpha}{\alpha} = 2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{2 \sin 90^\circ}{1,57} = 1,15 \text{ м},$$

где α – угол, равный половине центрального угла полукруга.

Площадь полукруга S_4 и координаты его центра тяжести x_{C4} , y_{C4} :

$$S_4 = \frac{\pi \cdot R^2}{2} = \frac{\pi \cdot 2^2}{2} = 6,28 \text{ м}^2,$$

$$x_{C4} = 4 + \frac{4}{2} = 6 \text{ м},$$

$$y_{C4} = 6 - \frac{2}{3} \cdot \frac{R \sin \alpha}{\alpha} = 6 - \frac{2}{3} \cdot \frac{2 \sin 90^0}{1,57} = 5,15 \text{ м.}$$

3. Определим площадь всей фигуры, учитывая, что площадь выреза необходимо брать со знаком минус:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 4 + 36 + 6,28 - 6,28 = 40 \text{ м}^2.$$

4. Определим координаты центра тяжести всей фигуры по формулам:

$$x_C = \frac{\sum S_i x_{Ci}}{S},$$

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{S_1 x_{C1} + S_2 x_{C2} + S_3 x_{C3} - S_4 x_{C4}}{S} = \\ &= \frac{4 \cdot 1,33 + 36 \cdot 6,5 + 6,28 \cdot 4 - 6,28 \cdot 6}{40} = 5,67 \text{ м,} \end{aligned}$$

$$y_C = \frac{\sum S_i y_i}{S}.$$

$$\begin{aligned} y_C &= \frac{S_1 y_{C1} + S_2 y_{C2} + S_3 y_{C3} - S_4 y_{C4}}{S} = \\ &= \frac{4 \cdot 4,66 + 36 \cdot 4 + 6,28 \cdot 1,15 - 6,28 \cdot 5,15}{4} = 3,43 \text{ м.} \end{aligned}$$

Таким образом, центр тяжести плоской фигуры находится в точке с координатами $C(5,67; 3,43)$ (рис. 1.101).

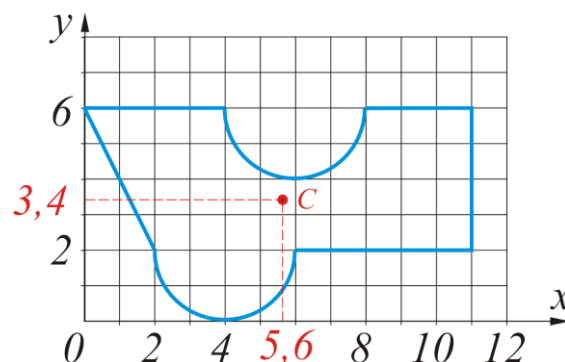


Рисунок 1.101 – Положение центра тяжести плоской фигуры

Глава 2. КИНЕМАТИКА

2.1. Кинематика точки

2.1.1. Введение в кинематику

Кинематика – раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел в пространстве без учета их массы (инертности) и действующих на них сил.

В теоретической механике изучается **механическое движение** – это изменение с течением времени положения материальных тел в пространстве относительно друг друга, а также изменение относительного положения материальных частиц данного тела, т. е. его деформация. Всякое движение, в том числе и механическое, происходит в пространстве и во времени.

Для определения положения движущегося тела (или точки) с тем телом, по отношению к которому изучается движение, жестко связывают какую-нибудь систему осей координат. Это тело вместе с осями координат называют **системой отсчета**. Если координаты всех точек тела в этой системе остаются все время постоянными, то тело относительно этой системы находится в покое. Если же координаты изменяются (хотя бы некоторые), то тело движется относительно этой системы отсчета. Движение точки или тела всегда является относительным движением (относительно выбранной системы отсчета). При изучении движения систему отсчета обычно связывают с Землей, используя декартовы, цилиндрические или сферические координаты.

Время принято считать одинаковым во всех системах отсчета, независимо от их движения. Время является скалярной, непрерывно изменяющейся величиной. В задачах кинематики время t принимают за независимую переменную (аргумент). Все другие переменные величины (расстояние, скорость и т. д.) рассматривают как изменяющиеся с течением времени функции. Отсчет времени ведется от некоторого **начального момента** ($t = 0$), выбираемого в каждой задаче особо. Число секунд, прошедших от выбранного начального момента до рассматриваемого, определяет **данный момент времени** t . Разность между двумя моментами определяет **промежуток времени**.

Для решения задач кинематики необходимо, чтобы изучаемое движение было как-то задано. **Задать движение точки или тела относительно какой-либо системы отсчета** – значит указать способ

или метод, позволяющий найти положение точки или тела в любой момент времени в этой системе отсчета.

Изучение движения любого объекта начинается с установления способов задания его движения.

2.1.2. Способы задания движения точки

Движущаяся точка описывает в системе отсчета некоторую линию – прямолинейную или криволинейную. Эта непрерывная линия, представляющая собой геометрическое место последовательных положений движущейся точки в рассматриваемой системе отсчета, называется **траекторией точки**. Если траекторией является прямая линия, то движение называется **прямолинейным**, а если кривая – **криволинейным**.

В кинематике применяют три способа задания движения точки: **векторный, координатный, естественный**.

2.1.2.1. Естественный способ задания движения точки

Естественным способом задания движения удобно пользоваться в тех случаях, когда траектория движущейся точки известна заранее. Пусть точка M движется относительно системы отсчета $O_1x_1y_1z_1$ вдоль некоторой траектории AB (рис. 2.1).

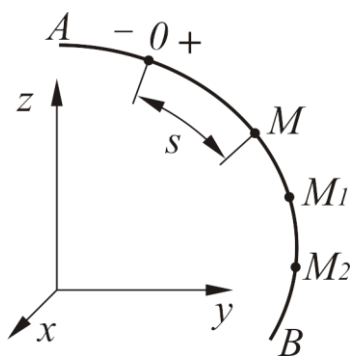


Рисунок 2.1 – Естественный способ задания движения точки

Чтобы задать движение точки естественным способом, надо задать:

- траекторию точки;
- начало отсчета на траектории с указанием положительного и отрицательного направлений отсчета;

– закон движения точки вдоль криволинейной траектории в виде

$$s = f(t). \quad (2.1)$$

где s – криволинейная координата, равная расстоянию от начального положения точки M_0 до текущего положения точки M .

Например, если точка движется из начала отсчета O вдоль некоторой кривой так, что ее расстояние от этого начала растет пропорционально квадрату времени, то закон движения точки будет:

$$s = at^2,$$

где a – коэффициент, численно равный расстоянию, пройденному точкой за первую секунду.

В момент $t_2 = 2$ с расстояние точки от начала отсчета будет численно равно $4a$ и т. д. Следовательно, зная уравнение (2.1), мы действительно можем определить положение движущейся точки в любой момент времени.

Заметим, что величина s в уравнении (2.1) определяет положение движущейся точки, а не пройденный ею путь. Например, если точка, двигаясь из начала O , доходит до положения M_1 , а затем, перемещаясь в обратном направлении, приходит в положение M , то в этот момент ее координата $s = OM$ а пройденный за время движения путь будет равен $OM_1 + M_1M$, т. е. не равен s .

В случае прямолинейного движения, если направить ось Ox вдоль траектории точки (рис. 2.2), будем иметь $s = x$, и закон прямолинейного движения точки будет:

$$x = f(t).$$

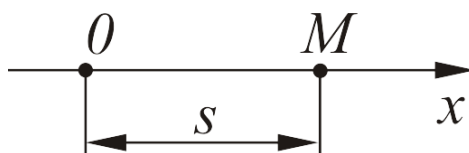


Рисунок 2.2 – Задание прямолинейного движения точки

2.1.2.2. Координатный способ задания движения

Естественный способ задания движения весьма нагляден. Однако траектория точки заранее бывает известна далеко не всегда. Поэтому на практике чаще пользуются другим способом задания движения точки – **координатным**.

Положение точки по отношению к данной системе отсчета $Oxyz$ можно определить ее декартовыми координатами x, y, z (рис. 2.3).

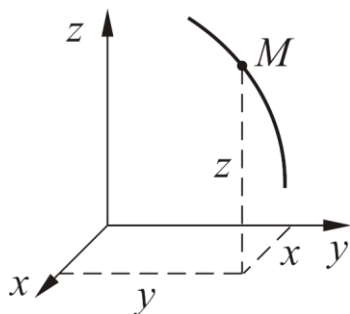


Рисунок 2.3 – Координатный способ задания движения точки

При движении все эти три координаты будут с течением времени изменяться. Чтобы знать закон движения точки, т. е. ее положение в пространстве в любой момент времени, надо знать значения координат точки для каждого момента времени, т. е. знать зависимости:

$$\begin{cases} x = f_1(t); \\ y = f_2(t); \\ z = f_3(t). \end{cases} \quad (2.2)$$

Уравнения (2.2) представляют собой **уравнения движения точки в декартовых осях координат**.

Если движение точки совершается все время в одной и той же плоскости, то, приняв эту плоскость за плоскость Oxy , мы получим в этом случае два уравнения движения:

$$\begin{cases} x = f_1(t); \\ y = f_2(t). \end{cases} \quad (2.3)$$

Наконец, при прямолинейном движении точки, если вдоль ее траектории направить координатную ось Ox , движение будет описываться одним уравнением.

Уравнения (2.2) представляют собою одновременно уравнения траектории точки в параметрической форме, где роль параметра играет время t . Исключив из уравнений движения время t , можно найти уравнение траектории в обычной форме.

Пример. Пусть движение точки в плоскости Oxy задано уравнениями:

$$\begin{cases} x = 2t; \\ y = 12t^2. \end{cases}$$

Решение. По этим уравнениям можно найти, что в момент $t_0 = 0$ с точка находится в положении $M_0(0; 0)$, т. е. в начале координат, в момент $t_1 = 1$ с – в положении $M_1(2; 12)$ и т. д. Таким образом, эти уравнения действительно определяют положение точки в любой момент времени. Присваивая параметру времени t разные значения и изображая соответствующие положения точки на рисунке, мы можем построить ее траекторию.

Другим путем траекторию можно найти, исключив параметр времени t из уравнений движения.

Выразим из первого уравнения параметр времени:

$$t = x/2.$$

Подставляя выражение для t в уравнение движения по оси y , получим уравнение для траектории движения точки:

$$y = 3x^2.$$

Из полученного уравнения следует, что траекторией точки является парабола с вершиной в начале координат (рис. 2.4).

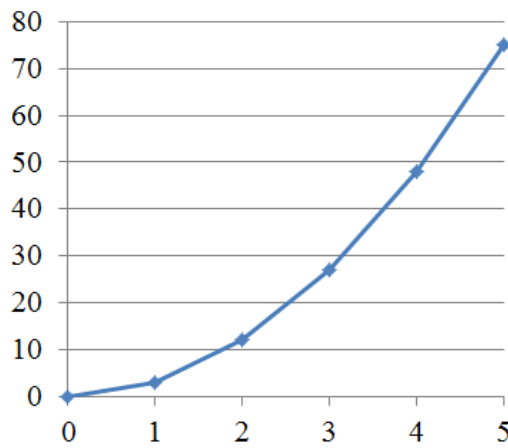


Рисунок 2.4 – График траектории движения точки

2.1.2.3. Векторный способ задания движения

Пусть точка M движется по отношению к некоторой системе отсчета $Oxyz$. Положение этой точки в любой момент времени можно определить, задав вектор \vec{r} , проведенный из начала координат O в точку M (рис. 2.5). Вектор \vec{r} называется **радиусом-вектором** точки M .

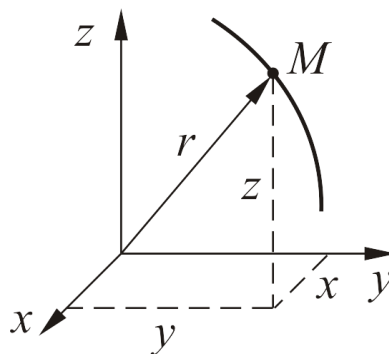


Рисунок 2.5 – Векторный способ задания движения точки

При движении точки M вектор \vec{r} будет с течением времени изменяться и по модулю, и по направлению. Следовательно, \vec{r} является переменным вектором (вектором-функцией), зависящим от аргумента времени t :

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (2.4)$$

Равенство (2.4) и определяет **закон криволинейного движения точки в векторной форме**, так как оно позволяет в любой момент времени t построить соответствующий вектор \vec{r} и найти положение движущейся точки.

Геометрическое место концов вектора \vec{r} определяет траекторию движущейся точки.

2.1.2.4. Переход от координатного способа задания движения к естественному

Если движение задано координатным способом уравнениями (2.2), то по ним можно определить траекторию точки. Для перехода от координатного способа задания движения к естественному применяют формулу:

$$S = \int_0^t \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} . \quad (2.5)$$

Вычисляя интеграл в формуле (2.5), получают закон движения точки вдоль ее траектории движения.

Пример. Найти траекторию точки и закон движения вдоль траектории, если движение точки в плоскости Oxy задано уравнениями:

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos(\omega t); \\ y = a \cdot \sin(\omega t), \end{cases}$$

где a и ω – постоянные величины.

Решение. Возводя оба уравнений в квадрат и складывая их почленно, получим

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Следовательно, траектория – окружность радиуса a с центром в начале координат. Вычисляя производные от x и y по t , получим:

$$\begin{cases} x' = -a \cdot \omega \sin(\omega t); \\ y' = a \cdot \omega \cos(\omega t). \end{cases}$$

Подставляя эти значения в равенство (2.5), получим

$$s = \int_0^t a \omega dt, \quad \text{или} \quad s = a \omega t.$$

Это уравнение является законом движения точки вдоль траектории (рис. 2.6).

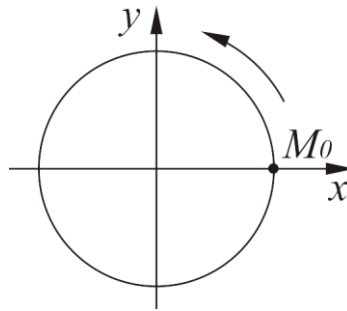


Рисунок 2.6 – Траектория движения точки

При $t = 0$, $x_0 = a$, $y_0 = 0$, т. е. точка находится в положении M_0 , а когда t начинает возрастать, x убывает, а y растет, принимая положительные значения. Следовательно, начало отсчета s лежит в точке M_0 , а движение по окружности происходит в направлении, показанном на рисунке 2.6 стрелкой.

