БИНОМИАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ОПЦИОНОВ

Булгаков Ю. В.
Красноярский государственный аграрный университет, Красноярск, Россия

The article describes the flowchart of real options, constructed from Simulink package blocks. The developed models are applicable for the index, foreign exchange and futures options.

Для оценки опциона европейского типа необходимо и достаточно иметь лишь параметры предполагаемого распределения цен актива на момент исполнения опциона и классическую формулу Блэка-Шоулза. Опционы американского типа в отличие от европейских опционов могут быть исполнены в любое время за срок действия. Поэтому для оценки американских, а, следовательно, и реальных опционов требуется принципиально иная методология. Известные модели, основанные на обратном динамическом программировании дерева цен, не связаны непосредственно со временем, то есть по существу тоже являются статическими [1, 2].

С целью повышения эффективности расчетов разработаны динамические модели в системе *Matlab/Simulink*. Модели основаны на формулах Кокса-Росса-Рубинштейна для цепных темпов роста u, снижения d цены актива и безрисковой доходности a за период, а также для вероятности p увеличения цены актива за период:

$$u = e^{s}, \; d = e^{-s}, \; a = e^{r-q}, \quad p = \frac{(a-d)}{(u-d)}.$$

Однако приведенные формулы отличаются от известных тем, что волатильность s, безрисковая ставка r и дивидендная ставка q относятся к одному шагу.

Значения волатильности s и доходностей r, q за один шаг (интервал) определяются по следующим формулам:

$$s = \frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{t}\,, \quad r = \frac{R}{n}t\,, \quad q = \frac{Q}{n}t\,,$$

где S, R, Q – соответствующие показатели в годовом измерении; n – заданное число интервалов; t – срок жизни опциона в долях года.

Принцип построения биномиального дерева заключается в формировании квадратной матрицы, которая заполнена только справа от главной диагонали, поэтому получается верхняя треугольная матрица. В левом верхнем углу матрицы на пересечении первого столбца и первой строки всегда единица. Первая строка, соответствующая верхней границе дерева цен, – возрастающая геометрическая прогрессия со знаменателем, равным коэффициенту роста цены актива $u=exp(s)$, где s – волатильность за один шаг. Главная диагональ, соответствующая нижней границе дерева цен, – убывающая геометрическая прогрессия со знаменателем, равным коэффициенту падения цены актива за один шаг $d=exp(-s)$, откуда следует, что $d=1/u$. Остальные элементы матрицы, соответствующие ветвям дерева цен, получаются умножением каждого элемента главной диагонали по строкам на базисный коэффициент роста слева направо до последнего столбца включительно.

Для генерации биномиального дерева разработаны две схемы: динамическая и матричная. Динамическая схема, с помощью которой получается совокупность траекторий, связана с источником времени *In1* и показана на рис 1.

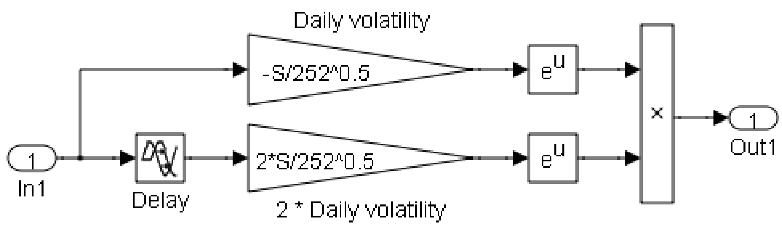

Рис.1. Динамический генератор биномиального дерева

В треугольных блоках-умножителях выполняется операция умножения волатильности на текущее время, а экспоненциальная функция дает соответствующие коэффициенты роста или падения. Блок *Delay* предназначен для задержки временного сигнала на один шаг модельного времени *[0:1: n],* в данном случае, на один день в пределах от нуля до *n,* где *n* – срок жизни опциона.

Если в предыдущей модели биномиальное дерево реализуется как совокупность траекторий, то в последней модели, показанной на рисунке 4, формируется квадратная матрица размерности *(n+1)×(n+1),* соответствующая биномиальной схеме, где *n* – число периодов до исполнения опциона. Схема матричного генератора показана на рисунке 2, где назначение блоков понятно по названиям за исключением, возможно, блока *Toeplitz,* – матрица Теплица или диагонально-постоянная матрица, названная в честь немецкого математика, в которой каждая нисходящая слева направо диагональ является постоянной, поскольку именно так расположены базисные коэффициенты роста в биномиальном дереве.

