УДК 51

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ В КУРСЕ ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ В ВУЗЕ

Филиппов Константин Анатольевич, доктор физико-математических наук, доцент,
профессор кафедры «Информационные технологии и математическое обеспечение информационных систем», ИЭиУ АПК
Красноярский государственный аграрный университет, Красноярск, Россия
e-mail: filippov_kostya@mail.ru
Ширяева Тамара Алексеевна, кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры «Информационные технологии и математическое обеспечение информационных систем», ИЭиУ АПК
Красноярский государственный аграрный университет, Красноярск, Россия
e-mail: tas_sfu@mail.ru

Аннотация. Рассматривается задача генерации случайных чисел в курсе преподавания теории вероятностей на основе использования иррациональных чисел качестве генератора случайных чисел.

Ключевые слова: теория вероятностей, иррациональное число, генератор случайных чисел.

ABOUT ONE PROBLEM IN THE COURSE OF TEACHING PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL STATISTICS AT THE UNIVERSITY

Filippov Konstantin Anatolyevich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Professor of the Department "Information Technologies and Mathematical Support of Information Systems", Institute of Economics and management in AIC
Krasnoyarsk state agrarian university, Krasnoyarsk, Russia
e-mail: filippov_kostya@mail.ru
Shiryaeva Tamara Alekseevna, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of the Department "Information Technologies and Mathematical Support of Information Systems", Institute of Economics and management in AIC
Krasnoyarsk state agrarian university, Krasnoyarsk, Russia
e-mail: tas_sfu@mail.ru

Abstract. The problem of generating random numbers in the course of teaching probability theory based on the use of irrational numbers as a random number generator is considered.

Key words: probability theory, irrational number, random number generator.

Общеизвестно, что когда в 1900г. на Втором Международном математическом конгрессе Давид Гильберт поставил задачу единого формализованного подхода к построению оснований математики, то это дало мощный толчек развитию математики. И хотя Гильберт надеялся, что формально-логический метод позволит построить основания математики, его надежды не оправдались из-за теорем Геделя о неполноте и дальнейших проблемах. Несмотря на это, в теории вероятностей создание системы аксиом позволило четко определить, что теория вероятностей является полноправной математической дисциплиной. В 1933г. А.Н. Колмогоров на немецком языке издал «Основные понятия теории вероятностей», где предложил систему аксиом, которая оказалась настолько удачной, что ею пользуются до сих пор и вряд ли придумают что-либо лучшее. Если посмотреть издание 1936г. на русском языке «Основных понятий теории вероятностей» [1], то практически весь изложенный там материал сейчас можно найти в учебниках по теории вероятностей для студентов вузов. Принятая система аксиом позволила дать строгое определение случайной величины, как измеримого отображения вероятностного пространства в множество действительных чисел с заданной на нем алгеброй борелевских множеств. В классической теории вероятностей изучение случайных величин осуществляется по на основе понятия случайного числа.

При решении многих задач по теории вероятностей и математической статистики необходимы наборы так называемых случайных чисел. Такие наборы создаются генераторами случайных чисел либо на основе физических процессов, либо на основе различных математических алгоритмов (псевдослучайные числа). Во втором случае интерес представляет следующая

Задача. Найти иррациональное число

$$a = \alpha_1 \cdots \alpha_m, \beta_1 \cdots \beta_n \cdots$$

такое, что последовательность цифр после десятичной запятой

$$\beta_1, \cdots \beta_n, \cdots$$

случайна (имеет равномерный закон распределения) ?

В данной заметке в качестве кандидатов на функцию генератора случайных чисел рассматриваются иррациональные числа $5e$ и $\sqrt{5}$, где e– основание натурального логарифма

e =2,7182818284 5904523536 0287471352 6624977572 4709369995 ….