2.1.3. Вектор скорости точки

Одной из основных кинематических характеристик движения точки является векторная величина, называемая **скоростью точки**.

Пусть движущаяся точка в момент времени t находится в положении M (рис. 2.7), определяемом радиус-вектором \vec{r} , а в момент времени t_1 перемещается в положение M_1 , определяемое радиус-вектором \vec{r}_1 . Тогда перемещение точки за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ определяется вектором $\overline{MM_1}$, который называется вектором перемещения точки.

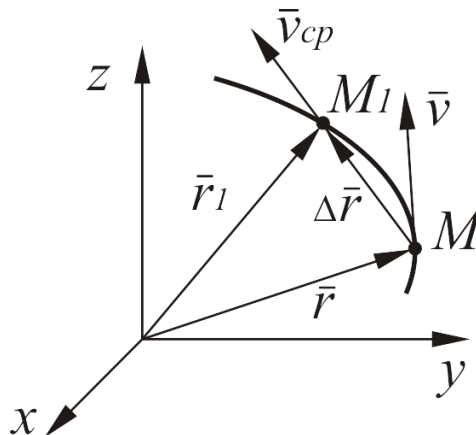


Рисунок 2.7 – Определение вектора скорости

Отношение вектора перемещения точки к соответствующему промежутку времени дает векторную величину, называемую **средней по модулю и направлению скорости точки** за промежуток времени Δt :

$$v_{cp} = \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \frac{\Delta r}{\Delta t}. \quad (2.6)$$

Направлен вектор средней скорости v_{cp} так же, как и вектор перемещения $\overline{MM_1}$.

Скорость точки в данный момент времени t называется векторная величина v , к которой стремится средняя скорость v_{cp} при стремлении промежутка времени Δt к нулю:

$$v = \lim (v_{cp}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}. \quad (2.7)$$

Предел отношения $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ при $\Delta t \rightarrow 0$ представляет собой первую производную от вектора r по времени и обозначается, как $\frac{dr}{dt}$. Поэтому **скорость точки в данный момент** времени определяется первой производной от радиус-вектора точки по времени:

$$v = \frac{dr}{dt}. \quad (2.8)$$

Вектор скорости направлен по касательной к траектории движения точки в сторону движения.

В случае прямолинейного движения вектор скорости направлен все время вдоль прямой, по которой движется точка, и может изменяться только по величине. При криволинейном движении кроме величины все время изменяется и направление вектора скорости точки.

В качестве единиц измерения скорости применяются обычно [м/с] или [км/ч].

2.1.4. Вектор ускорения точки

Ускорение – векторная величина, характеризующая изменение скорости по величине и направлению в единицу времени.

Пусть за промежуток времени Δt точка переместилась из положения M в положение M_1 , и вектор скорости изменился на величину $\Delta\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}$ (рис. 2.8).

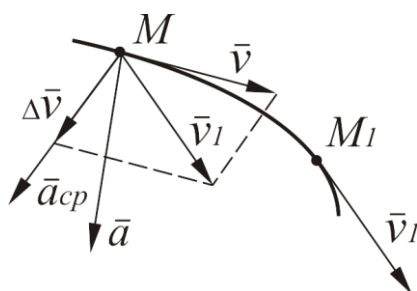


Рисунок 2.8 – Определение вектора ускорения

Отношение приращения вектора скорости $\Delta\vec{v}$ к соответствующему промежутку времени Δt определяет **вектор среднего ускорения точки** за этот промежуток времени:

$$\bar{a}_{cp} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \quad (2.9)$$

Вектор среднего ускорения имеет то же направление, что и вектор $\Delta\vec{v}$, т. е. направлен в сторону вогнутости траектории.

Ускорение точки в данный момент времени t называется векторная величина \bar{a} , к которой стремится среднее ускорение a_{cp} при стремлении промежутка времени Δt к нулю:

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \right) = \frac{d\vec{v}}{dt},$$

или

$$\bar{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (2.10)$$

Вектор ускорения точки в любой момент времени равен производной от вектора скорости или второй производной от радиус-

вектора точки по времени. В случае прямолинейного движения вектор ускорения направлен вдоль прямой, по которой движется точка. При плоском криволинейном движении вектор ускорения лежит в плоскости кривой и направлен в сторону вогнутости кривой.

В качестве единиц измерения ускорения применяются обычно $[м/с^2]$.

2.1.5. Определение скорости и ускорения точки при координатном способе задания движения

Скорость точки это производная по времени от радиус-вектора r , определяющего его положение в пространстве. Скорость точки характеризует изменение её положения во времени. Учитывая, что $r_x = x$, $r_y = y$, $r_z = z$, уравнение (2.8) примет следующий вид:

$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = x'; \\ v_y = \frac{dy}{dt} = y'; \\ v_z = \frac{dz}{dt} = z'. \end{cases} \quad (2.11)$$

Таким образом, *проекции вектора скорости на координатные оси равны первым производным от соответствующих координат точки по времени.*

Зная проекции скорости, модуль вектора скорости определяется следующим образом:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (2.12)$$

Направление вектора скорости задают **направляющие косинусы**, определяющие углы наклона (α, β, γ) вектора скорости к осям координат:

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{v_x}{v}; \\ \cos \beta = \frac{v_y}{v}; \\ \cos \gamma = \frac{v_z}{v}. \end{cases} \quad (2.13)$$

Проекции вектора ускорения на координатные оси равны:

$$\begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = v'_x = x''; \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = v'_y = y''; \\ a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = v'_z = z''. \end{cases} \quad (2.14)$$

Зная проекции ускорения, можно определить модуль вектора ускорения:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (2.15)$$

Направление вектора ускорения задают направляющие косинусы, определяющие углы наклона ($\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$) вектора ускорения к осям координат:

$$\begin{cases} \cos \alpha_1 = \frac{a_x}{a}; \\ \cos \beta_1 = \frac{a_y}{a}; \\ \cos \gamma_1 = \frac{a_z}{a}. \end{cases} \quad (2.16)$$

Пример. Движение точки задано уравнениями (x, y – в метрах, t – в секундах):

$$\begin{cases} x = 8t - 4t^2; \\ y = 6t - 3t^2. \end{cases}$$

Определить траекторию, скорость и ускорение точки.

Решение. Для определения траектории исключаем из уравнений движения время t . Для этого умножаем обе части первого уравнения на 3, а обе части второго уравнения – на 4 и почленно вычитаем из первого равенства второе, получим:

$$\begin{cases} x = 8t - 4t^2 \cdot 3 \\ y = 6t - 3t^2 \cdot 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 24t - 12t^2 \\ 4y = 24t - 12t^2 \end{cases} \Rightarrow 3x - 4y = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{4}x$$

Графиком уравнения движения является прямая линия AB , наклоненная к оси Ox под углом α , где $\operatorname{tg}\alpha = 3/4$ (рис. 2.9).

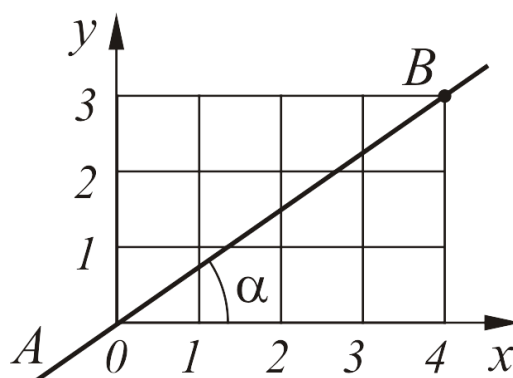


Рисунок 2.9 – Траектория движения точки

Определяем скорость точки:

$$\begin{cases} v_x = x' = 8 - 8t = 8(1-t); \\ v_y = y' = 6 - 6t = 6(1-t). \end{cases}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{64(1-t)^2 + 36(1-t)^2} = \sqrt{100(1-t)^2} = 10(1-t).$$

Теперь находим ускорение точки:

$$\begin{cases} a_x = v'_x = -8; \\ a_y = v'_y = -6. \end{cases}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 10 \text{ м/с}^2$$

Направлены векторы скорости и ускорения, очевидно, вдоль траектории, т. е. вдоль прямой OB . Проекции ускорения на оси координат все время отрицательны, следовательно, ускорение имеет постоянное направление от точки B к точке O .

Проекции скорости при $0 < t < 1$ положительны, следовательно, в течение этого промежутка времени скорость точки направлена от O к B . При этом в момент $t = 0$ $v = 10$ м/с, в момент $t = 1$ с $v = 0$. В последующие моменты времени ($t > 1$ с) обе проекции скорости отрицательны и, следовательно, скорость направлена от B к O , т. е. так же, как и ускорение.

Заметим, что при $t = 0$ $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$; при $t = 1$ с $x_1 = 4$, $y_1 = 3$ (точка B); при $t = 2$ с $x_2 = 0$, $y_2 = 0$ при $t > 2$ величины x и y растут по модулю, оставаясь отрицательными.

Итак, заданные в условиях задачи уравнения движения рассказывают нам всю историю движения точки. Движение начинается из точки O с начальной скоростью $v_0 = 10$ м/с и происходит вдоль прямой OB , наклоненной к оси Ox под углом α , для которого $\operatorname{tg} \alpha = 3/4$. На участке OB точка движется замедленно (модуль ее скорости убывает) и через одну секунду приходит в положение B с координатами (4; 3), где скорость ее обращается в нуль. Отсюда начинается ускоренное движение в обратную сторону. В момент $t = 2$ с точка вновь оказывается в начале координат и дальше продолжает свое движение вдоль OA . Ускорение движения все время равно 10 м/с².

2.1.6. Определение скорости при естественном способе задания движения

При естественном способе движение задается в виде:

$$s = f(t).$$

Пусть движущаяся точка в момент времени t находится в положении M , а в момент времени t_1 перемещается в положение M_1 (рис. 2.10). Тогда за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ перемещение точки $\Delta s = s_1 - s$.

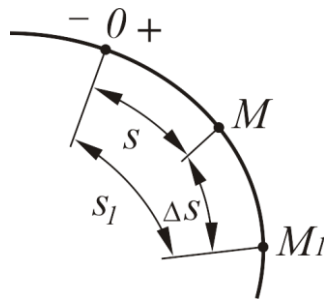


Рисунок 2.10 – Движение точки, заданное естественным способом

Величина средней скорости будет равна:

$$v_{cp} = \frac{s_1 - s}{t_1 - t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (2.17)$$

Переходя к пределу, определим величину скорости точки в данный момент времени:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

или

$$v = \frac{ds}{dt} = s'. \quad (2.18)$$

Скорость точки в данный момент времени равна первой производной от расстояния (криволинейной координаты) s точки по времени.

Направлен вектор скорости по касательной траектории. По формуле (2.18) определяют численную (алгебраическую) величину скорости. Знак скорости v совпадает со знаком Δs . Если величина скорости $v > 0$, то вектор скорости направлен в положительном направлении отсчета расстояния s , а если $v < 0$, то в отрицательном.

2.1.7. Касательное и нормальное ускорение точки

При естественном способе задания движения вводится система взаимно перпендикулярных осей (τ, n, b), движущихся вместе с точкой и меняющих свое положение в пространстве. Такая система называется **естественная система координат**. При этом ось τ направлена вдоль касательной к траектории в сторону положительного отсчета расстояния s ; ось n направлена по нормали, лежащей в соприкасающейся плоскости и направленной в сторону вогнутости траектории; ось b направлена перпендикулярно к осям τ и n (рис. 2.11). Ось n называется **нормаль**, а ось b – **бинормаль**.

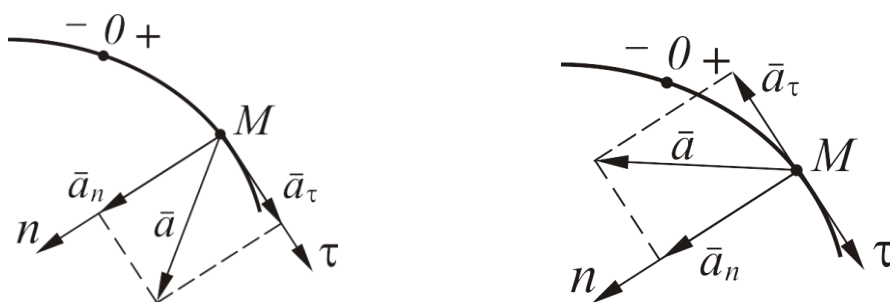


Рисунок 2.11 – Определение нормального и касательного ускорений

Вектор ускорения a лежит в соприкасающейся плоскости, т. е. в плоскости $\theta\tau n$, следовательно, проекция вектора ускорения a на бинормаль b равна нулю ($a_b = 0$).

Проекция ускорения точки на касательную ось (**касательное ускорение a_τ**) равна первой производной от численной величины скорости или второй производной от расстояния (криволинейной координаты) s по времени, а проекция ускорения на главную нормаль (**нормальное ускорение a_n**) равна квадрату скорости, деленному на радиус кривизны траектории в данной точке кривой:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}; \quad (2.19)$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}. \quad (2.20)$$

Нормальное ускорение всегда положительно и его вектор направлен в сторону вогнутости траектории, а касательное ускорение может быть как положительным, так и отрицательным, и в зависимости от этого направлен в ту или иную сторону по касательной к траектории движения точки (рис. 2.11).

Вектор полного (абсолютного) ускорения лежит на диагонали параллелограмма, построенного на векторах нормального и касательного ускорений, а его величина определяется следующим образом:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}. \quad (2.21)$$

В случае движения точки в плоскости xOy и если известны проекции вектора скорости и ускорения на координатные оси, то касательное и нормальное ускорения определяются следующими формулами:

$$a_\tau = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v}; \quad (2.22)$$

$$a_n = \frac{|v_x a_y - v_y a_x|}{v}. \quad (2.23)$$

2.1.8. Некоторые частные случаи движения точки

Пользуясь полученными результатами, рассмотрим некоторые частные случаи движения точки.

Прямолинейное движение

Если траекторией точки является прямая линия, то $\rho = \infty$. Тогда $a_n = 0$ и абсолютное ускорение точки равно касательному ускорению:

$$a = a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}. \quad (2.24)$$

Так как в данном случае скорость изменяется только численно, то отсюда заключаем, что *касательное ускорение характеризует изменение скорости по численной величине*.

Равномерное криволинейное движение

Равномерным называется такое криволинейное движение точки, в котором численная величина скорости все время остается постоянной: $v = const$.