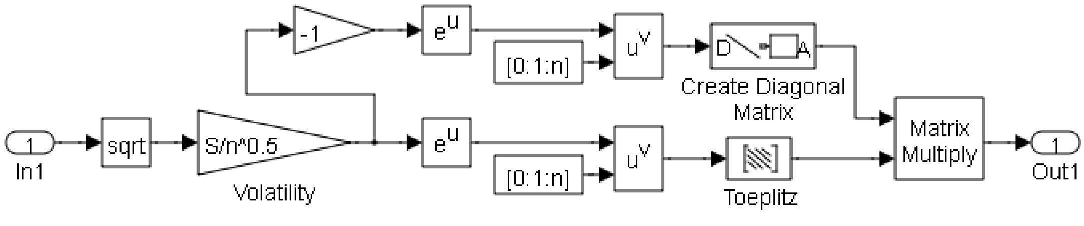

Рис.2. Матричный генератор биномиального дерева

Принцип расчета справедливой цены американских опционов в связи с возможностью досрочного исполнения заключается в оценке экономической целесообразности досрочного исполнения на основе поэтапного сравнения альтернативных решений от момента исполнения до момента заключения контракта. Принципиальная схема расчета для простейшей двухпериодной биномиальной модели показана на рисунке 3, где приведены все необходимые исходные данные, а время до исполнения опциона составляет один год.

В функциональных блоках *f(u)* записаны формулы вида *[u(1)×p + u(2)×(1-p)]×exp(-r)* для вычисления дисконтированных средневзвешенных значений *u(1)* и *u(2), u(2)* и *u(3)* вероятных цен предыдущего периода, где весами являются вероятности роста и падения цены актива, составляющие в сумме единицу. Полученные результаты, которые соответствуют стоимости продолжения владения опционом, связываются в вектор-столбец, выполняется сравнение этих значений с исходными данными предпоследнего периода, то есть со стоимостью исполнения, и выбираются максимальные значения. Далее процедура повторяется до нулевого момента времени, где с помощью блока *Select Rows* выделяется первая строка, содержащая цену опциона американского типа.

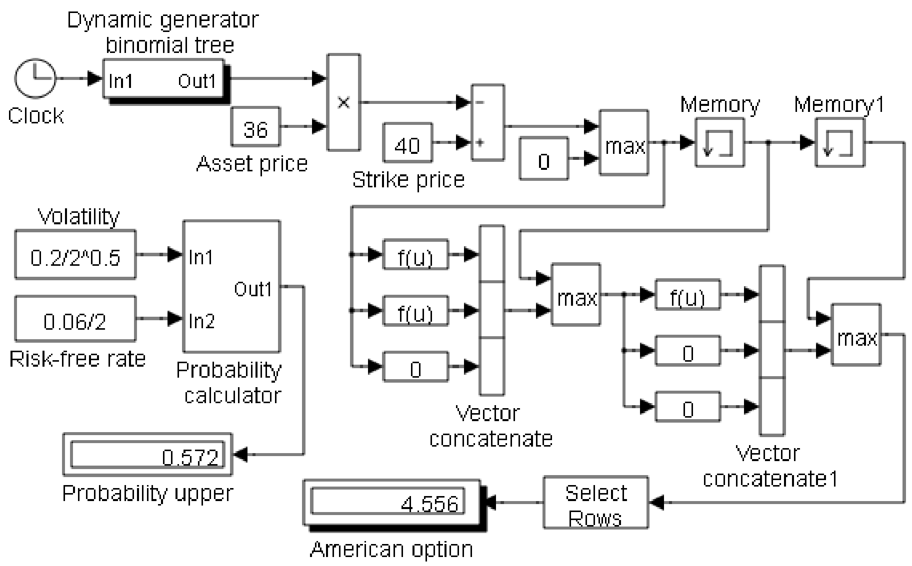

Рис.3. Принципиальная схема оценки американского опциона

Блоки памяти *Memory* по существу задерживают исходную информацию дерева цен каждый раз на один шаг. Время до исполнения опциона задается в долях года. При заданном времени моделирования, которое здесь составляет один год, блок *Max* вычисляет выборку положительных значений опционов на покупку или продажу в зависимости от положения знаков плюс и минус в предыдущем блоке.

На рисунке 4 приведена пятипериодная матричная модель для вычисления цен американских опционов, где показаны результаты расчетов по временным интервалам. Принцип расчета остается прежним, меняется только технология, которая по сравнению с динамической моделью несколько усложняется.