В качестве алгоритма проверки случайности рассмотрим вычисление числа

π=3,1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510…

на основе статистического определения вероятности. Точнее, если проводятся длительные наблюдения над появлением или не появлением некоторого события А при большом числе повторений испытаний, проходящих при неизменных условиях, то опыт показывает, что число появлений или не появлений события А подчиняется устойчивым закономерностям. А именно, если через μ_n обозначим число появлений события А при n независимых испытаниях, то оказывается, что отношение $\frac{\mu_n}{n}$ при достаточно больших n сохраняет почти постоянную величину. Эту постоянную, являющуюся объективной числовой характеристикой явления, естественно назвать вероятностью случайного события А. Поэтому Р. Мизес ввел следующее определение вероятности события, которое называют статистическим:

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mu_n}{n} .$$

Под геометрическим определением вероятности случайного события А называется отношение меры множества благоприятных исходов к мере множества всех исходов

$$P(A) = \frac{mcsA}{mcs\Omega}$$

В качестве генератора случайных чисел выступают: таблица случайных чисел, простое число 5, число

e =2,7182818284 5904523536 0287471352 6624977572 4709369995 …

Таблица 1. Случайные числа на основе генератора случайных чисел

0,54463; 0,15389; 0,85941; 0,61149; 0,5219; 41417; 0,28357; 0,17783;
0,40950; 0,82995; 0,96754; 0,3430; 06318; 0,6211157; 0,47534; 0,98614;
0,24856; 0,96887; 0,90801; 0,55165; 0,75884; 0,16777, 0,46230; 0,42902

Формула для вычисления числа π на основе классического определения вероятности

Рассмотрим прямоугольную систему координат. В ней рассмотрим квадрат со стороной равной 1, в который впишем окружность R=0,5. В данном квадрате будем случайным образом выбирать точки.

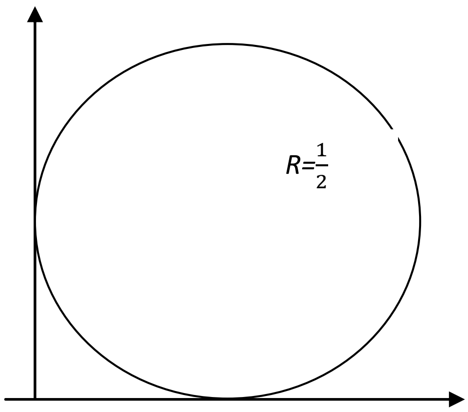

Рисунок 1.

Под событием А будем понимать событие заключающееся в попадания случайно выбранной точки в единичном квадрате в к (смотри рис. 1) . По определениям приведенным выше

$P(A) = \frac{mcsA}{mcs\Omega} = \lim_{n\to\infty}\frac{\mu_n}{n}$.

В нашем случае $mcsA = \pi \cdot (\frac{1}{2})^2 = \frac{\pi}{4}$ – площадь круга радиуса $R = \frac{1}{2}$, $mcs\Omega = \pi \cdot 1^2$ – площадь квадрата со стороной равной 1, n – общее количество случайно выбранных точек в квадрате со стороной равной 1. μ_n – количество случайно выбранных точек попавших в круг радиуса $R = \frac{1}{2}$

$P(A) = \frac{\pi\cdot(\frac{1}{2})^2}{1^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\mu_n}{n}$.

Отсюда получаем равенство для приближенного вычисления числа π –

$$\pi \cong 4 \cdot \frac{\mu_n}{n} = 4 \cdot \frac{\text{число точек в круге}}{\text{число точек в квадрате}}$$

Вычисление числа π на основе таблицы случайных чисел.

Приведем фрагмент таблицы случайных чисел используемых в заметке

0,54463; 0,15389; 0,85941; 0,61149; 0,5219; 41417; 0,28357; 0,17783;
0,40950; 0,82995; 0,96754; 0,3430; 06318; 0,6211157; 0,47534; 0,98614;
0,24856; 0,96887; 0,90801; 0,55165; 0,75884; 0,16777, 0,46230; 0,42902

Реализуем наш алгоритм (вычисление числа π) для различного количества выбираемых точек.

5 точек. Сформируем 5 точек на основе таблицы случайных чисел (каждая пара последовательных случайны чисел образуют координаты случайно выбранной точки):

A_1 (0,54463; 0,15389); A_2 (0,85941; 0,61149); A_3 (0,05219; 0,41417);
A_4 (0,28357; 0,17783); A_5 (0,40950; 0,82995).