Тогда $a_\tau = 0$ и абсолютное ускорение точки равно нормальному ускорению:

$$a = a_n = \frac{v^2}{\rho}. \quad (2.25)$$

Вектор абсолютного ускорения \bar{a} направлен при этом все время по нормали к траектории точки.

Так как в данном случае ускорение появляется только за счет изменения направления скорости, то отсюда заключаем, что *нормальное ускорение характеризует изменение скорости по направлению*.

Найдем закон равномерного криволинейного движения. Из формулы $v = \frac{ds}{dt}$ имеем $ds = v dt$.

Пусть в начальный момент ($t_0=0$) точка находится от начала отсчета на расстоянии s_0 . Тогда, беря от левой и правой части равенства определенные интегралы в соответствующих пределах, получим:

$$\int_{s_0}^s ds = \int_0^t v dt,$$

так как $v = const$, то

$$s - s_0 = vt. \quad (2.26)$$

Окончательно находим закон равномерного криволинейного движения в виде:

$$s = s_0 + vt. \quad (2.27)$$

Если в этом равенстве положить $s_0 = 0$, то получим путь, пройденный точкой за время t . Следовательно, **при равномерном движении** путь, пройденный точкой, растет пропорционально времени, а скорость движения равна отношению пути ко времени.

Равномерное прямолинейное движение

В этом случае $a_n = a_\tau = 0$, а значит и $a = 0$. Заметим, что **единственным движением, в котором ускорение точки все время равно нулю, является равномерное прямолинейное движение.**

Равнопеременное криволинейное движение

Равнопеременным называется **такое криволинейное движение точки, при котором касательное ускорение остается все время величиною постоянной: $a_\tau = const$.** Найдем закон этого движения, считая, что при $t = 0$ $s = s_0$, a $v = v_0$, где v_0 – начальная скорость точки.

Так как

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}$$

или

$$dv = a_\tau dt,$$

то, беря от обеих частей последнего равенства интегралы в соответствующих пределах и учитывая, что $a_\tau = const$, получим

$$v = v_0 + a_\tau t. \tag{2.28}$$

Так как

$$v = \frac{ds}{dt},$$

то

$$\frac{ds}{dt} = v_0 + a_\tau t$$

или

$$ds = v_0 dt + a_\tau t dt.$$

Интегрируя последнее выражение, найдем закон равнопеременного криволинейного движения точки в виде

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}. \quad (2.29)$$

Если при криволинейном движении точки модуль скорости возрастает, то движение называется **ускоренным**, а если убывает – **замедленным**.

В частности, при равнопеременном движении, если величины v и a_τ имеют одинаковые знаки, движение будет **равноускоренным**, а если разные знаки **равнозамедленным**.

Гармонические колебания

Рассмотрим прямолинейное движение точки M (рис. 2.12), при котором ее расстояние x от начала координат O изменяется со временем по закону

$$x = a \cos(kt), \quad (2.30)$$

где a и k – постоянные величины.



Рисунок 2.12 – Прямолинейные колебания точки

Точка M совершает при этом движении колебания между положениями $M_0(+a)$ и $M_1(-a)$. Колебания, происходящие по этому закону, играют большую роль в технике. Они называются **простыми гармоническими колебаниями**. Величина a , равная наибольшему отклонению точки от центра колебаний O , называется **амплитудой колебаний**.

Легко видеть, что, начиная движение в момент $t = 0$ из положения M_0 , точка вновь придет в это положение в момент времени t_1 , для которого $\cos(kt_1) = 1$, т. е. $kt_1 = 2\pi$.

*Промежуток времени T , в течение которого точка совершает одно полное колебание, называется **периодом колебаний**:*

$$T = t_1 = \frac{2\pi}{k}. \quad (2.31)$$

Беря производные от x по t , найдем численные значения скорости и ускорения точки:

$$v = v_x = -ak \sin(kt), \quad (2.32)$$

$$a = a_x = -ak^2 \cos(kt). \quad (2.33)$$

Следовательно, в этом движении и скорость, и ускорение точки изменяются с течением времени по гармоническому закону. По знакам скорости и ускорения легко проверить, что когда точка движется к центру колебаний, ее движение является ускоренным, а когда от центра колебаний – замедленным.

Аналогичные колебания происходят и при законе $x = a \sin(kt)$, только движение в этом случае начинается из центра O .

2.2. Кинематика твердого тела

Различают пять видов движения твердого тела:

- поступательное;
- вращательное;
- плоскопараллельное (плоское);
- сферическое;
- общий случай движения твердого тела.

Из них простейшими являются поступательное и вращательное движения.

2.2.1. Поступательное движение твердого тела

Поступательное движение – движение, при котором любая прямая, проведенная в теле остается параллельной своему первоначальному положению.

Поступательное движение не надо путать с прямолинейным

движением, поскольку при поступательном движении тела траектории его точек могут быть любыми.

Поступательное движение характеризуется:

- линейным перемещением (\bar{s}, \bar{r});
- скоростью (\bar{v});
- ускорением (\bar{a}).

Свойства поступательного движения определяются **теоремой**: *все точки твердого тела, движущегося поступательно, описывают одинаковые траектории и в каждый момент времени имеют геометрически равные скорости и ускорения.*

Докажем эту теорему. Для этого рассмотрим поступательное движение твердого тела относительно системы отсчета $Oxyz$ (рис. 2.13). Выделим в теле две произвольные точки A и B , положение которых в момент времени t определяется радиусами-векторами \bar{r}_A и \bar{r}_B . Проведем вектор \overline{AB} , соединяющий эти точки. Тогда по правилу сложения векторов имеем:

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \overline{AB}. \quad (2.34)$$

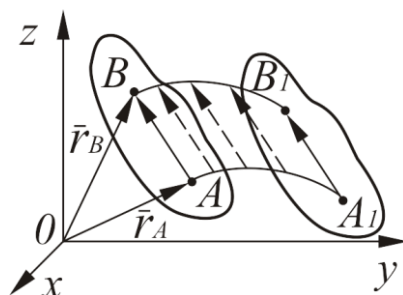


Рисунок 2.13 – Теорема о поступательном движении твердого тела

Так как расстояние между точками в абсолютно твердом теле постоянно и тело движется поступательно, то величина и направление вектора \overline{AB} постоянно $\overline{AB} = const$. Вследствие этого, траектория точки B получается из траектории точки A параллельным смещением всех ее точек на постоянный вектор \overline{AB} . Следовательно, траектории точек A и B будут одинаковыми кривыми.

Для определения скоростей точек A и B продифференцируем обе части равенства (2.34) по времени:

$$\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\overline{AB}}{dt}. \quad (2.35)$$

Учитывая, что $\overline{AB} = const$, получаем

$$\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt},$$

т. е. $\bar{v}_A = \bar{v}_B$.

Так как, скорости точек A и B равны и по величине и направлению, то ускорения в любой момент времени тоже одинаковы по модулю и направлению. Теорема доказана.

Из теоремы следует, что *поступательное движение тела вполне определяется движением какой-нибудь одной его точки*. Поэтому изучение поступательного движения сводится к кинематике точки, рассмотренной ранее.

Отметим также, что только при поступательном движении справедливы термины скорость тела, ускорение тела.

2.2.2. Вращательное движение твердого тела.

Угловая скорость и угловое ускорение

Вращательное движение – такое движение, при котором какие-нибудь две точки, принадлежащие телу, остаются на протяжении всего времени движения тела неподвижными. Проходящая через эти неподвижные точки A и B прямая называется **осью вращения**.

При этом движении все остальные точки тела движутся в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, и описывают окружности, центры которых лежат на этой оси.

Через ось вращения проведем неподвижную плоскость Π_0 и подвижную Π , скрепленную с вращающимся телом и вращающуюся вместе с ним (рис. 2.14). Пусть в начальный момент времени обе плоскости совпадают. Тогда в момент времени t положение подвижной плоскости Π и самого вращающегося тела можно определить углом φ между прямыми, расположенными в этих плоскостях и перпендикулярными оси вращения. Угол φ называется **углом поворота тела**.

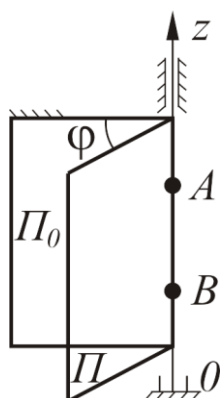


Рисунок 2.14 – Вращательное движение твердого тела

Положение тела относительно выбранной системы отсчета полностью определяется в любой момент времени, если задано уравнение

$$\varphi = f(t), \quad (2.36)$$

где $f(t)$ – функция, определяющая закон вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.

Угол φ считается *положительным*, если он откладывается *против часовой стрелки*, и *отрицательным* – в *противоположном направлении*, если смотреть с положительного направления оси Oz .

Основными характеристиками вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси являются его угловая скорость и угловое ускорение. **Угловой скоростью** тела в какой-либо момент времени называют первую производную по времени от угла поворота в этот момент:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (2.37)$$

Размерность угловой скорости ω – $[рад/с] = [с^{-1}]$.

Угловую скорость можно изобразить в виде вектора $\bar{\omega}$ (рис. 2.15), численная величина которого определяется по формуле (2.37) и который направлен вдоль оси вращения тела в ту сторону, откуда вращение видно происходящим против хода часовой стрелки. Такой вектор сразу определяет и модуль угловой скорости, и ось вращения, и направление вращения вокруг этой оси.

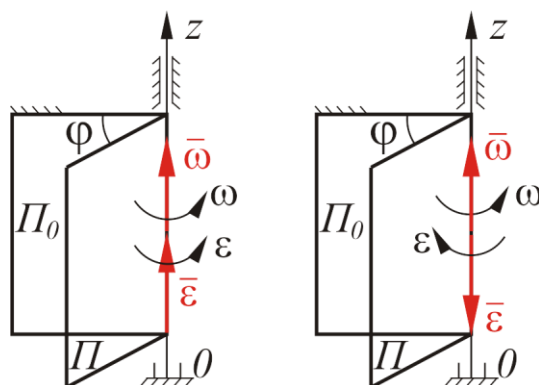


Рисунок 2.15 – Вектор угловой скорости и углового ускорения

В технике **угловая скорость** – это частота вращения, выраженная в оборотах в минуту. За 1 мин тело повернется на угол $2\pi n$, если n – число оборотов в минуту. Разделив этот угол на число секунд в минуте, получим частоту вращения:

$$\omega = \frac{\pi n}{30}. \quad (2.38)$$

Угловое ускорение характеризует изменение угловой скорости тела с течением времени. Угловым ускорением тела называют первую производную по времени от угловой скорости, т. е. вторую производную от угла поворота:

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt}. \quad (2.39)$$

Размерность углового ускорения: $[\omega] = \text{рад}/\text{с}^2 = \text{с}^{-2}$.

Если $\varepsilon > 0$ при $\omega > 0$, то угловая скорость возрастает с течением времени и, следовательно, тело вращается *ускоренно* в рассматриваемый момент времени *в положительную сторону* (против часовой стрелки). При $\varepsilon < 0$ и $\omega < 0$ тело вращается *ускоренно* *в отрицательную сторону*. Если $\varepsilon < 0$ при $\omega > 0$, то имеем *замедленное вращение* *в положительную сторону*. При $\varepsilon > 0$ $\omega < 0$ имеем *замедленное вращение* *в отрицательную сторону*.

Угловую скорость и угловое ускорение на рисунках изображают дуговыми стрелками вокруг оси вращения. Дуговая стрелка для угловой скорости указывает направление вращения тела (рис. 2.15).

Для ускоренного вращения дуговые стрелки для угловой скорости и углового ускорения имеют одинаковые направления, для замедленного – их направления противоположны.

Угловое ускорение тела (по аналогии с угловой скоростью) можно также изобразить в виде вектора $\vec{\varepsilon}$, направленного вдоль оси вращения.

2.2.3. Частные случаи вращательного движения твердого тела

Если угловая скорость тела остается все время постоянной – $\omega = const$, то вращение называется **равномерным**. Определим закон равномерного вращения. Из уравнения вращательного движения (2.36) имеем

$$d\varphi = \omega \cdot dt .$$

Считая, что в начальный момент времени при $t_0 = 0$ угол $\varphi_0 = 0$ получим

$$\int_0^{\varphi} d\varphi = \omega \int_0^t dt ;$$

$$\varphi = \omega t. \quad (2.40)$$

Данное уравнение является *законом равномерного вращательного движения тела*.

Если угловое ускорение тела во все время движения остается постоянным – $\varepsilon = const$, то вращение называется **равнопеременным**. Найдем закон равнопеременного вращения, считая, что в начальный момент времени $t_0 = 0$ угол $\varphi_0 = 0$, а угловая скорость $\omega = \omega_0$. Тогда

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow d\omega = \varepsilon \cdot dt ;$$

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \varepsilon \cdot dt .$$

После интегрирования получим

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t. \quad (2.41)$$

Учитывая, что $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, получим

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon \cdot t.$$

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$d\varphi = (\omega_0 + \varepsilon \cdot t)dt,$$

$$\int_0^{\varphi} d\varphi = \int_0^t (\omega_0 + \varepsilon \cdot t)dt.$$

После интегрирования получим

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}. \quad (2.42)$$

Уравнение (2.42) является законом равнопеременного вращательного движения.

2.2.4. Скорости и ускорения точек при вращении твердого тела

Установив в предыдущем разделе характеристики движения всего тела в целом, перейдем к изучению движения отдельных его точек.

Рассмотрим какую-нибудь точку M твердого тела, находящуюся на расстоянии h от оси вращения (рис. 2.16). При вращении тела точка M будет описывать окружность радиуса h , плоскость которой перпендикулярна к оси вращения, а центр C лежит на самой оси. Если за элементарное время dt происходит поворот тела на угол $d\varphi$, то точка M при этом совершает вдоль своей траектории элементарное перемещение $ds = h \cdot d\varphi$. Тогда скорость точки будет равна:

$$v = \frac{ds}{dt} = h \frac{d\varphi}{dt} = h \cdot \omega \quad (2.43)$$

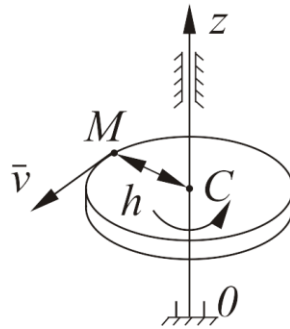


Рисунок 2.16 – Скорость точек при вращательном движении твердого тела

Таким образом, **линейная скорость точки** вращающегося твердого тела численно равна произведению угловой скорости тела на расстояние от этой точки до оси вращения. Скорости точек направлены по касательным к траекториям и, следовательно, перпендикулярны радиусам вращения.