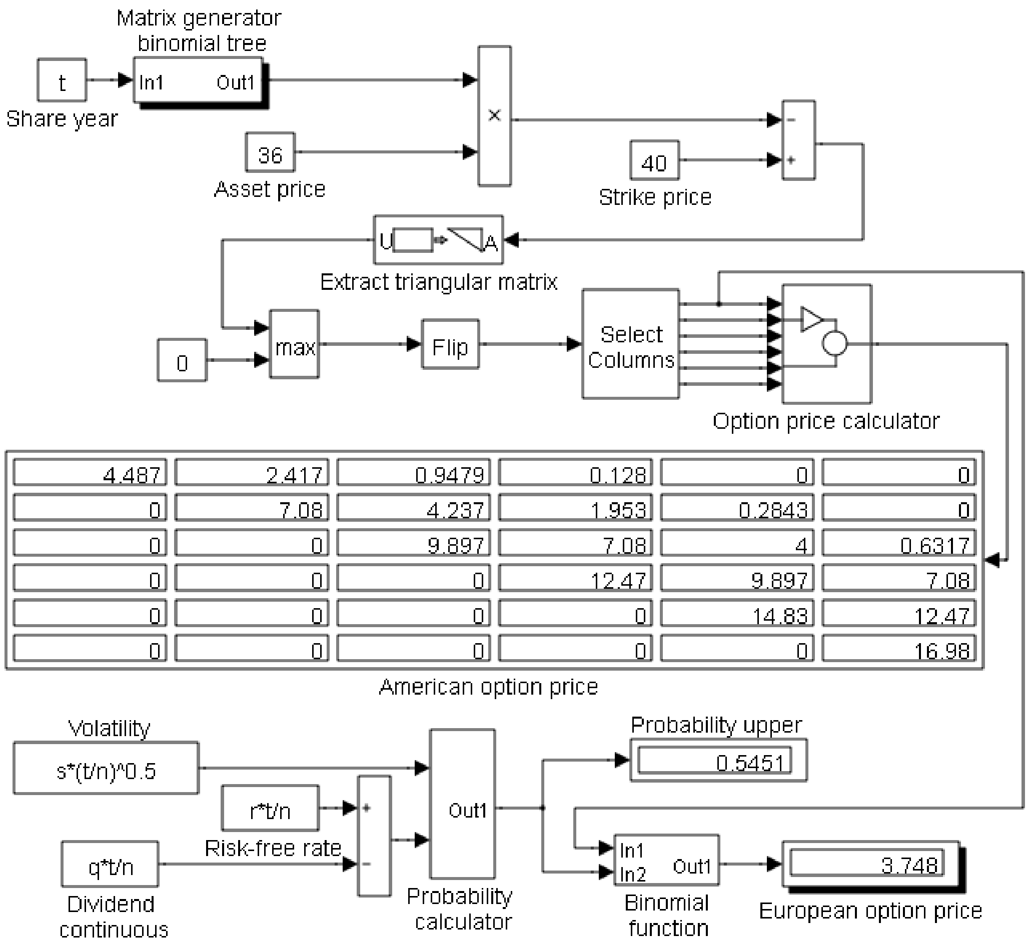

Рис.4. Матричная модель американского опциона

Здесь исходная матрица дерева цен с помощью блока *Flip* поворачивается на 180 градусов в горизонтальной плоскости, так что последний столбец становится первым и наоборот. В блоке *Select Columns* выделяются столбцы, начиная с первого, с которыми последовательно выполняются стандартные операции попарного весового усреднения, дисконтирования и сравнения для поиска максимума.

Для вычисления цены европейского опциона используется встроенная весовая функция биномиального распределения *binopdf ([0 : 1 : n],n,1 – p),* для которой входными величинами служат срок жизни опциона *n* и вероятность *p*, Следует отметить, что такая же функция биномиального распределения имеется и в приложении *Excel.*

Полученные значения соответствующих весов умножаются на значения вероятных цен на момент исполнения опциона, складываются, а затем дисконтируется к нулевому моменту времени по безрисковой ставке с помощью модуля *Binomial function.* Видно, что стоимость опциона равна *4,487*, а точное значение стоимости американского опциона на продажу, полученное биномиальным методом для *200* интервалов – *4.4858*.

Разработанные блочные динамические модели имеют преимущества в сравнении с известными моделями по критериям наблюдаемости и управляемости. Наблюдаемость в данном контексте трактуется, как возможность видеть на экране только то, что необходимо, причем на любом этапе моделирования. Управляемость подразумевает возможность интерактивного режима и целенаправленного влияния на работу модели с помощью управляющих параметров и переменных.

Литература

1. Халл Д. Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты. – М.: Вильямс, 2008.
2. Уотшем Т.Дж., Паррамоу К. Количественные методы в финансах. – М.: ЮНИТИ, 1999.