Выясняем, какое кол-во точек из этих точек попадает в круг центром в точке $C(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (выполнение неравенства $|A_i, C| = \sqrt{(\frac{1}{2} - x_i)^2 + (\frac{1}{2} - y_i)^2} \le \frac{1}{2}$)

$|A_1, C| = \sqrt{(\frac{1}{2} - 0{,}54463)^2 + (\frac{1}{2} + 0{,}15389)^2}$=-0,04463+0,34611=0,348976;

$|A_2, C| = \sqrt{(\frac{1}{2} - 0{,}85941)^2 + (\frac{1}{2} - 0{,}61149)^2}$=-0,35941-0,11149=-0,376305;

$|A_3, C| = \sqrt{(\frac{1}{2} - 0{,}05219)^2 + (\frac{1}{2} - 0{,}41417)^2}$=0,455961;

$|A_4, C| = \sqrt{(\frac{1}{2} - 0{,}28357)^2 + (\frac{1}{2} - 0{,}17783)^2}$=0,388118;

$|A_5, C| = \sqrt{(\frac{1}{2} - 0{,}40950)^2 + (\frac{1}{2} - 0{,}82995)^2}$=0,342136;

Все 5 точек попадают в круг. В соответствии с формулой

$$\pi \cong 4 \cdot \frac{5}{5} = 4$$

50 точек. Сформируем 5 точек на основе случайных чисел таблицы 1 случайных чисел:

A_1 (0,54463; 0,15389); A_2 (0,85941; 0,61149); A_3 (0,05219; 0,41417);
A_4 (0,28357; 0,17783); A_5 (0,40950; 0,82995);
A_6(0,96754; 0,34357); A_7 (0,06318; 0,62111); A_8 (0,47534; 0,98614);
A_9 (0,24856; 0,96887); A_{10} (0,90801; 0,55165); A_{11} (0,75884; 0,16777);
A_{12} (0,46230; 0,42902); A_{13} (0,81007; 0,68088); A_{14} (0,20411; 0,58212);
A_{15} (0,70577; 0,94522); A_{16} (0,42626; 0,16051); A_{17} (0,08244; 0,59497);
A_{18} (0,97155; 0,98409); A_{19} (0,45476; 0,89300); A_{20} (0,50051; 0,31753);
A_{21} (0,79152; 0,44560); A_{22} (0,68328; 0,46939); A_{23} (0,83544; 0,91621);
A_{24} (0,91896; 0,55751); A_{25} (0,85156; 0,07521); A_{26} (0,22662; 0,85205);
A_{27} (0,40756; 0,69440); A_{28} (0,81619; 0,98326); A_{29} (0,34070; 0,00015);
A_{30} (0,84820; 0,64157); A_{31} (0,17676; 0,88040); A_{32} (0,37403; 0,52820);
A_{33} (0,09243; 0,75993); A_{34} (0,03648; 0,12479); A_{35} (0,21472; 0,77312);
A_{36} (0,12952; 0,37116); A_{37} (0,43877; 0,66892); A_{38} (0,00333; 0,01121);
A_{39} (0,67081; 0,13160); A_{40} (042866, ; 0,74358); A_{41} (0,86819; 0,33763);
A_{42} (0,27647; 0,04392); A_{43} (0,13428; 0,66162); A_{44} (0,84882; 0,69700);
A_{45} (0,69700; 0,95137); A_{46} (0,85178; 0,53829); A_{47} (0,38750; 0,83378);
A_{48} (0,38689; 0,86141); A_{49} (0,00881; 0,67126); A_{50} (0,62515; 0,87689).