Так как для всех точек тела угловая скорость имеет в данный момент одно и то же значение, то из формулы (2.43) следует, что линейные скорости точек вращающегося тела пропорциональны их расстояниям от оси вращения (рис. 2.17).

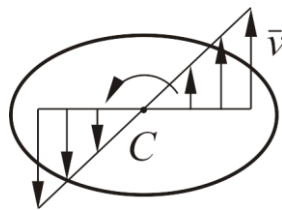


Рисунок 2.17 – Распределение линейных скоростей точек при вращательном движении твердого тела

Для нахождения ускорения точек тела воспользуемся формулами для нормального и касательного ускорения точек:

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt}; \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

В нашем случае $\rho = h$. Подставляя $v = h\omega$, получим выражения для определения касательного и нормального ускорений:

$$a_{\tau} = \frac{h \cdot d\omega}{dt} = h \cdot \varepsilon; \quad (2.44)$$

$$a_n = \frac{h^2 \omega^2}{h} = h \cdot \omega^2. \quad (2.45)$$

Таким образом, полное ускорение точки

$$a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2} = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (2.46)$$

Вектор касательного ускорения направлен по касательной к траектории в сторону вращения. Направление касательного ускорения зависит от знака углового ускорения. При $\omega > 0$ и $\varepsilon > 0$ или $\omega < 0$ и $\varepsilon < 0$ имеем *ускоренное вращение тела*, и направления векторов a_{τ} и v совпадают. Если ω и ε имеют разные знаки (замедленное вращение), то a_{τ} и v направлены противоположно друг другу.

Вектор нормального ускорения всегда направлен по радиусу к оси вращения (рис. 2.18).

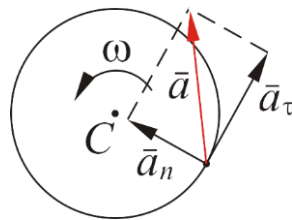


Рисунок 2.18 – Направление вектора ускорения точки при вращательном движении твердого тела

Касательные, нормальные и полные ускорения точек, как и скорости (рис. 2.17), распределены тоже по линейному закону. Они линейно зависят от расстояний точек до оси вращения.

Пример. Диск 1 вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через его центр O_1 перпендикулярно плоскости диска, по закону $\varphi = (t-t^2)$ и приводит во вращение диски 2 и 3, имеющие общую неподвижную ось вращения и жестко скрепленные друг с другом (рис. 2.19).

Определить угловые скорости дисков, а так же скорости и ускорения точек их соприкосновения A в момент времени $t = 5$ с, если радиусы дисков $r_1 = 20$ см; $r_2 = 30$ см; $r_3 = 20$ см; скольжение между дисками отсутствует.

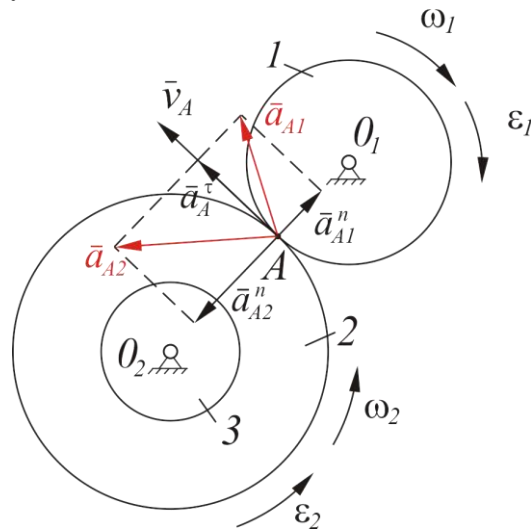


Рисунок 2.19 – Схема к примеру

Решение. Определяем угловую скорость и угловое ускорение диска 1:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d(t - t^2)}{dt} = 1 - 2t;$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d(1 - 2t)}{dt} = -2.$$

В момент времени $t = 5$ с соответственно

$$\omega_1 = -9 \text{ с}^{-1}; \quad \varepsilon_1 = -2 \text{ с}^{-2}.$$

Так как и угловая скорость, и угловое ускорение отрицательны, значит, они направлены в одну сторону, по часовой стрелке.

Скорости и касательные ускорения точек соприкосновения дисков 1 и 2 (точка A) при отсутствии скольжения между ними одинаковы. Поэтому

$$v_A = r_1 \cdot \omega_1 = r_2 \cdot \omega_2 = 180 \text{ см/с},$$

$$a_A^\tau = r_1 \cdot \varepsilon_1 = r_2 \cdot \varepsilon_2 = 40 \text{ см/с}.$$

Определим угловую скорость и угловое ускорение второго диска:

$$\omega_2 = \frac{r_1 \cdot \omega_1}{r_2} = 6 \text{ с}^{-1};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{r_1 \cdot \varepsilon_1}{r_2} = 1,3 \text{ с}^{-2}.$$

Дуговые стрелки для ω_2 и ε_2 следует направить в стороны, противоположные дуговым стрелкам для ω_1 и ε_1 соответственно.

Диски 2 и 3 жестко скреплены друг с другом, поэтому их угловые скорости и угловые ускорения одинаковы, т. е.

$$\omega_3 = 6 \text{ с}^{-1}; \quad \varepsilon_3 = 1,3 \text{ с}^{-2}.$$

Определяем нормальные ускорения точек A дисков 1 и 2:

$$a_{A1}^n = r_1 \cdot \omega_1^2 = 1620 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{A2}^n = r_2 \cdot \omega_2^2 = 1080 \text{ см/с}^2.$$

Полные ускорения точек соприкосновения дисков:

$$a_{A1} = \sqrt{(a_A^\tau)^2 + (a_{A1}^n)^2} = 16,2 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{A2} = \sqrt{(a_A^\tau)^2 + (a_{A2}^n)^2} = 10,87 \text{ см/с}^2$$

2.2.5. Определение плоскопараллельного движения тела

Плоскопараллельным, или плоским, называется такое движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются параллельно некоторой неподвижной плоскости.

Исходя из этого, движение тела можно описать движением плоской фигуры, получающейся в сечении этого тела одной из параллельных плоскостей.

Плоское движение совершают многие части механизмов и машин, например катящееся колесо на прямолинейном участке пути,

шатун в кривошипно-шатунном механизме и др. Частным случаем плоскопараллельного движения является вращательное движение твердого тела.

В свою очередь, движение фигуры в своей плоскости можно описать движением произвольного отрезка AB , принадлежащего этой фигуре (рис. 2.20). Положение отрезка AB можно определить, зная координаты x_A , y_A точки A и угол φ , который отрезок AB образует с осью x . Точку A , выбранную для определения положения сечения, будем в дальнейшем называть **полюсом**.

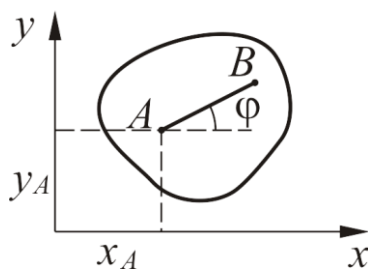


Рисунок 2.20 – Определение плоскопараллельного движения твердого тела

При движении тела величины x_A , y_A и φ будут изменяться. Чтобы знать закон движения тела, т. е. знать его положение в пространстве в любой момент времени, надо знать зависимости

$$\begin{cases} x_A = f_1(t); \\ y_A = f_2(t); \\ \varphi = f_3(t), \end{cases} \quad (2.47)$$

в которых $x_A = f_1(t)$ и $y_A = f_2(t)$ – характеризуют поступательную часть движения, а $\varphi = f_3(t)$ – вращательную.

Уравнения (2.47) называются **уравнениями плоскопараллельного движения твердого тела**.

Плоскопараллельное движение твердого тела складывается из *поступательного* движения, при котором все точки тела движутся так же, как полюс A , и из *вращательного* движения вокруг этого полюса. Поступательная часть плоскопараллельного движения описывается, что очевидно, первыми двумя из уравнений, а вращение вокруг полюса – третьим из этих уравнений.

Основными кинематическими характеристиками рассматриваемого движения являются скорость и ускорение поступательного движения, равные скорости и ускорению полюса ($v_{nocт} = v_A$, $a_{nocт} = a_A$), а также угловая скорость ω и угловое ускорение ε вращательного движения вокруг полюса.

При изучении движения можно в качестве полюса выбрать любую точку тела.

2.2.6. Определение траекторий движения точек тела в плоскопараллельном движении

Рассмотрим теперь движение отдельных точек твердого тела, совершающего плоскопараллельное движение. Для этого, как было указано, достаточно изучить движение точек, лежащих в сечении этого тела.

Рассмотрим точку M тела, положение которой в сечении определяется расстоянием $AM = b$ от полюса A и углом $BAM = \alpha$ (рис. 2.21).

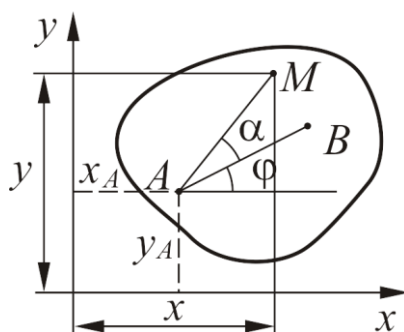


Рисунок 2.21 – Определение движения точек при плоскопараллельном движении твердого тела

Если движение тела задано уравнениями (2.47), то координаты x и y точки M в осях Oxy будут определяться так:

$$\begin{cases} x = x_A + b \cos(\varphi + \alpha), \\ y = y_A + b \sin(\varphi + \alpha), \end{cases} \quad (2.48)$$

где x_A , y_A и φ – известные по уравнениям (2.47) функции времени t .

Если рассматриваемое тело является звеном какого-нибудь механизма, то для определения траектории любой точки тела достаточ-

но выразить ее координаты через какой-нибудь параметр, определяющий положение механизма, а затем исключить этот параметр. Уравнения движения (2.42) при этом знать не обязательно.

Пример. Ползуны A и B , к которым прикреплена линейка эллипсографа (рис. 2.22), перемещаются по взаимно перпендикулярным направляющим. Расстояние $AB = l$. Определить траекторию точки M линейки.

Решение. Взяв за полюс точку A , будем определять положение точки M на линейке отрезком $AM = b$. Положение самой линейки задается углом φ . Тогда для координат x и y точки M находим:

$$x = (b-l)\cos(\varphi)$$

$$y = b \sin(\varphi).$$

Исключая параметр φ , получаем, что траекторией точки (независимо от закона движения линейки) будет эллипс с полуосями $a = |b-l|$ и b и с центром в точке O .

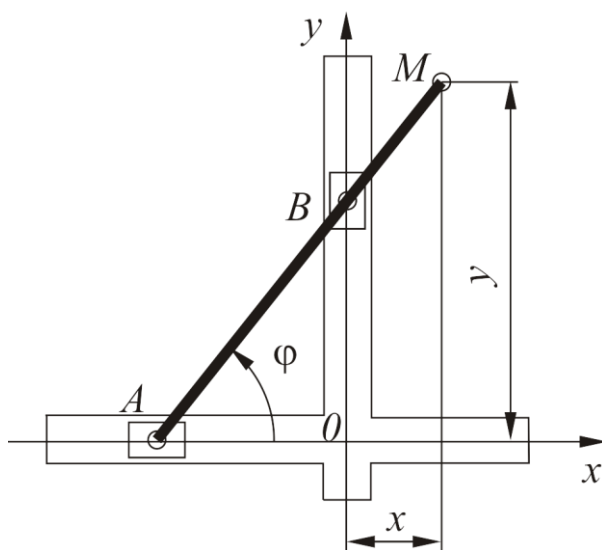


Рисунок 2.22 – Схема движения ползунков линейки эллипсографа

2.2.7. Определение скоростей точек тела при плоскопараллельном движении

Плоскопараллельное движение твердого тела складывается из поступательного движения, при котором все точки тела движутся со скоростью полюса v_A , и из вращательного движения вокруг этого по-

люса (рис. 2.23). Покажем, что скорость любой точки тела складывается геометрически из скоростей, которые она получает в каждом из этих движений.

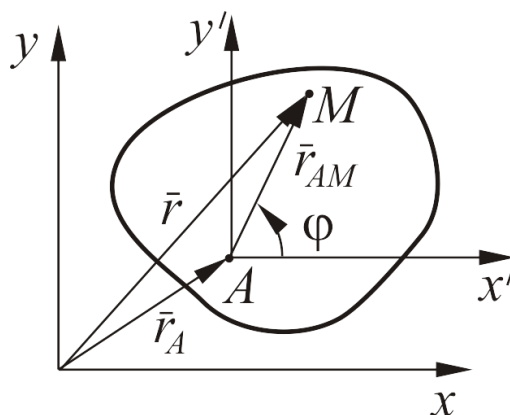


Рисунок 2.23 – Определение скорости точки при плоскопараллельном движении твердого тела

Положение любой точки, лежащей в сечении тела, определяется по отношению к осям Ox радиусом-вектором:

$$\bar{r} = \bar{r}_A + \bar{r}_{AM}, \quad (2.49)$$

где \bar{r}_A – радиус-вектор полюса A ;

\bar{r}_{AM} – вектор, определяющий положение точки M относительно осей $Ax'y'$, перемещающихся вместе с полюсом A поступательно.

Тогда

$$\bar{v}_M = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\bar{r}_{AM}}{dt};$$

$$\bar{v}_M = \bar{v}_A + \bar{v}_{MA}, \quad (2.50)$$

где \bar{v}_A – скорость полюса A ;

\bar{v}_{MA} – относительная скорость точки M во вращательном движении вокруг полюса A (рис. 2.24).

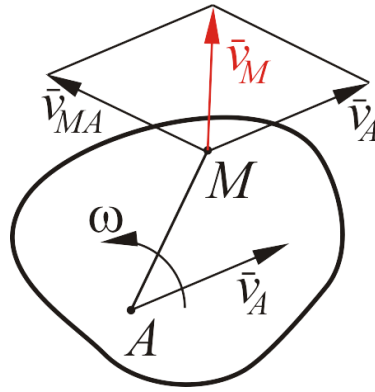


Рисунок 2.24 – Направления векторов скорости точки при плоскопараллельном движении твердого тела

При этом относительная скорость \bar{v}_{MA} определяется по формуле

$$v_{MA} = \omega \cdot MA, \quad (2.51)$$

где ω – угловая скорость вращения тела.

Вектор относительной скорости \bar{v}_{MA} всегда перпендикулярен отрезку MA и направлен в сторону вращения тела.

Таким образом, скорость любой точки M тела геометрически складывается из скорости какой-нибудь другой точки A , принятой за полюс, и скорости точки M в ее вращении вместе с телом вокруг этого полюса. Модуль и направление скорости v_M находятся построением соответствующего параллелограмма.

2.2.8. Теорема о проекциях скоростей двух точек тела при плоскопараллельном движении тела

Определение скоростей точек тела с помощью формулы (2.50) связано обычно с довольно сложными расчетами. Однако существует практически более удобный и простой метод определения скоростей точек тела.

Зачастую удобно пользоваться следующей теоремой: *при плоскопараллельном движении проекции абсолютных скоростей двух точек плоской фигуры на линию, проходящую через эти точки, алгебраически равны* (рис. 2.25).

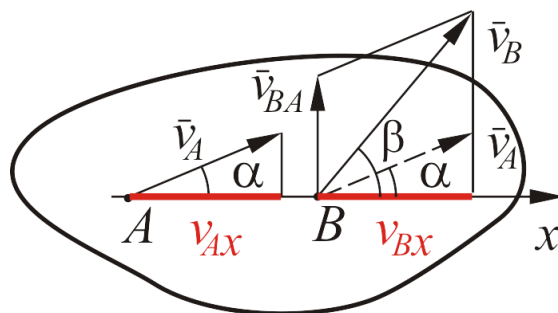


Рисунок 2.25 – Теорема о проекциях скоростей двух точек тела при плоскопараллельном движении тела

Так как вектор v_{BA} всегда перпендикулярен AB , то проецируется на эту линию (ось x) в точку. Тогда, спроецировав вектора скоростей на линию AB , получим

$$v_{Bx} = v_{Ax};$$

$$v_B \cos \beta = v_A \cos \alpha.$$

Данная теорема позволяет находить скорость любой точки плоской фигуры, если известно ее направление и скорость другой точки по модулю и направлению. Теорема справедлива для любого движения абсолютно твердого тела.

2.2.9. Мгновенный центр скоростей. Способы его определения

В любой момент движения плоской фигуры в ее плоскости существует точка, скорость которой в данный момент времени равна нулю. Эта точка называется **мгновенным центром скоростей (МЦС)**.

Для определения положения МЦС необходимо восстановить перпендикуляры к векторам абсолютных скоростей точек плоской фигуры, проведенных из этих точек. На пересечении этих линий будет находиться МЦС (точка P), т. е. точка, относительно которой в данный момент времени тело совершает мгновенный поворот (рис. 2.26).

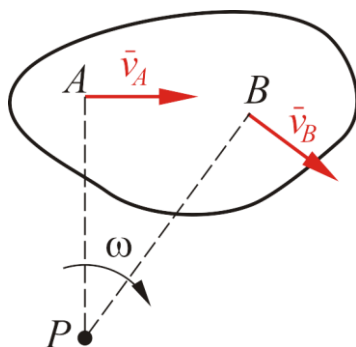


Рисунок 2.26 – Определение положения мгновенного центра скоростей

Мгновенная угловая скорость тела соответственно определяется следующим образом:

$$\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP}. \quad (2.52)$$

Модули скоростей точек определяются по формулам

$$v_A = \omega \cdot AP. \quad (2.53)$$

$$v_B = \omega \cdot BP. \quad (2.54)$$

Скорости точек плоской фигуры прямо пропорциональны их расстояниям до мгновенного центра скоростей:

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{AP}{BP}. \quad (2.55)$$

2.2.10. Способы определения мгновенного центра скоростей

1. Если скорости точек \bar{v}_A и \bar{v}_B плоской фигуры параллельны и не лежат на одном перпендикуляре к направлению данных скоростей или если скорости двух точек фигуры параллельны, равны по модулю и перпендикулярны отрезку AB (рис. 2.27). В этом случае угловая скорость плоской фигуры в данный момент времени равна нулю ($\omega = 0$) и скорости всех точек равны ($\bar{v}_A = \bar{v}_B$), а, следовательно, МЦС находится в бесконечности.

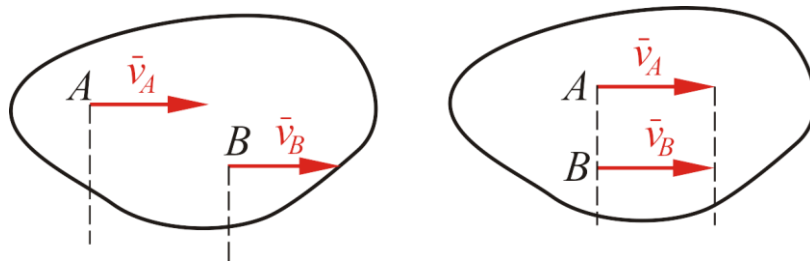


Рисунок 2.27 – Определение МЦС в случае, когда векторы скоростей точек параллельны и не лежат на одном перпендикуляре к направлению скоростей

2. Если скорости точек \vec{v}_A и \vec{v}_B плоской фигуры параллельны и лежат на одном перпендикуляре к направлению данных скоростей (рис. 2.28). В этом случае МЦС определяется как точка пересечения прямой AB с прямой, соединяющей концы векторов скоростей этих точек.

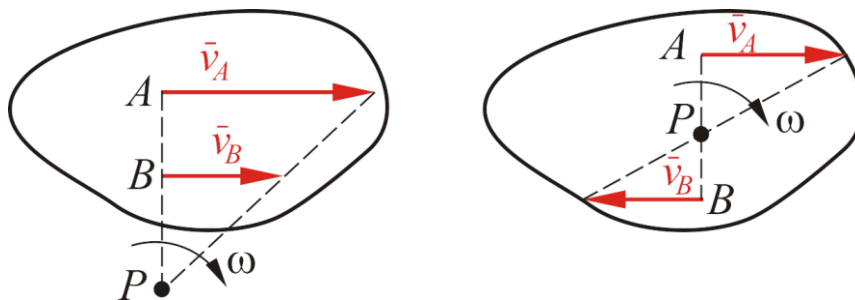


Рисунок 2.28 – Определение МЦС в случае, когда векторы скоростей точек параллельны и лежат на одном перпендикуляре к направлению скоростей

3. При качении одного цилиндрического тела по поверхности другого неподвижного тела (рис. 2.29) точка касания P катящегося тела о неподвижную поверхность имеет в данный момент времени скорость, равную нулю ($\vec{v}_P = 0$), и является МЦС.

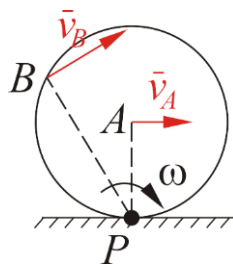


Рисунок 2.29 – Определение МЦС в случае качения одного цилиндрического тела по поверхности другого неподвижного тела

4. Если известен вектор скорости \vec{v}_A точки A плоской фигуры и ее угловая скорость ω (рис. 2.30), то для определения МЦС следует вектор \vec{v}_A повернуть вокруг точки A на 90° в направлении ω и на этой полуоси отложить расстояние AP , которое определяется согласно равенству

$$AP = \frac{v_A}{\omega}.$$

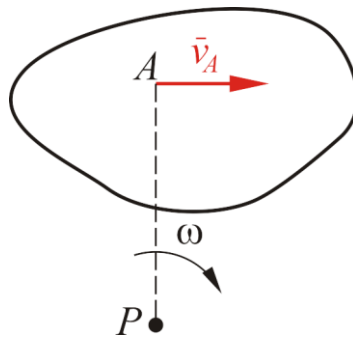


Рисунок 2.30 – Определение МЦС в случае, когда известен вектор скорости точки плоской фигуры и ее угловая скорость

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ ПО ГЛАВЕ 2 «КИНЕМАТИКА»

1. Что изучает кинематика?
2. Дайте определение системе отсчета.
3. Что значит задать движение точки или твердого тела? Как математически описывается движение точки при различных способах задания движения?
4. Что называется траекторией точки?
5. Как осуществить переход от координатного способа задания движения к естественному?
6. Как направлен вектор скорости точки?
7. Как определить скорость и ускорение при векторном способе задания движения точки?
8. Как определить траекторию, скорость и ускорение точки (величины и направления) при координатном способе задания движения точки?
9. Как определить скорость, касательное, нормальное и полное ускорения точки (величины и направления) при естественном способе задания движения точки?
10. Какие бывают частные случаи движения точки?
11. Назовите виды движения твердого тела.
12. Дайте определение поступательного движения твердого тела. Свойства поступательного движения.
13. Дайте определение вращательного движения твердого тела. Каким уравнением определяется положение тела при его вращательном движении вокруг неподвижной оси?
14. Как определяется угловая скорость и угловое ускорение при вращательном движении тела вокруг неподвижной оси?
15. Назовите частные случаи вращательного движения тела вокруг неподвижной оси.
16. Как определить скорости и ускорения точек при вращательном движении тела вокруг неподвижной оси?
17. Какое движение твердого тела называется плоскопараллельным?
18. На какие два вида движения можно разложить плоское движение твердого тела? Напишите уравнения плоского движения твердого тела.
19. Что такое мгновенный центр скоростей? Как определить его положение?
20. Как определить скорость какой-либо точки тела при плоском движении при помощи мгновенного центра скоростей?

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО КИНЕМАТИКЕ

Задание 2.1. Определение скорости и ускорения движения точки, заданного естественным способом

Вариант задания в таблицах 2.1 и 2.2 выбирается по номеру студента в списке группы.

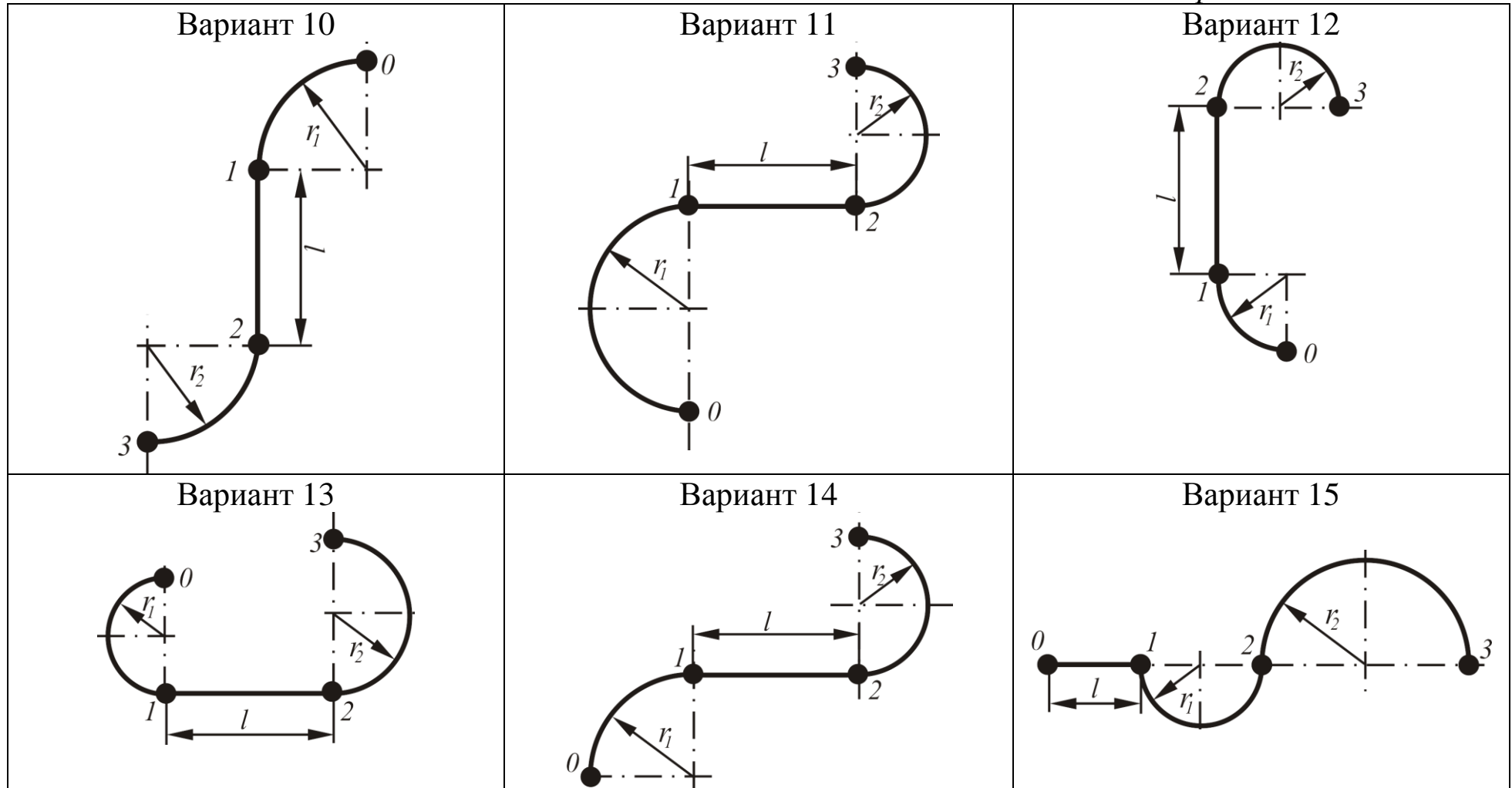
Движение точки задано естественным способом: задана траектория движения точки (см. табл. 2.2) и уравнение движения по заданной траектории в виде $S = f(t)$ (см. табл. 2.1). Необходимо определить величину и направление вектора скорости, касательного, нормального и абсолютного ускорения в положениях 1, 2 и 3.