Вычисления проведенные по аналогии со сделанными выше показывают, что в круг попадает 40 точек . В соответствии с формулой приведенной выше

$\pi \cong 4 \cdot \frac{\text{число точек попавших в круг}}{\text{число точек попавших в квадрат}} = \frac{40}{50} \cdot 4 = 3{,}2.$

Вычисление числа π на основе числа $5 \cdot e$

$5 \cdot e =$
13.59140914229522617680143735676331248878623546849979787483483813862038315176773797285691089262583213713733195966001529960908706798314521786450167147630297815369066164313971745381616914940376597625509505786917093965351077044574967442083754622380730334041132400084238705926871172721218553769538872496034775851380919303130665692291500376022466913280148803368556600354664354563721873523615348488604655070846418409512757554328731886055626194892212528476848385392724984983973432227452993965818444615049396552 (500 знаков после запятой)

Приведем фрагмент таблицы случайных чисел на основе числа $5 \cdot e$:

0,59140; 0,91422; 0,95226; 0,17680; 0,14373; 0,56763, 0,31248; 0,87862; 0,35468; 0,49979; …..

Выберем 50 точек в единичном квадрате по следующему алгоритму: из каждая пара последующих 5 знаков после запятой числа $5 * e$ образует координаты точки.

Приведем фрагмент вычислений :

$|A_{1,}C|=\sqrt{(\frac{1}{2} - 0{,}59140)^2 + (\frac{1}{2} - 0{,}91422)^2}$=0,424;

$|A_2, C|=\sqrt{(\frac{1}{2} - 0{,}95226)^2 + (\frac{1}{2} - 0{,}17680)^2}$=0,556;

…………………………………………………………….

Вычисления показывают, что 45 точек попадают в круг. В соответствии с формулой:

$$\pi \cong 4 \cdot \frac{\text{число точек в круге}}{\text{число точек попавших в квадрат}} = \frac{45}{50} \cdot 4 = 3{,}6.$$

Вычисление числа π на основе числа

$\sqrt{5}$= 2,2360679774 9978969640 9173668731 2762354406 1835961152 5724270897 2454105209 2563780489 9414414408 3787822749 6950817615 0773783504 2532677244 4707386358 6360121533 4527088667 7817319187 9165811276 6453226398 5658053576 1350417533 7850034233 9241406444 2086432539 0972525926 2722887629 9517402440 6816117759 0890949849 2371390729 7288984820 8864154268 9894099131 6935770197 4867888442 5089754132 9561831769 2149997742 4801530434 1150359576 6833251249 8815178139 4080005624 2085524354 2235556106 3063428202 3409333198 2933959746 3522712013 4174961420 (500 знаков после запятой)

Приведем фрагмент таблицы случайных чисел на основе числа $\sqrt{5}$

0,23606; 0,79774; 0,99789; 0,69640………………………………

Выберем 50 точек в единичном квадрате по следующему алгоритму: из каждая пара последующих 5 знаков после запятой числа $\sqrt{5}$ образует координаты точки.

Приведем фрагмент вычислений :

$(\mathrm{A}, \mathrm{C})_1$=$\sqrt{(\frac{1}{2} - 0{,}23606)^2 + (\frac{1}{2} - 0{,}79774)^2}$=0,398;

$(\mathrm{A}, \mathrm{C})_2$=$\sqrt{(\frac{1}{2} - 0{,}99789)^2 + (\frac{1}{2} - 0{,}69640)^2}$=0,535;

…………………………………………………………………..

Вычисления дают, что в круг попали 44 точки. В соответствии с формулой

$$\pi \cong 4 \cdot \frac{\text{число точек в круге}}{\text{число точек попавших в квадрат}} = \frac{44}{50} \cdot 4 = 3{,}52.$$

Вывод: Первое. Так как 3.2 < 3,52 < 3,6, то наилучшее приближение обеспечивает алгоритм на основе таблицы 1 случайных чисел, затем алгоритм на основе случайных чисел сгенерированных десятичной записью числа $\sqrt{5}$, затем алгоритм на основе случайных чисел сгенерированных десятичной записью числа $5 * \mathrm{e}$. Второе. Скорее всего закон распределения последовательности цифр в десятичной записи чисел 5е и $\sqrt{5}$ далек от равномерного. Другими словами говоря, рассмотренные числа $5 \cdot \mathrm{e}, \sqrt{5}$, «не случайны» в указанном смысле.

Список литературы

1. Ширяев А.Н. Вероятность. М., изд-во МЦНМО, 2007.