Таблица 2.1 – Числовые значения для задания 2.1

Номер варианта	Уравнение движения	r_1 , м	r_2 , м	l , м
1	$S = 5t^3$	2	4	2,5
2	$S = 16t^2$	2	5	1,5
3	$S = 8t^2$	3	5	3
4	$S = 2t^4$	1	4	4,5
5	$S = 12t^2$	3	5	5
6	$S = 20t^3$	6	8	3,5
7	$S = 3t^4$	3	7	2
8	$S = 9t^3$	1	3	3
9	$S = 11t^2$	2	5	3
10	$S = 13t^4$	3	6	4
11	$S = 5t^3$	2	4	2,5
12	$S = 16t^2$	2	5	1,5
13	$S = 8t^2$	3	5	3
14	$S = 2t^4$	1	4	4,5
15	$S = 12t^2$	3	5	5
16	$S = 20t^3$	6	8	3,5
17	$S = 3t^4$	3	7	2
18	$S = 9t^3$	1	3	3
19	$S = 11t^2$	2	5	3
20	$S = 13t^4$	3	6	4
21	$S = 5t^3$	2	4	2,5
22	$S = 16t^2$	2	5	1,5
23	$S = 8t^2$	3	5	3
24	$S = 2t^4$	1	4	4,5
25	$S = 12t^2$	3	5	5

Таблица 2.2 – Схемы к заданию 2.1

<p>Вариант 1</p>	<p>Вариант 2</p>	<p>Вариант 3</p>
<p>Вариант 4</p>	<p>Вариант 5</p>	<p>Вариант 6</p>
<p>Вариант 7</p>	<p>Вариант 8</p>	<p>Вариант 9</p>



<p>Вариант 16</p>	<p>Вариант 17</p>	<p>Вариант 18</p>
<p>Вариант 19</p>	<p>Вариант 20</p>	<p>Вариант 21</p>

<p>Вариант 22</p>	<p>Вариант 23</p>	<p>Вариант 24</p>
<p>Вариант 25</p>	<p>Вариант 26</p>	

Пример выполнения задания 2.1

Дано. По заданной траектории (рис. 2.31) движется точка из положения 0 в положение 3, согласно уравнению $S = \pi t^2$. Длина прямолинейного участка пути $l = 6$ м, радиус дуги окружности $r = 16$ м. Определить скорость точки V , нормальное ускорение a_n , касательное ускорение a_τ и полное ускорение a в положениях 1, 2 и 3.

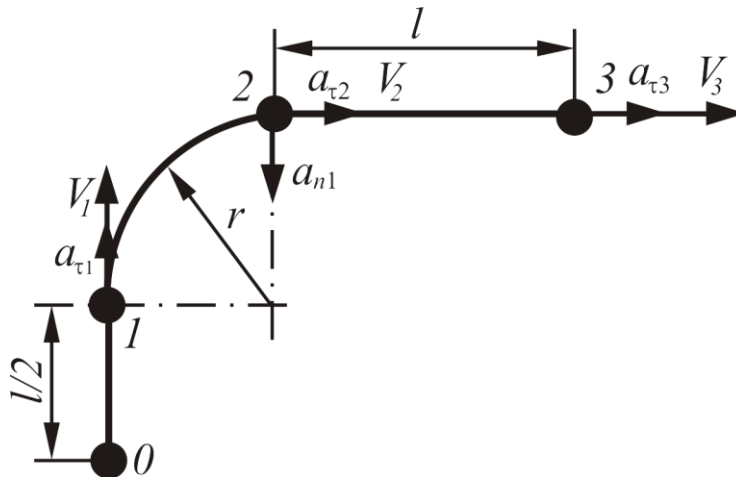


Рисунок 2.31 – Схема к примеру решения задачи 2.1

Решение

1. Определяем расстояние S , которое проходит точка от положения 0 до положений 1, 2 и 3.

$$S_1 = \frac{l}{2} = 3 \text{ м};$$

$$S_2 = S_1 + \frac{2\pi r}{4} = 28,1 \text{ м};$$

$$S_3 = S_2 + l = 34,1 \text{ м}.$$

2. Из заданного уравнения движения точки $S = \pi t^2$ выражаем параметр времени

$$t = \sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

Определяем время, за которое точка достигает положения 1, 2 и 3:

$$t_1 = \sqrt{\frac{S_1}{\pi}} = 0,98c;$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{S_2}{\pi}} = 2,99c;$$

$$t_3 = \sqrt{\frac{S_3}{\pi}} = 3,3c.$$

3. Определяем скорость движения точки. Для этого продифференцируем уравнение $S = \pi t^2$ по времени:

$$V = \frac{dS}{dt} = 2\pi t.$$

$$V_1 = 2\pi t_1 = 6,16 м/с;$$

$$V_2 = 2\pi t_2 = 18,8 м/с;$$

$$V_3 = 2\pi t_3 = 20,7 м/с.$$

4. Определим касательное ускорение точки. Для этого продифференцируем уравнение скорости $V = 2\pi t$:

$$a_\tau = \frac{d^2S}{dt^2} = 2\pi = 6,28 м/с^2.$$

Получили, что касательное ускорение не зависит от времени, поэтому касательное ускорение точки во всех положениях будет иметь одинаковое значение, равное $6,28 м/с^2$.

5. Определим нормальное ускорение точки. В положении 1 и 3 нормальное ускорение $a_{n1} = a_{n3} = 0$, так как на участке 0–1 и 2–3 точка

совершает прямолинейное движение. В положении 2 нормальное ускорение определим по формуле

$$a_{n2} = \frac{V_2^2}{r} = 2,37 \text{ м/с}^2.$$

6. Определим полное ускорение точки по формуле

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}.$$

$$a_1 = a_3 = a_\tau = 6,28 \text{ м/с}^2;$$

$$a_2 = \sqrt{a_{n2}^2 + a_{\tau2}^2} = 6,71 \text{ м/с}^2.$$

7. Изображаем направления векторов на траектории движения точки (см. выше на схеме).

Задание 2.2. Определение кинематических характеристик движения точки, заданного координатным способом

Вариант задания в таблице 2.3 выбирается по номеру студента в списке группы.

Точка M движется в плоскости xOy . Закон движения точки задан координатным способом в виде уравнений $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$ (см. табл. 2.3), где x и y – координаты точки, выраженные в метрах, время t – в секундах.

Определить уравнение траектории движения точки; в заданный момент времени t определить скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в расчетной точке траектории.

При решении задачи следует придерживаться следующего плана:

1. По заданным уравнениям движения точки определить ее траекторию посредством исключения из них параметра времени t и установления зависимости между декартовыми координатами точки. Построить график траектории движения точки.

2. Изобразить точку на траектории в заданный момент времени.

3. По уравнениям движения точки вычислить проекции скорости на оси координат и определить скорость точки по величине и направлению.

4. Определить проекции ускорения точки на декартовы оси, модуль и направление вектора ускорения точки.

5. Определить нормальное и касательное ускорение точки и радиус кривизны траектории.

6. Показать все векторы в расчетном положении на графике траектории движения.

Таблица 2.3 – Числовые значения для задания 2.2

Номер варианта	$x = f_1(t)$	$y = f_2(t)$	$t, \text{ с}$	Номер варианта	$x = f_1(t)$	$y = f_2(t)$	$t, \text{ с}$
1	$3t$	$3t^2-2$	1	14	$3t^2+3$	$2t$	1
2	$2t^2+3$	$4t$	0,5	15	$3t$	$2t^2+2$	1
3	$-3t$	$6t^2+2$	1	16	$-t^2-3$	$4t$	0,5
4	$-2t^2+4$	$4t$	0,5	17	$3t$	$-5t^2+3$	0,5
5	$5t$	$-5t^2+2$	1	18	$2t^2+1$	$-4t$	0,5
6	$2t^2-4$	$-2t$	0,5	19	$-3t$	$3t^2+3$	1
7	$-5t$	$6t^2+1$	1	20	$-2t$	$6t^2-5$	0,5
8	$-4t^2+2$	$-2t$	0,5	21	t^2+5	$3t$	1
9	$4t$	$6t^2-4$	0,5	22	$-4t$	$2,5t^2-2$	0,5
10	$6t^2-2$	$2t$	1	23	$-4t^2+2$	$-3t$	0,5
11	$-3t$	$5t^2-2$	0,5	24	$-2t$	$-2t^2+3$	1
12	$-4t^2+3$	$4t$	0,5	25	$5t$	$-3t^2-4$	1
13	$3t$	$2t^2+1$	1	26	$4t^2-4$	$4t$	0,5

Пример выполнения задания 2.2

Дано. Точка M движется в плоскости xOy . Закон движения точки задан координатным способом в виде уравнений

$$x = -2t + 5; \quad y = 3t^2 + 4,$$

где x и y – координаты точки, м; t – время, с.

Определить уравнение траектории движения точки; в момент времени $t = 1$ с, определить скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в расчетной точке траектории.

Решение. Для определения уравнения траектории движения точки исключим из уравнений движения параметр времени t . Для этого выразим t из уравнения движения вдоль оси x :

$$t = \frac{5 - x}{2}.$$

Подставим полученное выражение в уравнение движения вдоль оси y :

$$y = 3\left(\frac{5 - x}{2}\right)^2 + 4.$$

После преобразования уравнения получим

$$y = 0,75x^2 - 7,5x + 22,5.$$

Из полученного уравнения следует, что траекторией движения точки является ветвь параболы. Для построения графика траектории движения определим сначала область определения для координаты x . Получается, что при $t \geq 0$ $x \leq 5$. Т. е. в начальный момент времени при $t = 0$ точка имеет координаты $M_0(5; 4)$. Построим график траектории движения точки (рис. 2.32). На данном графике траекторией движения точки, с учетом области определения, является ветвь параболы, находящаяся слева от начального положения точки M_0 .

Определим проекции скорости на декартовы оси:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = x' = (-2t + 5)' = -2 \text{ м/с};$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = y' = (3t^2 + 4)' = 6t.$$

В момент времени $t = 1$ с проекция скорости на ось y

$$v_y = 6 \text{ с}.$$

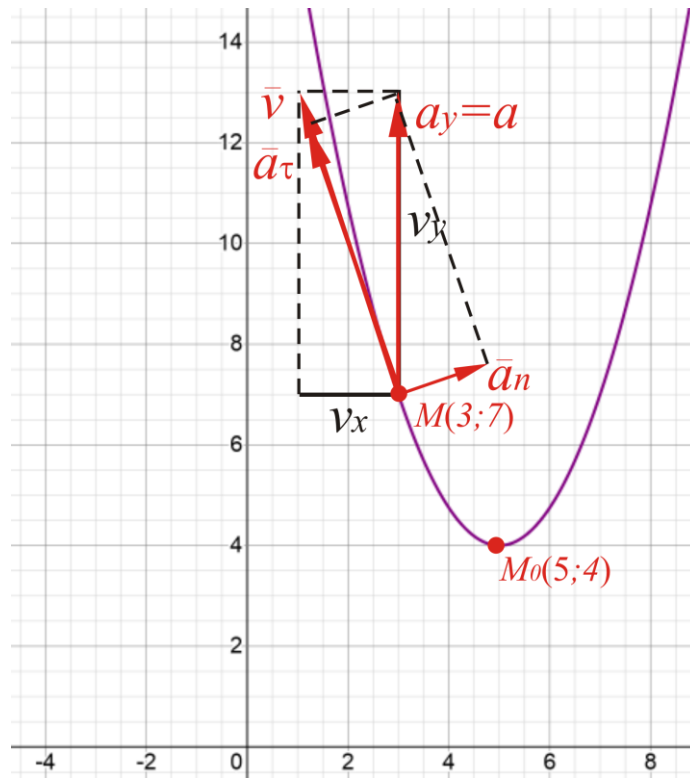


Рисунок 2.32 – График траектории движения точки

Из полученных значений проекций скорости видно, что вдоль оси x точка движется с постоянной скоростью, вдоль оси y скорость меняется линейно в зависимости от параметра времени.

Определим полную скорость точки в момент времени $t = 1$ с:

$$v = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (6 \cdot 1)^2} = 6,3 \text{ м/с}.$$

Изобразим на графике траектории движения вектор скорости и ее проекции с учетом полученных значений (рис. 2.32).

Определим угол наклона вектора скорости к оси x :

$$\alpha = \arccos\left(\left|\frac{v_x}{v}\right|\right) = \arccos\left(\left|\frac{-2}{6,3}\right|\right) = 71,5 \text{ град}.$$

Определим проекции ускорения на декартовы оси:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = v_x' = (-2)' = 0 \text{ м/с}^2;$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = v_y' = (6t)' = 6 \text{ м/с}^2.$$

Так как проекция вектора ускорения на ось x равна нулю, то абсолютное ускорение и по направлению и по величине равно проекции ускорения на ось y :

$$a = a_y = 6 \text{ м/с}^2.$$

Изобразим на графике траектории движения точки вектор абсолютного ускорения. Так как проекция скорости на ось y и проекция ускорения на ось y равны по величине, то на графике они совпадают.

Поскольку точка движется по криволинейной траектории, следовательно, ее полное ускорение можно разложить на нормальное и касательное ускорения:

$$a_\tau = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v} = \frac{-2 \cdot 0 + 6 \cdot 6}{6,3} = 5,7 \text{ м/с}^2;$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{6^2 - 5,7^2} = 1,87 \text{ м/с}^2.$$

Изобразим на графике траектории движения вектора нормального и касательного ускорений (рис. 2.32). Из построений видно, что если векторно сложить нормальное и касательное ускорения, то их сумма равна абсолютному ускорению точки:

$$\bar{a} = \bar{a}_n + \bar{a}_\tau.$$

Определим радиус кривизны траектории в расчетный момент времени:

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{6,3}{1,87} = 3,37 \text{ м}.$$

Задание 2.3. Определение кинематических характеристик при поступательном и вращательном движении твердого тела

Вариант задания в таблицах 2.4 и 2.5 выбирается по номеру студента в списке группы.

Определить коэффициенты c_0 , c_1 и c_2 уравнения движения:

$$x = c_2 t^2 + c_1 t + c_0,$$

при которых осуществляется требуемое движение груза I . В начальный момент времени ($t_0=0$) координата груза равна x_0 , а его начальная скорость – V_0 . В момент времени t_2 положение груза I задано координатой x_2 .

Определить в момент времени $t = t_1$ скорость и ускорение груза I и точки M , принадлежащей колесу 3 . Схемы механизмов и необходимые данные приведены в таблицах 2.4 и 2.5.

Таблица 2.4 – Числовые значения для задания 2.3

Номер варианта	Радиус, м				Координата и скорость груза I			Расчетные моменты времени, с	
	R_2	r_2	R_3	r_3	x_0 , м	v_0 , м/с	x_2 , м	t_2	t_1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,6	0,4	0,36	–	0,02	0,12	1,73	3	2
2	0,8	–	0,6	0,45	0,05	0,1	0,41	2	1
3	1	0,6	0,75	–	0,08	0,06	0,4	4	2
4	0,58	0,45	0,6	–	0,04	0,04	1,7	4	3
5	0,8	–	0,45	0,3	0,03	0,15	1	3	2
6	1	0,6	0,3	–	0,07	0,16	2,15	4	2
7	0,45	0,35	1,05	–	0,08	0,05	1,24	4	3
8	0,35	0,1	0,1	–	0,06	0,02	1,11	3	2
9	0,4	0,3	0,15	–	0,1	0,07	0,48	2	1
10	0,15		0,1	0,15	0,05	0,02	1,89	4	2
11	0,4	0,25	0,2	–	0,09	0,08	0,65	2	1
12	0,2	0,15	0,1	–	0,05	0,1	1,79	3	2
13	0,3	0,2	0,4	–	0,07	0	5,57	5	2
14	0,15	0,1	0,18	–	0,06	0,03	0,8	2	1
15	0,15	0,1	0,2	–	0,05	0,02	1,89	4	2
16	0,2	0,15	0,2	–	0,04	0,06	2,2	4	3
17	0,15	0,1	0,17	–	0,08	0,04	0,44	2	1
18	0,2	0,15	0,1	0,17	0,03	0,12	2,11	4	1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
19	0,22	0,15	0,15	0,1	0,05	0,1	5,05	5	3
20	0,25	0,15	0,3	–	0,1	0,08	2,77	3	1
21	0,2	0,1	0,15	–	0,06	0,05	3,5	5	2
22	0,4	0,2	0,35	–	0,07	0,06	1,03	2	1
23	0,4	0,3	0,3	0,15	0,05	0,09	1,94	3	2
24	0,3	0,15	0,4	–	0,09	0,08	1,05	4	2
25	0,5	0,2	0,3	–	0,08	0,04	1,19	3	2
26	0,22	0,2	0,3	–	0,06	0,14	7	4	3

Таблица 2.5 – Схемы к заданию 2.3

Номер варианта	Схема	Номер варианта	Схема
1		14	
2		15	
3		16	
4		17	

5		18	
6		19	
7		20	
8		21	
9		22	

10		23	
11		24	
12		25	
13		26	

Пример выполнения задания 2.3

Дано. Определить коэффициенты c_0 , c_1 и c_2 уравнения движения:

$$x = c_2 t^2 + c_1 t + c_0,$$

при которых осуществляется требуемое движение груза 1 (рис. 2.33). В начальный момент времени ($t_0 = 0$) координата груза равна $x_0 = 0,14$ м, а его начальная скорость – $V_0 = 0,05$ м/с. В момент времени $t_2 = 2$ с положение груза 1 задано координатой $x_2 = 1,68$ м.

Определить в момент времени $t_1 = 1$ с скорость и ускорение груза 1 и точки M , принадлежащей колесу 3 , учитывая, что $R_2 = 0,5$ м; $r_2 = 0,25$ м; $R_3 = 0,65$ м; $r_3 = 0,4$ м.

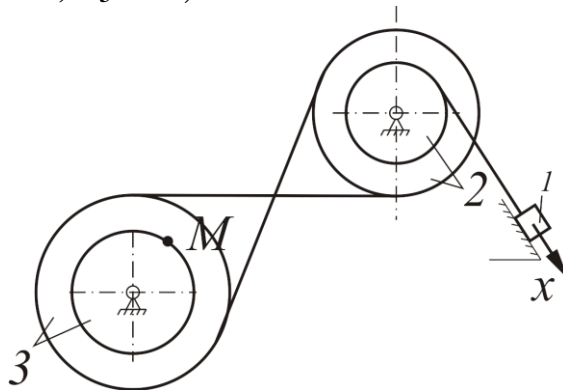


Рисунок 2.33 – Схема к примеру решения задания 2.3

Решение. Уравнение движения груза 1 имеет следующий вид:

$$x = c_2 t^2 + c_1 t + c_0,$$

где коэффициенты c_0 , c_1 и c_2 определяются из начальных условий:

$$\begin{aligned} \text{при } t_0 = 0 \quad x_0 = 0,14 \text{ м, } V_0 = 0,05 \text{ м/с;} \\ \text{при } t_2 = 2 \text{ с } \quad x_2 = 1,68 \text{ м.} \end{aligned}$$

Определим скорость груза 1 , взяв первую производную от уравнения движения по времени:

$$v = \frac{dx}{dt} = 2c_2 t + c_1.$$

Подставляя начальное условие (при $t_0 = 0$ $V_0 = 0,05$ м/с) определим коэффициент c_1 :

$$0,05 = 2c_2 \cdot 0 + c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0,05 \text{ м/с}.$$

Подставляя начальное условие (при $t_0 = 0$ $x_0 = 0,14$ м) определим коэффициент c_0 :

$$0,14 = c_2 \cdot 0 + c_1 \cdot 0 + c_0 \quad \Rightarrow \quad c_0 = 0,14 \text{ м}.$$

Подставляя начальное условие (при $t_2 = 2$ с $x_2 = 1,68$ м) определим коэффициент c_2):

$$1,68 = c_2 \cdot 2^2 + 0,05 \cdot 2 + 0,14 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0,36 \text{ м/с}^2.$$

Таким образом, уравнение движения груза 1 в окончательном виде будет иметь следующий вид:

$$x = 0,36t^2 + 0,05t + 0,14,$$

а выражение для скорости груза 1

$$v = \frac{dx}{dt} = 0,72t + 0,05.$$

Определим ускорение груза 1 как первую производную от скорости:

$$a = \frac{dv}{dt} = 0,72 \text{ м/с}^2.$$

Для определения скорости и ускорения точки M запишем выражения, связывающие скорость груза 1 и угловые скорости колес ω_2 и ω_3 (рис. 2.34). В соответствии со схемой передаточного механизма

$$\left. \begin{aligned} v &= r_2 \omega_2, \\ R_2 \omega_2 &= R_3 \omega_3, \end{aligned} \right\},$$

откуда

$$\omega_3 = \frac{vR_2}{r_2R_3} = 3,07v.$$

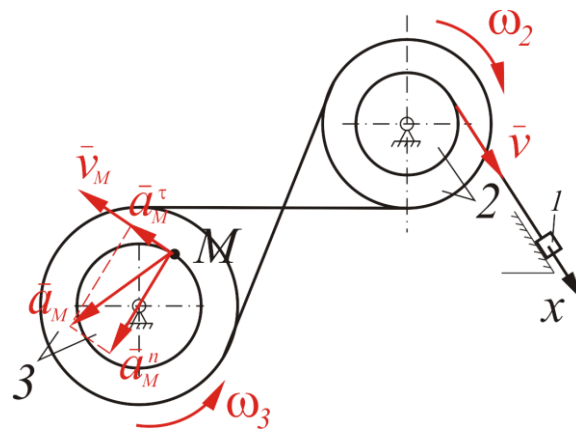


Рисунок 2.34 – Пример решения задания 2.3

Учитывая, что $v = \frac{dx}{dt} = 0,72t + 0,05$, получим выражение для угловой скорости колеса 3:

$$\omega_3 = 2,22t + 0,15.$$

Угловое ускорение колеса 3 найдем как первую производную от угловой скорости:

$$\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = 2,22 \text{ рад} / \text{с}^2.$$

Определим скорость, касательное, нормальное и полное ускорения точки M , лежащей на внутреннем ободе колеса 3:

$$v_M = r_3\omega_3 = r_3(2,22t + 0,15).$$

$$a_M^\tau = r_3\varepsilon_3 = 2,22r_3 = 0,89 \text{ м} / \text{с}^2.$$

$$a_M^n = r_3\omega_3^2 = r_3(2,22t + 0,15)^2,$$

$$a_M = \sqrt{(a_M^\tau)^2 + (a_M^n)^2}.$$

Результаты вычислений кинематических характеристик движения точки M для заданного момента времени $t_1 = 1$ с представим в виде таблицы.

v , м/с	a , м/с ²	ω_3 , рад/с	ε_3 , рад/с ²	v_M , м/с	a_M^n , м/с ²	a_M^τ , м/с ²	a_M , м/с ²
0,77	0,72	2,37	2,22	0,95	2,24	0,89	0,24

Задание 2.4. Определение кинематических характеристик при поступательном и вращательном движении твердого тела

Вариант задания в таблице 2.6 выбирается по номеру студента в списке группы.

Кривошипно-ползунный механизм (рис. 2.35), состоящий из кривошипа OA , шатуна AB и ползуна B , совершает движение в плоскости рисунка.

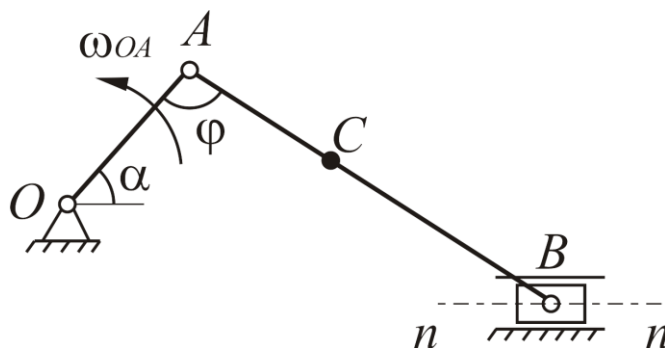


Рисунок 2.35 – Схема кривошипно-ползунного механизма

Прямая nn , по которой движется ползун B , не проходит через ось вращения O кривошипа и в этом случае кривошипно-ползунный механизм называют **нецентральным**.

Кривошип OA вращается равномерно с угловой скоростью $\omega_{OA} = const$ (при $\omega_{OA} > 0$ вращение происходит против хода часовой стрелки; при $\omega_{OA} < 0$ – по ходу часовой стрелки). На шатуне положение центра тяжести (точка C) задано расстоянием AC . Положение механизма определяется в любой момент времени углом поворота α

кривошипа OA и углом φ , который образуют между собой кривошип OA и шатун AB .

В задаче требуется для заданного положения механизма определить:

1) скорости точек B и C с использованием мгновенного центра скоростей (МЦС) шатуна AB , а также скорость точки B с использованием полюса A ;

2) ускорения точек B и C .

При решении данной задачи необходимо придерживаться следующего плана:

1. В выбранном масштабе изобразить кривошипно-ползунный механизм с учетом углов α и углом φ .

2. Определить скорость точки B с помощью МЦС.

3. Определить скорость точки C с помощью полюса A .

4. Определить ускорения точек B и C .

Исходные данные для выполнения задания приведены в таблице 2.6.

Таблица 2.6 – Числовые значения для задания 2.4

Номер варианта	ω_{OA} , рад/с	OA , м	AB , м	AC , м	φ , град.	α , град.
1	2	3	4	5	6	7
1	5	0,6	2	0,5	45	120
2	-12	0,5	1,8	0,3	60	90
3	8	0,6	2,1	0,4	30	100
4	-6	0,5	2	0,2	120	30
5	9	0,4	2,2	0,4	30	135
6	-10	0,4	2	0,2	150	45
7	12	0,5	1,6	0,3	30	90
8	-5	0,6	1,5	0,3	45	135
9	10	0,5	1,8	0,3	135	60
10	-9	0,4	2	0,1	120	45
11	8	0,6	2,2	0,4	60	90
12	-10	0,5	1,8	0,3	30	150
13	6	0,6	2	0,3	45	120
14	-12	0,6	1,2	0,3	60	135
15	5	0,5	1,6	0,2	120	60
16	-8	0,4	1,8	0,2	150	45
17	10	0,5	2	0,3	45	135

1	2	3	4	5	6	7
18	-6	0,5	1,6	0,2	30	135
19	9	0,6	1,8	0,4	60	120
20	-5	0,5	2,1	0,3	45	120
21	12	0,4	2	0,1	30	150
22	-10	0,6	2,2	0,3	60	90
23	8	0,5	1,8	0,2	120	30
24	-9	0,5	2	0,3	45	120
25	-11	0,5	1,8	0,3	130	60
26	12	0,5	1,8	0,3	130	50

Пример выполнения задания 2.4

Дано. Кривошип OA вращается равномерно с постоянной угловой скоростью ω_{OA} . В некоторый момент времени положение механизма определяется углом поворота α кривошипа OA и углом φ .

Кривошипно-ползунный механизм имеет следующие параметры:

$$\omega_{OA} = 10 \text{ рад/с};$$

$$OA = 0,4 \text{ м}; AB = 1,2 \text{ м}; AC = 0,4 \text{ м};$$

$$\alpha = 30^\circ; \varphi = 100^\circ.$$

Решение

1. Определяем скорости точек B и C .

Изобразим положение механизма с учетом заданных углов α и φ в выбранном масштабе по длине (например в 1 см рисунка – 0,2 м длины звена) (рис. 2.36).

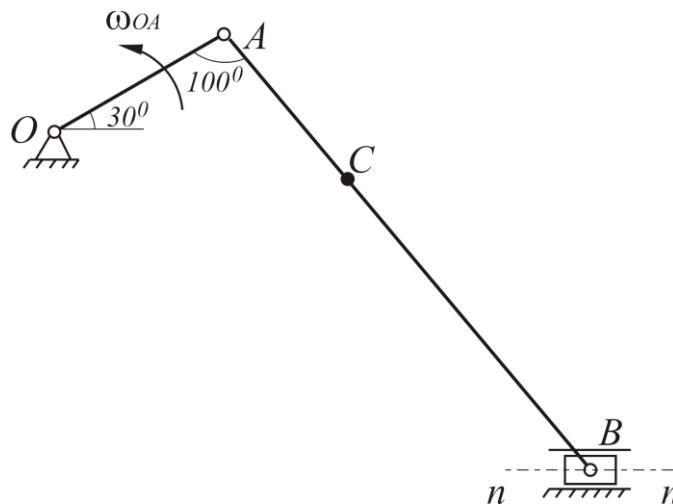


Рисунок 2.36 – Схема кривошипно-ползунного механизма, построенного с учетом масштаба

По заданной угловой скорости кривошипа OA найдем модуль скорости точки A :

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 10 \cdot 0,4 = 4 \text{ м/с.}$$

Вектор скорости точки A (V_A) направлен перпендикулярно кривошипу OA в направлении угловой скорости ω_{OA} (см. рис. 2.37).

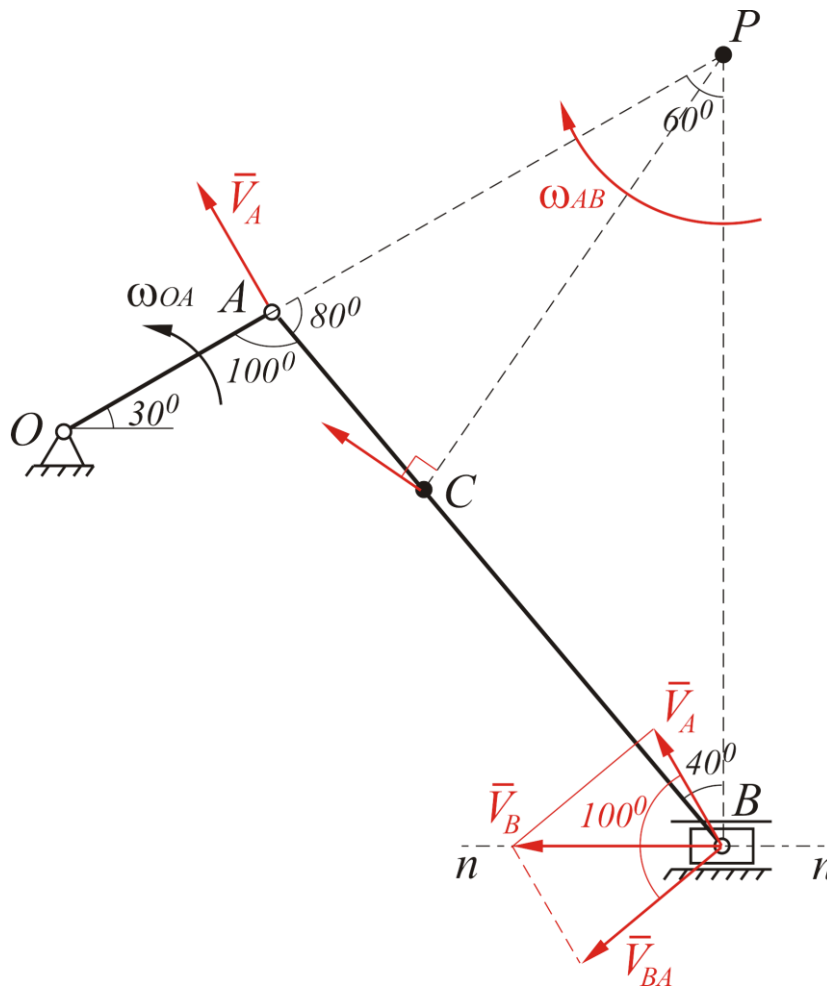


Рисунок 2.37 – Определение МЦС и скоростей точек механизма

Положение МЦС (точка P) шатуна найдем по известной скорости V_A и известному направлению скорости ползуна B (вектор скорости точки B лежит на прямой nn). Для этого проводим через точки A и B перпендикуляры к направлениям скоростей этих двух точек до их пересечения в точке P .

Для определения угловой скорости шатуна AB найдем расстояния AP и BP , рассмотрев треугольник APB . Используя теорему синусов, будем иметь:

$$\frac{AB}{\sin 60^0} = \frac{AP}{\sin 40^0} = \frac{BP}{\sin 80^0}.$$

Отсюда определяем расстояния AP и BP :

$$AP = \frac{AB \cdot \sin 40^0}{\sin 60^0} = 0,89 \text{ м},$$

$$BP = \frac{AB \cdot \sin 80^0}{\sin 60^0} = 1,36 \text{ м}.$$

Угловую скорость шатуна AB (ω_{AB}) определим через известную скорость точки A по формуле

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP} = \frac{4}{0,89} = 4,49 \text{ рад/с}.$$

Направление угловой скорости шатуна ω_{AB} определим по направлению вращения вектора V_A вокруг МЦС. В данном случае угловая скорость шатуна будет направлена по часовой стрелке (см. рис. 2.37).

Скорость V_B ползуна B равна по модулю:

$$V_B = \omega_{AB} \cdot BP = 4,49 \cdot 1,36 = 6,1 \text{ м/с}.$$

Направлен вектор скорости точки B вдоль направляющей движения ползуна mn в сторону угловой скорости шатуна ω_{AB} . В данном случае вектор V_B направлен справа налево (см. рис. 2.37).

Для определения скорости точки C соединим ее с МЦС (точка P). Определим длину отрезка PC по теореме косинусов:

$$\begin{aligned} CP &= \sqrt{AP^2 + AC^2 - 2 \cdot AP \cdot AC \cdot \cos 80^0} = \\ &= \sqrt{0,89^2 + 0,4^2 - 2 \cdot 0,89 \cdot 0,4 \cdot \cos 80^0} = 0,91 \text{ м}. \end{aligned}$$

Тогда скорость V_C равна по модулю:

$$V_C = \omega_{AB} \cdot CP = 4,49 \cdot 0,91 = 4,08 \text{ м/с.}$$

Направлен вектор скорости точки C перпендикулярно отрезку PC в сторону угловой скорости ω_{AB} (см. рис. 2.37).

Скорость точки B (V_B) может быть найдена с использованием векторного выражения для плоскопараллельного движения звена AB :

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA},$$

где V_A – скорость полюса плоскопараллельного движения;

V_{BA} – относительная скорость точки B относительно полюса A .

Для определения вектора скорости точки B (V_B) перенесем вектор V_A в точку B и построим вектор V_{BA} , перпендикулярный отрезку AB и направленный таким образом, чтобы вектор V_{BA} поворачивал звено AB в сторону угловой скорости ω_{AB} . По правилу сложения векторов суммирующий вектор V_B должен лежать на диагонали параллелограмма, построенного на векторах V_A и V_{BA} (см. рис. 2.37).

Определим модуль относительной скорости V_{BA} :

$$V_{BA} = \omega_{AB} \cdot AB = 4,49 \cdot 1,2 = 5,39 \text{ м/с.}$$

По рисунку 2.37 определяем, что угол между векторами V_A и V_{BA} равен 100° .

Тогда по теореме косинусов находим скорость точки B :

$$\begin{aligned} V_B &= \sqrt{V_A^2 + V_{BA}^2 + 2V_A V_{BA} \cos 100^\circ} = \\ &= \sqrt{4^2 + 5,39^2 + 2 \cdot 4 \cdot 5,39 \cdot \cos 100^\circ} = 6,1 \text{ м/с.} \end{aligned}$$

Если строить вектора скоростей V_A и V_{BA} в масштабе, то при их векторном сложении, вектор V_B должен совпасть с диагональю параллелограмма, построенного на векторах V_A и V_{BA} .

2. Определение ускорения точки B .

Ускорение точки B с использованием полюса A определяется по формуле

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau,$$

где \bar{a}_{BA}^n – нормальное ускорение точки B относительно точки A ;

\bar{a}_{BA}^τ – касательное ускорение точки B относительно точки A .

Так как кривошип OA вращается равномерно ($\omega_{OA} = const$), то угловое ускорение кривошипа равно нулю.

Следовательно, касательное ускорение точки $\bar{a}_A^\tau = 0$, и тогда ее полное ускорение совпадает с нормальным ускорением, которое направлено от точки A к точке O (рис. 2.38), и равно по модулю:

$$a_A = a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 10^2 \cdot 0,4 = 40 \text{ м/с}^2.$$

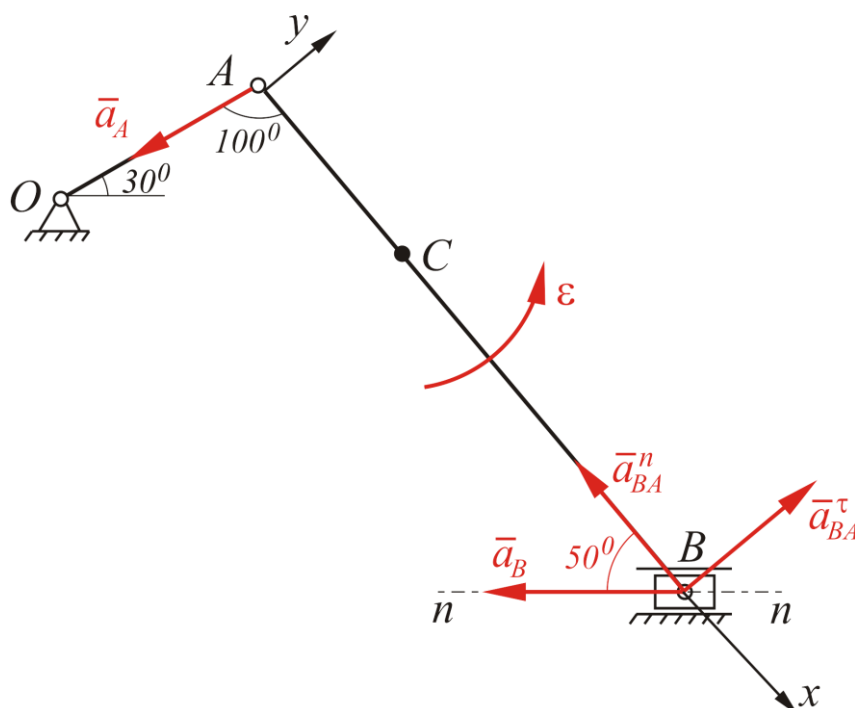


Рисунок 2.38 – Определение ускорения точки B

В данной задаче зависимость угловой скорости шатуна от времени неизвестна, поэтому приходится определять его в заданном положении. Такие задачи могут быть решены, если известно направление ускорения какой-либо точки рассматриваемого тела. Такой точкой шатуна является точка B , направление движения которой известно. Зададимся каким-либо направлением углового ускорения (например против хода часовой стрелки) и направлением ускорения a_B (например справа налево). Изобразим на схеме (см. рис. 2.38) также касательное и нормальное ускорения точки B относительно полюса A , \bar{a}_{BA}^n и \bar{a}_{BA}^τ , учитывая, что вектор нормального ускорения направлен вдоль звена AB (от точки B к точке A), а вектор касательного ускорения – перпендикулярен звену AB .

Определим нормальное ускорение точки B относительно полюса A :

$$a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 4,49^2 \cdot 1,2 = 24,2 \text{ м/с}^2.$$

Введем систему координат Ax и спроецируем векторное выражение для ускорения a_B на оси Ax и Ay :

$$\begin{cases} -a_B \cos 50^\circ = -a_A \cos 80^\circ - a_{BA}^n \\ -a_B \sin 50^\circ = -a_A \sin 80^\circ + a_{BA}^\tau \end{cases}.$$

Из первого уравнения находим абсолютное ускорение точки B :

$$a_B = \frac{(a_A \cos 80^\circ + a_{BA}^n)}{\cos 50^\circ} = \frac{40 \cdot 0,17 + 24,2}{0,64} = 48,66 \text{ м/с}^2.$$

Величина a_B положительная, значит направление вектора \bar{a}_B показано на рисунке 2.38 верно.

Далее из второго уравнения алгебраической системы определим величину ускорения касательного ускорения \bar{a}_{BA}^τ , а затем – угловое ускорение шатуна ε :

$$a_{BA}^\tau = -a_B \sin 50^\circ + a_A \sin 80^\circ = -48,66 \cdot 0,77 + 40 \cdot 0,98 = 1,73 \text{ м/с}^2,$$

$$\varepsilon = \frac{a_{BA}^\tau}{AB} = \frac{1,73}{1,2} = 1,4 \text{ рад/с}^2$$

Величина касательного ускорения \bar{a}_{BA}^τ оказалась положительной, значит направление, показанное на рисунке 2.38, верное.

В случае, если величина \bar{a}_{BA}^τ окажется отрицательной, необходимо поменять направление вектора \bar{a}_{BA}^τ на противоположное, а неверное направление изобразить пунктирной линией.

При известных значениях угловой скорости ω_{AB} и углового ускорения ε шатуна ускорение точки C легко определить с использованием полюса A по формуле $\bar{a}_C = \bar{a}_A + \bar{a}_{CA}^n + \bar{a}_{CA}^\tau$, расписав ее в проекциях на координатные оси.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Дисциплина «Теоретическая механика» является базовой частью для всех общеинженерных дисциплин из цикла дисциплин подготовки студентов по направлению подготовки 35.03.06 «Агроинженерия». Данное пособие посвящено только двум разделам теоретической механики: статика и кинематика. Содержание этих разделов дисциплины охватывает круг научных вопросов, связанных с исследованием, моделированием и математическим представлением равновесных состояний материальных тел и материальных тел, находящихся в движении.

При написании учебного пособия автором преследовалась цель максимально доступным для студентов языком раскрыть основное содержание указанных разделов дисциплины.

Для успешного освоения дисциплины «Теоретическая механика» большое значение имеет приобретение практических навыков, заключающихся в умении использовать теоретические знания при решении прикладных задач. Учебное пособие содержит множество примеров решения задач, в т. ч. имеющих профессионально-направленный характер из области агроинженерии. Для закрепления учебного материала в пособие включены контрольные вопросы и задания для самостоятельной работы студентов.

Навыки, приобретенные при решении задач теоретической механики, закладывают основы для дальнейшего изучения специальных дисциплин и являются первым шагом на пути к инженерной деятельности будущего бакалавра-агроинженера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах. В 2 т. Т. 2. Динамика: учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – Санкт-Петербург: Лань, 2010. – 640 с.
2. Денисов, Ю. В. Теоретическая механика: учебник / Ю. В. Денисов, Н. А. Клиньских. – Екатеринбург: УрФУ, 2013. – 474 с.
3. Лачуга, Ю. Ф. Теоретическая механика / Ю. Ф. Лачуга, В. А. Ксендзов. – Москва: Колос, 2000. – 376.
4. Резников, Б. Н. Теоретическая механика в примерах и задачах сельскохозяйственного производства / Б. Н. Резников. – Алма-Ата, 1985. – 153 с.
5. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики / С. М. Тарг. – Москва: Наука, 2005. – 416 с.
6. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. – Санкт-Петербург: Лань, 2006. – 768 с.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Часть 1

СТАТИКА И КИНЕМАТИКА

Учебное пособие

Электронное издание

НОСКОВА Ольга Евгеньевна

Редактор
О.Ю. Кухарева

Подписано в свет 01.09.2023. Регистрационный номер 6
Редакционно-издательский центр Красноярского государственного аграрного университета
660017, Красноярск, ул. Ленина, 117
e-mail: rio@kgau.ru